ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOLUME QUARANTESIMOPRIMO
1905-906

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1906

ELENCO

DEGLI

ACCADEMICI RESIDENTI, NAZIONALI NON RESIDENTI STRANIERI E CORRISPONDENTI

AL 19 NOVEMBRE 1905.

NB. — *La prima data è quella dell'elezione, la seconda quella del R. Decreto che approva l'elezione.*

PRESIDENTE

D'Ovidio (Enrico), Senatore del Regno, Dottore in Matematica, Professore ordinario di Algebra e Geometria analitica, incaricato di Analisi superiore e Preside della Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali nella R. Università di Torino, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Napoli e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, onorario della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, Socio dell'Accademia Pontaniana, delle Società matematiche di Parigi e Praga, Membro del Consiglio superiore della Pubblica Istruzione, ecc., Uffiz. ✻, Comm. ♔. — *Torino, Corso Oporto, 30.*
Eletto alla carica il 21 febbraio 1904 — 10 marzo 1904.

VICE-PRESIDENTE

Boselli (Paolo), Presidente della Giunta Direttiva del R. Museo Industriale Italiano, Dottore aggregato alla Facoltà di Giurisprudenza della R. Università di Genova, già Professore nella R. Università di Roma, Professore Onorario della R. Università di Bologna, Vice-Presidente della R. Deputazione di Storia Patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio Corrispondente dell'Accademia dei Georgofili, Presidente della Società di Storia Patria di Savona, Socio onorario della Società Ligure di Storia Patria, Socio onorario dell'Accademia di Massa, Socio della R. Accademia di Agricoltura, Corrispondente dell'Accademia Dafnica di Acireale, Presidente Onorario della Società di Storia Patria degli Abruzzi in Aquila, Membro del Consiglio e della Giunta degli archivi, Consigliere degli Ordini dei Ss. Maurizio e Lazzaro e della Corona d'Italia, Deputato al Parlamento nazionale, Presidente del Consiglio provinciale di Torino, Gr. Cord. ✻ e ♔, Gr. Cord. dell'Aquila Rossa di Prussia, dell'Ordine di Alberto di Sassonia, dell'Ord. di Bertoldo I di Zähringen (Baden), e dell'Ordine del Sole Levante del Giappone, Gr. Uffiz. O. di Leopoldo del Belgio, Uffiz. della Cor. di Pr., della L. d'O. di Francia, e C. O. della Concezione del Portogallo. — *Torino, Via Plana, 11.*
Eletto alla carica il 21 febbraio 1904 — 10 marzo 1904.

Tesoriere

Jadanza (Nicodemo), Dottore in Matematica, Professore di Geodesia teoretica nella R. Università di Torino e di Geometria pratica nella R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri, Socio dell'Accademia Pontaniana di Napoli, dell'Accademia Dafnica di Acireale e della Società degli Ingegneri Civili di Lisbona, Uff. ✠. — *Torino, Via Madama Cristina, 11.*
Rieletto alla carica il 17 aprile 1904 — 12 maggio 1904.

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Direttore

Salvadori (Conte Tommaso), Dottore in Medicina e Chirurgia, Vice-Direttore del Museo Zoologico della R. Università di Torino, Professore di Storia naturale nel R. Liceo Cavour di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, della Società Italiana di Scienze naturali, dell'Accademia Gioenia di Catania, Membro della Società Zoologica di Londra, dell'Accademia delle Scienze di Nuova York, della Società dei Naturalisti in Modena, della Società Reale delle Scienze di Liegi, della Reale Società delle Scienze naturali delle Indie Neerlandesi e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Membro effettivo della Società Imperiale dei Naturalisti di Mosca, Socio Straniero della *British Ornithological Union*, Socio Straniero onorario del *Nuttall Ornithological Club*, Socio Straniero dell'*American Ornithologist's Union*, e Membro onorario della Società Ornitologica di Vienna, Membro ordinario della Società Ornitologica tedesca, Uffiz. ✠, Cav. dell'O. di S. Giacomo del merito scientifico, letterario ed artistico (Portogallo). — *Torino, Via Principe Tommaso, 17.*
Rieletto alla carica il 29 maggio 1904 — 16 giugno 1904.

Segretario

Camerano (Lorenzo), Dottore aggregato alla Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali, Professore di Anatomia comparata e di Zoologia e Direttore dei Musei relativi nella R. Università di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Membro della Società Zoologica di Francia, Socio corrispondente del Museo Civico di Rovereto, della Società Scientifica del Cile, della Società Spagnuola di Storia naturale, Socio straniero della Società Zoologica di Londra, Socio onorario della Società scientifica del Messico, Comm. ✠. — *Torino, Museo Zoologico della R. Università, Palazzo Carignano.*
Eletto alla carica il 13 marzo 1904 — 7 aprile 1904.

ACCADEMICI RESIDENTI

Salvadori (Conte Tommaso), *predetto.*
29 Gennaio 1871 - 9 febbraio 1871. — Pensionato 21 marzo 1878.

D'Ovidio (Enrico), *predetto.*
29 Dicembre 1878 - 16 gennaio 1879. — Pensionato 28 novembre 1889.

Naccari (Andrea), Dottore in Matematica, Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di Torino, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania e dell'Accademia Pontaniana, Uffiz. ✠, ⚭. — *Torino, Via Sant'Anselmo, 6.*
5 Dicembre 1880 - 23 dicembre 1880. — Pensionato 8 giugno 1893.

Mosso (Angelo), Senatore del Regno, Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore di Fisiologia nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze), della R. Accademia di Medicina di Torino, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, L. L. D. dell'Università di Worcester, Socio onorario della R. Accademia medica Gioenia di Scienze naturali di Catania, della R. Accademia medica di Roma, dell'Accademia di Genova, Socio dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'*Academia Caesarea Leopoldino-Carolina Germanica Naturae Curiosorum*, Membro onorario della Società imperiale dei medici di Vienna, della Società Reale delle Scienze mediche di Bruxelles, della Società fisico-medica di Erlangen, Socio straordinario della R. Accademia di Scienze di Svezia, Socio corrispondente della Società Reale di Napoli, Socio corrispondente della Società di Biologia di Parigi, ecc. Socio onorario della *Boston Society of Natural History,* Corrispondente straniero dell'Accademia R. di Medicina del Belgio, Membro onorario dell'Accademia imperiale di medicina di Pietroburgo.
✠, Comm. ⚭. — *Torino, Via Madama Cristina, 34.*
11 Dicembre 1881 - 25 dicembre 1881. — Pensionato 17 agosto 1894.

Spezia (Giorgio), Ingegnere, Professore di Mineralogia e Direttore del Museo mineralogico della R. Università di Torino, ⚭. — *Torino, Via Accademia Albertina, 21.*
15 Giugno 1884 - 6 luglio 1884. — Pensionato 5 settembre 1895.

Camerano (Lorenzo), *predetto.*
10 Febbraio 1889 - 21 febbraio 1889. — Pensionato 8 ottobre 1898.

Segre (Corrado). Dottore in Matematica, Professore di Geometria superiore nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei e della Società Italiana delle Scienze (dei XL), Membro onorario della Società Filosofica di Cambridge, Socio straniero dell'Accademia delle Scienze del Belgio, Corrispondente della Società Fisico-Medica di Erlangen e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, ⚜. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele, 85.*
10 Gennaio 1889 - 21 febbraio 1889. — Pensionato 8 ottobre 1898.

Peano (Giuseppe). Dottore in Matematica, Professore di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino, Socio della " *Sociedad Cientifica* „ del Messico, Socio del Circolo Matematico di Palermo, ⚜, della Società matematica di Kasan, della Società filosofica di Ginevra, corrispondente della R. Accademia dei Lincei. — *Torino, Via Barbaroux, 4.*
25 Gennaio 1891 - 5 febbraio 1891. — Pensionato 22 giugno 1899.

Jadanza (Nicodemo), *predetto.*
3 Febbraio 1895 - 17 febbraio 1895. — Pensionato 17 ottobre 1902.

Foà (Pio), Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore di Anatomia Patologica nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Comm. ⚜. — *Torino, Corso Valentino, 40.*
3 Febbraio 1895 - 17 febbraio 1895. — Pensionato 9 novembre 1902.

Guareschi (Icilio), Dottore in Scienze naturali, Professore e Direttore dell'Istituto di Chimica Farmaceutica e Tossicologica nella R. Università di Torino, Direttore della Scuola di Farmacia, Socio della R. Accademia di Medicina di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio della R. Accademia dei Fisiocritici di Siena, Socio onorario della Società di Farmacia di Torino, Membro anziano del Consiglio Sanitario Provinciale, Cittadino Onorario di Crespellano (Bologna), Membro corrispondente dell'Accademia di Medicina di Parigi, Socio della *Deutsche Gesellschaft b. Geschichte d. Medizin und Naturwissenschaften*, Membro della Società Chimica di Berlino, ecc., Uff. ⚜, ✠. — *Torino, Corso Valentino, 11.*
12 Gennaio 1896 - 2 febbraio 1896. — Pensionato 28 maggio 1903.

Guidi (Camillo), Ingegnere, Professore ordinario di Statica grafica e scienza delle costruzioni e Direttore dell'annesso Laboratorio sperimentale nella R. Scuola di Applicazione per gl'Ingegneri in Torino, ⚜, ✻. — *Torino, Corso Valentino, 7.*
31 Maggio 1896 - 11 giugno 1896. — Pensionato 11 giugno 1903.

Fileti (Michele), Dottore in Chimica, Professore ordinario di Chimica generale, ⚜. — *Torino, Via Bidone, 36.*
31 Maggio 1896 - 11 giugno 1896. — Pensionato 10 marzo 1904.

Parona (Carlo Fabrizio), Dottore in Scienze naturali, Professore e Direttore del Museo di Geologia della R. Università di Torino, Socio residente della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente della

R. Accademia dei Lincei, del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Accademia delle scienze di Napoli, e Corrispondente dell'I. R. Istituto Geologico di Vienna, Membro del R. Comitato Geologico, ecc., Cav. — *Torino, Museo Geologico della R. Università, Palazzo Carignano.*
15 Gennaio 1899 - 22 gennaio 1899.

Mattirolo (Oreste), Dottore in Medicina e Chirurgia e Scienze naturali, Professore ordinario di Botanica e Direttore dell'Istituto botanico della R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio della R. Accademia di Medicina e della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, dell'Accademia delle Scienze del R. Istituto di Bologna, della Società Imperiale di Scienze naturali di Mosca, della Società Veneto-Trentina, ecc., — *Torino, Orto Botanico al Valentino della R. Università.*
10 Marzo 1901 - 16 marzo 1901.

Morera (Giacinto), Ingegnere, Dottore in Matematiche, Professore ordinario di Meccanica razionale, ed incaricato di Meccanica superiore nella R. Università di Torino, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Professore onorario della R. Università di Genova, — *Torino, Via della Rocca, 22.*
9 Febbraio 1902 - 23 febbraio 1902.

Grassi (Guido), Professore ordinario di Elettrotecnica e Direttore della scuola Galileo Ferraris nel R. Museo Industriale Italiano in Torino, Socio ordinario della R. Accademia di Scienze fisiche e matematiche di Napoli, dell'Accademia Pontaniana e del R. Istituto d'incoraggiamento di Napoli, Corrispondente della R. Accad. dei Lincei, Comm. — *Torino, Via Amedeo Avogadro, 9.*
9 Febbraio 1902 - 23 febbraio 1902.

Somigliana (nob. Carlo), Dottore in Matematiche, Professore ordinario di Fisica matematica nella R. Università di Torino, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei, e del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. — *Corso Vinzaglio, 10.*
5 Marzo 1905 - 27 aprile 1905.

Fusari (Romeo), Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore ordinario di Anatomia umana, descrittiva e topografica e Direttore dell' Istituto anatomico della R. Università di Torino, Socio dell'Accademia di Medicina di Torino, Corrispondente della R. Accademia dei Lincei, fondatore della Società medico-chirurgica di Pavia, onorario dell'Accademia delle Scienze mediche e naturali di Ferrara. — *Via Baretti, 45.*
5 Marzo 1905 - 27 aprile 1905.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Cannizzaro (Stanislao), Senatore del Regno, Professore di Chimica generale nella R. Università di Roma, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei e della Società Reale di Napoli, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Corrispondente dell'Istituto di Francia, dell'Accademia delle Scienze di Berlino, di Vienna e di Pietroburgo, Associato dell'Accademia Reale delle Scienze del Belgio, Socio straniero della R. Accademia delle Scienze di Baviera, della Società Reale di Londra, della Società Reale di Edimburgo e della Società letteraria e filosofica di Manchester, Socio onorario della Società chimica tedesca, di Londra e Americana, Comm. ✻, Gr. Cr. ⚜, ☼. — *Roma, Istituto chimico, Via Panisperna, 89 B.*
3 Luglio 1864 - 11 luglio 1864.

Schiaparelli (Giovanni), Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze. Socio del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, della R. Accademia dei Lincei, dell' Accademia Reale di Napoli e dell' Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Socio straniero dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze), delle Accademie di Monaco, di Vienna, di Berlino, di Pietroburgo, di Stoccolma, di Upsala, di Cracovia, della Società de' Naturalisti di Mosca, della Società Reale e della Società astronomica di Londra, delle Società filosofiche di Filadelfia e di Manchester, e di altre Società scientifiche nazionali e straniere, Gr. Cord. ⚜, Comm. ✻; ☼. — *Milano, Via Fate Bene Fratelli, 7.*
16 Gennaio 1870 - 30 gennaio 1870.

Siacci (Francesco), Senatore del Regno, Colonnello d'Artiglieria nella Riserva, Dottore in Filosofia, Professore onorario della R. Università di Torino, Professore ordinario di Meccanica razionale ed Incaricato della Meccanica superiore nella R. Università di Napoli, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, e dell'Accademia Pontaniana, Corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Uff. ✻, Comm. ⚜. — *Napoli, Corso Umberto I, 179.*
11 Giugno 1876 - 11 luglio 1876. — Pensionato 3 giugno 1884.

Volterra (Vito), Senatore del Regno, Dottore in Fisica, Dottore onorario in Matematiche della Università Fridericiana di Christiania e Dottore onorario in scienze della Università di Cambridge, Professore di Fisica matematica e incaricato di Meccanica celeste nella R. Università di Roma, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Accademico corrispondente della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Socio corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, Socio onorario dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania, Membro nazionale

della Società degli Spettroscopisti italiani, Socio corrispondente nella Sezione di Geometria dell'Accademia delle Scienze di Parigi, Membro onorario della Società di Scienze fisiche e naturali di Bordeaux, ☩. — *Roma, Via in Lucina, 17.*
3 Febbraio 1895 - 11 febbraio 1895.

Fergola (Emanuele), Senatore del Regno, Professore di Astronomia nella R. Università di Napoli, Socio ordinario residente della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, Membro della Società italiana dei XL, Socio della R. Accademia dei Lincei e dell'Accademia Pontaniana, Socio ordinario del R. Istituto d'incoraggiamento alle Scienze naturali, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto, Comm. ✱, Gr. Uffiz. ☩. — *Napoli, Regio Osservatorio di Capodimonte.*
12 Gennaio 1896 - 2 febbraio 1896.

Bianchi (Luigi), Professore di Geometria analitica nella R. Università di Pisa, Socio ordinario della R. Accademia dei Lincei e della Società Italiana delle Scienze, detta dei XL; Socio corrispondente dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere in Milano, ✱, ☩.
13 Febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Dini (Ulisse), Senatore del Regno, Professore di Analisi Superiore nella R. Università di Pisa, Direttore della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Socio della R. Accademia dei Lincei e della Società Italiana detta dei XL, Corrispondente della R. Società delle Scienze di Gottinga, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Membro straniero della *London mathematical Society*, Dottore onorario dell'Università di Christiania, Uff. ✱, Cav. ☩, ✠.
13 Febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Golgi (Camillo), Senatore del Regno, Membro del Consiglio superiore di Sanità, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei di Roma, Dottore in Scienze *ad honorem* dell'Università di Cambridge, Membro onorario dell'Università Imperiale di Charkoff, uno dei XL della Società italiana delle Scienze, Membro della Società per la Medicina interna di Berlino, Membro onorario della Imp. Accademia Medica di Pietroburgo, della Società di Psichiatria e Neurologia di Vienna, Socio corrispondente onorario della *Neurological Society* di Londra, Membro corrispondente della *Société de Biologie* di Parigi, Membro dell'*Academia Caesarea Leopoldino-Carolina*, Socio della R. Società delle Scienze di Gottinga e delle Società Fisico-mediche di Würzburg, di Erlangen, di Gand, Membro della Società Anatomica, Socio nazionale della R. Accademia delle Scienze di Bologna, Socio corrispondente dell'Accademia di Medicina di Torino, Socio onorario della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, Socio corrispondente dell'Accademia Medico-fisica Fiorentina, della R. Accademia delle Scienze mediche di Palermo, della Società Medico-chirurgica di Bologna, Socio onorario della R. Accademia Medica di Roma, Socio onorario della R. Accademia Medico-chirurgica di

Genova, Socio corrispondente dell'Accademia Fisiocritica di Siena, dell'Accademia Medico-chirurgica di Perugia, della *Societas medicorum Svecana* di Stoccolma, Membro onorario dell'*American Neurological Association* di New-York, Socio onorario della *Royal Microscopical Society* di Londra, Membro corrispondente della R. Accademia di Medicina del Belgio, Membro onorario della Società freniatrica italiana e dell'Associazione Medico-Lombarda, Socio onorario del Comizio Agrario di Pavia, Professore ordinario di Patologia generale e di Istologia nella R. Università di Pavia, Membro effettivo della Società Italiana d'Igiene e dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Membro onorario dell'Università di Dublino, Socio corrispondente della Società medica di Batavia, Membro straniero dell'Accademia di Medicina di Parigi, Membro onorario dell'Imperiale Società degli alienisti e neurologi di Kazan, Socio emerito della R. Accademia medico-chirurgica di Napoli, Socio corrispondente dell'Imp. Accademia delle Scienze di Vienna, Socio onorario della R. Società dei Medici in Vienna. Cav. ✠, ✠, Comm. ✻.
13 Febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Lorenzoni (Giuseppe), Dottore negli Studi d'Ingegnere civile ed Architetto, Professore di Astronomia e della R. Università e Direttore dell'Osservatorio astronomico di Padova, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, uno dei XL della Società italiana delle Scienze, Socio effettivo del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, Socio corrispondente della R. Accademia di Scienze ed arti di Modena, Membro della Società imperiale dei naturalisti di Mosca, ✻, Comm. ✠. — *Padova, Osservatorio astronomico.*
5 Marzo 1905 - 27 aprile 1905.

ACCADEMICI STRANIERI

Kelvin (Guglielmo Thomson, Lord), Professore nell'Università di Glasgow. — 31 Dicembre 1882 - 1° febbraio 1883.

Klein (Felice), Professore nell'Università di Gottinga. — 10 Gennaio 1897 - 24 gennaio 1897.

Haeckel (Ernesto), Professore nella Università di Jena. — 13 Febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Berthelot (Marcellino), Professore nel Collegio di Francia, Membro dell'Istituto, Parigi. — 13 Febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Darboux (Giovanni Gastone), Membro dell'Istituto di Francia (Parigi). — 14 Giugno 1903 - 28 giugno 1903.

Poincaré (Giulio Enrico), Membro dell'Istituto di Francia (Parigi). — 14 Giugno 1903 - 28 giugno 1903.

Moissan (Enrico), Membro dell'Istituto di Francia (Parigi). — 14 Giugno 1903 - 28 giugno 1903.

Helmert (Federico Roberto), Direttore del R. Istituto Geodetico di Prussia, Potsdam. — 14 Giugno 1903 - 28 giugno 1903.

Hoff (Giacomo Enrico vant 't), Professore nella Università di Berlino. — 5 Marzo 1905 - 27 aprile 1905.

CORRISPONDENTI

Sezione di Matematiche pure.

Tardy (Placido), Professore emerito della R. Università di Genova (Firenze). — 16 Luglio 1864.

Cantor (Maurizio), Professore nell'Università di Heidelberg. — 25 Giugno 1876.

Schwarz (Ermanno A.), Professore nella Università di Berlino. — 19 Dicembre 1880.

Bertini (Eugenio), Professore nella Regia Università di Pisa. — 9 Marzo 1890.

Noether (Massimiliano), Professore nell' Università di Erlangen. — 3 Dicembre 1893.

Jordan (Camillo), Professore nel Collegio di Francia, Membro dell'Istituto (Parigi). — 12 Gennaio 1896.

Mittag-Leffler (Gustavo), Professore a Stoccolma. — 12 Gennaio 1896.

Picard (Emilio), Professore alla Sorbonne, Membro dell'Istituto di Francia, Parigi. — 10 Gennaio 1897.

Cesàro (Ernesto), Professore nella R. Università di Napoli. — 17 Aprile 1898.

Castelnuovo (Guido), Prof. nella R. Università di Roma. — 17 Aprile 1898.

Veronese (Giuseppe), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Padova. — 17 Aprile 1898.

Zeuthen (Gerolamo Giorgio), Professore nella Università di Copenhagen. — 14 Giugno 1903.

Hilbert (Davide), Prof. nell'Università di Göttingen. — 14 Giugno 1903.

Mayer (Adolfo), Professore nell'Università di Leipzig. — 14 Giugno 1903.

Sezione di Matematiche applicate, Astronomia e scienza dell'ingegnere civile e militare.

Zeuner (Gustavo), Professore nel Politecnico di Dresda. — 3 Dicembre 1893.

Ewing (Giovanni Alfredo), Professore nell' Università di Cambridge. — 27 Maggio 1894.

Celoria (Giovanni), Astronomo all'Osservatorio di Milano. — 12 Gennaio 1896.

Favero (Giambattista), Professore nella R. Scuola di Applicazione degli Ingegneri in Roma. — 10 Gennaio 1897.

Pizzetti (Paolo), Professore nella R. Università di Pisa. — 14 Giugno 1903.

Newcomb (Simone), Professore di Matematica e di Astronomia nell'Università di Baltimora. — 5 Marzo 1905.

Ritter (Guglielmo), Professore di Statica grafica e di costruzioni nella Scuola Politecnica di Zurigo.

Sezione di Fisica generale e sperimentale.

Blaserna (Pietro), Senatore del Regno, Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di Roma. — 30 Novembre 1873.

Kohlrausch (Federico), Presidente dell'Istituto Fisico-Tecnico in Marburg (Bezirk Cassel). — 2 Gennaio 1881.

Roiti (Antonio). Professore nell'Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze. — 12 Marzo 1882.

Righi (Augusto), Senatore del Regno, Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di Bologna. — 14 Dicembre 1884.

Lippmann (Gabriele), dell'Istituto di Francia (Parigi). — 15 Maggio 1892.

Rayleigh (Lord Giovanni Guglielmo), Professore nella *Royal Institution* di Londra. — 3 Febbraio 1895.

Thomson (Giuseppe Giovanni), Professore nell'Università di Cambridge. — 12 Gennaio 1896.

Boltzmann (Luigi), Professore nell'Università di Vienna. — 12 Gennaio 1896.

Mascart (Eleuterio), Professore nel Collegio di Francia, Membro dell'Istituto (Parigi). — 10 Gennaio 1897.

Pacinotti (Antonio), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Pisa. — 17 Aprile 1898.

Langley (Samuel Pierpont), Segretario della *Smithsonian Institution* di Washington. — 11 Febbraio 1900.

Röntgen (Guglielmo Corrado), Professore nell'Università di München. — 14 Giugno 1903.

Lorentz (Enrico), Professore nell'Università di Leiden. — 14 Giugno 1903.

Sezione di Chimica generale ed applicata.

Paternò (Emanuele), Senatore del Regno, Professore di Chimica applicata nella R. Università di Roma. — 2 Gennaio 1881.

Körner (Guglielmo), Professore di Chimica organica nella R. Scuola superiore d'Agricoltura in Milano. — 2 Gennaio 1881.

Baeyer (Adolfo von), Professore nell'Università di Monaco (Baviera). — 25 Gennaio 1885.

Thomsen (Giuseppe), Professore nell'Università di Copenhagen. — 25 Gennaio 1885.

Lieben (Adolfo), Professore nell'Università di Vienna. — 15 Maggio 1892.

Mendelejeff (Demetrio), Professore nell'Università di Pietroburgo. — 3 Dicembre 1893.

Fischer (Emilio), Professore nell'Università di Berlino. — 24 Gennaio 1897.

Ramsay (Guglielmo), Professore nell'Università di Londra. — 24 Gennaio 1897.

Schiff (Ugo), Professore nel R. Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze. — 28 Gennaio 1900.

Dewar (Giacomo), Professore nell'Università di Cambridge. — 14 Giugno 1903.

Ciamician (Giacomo), Professore nell'Università di Bologna. — 14 Giugno 1903.

Ostwald (Guglielmo), Professore di Chimica nell'Università di Lipsia. — 5 Marzo 1905.

Arrhenius (Ivante Augusto), Direttore e Professore dell'Istituto Fisico dell'Università di Stoccolma. — 5 Marzo 1905.

Nernst (Walter), Professore di Chimica fisica nell'Università di Gottinga. — 5 Marzo 1905.

Sezione di Mineralogia, Geologia e Paleontologia.

Strüver (Giovanni), Professore di Mineralogia nella R. Università di Roma. — 30 Novembre 1873.
Rosenbusch (Enrico), Professore nell'Univ. di Heidelberg. — 25 Giugno 1876.
Zirkel (Ferdinando), Professore nell'Università di Lipsia. — 16 Gennaio 1881.
Capellini (Giovanni), Professore nella R. Univ. di Bologna. — 12 Marzo 1882.
Tschermak (Gustavo), Professore nell'Università di Vienna. — 8 Febbraio 1885.
Klein (Carlo), Professore nell'Università di Berlino. — 15 Marzo 1892.
Geikie (Arcibaldo), Direttore del Museo di Geologia pratica (Londra). — 3 Dicembre 1893.
Groth (Paolo Enrico), Professore nell'Università di Monaco. — 13 Febbraio 1898.
Taramelli (Torquato), Professore nella R. Univ. di Pavia. — 28 Gennaio 1900.
Liebisch (Teodoro), Professore nell'Università di Gottinga. — 28 Gennaio 1900.
Bassani (Francesco), Professore nella R. Univ. di Napoli. — 14 Giugno 1903.
Issel (Arturo), Professore nella R. Università di Genova. — 14 Giugno 1903.
Levy (Michele), dell'Istituto di Francia, Professore di Mineralogia all'Università di Parigi. — 5 Marzo 1905.
Goldschmidt (Viktor), Professore di Mineralogia nell'Università di Heidelberga. — 5 Marzo 1905.
Suess (Francesco Edoardo), Professore di Geologia nell'Imperiale Università di Vienna. — 5 Marzo 1905.
Haug (Emilio), Prof. di Geologia nell'Università di Parigi. — 5 marzo 1905.

Sezione di Botanica e Fisiologia vegetale.

Ardissone (Francesco), Professore di Botanica nella R. Scuola superiore di Agricoltura in Milano. — 16 Gennaio 1881.
Saccardo (Andrea), Professore di Botanica nella R. Università di Padova. — 8 Febbraio 1885.
Hooker (Giuseppe **Dalton**), Direttore del Giardino Reale di Kew (Londra). — 8 Febbraio 1885.
Pirotta (Romualdo), Professore nella R. Univ. di Roma. — 15 Maggio 1892.
Strasburger (Edoardo), Professore nell'Univ. di Bonn. — 3 Dicembre 1893.
Goebel (Carlo), Professore nell'Università di Monaco. — 13 Febbraio 1898.
Penzig (Ottone), Professore nell'Università di Genova. — 13 Febbraio 1898.
Schwendener (Simone), Professore nell'Univ. di Berlino. — 13 Febbraio 1898.
Wiesner (Giulio), Professore nella I. R. Univ. di Vienna. — 14 Giugno 1903.
Klebs (Giorgio), Professore nell'Università di Halle. — 14 Giugno 1903.
Belli (Saverio), Professore nella R. Università di Cagliari. — 14 Giugno 1903.

Sezione di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparata.

Sclater (Filippo **Lutley**), Segretario della Società Zoologica di Londra. — 25 Gennaio 1885.
Fatio (Vittore), Dottore (Ginevra). — 25 Gennaio 1885.
Locard (Arnould), dell'Accademia delle Scienze di Lione. — 23 Giugno 1889.

Chauveau (G. B. Augusto), Membro dell'Istituto di Francia, Professore alla Scuola di Medicina di Parigi. — 1° Dicembre 1889.

Foster (Michele), Professore nell'Università di Cambridge. — 1° Dicembre 1889.

Waldeyer (Guglielmo), Professore nell'Univ. di Berlino. — 1° Dicembre 1889.

Guenther (Alberto), Londra. — 3 Dicembre 1893.

Roux (Guglielmo), Professore nell'Università di Halle. — 13 Febbraio 1898.

Minot (Carlo Sedgwick), Professore nell' " Harvard Medical School „ di Boston Mass. (S. U. A.). — 28 Gennaio 1900.

Boulenger (Giorgio Alberto), Assistente al Museo di Storia Naturale di Londra. — 28 Gennaio 1900.

Marchand (Felice), Professore nell'Università di Leipzig. — 14 Giugno 1903.

Weismann (Augusto), Professore di Zoologia nell'Università di Freiburg i. Br. (Baden). — 5 Marzo 1905.

Lankester (Edwin Ray), Direttore del *British Museum of Natural History*. — 5 Marzo 1905.

Engelmann (Teodoro Guglielmo), Professore di Fisiologia nell'Università di Berlino. — 5 Marzo 1905.

Dastre (A.), Profess. di Fisiologia nell'Università di Parigi. — 5 Marzo 1905.

CLASSE DI SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Direttore.

Ferrero (Ermanno), Dottore in Giurisprudenza, Dottore aggregato alla Facoltà di Lettere e Filosofia e Professore di Archeologia nella R. Università di Torino, Professore di Storia dell'arte militare nell'Accademia Militare, R. Ispettore per gli scavi e le scoperte di antichità nel Circondario di Torino, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Presidente della Società di Archeologia e Belle Arti per la Provincia di Torino, Socio corrispondente straniero onorario della Società Nazionale degli Antiquarii della Francia, Socio straniero della Società francese di Archeologia, Socio corrispondente della R. Deputazione di Storia patria per le Provincie di Romagna e dell'Imp. Instituto Archeologico Germanico, fregiato della Medaglia del merito civile di 1ª cl. della Repubblica di S. Marino, Ufficiale dell'Istruzione Pubblica della Repubblica Francese, ✻, ⚭. — *Torino, Via S. Quintino, 19.*

Rieletto alla carica il 20 marzo 1904 - 21 aprile 1904.

Segretario.

Renier (Rodolfo). Dottore in Lettere ed in Filosofia. Professore di Storia comparata delle Letterature neo-latine nella R. Università di Torino; Socio attivo della R. Commissione dei testi di lingua; Socio non residente dell'I. R. Accademia degli Agiati di Rovereto; Socio corrispondente della R. Deputazione veneta di Storia patria, di quella per le Marche, di quella per l'Umbria, di quella per l'Emilia e di quella per le Antiche Provincie e la Lombardia, della Società storica abruzzese e della Commissione di Storia patria e di Arti belle della Mirandola, della R. Accademia Virgiliana di Mantova, dell'Accademia di Verona, della R. Accademia di Padova, dell'Ateneo veneto e di quello di Brescia; Membro della Società storica lombarda e della Società Dantesca italiana; Socio onorario dell'Accademia Etrusca di Cortona, della R. Accademia di scienze e lettere di Palermo, dell'Accademia Cosentina e dell'Accademia Dafnica di Acireale, Uffiz. ✠, Comm. ✠. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele, 90.*

Rieletto alla carica il 21 febbraio 1904 - 10 marzo 1904.

ACCADEMICI RESIDENTI

Rossi (Francesco). Dottore in Filosofia. Professore d'Egittologia nella R. Università di Torino, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei in Roma, ✠. — *Torino, Via Gioberti, 30.*

10 Dicembre 1876 - 28 dicembre 1876. — Pensionato 1° agosto 1884.

Manno (Barone D. Antonio), Membro e Segretario della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Membro del Consiglio degli Archivi e dell'Istituto storico italiano, Commissario di S. M. presso la Consulta araldica, Dottore *honoris causa* della R. Università di Tübingen, Gr. Uffiz. ✠ e ✠, Cav. d'on. e devoz. del S. M. O. di Malta. — *Torino, Via Ospedale, 19.*

17 Giugno 1877 - 11 luglio 1877. — Pensionato 28 febbraio 1886.

Ferrero (Ermanno), *predetto.*

18 Maggio 1879 - 5 giugno 1879. — Pensionato 27 gennaio 1890.

Carle (Giuseppe), Senatore del Regno, Dottore aggregato alla Facoltà di Giurisprudenza e Professore di Filosofia del Diritto nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Uff. ✠, Comm. ✠. — *Torino, Piazza Statuto, 15.*

7 Dicembre 1879 - 1° gennaio 1880. — Pensionato 4 agosto 1892.

Graf (Arturo), Professore di Letteratura italiana nella R. Università di Torino, Membro della Società Romana di Storia patria, Socio onorario della R. Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo, Socio corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, dell'Ateneo di Brescia, ecc., Uffiz. ✠ e ✠. — *Torino, Via Bricherasio, 11.*

15 Gennaio 1888 - 2 febbraio 1888. — Pensionato 20 maggio 1897.

Boselli (Paolo), *predetto.*
15 Gennaio 1888 - 2 febbraio 1888. — Pensionato 13 ottobre 1897.

Cipolla (Conte Carlo), Dottore in Filosofia, Professore di Storia moderna nella R. Università di Torino, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio effettivo della R. Deputazione Veneta di Storia patria, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente dell'Accademia delle Scienze di Monaco (Baviera), e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Comm. ✠. — *Torino, Via Sacchi, 4.*
15 Febbraio 1891 - 15 marzo 1891. — Pensionato 4 marzo 1900.

Brusa (Emilio), Dottore in Leggi, Professore di Diritto e Procedura Penale nella R. Università di Torino, Membro della Commissione per la Statistica giudiziaria e della Commissione per la riforma del Codice di procedura penale, Socio corrispondente dell'Accademia di Legislazione di Tolosa (Francia), ed effettivo dell'Istituto di Diritto internazionale, Socio onorario della Società dei Giuristi Svizzeri e Corrispondente della R. Accademia di Giurisprudenza e Legislazione di Madrid, di quella di Barcellona, della Società Generale delle Prigioni di Francia, di quella di Spagna, della R. Accademia Peloritana, della R. Accademia di Scienze Morali e Politiche di Napoli, del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e di altre, Comm. ✠ e dell'Ordine di S. Stanislao di Russia, *Officier d'Académie* della Repubblica Francese, Uff. ✱. — *Torino, Corso Vinzaglio, 22.*
13 Gennaio 1895 - 3 febbraio 1895. — Pensionato 18 aprile 1901.

Allievo (Giuseppe), Dottore aggregato in Filosofia, Professore di Pedagogia e Antropologia nella R. Università di Torino, Socio onorario della R. Accademia delle Scienze di Palermo, dell'Accademia di S. Anselmo di Aosta, dell'Accademia Dafnica di Acireale, della Regia Imperiale Accademia degli Agiati di Rovereto, dell'Arcadia, dell'Accademia degli Zelanti di Acireale e dell'Accademia cattolica panormitana, Gr. Uff. ✱, Comm. ✠. — *Torino, Piazza Statuto, 18.*
13 Gennaio 1895 - 3 febbraio 1895. — Pensionato 20 giugno 1901.

Carutti di Cantogno (Barone Domenico), Senatore del Regno, Bibliotecario di S. M. il Re d'Italia, Presidente della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le Antiche Provincie e Lombardia, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Membro dell'Istituto Storico Italiano, Accademico corrispondente della Crusca, Socio Straniero della R. Accademia delle Scienze Neerlandese, e della Savoia, Socio corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Monaco in Baviera, ecc. ecc., Gr. Cord. ✠, Gr. Uffiz. ✱ e Cav. e Cons. ✠, Gr. Cord. dell'O. del Leone Neerlandese e dell'O. d'Is. la Catt. di Spagna, ecc. — *Torino, Via della Zecca, 7.*
4 Giugno 1857 - 12 giugno 1857.

Renier (Rodolfo), *predetto.*
8 Gennaio 1899 - 22 gennaio 1899.

Pizzi (Nobile Italo), Dottore in Lettere, Professore nel Persiano e Sanscrito nella R. Università di Torino, Socio corrispondente della Società Colombaria di Firenze, Dottore onorario dell'Università di Lovanio, Socio corrispondente dell'Ateneo Veneto, dell'Accademia Petrarchesca di Arezzo, dell'Accademia Dafnica di Acireale, dell'Accademia dell'Arcadia di Roma, ✠, ☙. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele, 16.*
8 Gennaio 1899 - 22 gennaio 1899.

Chironi (Dott. Giampietro), Professore ordinario di Diritto Civile nella R. Università di Torino, Dottore aggregato della Facoltà di Giurisprudenza nella R. Università di Cagliari, Socio corrispondente dell'Accademia di Legislazione di Tolosa (Francia), dell'Associazione internazionale di Berlino per lo studio del Diritto comparato, dell'Accademia Americana di scienze sociali e politiche, Rettore della R. Università di Torino, Comm. ☙. — *Torino, Via Bonafous, 7.*
20 Maggio 1900 - 31 maggio 1900.

Savio (Sacerdote Fedele). Professore, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio della Società Storica Lombarda e della Società Siciliana per la Storia patria. — *Torino, Via Arcivescovado, 9.*
20 Maggio 1900 - 31 maggio 1900.

De Sanctis (Gaetano), Dottore in Lettere. Professore di Storia antica nella R. Università di Torino. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele, 44.*
21 Giugno 1903 - 8 luglio 1903.

Ruffini (Francesco), Dottore in Leggi, Membro corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Professore della Storia del diritto italiano. — *Torino, Via Principe Amedeo, 22.*
21 Giugno 1903 - 8 luglio 1903.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Canonico (Tancredi), Senatore del Regno, Professore emerito, Primo Presidente della Corte di Cassazione a riposo, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Socio della R. Accad. delle Scienze del Belgio, di quella di Palermo, della Società Generale delle Carceri di Parigi, Consigliere dell'Ordine dei Ss. Maurizio e Lazzaro, della Corona d'Italia e dell'Ordine del merito civile di Savoia, Gran Croce ✠ e ☙, Cav. ☼, Comm. dell'Ord. di Carlo III di Spagna, Gr. Uffiz. dell'Ord. di Sant'Olaf di Norvegia, Gr. Cord. dell'O. di S. Stanislao di Russia. — *Firenze, Via Lamarmora, 12 bis.*
29 Giugno 1873 - 19 luglio 1873.

Villari (Pasquale). Senatore del Regno, Presidente dell'Istituto Storico di Roma, Professore di Storia moderna e Presidente della Sezione di Filosofia e Lettere nell'Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze, Socio residente della R. Accademia della Crusca, Presidente della R. Accademia dei Lincei, Socio nazionale della R. Ac-

cademia di Napoli, della R. Accademia dei Georgofili, della Pontaniana di Napoli. Presidente della R. Deputazione di Storia Patria per la Toscana, Socio di quella per le provincie di Romagna. Socio Straordinario del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Accademia di Baviera. Socio Straniero dell'Accademia di Berlino, dell'Accademia di Scienze di Gottinga, della R. Accademia Ungherese. Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Scienze morali e politiche). Dott. on. in Legge della Università di Edimburgo, di Halle. Dott. on. in Filosofia dell'Università di Budapest. Professore emerito della R. Univers. di Pisa. Gr. Uffiz. ✠ e Gr. Cord. ♔. Cav. ✿. Cav. del Merito di Prussia, ecc.

16 Marzo 1890 - 30 marzo 1890.

Comparetti (Domenico), Senatore del Regno, Professore emerito dell'Università di Pisa e dell'Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia delle Scienze di Napoli, Socio corrispondente dell'Accademia della Crusca, del R. Istituto Lombardo e del R. Istituto Veneto, Membro della Società Reale pei testi di lingua, Socio straniero dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere), e corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Monaco, di Vienna, di Copenhagen. Uff. ✠. Comm. ♔. Cav. ✿. — *Firenze, Via Lamarmora, 20.*

20 Marzo 1892 - 26 marzo 1892.

D'Ancona (Alessandro), Senatore del Regno, già Professore di Letteratura italiana nella R. Università e già Direttore della Scuola normale superiore in Pisa. Membro della Deputazione di Storia patria per la Toscana. Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei e di quella di Torino, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Académie des Inscriptions et Belles Lettres), della R. Accademia di Copenhagen, dell'Accademia della Crusca, del R. Istit. Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto, della R. Accademia di Archeologia, Lettere e Belle Arti di Napoli e della R. Accademia di Lucca. Cav. della Legione d'Onore. Cav. ✿. Gr. Uff. ✠, Comm. ♔.

20 Febbraio 1898 - 3 marzo 1898.

Ascoli (Graziadio), Senatore del Regno, Insignito della cittadinanza milanese. Socio nazionale della R. Accad. dei Lincei, della Società Reale di Napoli e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Membro straniero dell'Istituto di Francia e della Società Reale di Scienze e Lettere in Gotemburgo. Accademico della Crusca. Membro d'onore dell'Accademia delle Scienze di Vienna. Membro corrispondente delle Accademie delle Scienze di Belgrado, Berlino, Budapest, Copenaga, Pietroburgo, della Società orientale americana, degli Atenei di Venezia e Brescia, dell'Accademia di Udine, dell'I. R. Società Agraria di Gorizia. Socio onorario delle Accademie delle Scienze d'Irlanda e di Rumania, della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, della Minerva di Trieste, della Società asiatica italiana, della R. Accademia di Belle Arti e del Circolo Filologico di Milano, della Lega nazionale per l'unità di cultura tra i

Rumeni e dell'Associazione Americana per le lingue moderne; Dottore in filosofia per diploma d'onore dell'Università di Wirzburgo. Professore emerito di Storia comparata delle lingue classiche e neolatine nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano; Cav. dell'Ord. Civile di Savoia. Gr. Cord. ♔. Comm. della Legion d'Onore, ecc. — *Milano, Via Conservatorio, 28.*
20 Febbraio 1898 - 3 marzo 1898.

Nigra (Conte Costantino). Senatore del Regno. Dottore in Leggi, Socio della R. Accademia dei Lincei, Membro onorario del R. Istituto Lombardo e del R. Istituto Veneto di Scienze e Lettere. Socio della R. Accademia d'Irlanda, ed onorario dell'Imperiale Accademia di Scienze e Lettere di Vienna, Dottore delle Università di Edimburgo e di Cracovia, ecc., Membro del Tribunale arbitrale internazionale dell'Aja. C. O. S. SS. N., Gr. Cr. ✠, ♔. — *Roma, Trinità dei Monti, 18.*
29 Marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Scialoja (Vittorio), Senatore del Regno, Dottore in Leggi, Professore ordinario di Diritto romano nella R. Università di Roma, Professore onorario della Università di Camerino, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei e della R. Accademia di Napoli, Socio onorario della R. Accademia di Palermo, ecc. Comm. ✠ e ♔. — *Roma, Piazza Grazioli, 5.*
29 Marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Rajna (Pio), Dottore in Lettere, Professore ordinario di lingue e letterature neo-latine nel R. Istituto di Studi superiori di Firenze, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei, del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, della Società Reale di Napoli, della R. Accademia della Crusca, della R. Accademia di Padova, dell'Accademia R. Lucchese e della Società Reale di Scienze e Lettere di Göteborg. Uff. ✠, ♔. — *Firenze, Piazza d'Azeglio, 13.*
29 Marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Kerbaker (Michele), Dottore in lettere, Professore di Storia comparata delle lingue classiche e incaricato di Sanscrito nella R Università di Napoli, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei. Socio residente della Società Reale di Napoli, della R. Accademia Pontaniana, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Comm. ✠ e ♔.
26 Marzo 1905 - 27 aprile 1905.

ACCADEMICI STRANIERI

Meyer (Paolo), Professore nel Collegio di Francia, Direttore dell'*École des Chartes* (Parigi). — 4 Febbraio 1883 - 15 febbraio 1883.

Tobler (Adolfo), Professore nell'Università di Berlino. — 3 Maggio 1891 - 26 maggio 1891.

Maspero (Gastone), Professore nel Collegio di Francia (Parigi). — 26 Febbraio 1893 - 16 marzo 1893.

Brugmann (Carlo), Professore nell'Università di Lipsia. — 31 Gennaio 1897 - 14 febbraio 1897.

Bréal (Michele Giulio Alfredo), Membro dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere) (Parigi). — 29 Marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Wundt (Guglielmo), Professore nell'Università di Lipsia. — 29 Marzo 1903 - 9 aprile 1903.

CORRISPONDENTI

Sezione di Scienze Filosofiche.

Bonatelli (Francesco), Professore nella R. Università di Padova. — 15 Febbraio 1882.

Pinloche (Augusto), Prof. nel Liceo Carlomagno di Parigi. — 15 Marzo 1896.

Tocco (Felice), Professore nel R. Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento di Firenze. — 15 Marzo 1896.

Cantoni (Carlo), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Pavia. — 15 Marzo 1896.

Chiappelli (Alessandro), Prof. nella R. Università di Napoli. — 15 Marzo 1896.

Masci (Filippo), Professore nella R. Università di Napoli. — 14 Giugno 1903.

Sezione di Scienze Giuridiche e Sociali.

Lampertico (Fedele), Senatore del Regno (Vicenza). — 5 Aprile 1881.

Rodriguez de Berlanga (Manuel) (Malaga). — 17 Giugno 1883.

Schupfer (Francesco), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Roma. — 14 Marzo 1886.

Gabba (Carlo Francesco), Prof. nella R. Univ. di Pisa. — 3 Marzo 1889.

Buonamici (Francesco), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Pisa. — 16 Marzo 1890.

Dareste (Rodolfo), dell'Istituto di Francia (Parigi). — 26 Febbraio 1893.

Bonfante (Pietro), Professore nella R. Università di Pavia.

Sezione di Scienze storiche.

Birch (Walter de **Gray**), del Museo Britannico di Londra. — 14 Marzo 1886.

Chevalier (Canonico Ulisse), Romans. — 26 Febbraio 1893.

Duchesne (Luigi), Dirett. della Scuola Francese in Roma. — 28 Aprile 1895.

Bryce (Giacomo), Londra. — 15 Marzo 1896.

Patetta (Federico), Prof. nella R. Università di Modena. — 15 Marzo 1896.

Gloria (Andrea), Professore nella R. Università di Padova.

Sezione di Archeologia.

Lattes (Elia), Membro del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere (Milano). — 14 Marzo 1886.
Poggi (Vittorio), Bibliotecario e Archivista civico a Savona. — 2 Gennaio 1887.
Palma di Cesnola (Cav. Alessandro), Membro della Società degli Antiquari di Londra (Firenze). — 3 Marzo 1889.
Mowat (Roberto), Membro della Società degli Antiquari di Francia (Parigi). — 16 Marzo 1890.
Nadaillac (Marchese I. F. Alberto de), Parigi. — 16 Marzo 1890.
Brizio (Eduardo), Professore nell'Università di Bologna. — 26 Febbraio 1893.
Barnabei (Felice), Direttore del Museo Nazionale Romano (Roma). — 28 Aprile 1895.
Gatti (Giuseppe), Roma. — 15 Marzo 1896.

Sezione di Geografia ed Etnografia.

Pigorini (Luigi), Professore nella R. Università di Roma. — 17 Giugno 1883.
Dalla Vedova (Giuseppe), Professore nella R. Università di Roma. — 28 Aprile 1895.
Porena (Filippo), Professore nella R. Università di Napoli.

Sezione di Linguistica e Filologia orientale.

Sourindro Mohun Tagore (Calcutta). — 18 Gennaio 1880.
Marre (Aristide), Vaucresson (Francia). — 1° Febbraio 1885.
Guidi (Ignazio), Professore nella R. Università di Roma. — 3 Marzo 1889.
Amelineau (Emilio), Professore nella *École des Hautes Études* di Parigi. — 28 Aprile 1895.
Foerster (Wendelin), Professore nell' Università di Bonn, Comm. ✠. — 28 Aprile 1895.

Sezione di Filologia, Storia letteraria e Bibliografia.

Del Lungo (Isidoro), Socio residente della R. Accademia della Crusca (Firenze). — 16 Marzo 1890.
Novati (Francesco), Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano.
Rossi (Vittorio), Professore nella R. Università di Pavia.
Boffito (Giuseppe), Professore nel Collegio delle Querce in Firenze.
D'Ovidio (Francesco), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Napoli.
Biadego (Giuseppe), Bibliotecario della Civica di Verona.
Cian (Vittorio), Professore nella R. Università di Pisa.

MUTAZIONI

AVVENUTE

nel Corpo Accademico dal 20 Novembre 1904
al 19 Novembre 1905.

ELEZIONI

SOCI

Somigliana (nob. Carlo), Professore di Fisica matematica nella R. Università di Torino, eletto Socio nazionale residente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali nell'adunanza del 5 marzo 1905 e approvata l'elezione con R. Decreto 27 aprile 1905.

Fusari (Romeo), Professore di Anatomia umana, descrittiva e topografica nella R. Università di Torino, id. id.

Lorenzoni (Giuseppe), Professore di Astronomia nella R. Università di Padova, eletto Socio nazionale non residente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, id. id.

Hoff (Giacomo Enrico van't), Professore nella R. Università di Berlino, eletto Socio straniero della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, id. id.

Newcomb (Simone), Professore di Matematica e di Astronomia nella Università di Baltimora, eletto Socio corrispondente nella Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, Sezione di Matematiche applicate, Astronomia e Scienza dell'ingegnere civile e militare, id. id.

Ritter (Guglielmo), Professore di Statica grafica e di costruzione nella Scuola politecnica di Zurigo, id. id.

Ostwald (Guglielmo), Professore di Chimica nell'Università di Lipsia, eletto Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, Sezione di Chimica generale ed applicata, nell'adunanza del 5 marzo 1905.

Arrhenius (Svante Augusto), Direttore dell'Istituto fisico-chimico dell'Università di Stoccolma, id.

Nernst (Walter), Professore di Chimica nell'Università di Gottinga, id.

Lévy (Augusto Michele), Membro dell' Istituto di Francia, Professore di Mineralogia nell'Università di Parigi, eletto Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, Sezione di Mineralogia, Geologia e Paleontologia, nell'adunanza del 5 marzo 1905.

Goldschmidt (Viktor), Professore di Mineralogia nella Università di Heidelberg, id.

Suess (Francesco Edoardo), Professore di Mineralogia nella Imperiale Università di Vienna, id.

Haug (Emilio), Professore di Geologia nella Università di Parigi, id.

Weismann (Augusto), Professore di Zoologia nella Università di Freiburg i. Br. (Baden), Sezione di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparata, id.

Lankester (Edwin Ray), Direttore del *British Museum of Natural history*, id.

Engelmann (Teodoro Guglielmo), Professore di Fisiologia nella Università di Berlino, id.

Dastre (A.) Professore di Fisiologia nella Università di Parigi, id.

Kerbaker (Michele), Professore di Storia comparata delle Lingue classiche neo-latine della R. Università di Napoli, eletto Socio nazionale non residente della Classe di scienze morali, storiche e filologiche nell'adunanza del 26 marzo 1905 e approvata l'elezione con R. Decreto del 27 aprile 1905.

MORTI

24 Marzo 1905.

Tacchini (Pietro), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Matematiche applicate, Astronomia e Scienza dell'ingegnere civile e militare).

15 Aprile 1905.

Piccini (Augusto), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Chimica generale ed applicata).

14 Maggio 1905.

Delpino (Federico), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Botanica e Fisiologia vegetale).

16 Maggio 1905.

Adriani (P. Giambattista), Socio corrispondente della Classe di scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di Scienze storiche).

20 Agosto 1905.

Oppert (Giulio), Socio corrispondente della Classe di scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di Linguistica e Filologia orientale).

24 Ottobre 1905.

Pezzi (Domenico), Socio residente della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.

2 Novembre 1905.

Koelliker (Alberto von), Socio straniero della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

15 Novembre 1905.

Gandino (Gio. Battista), Socio nazionale non residente della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.

PUBBLICAZIONI PERIODICHE RICEVUTE DALL'ACCADEMIA

Dal 1° Gennaio al 31 Dicembre 1905.

NB. Le pubblicazioni segnate con * si hanno in cambio;
quelle notate con ** si comprano; e le altre senza asterisco si ricevono in dono.

* **Aberdeen** University Library. Studies: No. 10, Avogadro and Dalton the Standing in Chemistry of their Hypotheses by Andrew N. Meldrum. — No. 11, Records of the Sheriff Court of Aberdeenshire. Edited by D. Littlejohn, vol. I.
* **Acireale**. R. Accademia di scienze, lettere ed arti degli Zelanti.
— Memorie della Classe di scienze, serie 3ª, vol. III, 1904-1905.
— Memorie della Classe di lettere, serie 3ª, vol. III, 1903-1904.
* **Adelaide**. R. Society of South Australia. Transactions and Proceedings and Report, vol. XXVIII, 1904; 8°.
* **Alger**. École de Lettres; Bulletin de correspondance africaine. T. XXIX (1904); XXX (1905); 8°.
* **Amsterdam**. Académie R. des sciences. Verhandelingen Alf. Natuurkunde, 1ᵉ Sectie, Deel VIII, N. 6-7; 2ᵉ Sectie, Deel X, N. 1-6. — Verhandelingen Afd. Letterkunde, N. R. Deel IV, 2; V, 4, 5. — Verslagen... Natuurkunde. Année 1903-1904, vol. XII. — Proceeding (Sect. of Science), vol. VI. — Verslagen en Mededeelingen... Letterkunde. 4° Recks, Deel VI. — Jaarbock 1903. Prijsvers Paedagogium; 8°.
* — Société mathématique. Nieuw Archief voor Wiskunde; II Recks, Deel VI, 4 Stuk, VII, 1. — Wiskundige Opgaven met de Oplossingen, IX Deel, 1ᵈᵉ Stuk, 1903. — Revue semestrielle de publications mathématiques. T. XIII, 1ᵉ part. 1904; 8°.

** — K. Zoologisch Genootschap (Natura artis Magistra). — Bijdragen tot de Dierkunde, 17-18 Afl., 1903-1904; 4°.

* **Angers**. Société d'Études scientifiques; Bulletin. N. Sér. XXXIII, an. 1903. 1904; 8°.
* **Asti**. R. Stazione enologica sperimentale. Annuario giugno 1901-luglio 1904. 1904; 8°.
* **Baltimore**. Johns Hopkins Press. American Journal of Philology. 1905; vol. XXV, 1.
* — Johns Hopkins University. Circular, 1904, Nos. 2, 3, 5, 7, 8. 1905, 1; 8°. — Historical and Political Science, Ser. XXII, Nos. 1-12; ser. XXIII,

1-2; 8°. — American Chemical Journal, Vol. XXXI, Nos. 4-6; XXXII; XXXIII, 1, 2; 8°. — American Journal of Philology, XXIV, 4; XXV, 1-3; 8°. — American Journal of Mathematics, vol. XXVI; XXVII, 1; 4°.

Baltimore. Peabody Institute. 38° Annual Report. June 1, 1905; 8°.

* **Basel**. Naturforschenden Gesellschaft. Verhandlungen. Bd. XV, Heft 3; XVII (1904); 8°.

* — Universität-Bibliothek. Tesi di lauree 1903/4.

* **Bassano**. Museo Civico. Bollettino 1904, ann. I; 1905, II, N. 1-4.

* **Batavia**. Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. — Notulen. Deel XXXVI, 1898, 3; XLII, 1904, Afl. 3, 4. — Rapporten van de Commissie in Nederlandisch Indié voor Oudheidkundig onderzoek op Java en Madoera, 1901, 1902, 1903, 1904, 1905, 3 vol.; 8°. — Tijdschrift, Deel XLVII, Afl. 6; XLVIII, 1.

— Departement van Koloníen. Dagh-Register gehouden int Casteel Batavia vant passerende daer ter plaetse als over geheel Nederlandts-India, An. 1656-1657. S. Gravenhage, 1904. Batavia; 8°.

— K. Magnetisch en Meteorologisch Observatorium. Regenwaarnemingen in Nederlandisch-Indië. Jaargang 1903. 1904; 8°.

* **Bergen**. Bergens Museum. O. Nordgaard. Hydrographical and Biological Investigations iu Norwegian Fjords. Bergen, 1905; f°. — Aarsberetning for 1904. — Bergens Museums. Aarbog, 1904, 1905, 2det Heft; 8°. — An account of the Crustacea of Norway..., vol. V, p. 7.

* **Berkeley**. University of California. Agricultural experiment Station. Bulletin, Nos. 112, 124; 155-164; Circular, Nos. 4-12. — 32° Report of the Agricultural experiment Station. — Annoncement of Courses 1903-1904, 1904-1905. — Issend Quarterly. N. S., Vol. V, N. 3 (1904); VI, 1-2 (1904). — University Chronicle and Official record, Vol. VI, No. 4 (1904); VII, 1 und 1 extra number Biennal Report etc. — American Archaeology and Ethnology, vol. I, II, 1-4. — Botany, vol. II, 1, 2. — Bulletin of the Department Geology, vol. III, 16-22; IV, 1. — Pathology, Vol. I, 2-22. — Physiology, Vol. II, 1-9. — Zoology, Vol. I, 2, 6-8; II, 1-3. — The Department of Anthropology, History and organisation.

* **Berlin**. K. Preussischen Akademie der Wissenschaften. Acta Borussica; Die Behördenorganisation und die allgemeine Staatsverwaltung Preussens im 18. Jahrhundert, VII Bd., 1904; 8°. — Die Briefe König Friedrich Wilhelms I. an den Fürsten Leopold zu Anhalt-Dessau 1704-1740, 1905; 8°. — Abhandlungen. Aus dem Jahre 1904; 4°. — Sitzungsberichte, N. XXIII (4 maggio)-XXXVIII (27 giugno 1905); XLI (20 ott.)-LV (22 dic. 1904); N. I (12 genn.)-XXII (27 aprile 1905).

— Centralbureau der Internationalen Erdmessung. N. F. der Veröffentlichungen, No. 11, 1905; 4°.

** — Historischen Gesellschaft. Jahresberichte der Geschichtswissenschaft, XXVI. Jahrg. 1903. 1905; 8°.

** — K. Preussischen Geologischen Landesanstalt. Abhandlungen, N. F. Heft 39, 40, 42. — Abbildungen u. Beschreibungen der palaeozoischen u. mesozoischen Formation. — Erläuterungen zur geologischen Karte

von Preussen und benachbarten Bundesstaaten. Liefg. 70, N. 16, 21, 22, 28; 111, 51, 52, 57, 58, testo e atl.; 112, 36, 41, 42, 47, 48; 115, 19, 20, 25, 26.

Berlin. Physikalisch-Technischen Reichsanstalt. Wissenschaftliche Abhandl. Bd. IV, Heft 2. Berlin, 1905; 4°. — Die Tätigkeit... im Jahre 1904; 8°.

* **Berne**. Société Helvétique des sciences naturelles. Nouveaux Mémoires. Vol. XXXIX, 1e, 2me livrs.; 4°.

* — Naturforschenden Gesellschaft. Mitteilungen, 1903, N. 1551-1564.

* — Commission géologique de la Société Helvétique des sciences naturelles. — Matériaux pour la Carte géologique de la Suisse. N. S., livrs. 16, 19, Atlas; 4°.

* **Beyrouth** (Syrie). Université St.-Joseph. Revue Catholique bimensuelle. Sciences-Lettres-Arts. 1905, 1-23.

* **Bologna**. R. Accademia delle Scienze. Memorie, ser. 5a, T. X (1902-1903), ser. 6a, T. I (1904); 4°. — Indice generale dei dieci tomi componenti la serie V; 4°. — Rendiconto, N. S., vol. VII (1902-1903); VIII (1903-1904), 8°.

* — Società medico-chirurgica e della Scuola medica. — Bullettino, Ser. 8a, T. III (1903), N. 3, 4; IV (1904); V (1905).

* **Bordeaux**. Annales de la Faculté des Lettres et des Universités du Midi. Bulletin hispanique, 1905, T. VII. — Bulletin italien, 1905, T. V. — Revue des études anciennes, T. VII, 1905, 2.

* — Société des sciences physiques et naturelles. Mémoires, 6e série, T. II, 2e cahier; 8°. — Procès-verbaux des séances. An. 1903-1904; 8°.

* **Boston**. Boston Society of Natural History. — Memoirs. Vol. V, N. 10-11; VI, 1; 4°. Occasional Papers, Vol. VII, N. 1-3. — Proceedings. Vol. XXXI, N. 2-10; XXXII, N. 1, 1.

* — American Academy of Arts and Sciences. Memoirs, Vol. XIII, 2. — Proceedings, Vol. XXXIX, 22-24; XL, 1-17; 8°.

* **Boulder**. University of Colorado. Studies. Vol. II, N. 3; III, 1.

* **Brescia**. Ateneo: Commentari per l'anno 1904. 8°.

* **Brooklyn**. Museum of the Institute of Arts and Sciences. Memoirs of natural sciences. Vol. I, 1. — Sciences Bulletin, Vol. I, 5, 6. — Cold Spring Harbor Monographs. III. 1904; 8°.

* **Bruxelles**. Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Annuaire 1905; 8°. — Classe des sciences, Bulletin 1904, 5-12; 8°. — Biographie nationale. T. XVIII, 1r fasc.; 8°.

* — Société d'Archéologie. Annales, T. XVIII, 1904, livrs. 3-4; 8°.

* — Société des Bollandistes. Analecta Bollandiana, T. XXIII, fasc. IV; XXIV, 1; 8°.

* — Société Belge de Géologie, de Paléontologie et d'Hydrologie. Bulletin. 1904. T. XVIII (1904); 8°.

* — Société Entomologique de Belgique. Annales, T. XLVIII (1904); 8°.

* — Société R. Zoologique et Malacologique de Belgique. Annales, T. XXXVII (1902), 1903; XXXVIII (1903), 1904; 8°.

* — Observatoire R. de Belgique. Annales astronomiques, N. S., T. VIII, IX, fasc. 1, 1904. — Annales, N. S., Physique du Globe, T. I, II, 1904; 4°. — Annuaire astronomique 1901-1906; 6 vol.; 8°.

* **Bucarest**. Institut Meteorologic. Buletinul Lunar al Observ. Meteorologice di România. An. XIII, 1904; 4°.

* — Société des Sciences. Bulletin, 1904. An. XIII, N. 5-6; 1905, XIV, 1-5; 8°.

* **Budapest**. Kgl. Ungarische geologischen Anstalt. Jahresbericht 1902. 1904; 8°. — Erläuterungen zur geologischen Specialkarte der Länder der Ungar. Krone. Sectionsblatt Zone 14/col. xv, 1 : 75.000, testo 8°, carta f°; 1905. Földtani Közlöny, XXXIV Kötet, 11-12 Füzet, 1904; XXXV, 1-7; 1905. — Mitteilungen, XIV, 2-3; XV, 1, 1904; 8°. — Carte générale des carrières des États de la Couronne Hongroise, 1902, f° mass. — Carte générale des argiles réfractaires examinées des pays de la Couronne Hongroise, f° mass. — Carte géologique des environs de la ville de Szeged. Budapest, 1903; f° mass.

* **Buenos Aires**. Sociedad Científica Argentina. Anales, 1904, T. LVIII, 4-6; LIX, LX, 1-3; 8°.

* — Museo Nacional. Annales, Ser. III, T. III (1904); 8°.

— Dirección General de Estadística de la Provincia. Boletín Mensual. N. 49-60, 1904; 8°. — Demografía, año 1900-1902; 8°.

— Statistique municipale. Bulletin mensuel, 1904. XVIII^e^ ann., N. 10-11; 1905, XIX^e^ ann., 1-10.

* **Cagliari**. Società storica sarda. Archivio storico sardo. Vol. I, fasc. 1-3, 1905; 8°.

* **Calcutta**. Asiatic Society of Bengal. Journal: History-Antiquities. — History-Literature, Vol. LXXIII, Part I, N. 3, 4; Extra N. 1904; 8°. — Natural science, Vol. LXXIII, Part II, N. 3-5; Suppl. 1904. — Anthropology and cognate subjects, Part III, vol. LXXIII, 3-4; Extra N. 1904. — Proceedings, June-December, N. 6-10, 11, Extra N. 1904; 8°. — Journal et Proceedings, Vol. I, N. 1-4; 1905. — Bibliotheca Indica. A Collection of Oriental Works. N. S., N. 1041, 1045, 1050, 1062, 1069, 1099-1111, 1113-1127; 8°.

* — Geological Survey of India. Memoirs, Vol. XXII, Part 4, 1904; 8° et N. S., Vol. II, N. 2. — Records, Vol. XXXI, Part 3, 4, 1904; XXXII, 1-3, 1905; 8°.

— Board of Scientific advice for India. Annual Report for the year 1903-1904; 1905; 4°.

* **Cambridge**. Cambridge Philosophical Society. Proceedings, Vol. XIII, part 1-3. Transactions, Vol. XX, N. 1-6, 1905; 8°.

* — Mass. U. S. A. Museum of Comparative Zoology at Harvard College. Bulletin, Vol. XLVII, 6 (Geological Ser.); XLV, 3, 4; XLVI, 3-7, 9; XLVII, XLVIII, 1. — Memoirs, Vol. XXV, 2; XXX, 1; XXXI; XXVI, 5; 1904-5; 8°.

* **Cape Town**. South African Philosophical Society. Transactions. 1904, Vol. XV, 3-5; 1905, XVI, 1, 2.

* **Catania**. Accademia Gioenia di scienze naturali. Bollettino, 1904, dicembre, fasc. 83-86; 8°. — Atti, 1904, Ser. 4^a^, Vol. XVII; 4°.

* — Società degli Spettroscopisti italiani. Memorie, 1904, Vol. XXXIII, disp. 11-12; 1905, vol. XXXIV.

* **Cherbourg**. Société nationale des sciences naturelles et mathématiques. Mémoires, T. XXXIV, 1904; 8°.

* **Chicago**. Field Columbian Museum. Anthropological Series. Vol. III, 4; V; VI, 1; VII, 1. — Botanical Series, Vol. III, 2. — Geological Series, Vol. II, 5-6. — Report Series, vol. II, 3. — Zoological Series, Vol. III, 15, 16, 1-2; V, 1904; 8°.

— John Crerar Library. Tenth annual Report for the year 1904, 1905; 8°.

— University. The Decennal Publications. Vol. I-X; 4°.

* **Christiania**. K. Norske Frederiks Universitets Aarsberetning for beretningsaaret 1900-1901; 1901-1902, samt Universitets matricul for 1901, 1902; 8°. — Gamle Personnavne in Norske Stedsnavne. Universitetsprogram for 2dt Semester 1899; 8°. — Jahrbuch des norwegischen Meteorologischen Instituts für 1902; 4°.

Colorado Springs, Colo. Colorado College Studie. Linguage Ser., Vol. XII, N. 15, 16, 17; 1904; 8°. — Science Ser., Vol. XI, Nos. 33-38.

* **Copenhague**. Académie R. des sciences et des lettres de Danemark. Mémoires. Section des Lettres, 6e sér., t. VI, n. 3; 7e sér., t. I, 4; II, 4. — Oversigt, 1904, N. 6; 1905, 1-5; 8°.

Cordoba. Academia nacional de ciencias. Boletin, T. XVII, entrega 4; XVIII, 1. Buenos Aires, 1904-1905; 8°.

* **Cracovia**. Akademii Umiejętnosci, Catalogue of Polish-scientific-literature. T. IV, Rok 1904, Zeszyt 1, 2, 3, 4; 8°. — Bulletin international. Classe des sciences mathématiques et naturelles. 1904, N. 8-10; 1905, 1-7. — Classe de philologie. Classe d'histoire et de philosophie, 1904, N. 8-10; 1905, 1-7. — Rozprawy Wijdziału Matematyczno-przyrodniczego. Ser. III, 1903, T. 3, A. Nauki matematyczno-fizyczne. T. 3, B. Nauki biologiczne. Rozprawy wydziału historyczno-filozoficzny, 1903, Ser. II, T. XX. — Rozprawy wydziału filologiczny. Ser. II, 1003, T. XXI; 1904, T. XXIV. — Materyały i Prace Komisyi jezykowej, T. I, Zeszyt 3, 1904; 8°.

Danzig. Naturforschenden Gesellschaft. Katalog der Bibliothek, 1 Heft; A. Mathematik; B. Astronomie. — Schriften, N. F., XI Bd., 1904; 8°.

* **Dorpat**. Imp. Universitatis Jurievensis (olim Dorpatensis) Acta et Commentationes, 1903, T. XI, 1903; 8°.

* **Dublin**. R. Dublin Society. Economic Proceedings. Vol. I, Part 5. 6; 8°. — Scientific Proceedings. Vol. I (N. S.); XI, 1-5; 8°. — Transaction, Vol. VIII, 6-16; IX, 1. 1904-1905; 4°.

* — R. Irish Academy. Proceedings. Sect. A, Mathematical, Astronomical, and Physical Science, Vol. XXV, 1-3. Sect. B, Biological, Geological and Chemical Science, Vol. XXV, 1-6. Sect. C, Archeology, Linguistic and Literature, Vol. XXIV, 1, 1; XXV, 5-12; 8°.

* **Edinburgh**. Royal College of Physicians. Report from the Laboratory. Vol. IX, 1905; 8°.

* — R. Physical Society. Proceedings. Session 1904-1905. N. 1-3; 8°.

* — R. Scottish Society. Transactions. 1904. Vol. XVI, 2; 8°.

* **Erlangen**. Physikalisch-medicinischen Sozietät. Sitzungsberichte. 1903, 35 Heft, (1904) 36 Bd.. 1904-1905; 8°.

* — Universität Bibliothek. Tesi di laurea.

* **Firenze.** R. Accademia della Crusca. Atti. Adunanza pubblica del dì 27 gennaio 1905. 8°. — Vocabolario. 5ª impress. Vol. IX, fasc. 4°. 1905; 4°.
* — R. Accademia economico-agraria dei Georgofili. Atti, 5ª serie, Vol. I, disp. 4ª: II, 1. 2; 8°.
* — R. Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento. Sezione di medicina e chirurgia: Istituto ostetrico-ginecologico di Firenze. L'anno scolastico 1903-1904. Rendiconto clinico. Dott. G. Guicciardi. 1905; 8°. — Sezione di filosofia e filologia: F. Neri. La tragedia italiana del cinquecento, 1904. A. Pernice, L'imperatore Eraclio. Saggio di storia bizantina, 1905; 8°. — La misura in psicologia sperimentale per A. Aliotta, 1905; 8°. — Scuola di geografia, anno scolastico 1903-1904; 8°. — R. Osservatorio di Arcetri, fasc. 19, 20, 1905; 8°.

Fort Collins. Color. Colorado Agricultural College. Agricultural Experiment Station. Bulletins, 87-90.

* **Frankfurt am Mein.** Senckenbergischen Naturforschenden Gesellschaft. Berichte, 1905; 8°.
* **Gap.** Société d'Études des Hautes-Alpes. Bulletin, 1904, IIIᵉ Sér., 11-12; 1905, 13: 8°.
* **Genève.** Société de Physique et d'Histoire naturelle. Vol. XXXIV, fasc. 5; XXXV, 1. 1905; 4°.

— Observatoire. Résumé météorologique de l'année 1903 pour Genève et le Grand Saint-Bernard. — Résumés des Observations météorologiques faites aux fortifications de Saint-Maurice pendant l'année 1903. 1904; 8°.

* **Genova.** Museo Civico di Storia naturale. Annali. Ser. 3ª, vol. I; 8°.
* — Società di letture e conversazioni scientifiche. Rivista ligure di scienze, lettere ed arti. An. XXVI. (1904), fasc. 6; XXVII 1-5; 8°.
* — Società Ligure di Storia patria. Atti, 1904, vol. XXXVI; 8°.
* — R. Scuola navale superiore. Annuario, Anno scolastico 1904-1905; 4°.
* — R. Università. Atti pubblicati per decreto ed a spese del Municipio. Vol. XVIII, 1904; 4°.
* **Giessen.** Universität Bibliothek. Tesi di lauree.
* **Göttingen.** K. Gesellschaft der Wissenschaften. Mathematische-Physikal. Klasse. Abhandlungen, N. F., Bd. III, 2-4; IV, 1-4, 1904; 4°. — Nachrichten, 1904, Heft 6; 1905, 1-3. — Philologisch-Histor. Klasse. Abhandlungen, N. F., Bd. VIII, 3, 4, 6, 8. — Nachrichten, 1904, Heft 4, 5; 1905; 1-2. — Geschäftliche Mittheilungen. 1904, Heft 2, 1905, 1.
* **Granville Ohio.** Scientific Laboratories of Denison University. Bulletin, Vol. XII, Art. 10-12. Index, Vol. 1-10 (1885-1897); 8°.
* **Habana.** Academia de Ciencias Médicas, Físicas y Naturales. Anales, T. XXXVIII, 1902; XLI, 1904-1905; XLII, 1905-1906; 8°.
* **Haarlem.** Société hollandaise des sciences. Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles. Sér. II, T. X, livr. 1-5, 1905; 8°. — Natuurkundige Verhandelingen, Verz. 3ª, Deel VI, 1 Stuk, 1905; 4°. — Œuvres complètes de Christian Huygens. T. Xᵉ, 1905; 4°.
* — Musée Teyler. Archives. Sér. II, Vol. IX, 1-2, 1904; 8°.
* **Heidelberg.** Naturhistorisch-medizinischen Vereins Verhandlungen. N. F., VIII Bd., Heft 1, 1904; 8°.

* **Helsingfors**. Société des sciences. Oefversigt af... Förhandlingar. Vol. XLIV (1901-1902); XLV (1902-1903); XLVI (1903-1904).

* — Institut Météorologique Central de la Société des sciences de Finlande. Observations météorologiques faites aux stations finlandaises 1891-1892; 1893-1894. — Observations météorologiques faites à Helsingfors en 1899, Vol. XVIII, XIX. — État des glaces et des neiges en Finlande pendant l'hiver 1893-1894; 1904-1905; 1904; 4°.

Hollande. K. Nederlandsch Meteorologisch Institut. N. 90. Études des phénomènes de Marée sur les Côtes Néerlandaises. III. Tables des courants. Utrecht, 1905; 8°.

* **Jena**. Medizinisch-naturwissenschaftlichen Gesellschaft. Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. N. F., XXXII Bd., Heft 2-4; XXXIII, 1-4. — Denkschriften. Bd. IV, 5; VI, 2, 1904; 8°.

* **Kasan**. Société physico-mathématique. Bulletin, 2e sér., T. XIII, 4 (1903); XIV, 1-3, 1904; 8°.

* **Karlsruhe**. Bibliothek der Gr. Technischen Hochschule. Tesi di lauree, 1904-1905.

* **Kharkow**. Société mathématique. Communications. 2e Sér., T. VIII, N. 4-6, 1904; 8°.

* **Kiel**. Kommission zur wissenschaftlichen Untersuchungen der deutschen Meere in Kiel und der Biologischen Anstalt auf Helgoland. Wissenschaftliche Meersuntersuchungen. N. F., VII Bd., Abth. Helgoland, Heft 2; VIII Bd., Abth. Kiel, 1903; 4°.

Kodaíkanal Observatory. Bulletin, No. 1. Madras, 1905; 4°.

— Kodaíkanal and Madras Observatories. Annual Report of the Director... for 1904. Madras, 1904; 4°.

* **Königsberg**. Physikalisch-ökonomischen Gesellschaft. Schriften, 1904; XLV Jahrg., 1905; 4°.

Kraków. Vedi **Cracovia**.

Kyōto. College of science and Engineering. Imp. University. Vol. I. No. 2. 1904-1905; 8°.

* **Lawrence**. Univers. of Kansas. Science Bulletin, Vol. II, Nos. 10-15 (1904); 8°.

* **Leipzig**. K. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Mathem.-Physischen Klasse; Abhandlungen, XXIX Bd., N. 3, 4. — Berichte, 1904, 5; 1905, 1-2. — Philologisch-historischen Klasse. Abhandlungen, XXIII Bd., N. 1-2. — Berichte, 1904, 4-5; 1905, 1-4.

— Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft. Preisschriften. E. R. Neumann. Studien über die Methoden von C. Neumann und G. Robin zur Lösung der beiden Randwertaufgaben der Potentialtheorie (N. XV d. mat. naturw. Sect.). E. Schaumkell. Geschichte der deutschen Kulturgeschichtschreibung von der Mitte des 18. Jahrhunderts bis zur Romantik, im Zusammenhang mit der allgemeine geistigen Entwicklung (Nr. XXIV d. hist. nat.-ök. Sek.), 1905.

— Vereins für Erdkunde Mitteilungen 1904; 8°.

* **Liège**. Société Géologique de Belgique. Annales. 1904, T. XXXI, 3e livr.; XXXII, 1; 8°. — Mémoires, 1904. T, II, 1e livr.; 4°.

Lima. Ministerio del Fomento. Boletín del Cuerpo de Ingenieros de Minas del Perú. N. 5 (1903); 10-18 (1904); 19-26 (1905), 1904; 8°.

* **Lisboa**. Commisão do Serviço Geologico de Portugal. Cummunições. T. VI, fasc. 1, 2. Description de la Faune Jurassique du Portugal; Polypiers du Jurassique supérieur. Lisbonne, 1904-1905.

— R. Observatorio astronomico (Tapada). Méthodes de calcul graphique en usage à l'Observatoire R. de Lisbonne (Tapada). Lisbonne, 1905; 8°.

* **London**. Royal Astronomical Society. Memoirs, Vol. LIV and Appendix I-V; LV and Appendix I. — Monthly Notices, Vol. LXV, Nos. 1-9, supl. numb.; XLVI, 1, 2; 1904-1905; 8°.

* — British Association for the advancement of Science. 64 Report; Cambridge, in August 1904. London, 1904; 8°.

* — British Museum (Natural History). Guide to the Gallery of Birds in the department of Zoology; 8°. — Catalogue of the Collection of Bird's Eggs, vol. IV; 8°. — Catalogue of the Moths, vol. V. Text and Plates; 8°. — Synonymic catalogue of Orthoptera, vol. I; 8°.

* — Chemical Society. Journal. 1904, december; 1904, Index; 1905, january-december. Proceedings, vol. XX, No. 287, Index; XXI, 288-301; 8°.

* — Geological Society. Quarterly Journal, 1905, vol. LXI, p. 1-4. — Geological Literature ...during the year ended December 31st. 1904. — List. November 15th. 1905; 8°.

— R. Institution of Great Britain. Proceedings, Vol. XVII, p. 2ª, 1905; 8°.

* — Linnean Society. Proceedings. 117th session. November 1904 to June 1905. — Journal of Botany, XXXVII, 258, 259. — Journal of Zoology, Vol. XXIX, 191, 192. — Transactions, Botany, 2nd ser. Vol. VI, p. 10-11, VII, 1-2. — Zoology, 2nd ser., vol. IX, p. 6-9; X, 1-3. — List 1905-6; 8°.

* — R. Microscopical Society. Journal, 1905.

* — Royal Society. Year Book 1905; 8°. — Proceedings, Vol. LXXIV, N. 503-506; LXXV, Obituari notices, p. 4ª; 8°. — Proceedings, Ser. A, vol. 76, No. 507-513, Mathem. and Physical sciences; Ser. B, vol. 76, N. 507-513, 77, 514, Biological sciences. — Transactions, Ser. A, vol. 204, Containig Paper of a Mathem. or Physical character. Ser. B, vol. 197. Containig Paper of a Biological Character. — Report to the Government of Ceylon on the Pearl Oyster Fisheries of the Gulf of Manaar. Part II, 1904; 4°. — Reports of the Evolution Committee. Report II, 1905; 8°. — Reports of the Sleeping Sickness Commission. N. 5, 6, 1905; 8°.

* — International Catalogue of scientific Literature: Supplementary List of Journal. **A**. Mathematics, second and third annual issue, 2 vol.; **C**. Physics, third annual issue, 1 vol.; **D**. Chemistry, 2nd issue. **E**. Astronomy, 3td. issue, 1 vol.; **F**. Meteorology including terrestrial Magnetism, 2nd issue, 1 vol.; **G**. Mineralogy including Petrology an Cristallography, 2nd issue, 1 vol.; **H**. Geology, 2nd issue, 1 vol.; **J**. Geography mathematical and physical, 2nd issue, 1 vol.; **K**. Palaeontology, 2nd issue, 1 vol.; **L**. General Biology, 2nd issue, 1 vol.; **M**. Botany, 2nd issue, 1 vol.; **O**. Human Anatomy, 2nd issue, 1 vol.; **P**. Physical Anthropology, 2nd issue, 1 vol.; **Q**. Physiology including experimental Psychology Pharmacology, and

Experimental Pathology. Part I, Auctor Catalogue, 2nd issue, 1 vol.; Part II, Subiect Catalogue, 1 vol.

* **London**. R. Society of Literature. Transactions, 2nd ser. Vol. XXV, Part 4; XXVI, 1ª, 3ª, 1904-1905; 8°. — Report and List of Fellow, 1905; 8°.

* — Zoological Society. Proceedings, 1904, vol. II, p. 2; 1905, vol. II; 8°.

* **Louvain**. Université catholique. Annuaire 1904. — Thèses de la Faculté de Théologie, 820-835. — Thèses de l'École de St-Thomas d'Aquin, 3. — Programme des cours de l'année academ. 1904-1905. — P. Michotte, Études sur les théories économiques qui dominèrent en Belgique de 1830 à 1886. Louvain, 1904. — J.-L.-M. Perquy, La typographie à Bruxelles au début du XX^e siècle. Bruxelles, 1904. — A. Biebuyck, Le régime légal de la personnification civile en Hollande. Paris, 1905. — E. Jannem, Le néo-criticisme de Ch. Renouvier. Louvain, 1904.

* **Lyon**. Société d'Agriculture, Sciences et Industries. Annales, 1903, 7ᵉ sér., T. 1ʳ; 8°.

* — Société Linnéenne. Annales, 1903, N. S., T. Vᵉ; 8°.

* — Diocèse de Lyon. Bulletin historique, 1905, 6ᵉ ann., N. 29-36; 8°.

* — Université. Annales, N. S., I. Science, Médecine, fasc. 15. II. Droit, Lettres, fasc. 14. Lyon, Paris, 1904, 1905; 8°.

* **Madison**. Wisconsin Academy of sciences, arts and letters. Transactions, vol. XIII, Part II (1903); 8°.

* — Wisconsin Geological and Natural History Survey. Bulletin, Nos. XIII, X, XI (Economic Series, No. 8); 8°.

Madras. Kodaíkanal Observatory. Bulletin, 2, 3, 1905; 4°.

* **Madrid**. Real Academia de Ciencias exactas, físicas y naturales. Revista, T. I, N. 6-8; T. II, III, 1-2. — Memorias, T. XXII, 1905; 8°.

* — Real Academia de la Historia. Boletín, 1905, T. XLVI; XLVII, 1-6.

* **Marseille**. Faculté des Sciences. Annales, T. XIV, 1904; 4°.

Melbourne. Public Library, Museum, and National Gallery of Victoria. Catalogue of current periodicals, 1905; 8°.

* **Messina**. R. Accademia Peloritana. Atti, Vol. XIX, 1904-1905; XIX, fasc. 2°; XX (1905-1906), fasc. 1°.

— Osservatorio della R. Università. Annuario 1904; 8°.

Mexico. Observatorio astronómico Nacíonal de Tacubaya. Anuario para el año de 1905, ann. XXV; 8°. — Observaciones meteorológicas practicadas en el Observatorio ...y en algunas otras estaciones mexicanas durante el año de 1896. 1905; 4°.

— Observatorio Meteorológico magnético central. Boletín mensual, 1902, agosto-septiembre; 1904, mayo; 4°.

* — Sociedad Científica " Antonio Alzate „. Memorias y Revista, T. XIII, N. 7 y 8; XIX, 8-12; XX, 5-12; 8°.

* **Milano**. R. Istituto lombardo di scienze e lettere. Rendiconti, Ser. II, Vol. XXXVIII, 1905, fasc. 1-18. – Atti della fondazione scientifica Cagnola dalla sua istituzione in poi. Vol. XIX (1903-1904); 8°. — — Memorie, Classe di scienze matemat. e naturali, Vol. XX, fasc. 4-6; 4°. Classe di scienze morali e storiche, Vol. XXI, fasc. 5; 4°.

Milano. R. Osservatorio di Brera. Anno 1904. Articoli generali del Calendario ed Effemeridi del Sole e della Luna per l'orizzonte di Milano. 1905; 8°.

* — Società Italiana di scienze naturali e Museo Civico di storia naturale. Atti, Vol. XLIII, fasc. 4°; XLIV, 1°-2°. 1905; 8°.

* — Associazione tipografico-libraria italiana. Catalogo generale della libreria italiana dall'anno 1847 a tutto il 1899. Vol. III, punt. 8-11; 8°.

— Città di Milano. Bollettino statistico mensile. A. XX (1904); nov.-dic. Notizie riassuntive dell'anno 1903; XXI (1905), gennaio-novembre. — Dati statistici a corredo del resoconto dell'amministrazione comunale, 1904; 8°.

* **Minneapolis.** Geological and Natural History Survey of Minnesota. Botanical Series V. — Minnesota Plant disease by E. M. Freeman.

* **Modena.** Regia Accademia di Scienze, Lettere ed Arti. Memorie, ser. III, vol. V, 1905; 4°.

Monaco. Musée Océanographique. Bulletin, N. 21-22. 1904; 23-55 (1905). — Résultats des campagnes scientifiques accomplies sur son yacht par Albert I^r Prince souverain de Monaco, fasc. XXIX-XXXI; 4°

* **Montevideo.** Museo Nacional. Anales, T. II, continuaz. e fine, 1905; 4°.

* — República O. del Uruguay. Anuario Estadístico, T. I (1902 y 1903). 1905; 8°.

* **Montpellier.** Académie des sciences et lettres. Mémoires de la Section des sciences, 2^e série, T. III, 4; 8°.

Mont Rosa. Laboratoire scientifique international. Travaux de l'ann. 1903. Vol. I, publié par A. Mosso. Turin, 1904; 8° (*dono del Socio Mosso*).

* **Moscou.** Société Imp. des Naturalistes. Bulletin 1903, N° 4; 1904, 1; 8°.

* **München.** K. Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Almanach, 1905; Mathematisch-physikal. Klasse. Abhandlungen, Bd. XXII, 2. Sitzungsberichte, 1904, Heft 3; 1905, 1, 2. — Historischen Klasse, Abhandlungen, Bd. XXIII, 2; 4°. — Philosophisch-philologischen Klasse. Abhandlungen, Bd. XXII, 3; XXIII, 1; 4°. — Sitzungsberichte der philologisch-philosophischen und der historischen Klasse, 1904, Heft 4; 1905, 1-3; 8°. — Monumenta Boica, XLVI, 1905; 4°. — Amira (K. v.). Konrad von Maurer, 1903; 4°. — Friedrich (J.). Gedächtnisrede auf Karl Adolf von Cornelius, 1904; 4°. — Heigel (K. Th. v.). Zum Andenken an Karl von Zittel, 1904; 4°. — Krumbacher (K.). Das Problem der neugriechischen Schriftsprache, 1903; 4°. — Pringsheim (A.). Ueber Wert und angeblichen Unwert der Mathematik, 1904; 4°.

* — Ornithologischen Gesellschaft in Bayern. Verhandlungen, 1903, Bd. IV.

* **Nancy.** Académie de Stanislas. Mémoires, 1904, 6^e Sér., T. I; 8°.

* **Nantes.** Société des sciences naturelles de l'Ouest de la France. Bulletin, 2^me Sér., T. IV, 1904; 8°.

* **Napoli.** Società Reale. Accademia delle scienze fisiche e matematiche. Rendiconti, Ser. 3^a, vol. X, 1904, fasc. 8-12; XI, 1905, 1-7. — Atti, ser. 2^a, vol. XII, 1905; 4°. — Indice generale dei lavori pubblicati dal 1737-1903. Napoli, 1904; 8°. — Accademia di Archeologia, Lettere e Belle Arti. Rendiconti, N. S., an. XVII, aprile-dicembre 1903; XVIII, gennaio-

dicembre 1904; XIX, gennaio-marzo 1905. — Atti, vol. XXIII, 1905; 4°.
— Accademia di scienze morali e politiche. Atti, vol. XXXV, 1905; Rendiconto, anno XLII, 1903; XLIII, 1904; 8°.

* **Napoli**. Accademia Pontaniana. Atti, Vol. XXXIV, 1904; 8°.

* — R. Istituto d'incoraggiamento. Atti, ser. VI, vol. LVI, 1905; 4°.

* — Società di Naturalisti. Bollettino, Ser. I, Vol. XVIII (1904), 1905; 8°.

* — Zoologischen Station zu Neapel. Mittheilungen, XVI Bd., 4 Heft; XVII, 1-3. Berlin, 1904; 8°.

— R. Istituto Orientale. Memorie, fasc. I, anni scolastici 1900-901, 1903-904. 1904; 8°.

* **Neuchâtel**. Société Neuchâteloise de Géographie. Bulletin, 1904, T. XV; 8°.

New Haven. Astronomical Observatory of Yale University. Transactions, 1904, vol. I, p. VII and VIII.

* **New York**. American Mathematical Society. Annual Register, January, 1905; 8°. — Bulletin, 1905, Vol. XI, N. 4-10; XII, 1-3. — Transactions, 1904, Vol. V, N. 4; 1905, VI, 1-4.

* — Public Library Astor Lenox and Tilden Foundations. Bulletin, 1904, N. 12; 1905, 1-12.

* **Nouvelle Orléans**. Athénée Louisianais. Comptes-rendus, 10e série, t. I, livr. 2me. 1905; 8°.

* **Nürnberg**. Naturhistorischen Gesellschaft. Abhandlungen, XV Bd. 2 Heft, 1904; 8°.

Oberlin (Ohio). Wilson Ornithological Club. Wilson Bulletin. Old Ser., Vol. XVII, 2, 3.

* **Ottawa**. R. Society of Canada. Proceed. and Transact., 2nd Ser., Vol. X, 1905; 8°.

* — Geological Survey of Canada. Catalogue of Canadian Birds, Part III. — Contributions of Canadian Palaeontology, Vol. III, 4. 1904; 8°.

— Department of the Interior Statistics of the Dominion of Canada. Relief Map Windsor " Resource. Mines Branch. „ " Asbestos, its Occurrence, Eyploitation and Uses „ " Mica, its Occurrence, Exploitation and Uses „.

* **Padova**. R. Accad. di scienze, lettere ed arti. Anno 1903-1904. Atti e Memorie. N. S., Vol. XX; 8°.

* — Accademia scientifica veneto-trentina-istriana. Atti. N. S., An. I, fasc. 2; II, fasc. 1. 1905; 8°.

* **Palermo**. Circolo Matematico. Annuario. 1905; 8°. — Rendiconti, 1905, T. XIX; XX; 8°.

* — R. Istituto Botanico. Contribuzioni alla Biologia vegetale. Vol. III, fasc. 3°. 1905; 8°.

— Collegio degli Ingegneri e Architetti. Atti, 1904; genn.-giugno 1905; 8°.

Pará-Brazil. Bibliotheca e Archivo Publico. Annaes, T. III, 1904; 8°.

— Museu Gœldi de Historia natural e ethnografia (Museu Paraense). Boletim, Vol. IV, 1-3. 1904; 8°. — Memorias. IV. Os Mosquitos no Parà pelo prof. dr. E. A. Goeldi. 1905; 4°.

Paris. Ministère de l'Instruction Publique. Catalogue des thèses et écrits académiques, Année scolaire 1903-1904, XXme fasc.; 4°. — Inventaire-

Sommaire des Archives Départementales, antérieures à 1790: *Aude*, Archiv. Ecclés., Sér. G, H, T. III; *Cantal*, Arch. Civiles, Sér. E, Titre de Famille, I; *Haute Garonne*, Archives civ., Sér. B, I, II, N. 93-592; Sér. C, II; *Mayenne*, Sér. B; *Seine-et-Marne*, Période révolutionnaire, Sér. L, T. I; *Seine-et-Oise*, Archives civiles, Sér. D; *Toulouse*, Bourse des Marchands de Toulouse, Sér. A-B-C, 1900, 1903, 1904. 9 vol.; 4°. — Œuvres complètes de Laplace, T. XIII. Paris, 1904, 1 vol.; 4°. — Travaux de la Station Franco-Scandinave de sondages aériens à Hald, 1902-903. Viborg-Danmark, 1 vol.; 4°.

* **Paris**. Ministère des Travaux Publics. Annales des Mines, 10e Série, t. VI; 1904, livrs. 9-12; VII, 1905, livrs. 1-8.

* — Société Nationale des Antiquaires de France. Mémoires, 1902, 7e sér., T. III; 1903, t. IV. — Bulletin, 3°-4° trimestre 1904; 1°-2° trim. 1905; 1904; 8°. — Centenaire 1804-1904. Recueil de Mémoires publiés par les membres de la Société; 4°.

** — Bureau des Longitudes. Annuaire pour l'an 1905; 16°.

* — Société de Géographie. La Géographie, Bulletin, T. IX, N. 5-6 (1903); X, 1-6 (1904); XI, 1-2 (1905); 8°.

* — Société Géologique de France. Bulletin, 1902, 4e Sér., T. II, N. 5; 1903, III, 6; 1904, IV, 1-3; 8°.

* — Muséum d'histoire naturelle. Nouvelles Archives. 4me sér., t. VI, 1r et 2nd fasc. 1904; 4°. — Bulletin, 1904; Nos. 1-8; 8°.

* — Société Mathématique de France. Bulletin, T. XXXII, fasc. 4; XXXIII, 1-4. 1904-1905; 8°.

* — Musée Guimet. Annales. Revue de l'histoire des religions; T. XLIX, 2, 3; L, 1-3. — Bibliothèque d'études. T. XVI: Le culte et les fêtes d'Adônis-Thammouz dans l'Orient antique, par Ch. Vellay. T. XVII: Le Népal, étude historique du Royaume Indou par S. Lévi. — Jubilé du Musée Guimet, XXVe anniversaire de sa fondation, 1879-1904; 8°.

— Société Philomatique. Bulletin, 9e Série, T. VI (1903-1904), N. 4; VII (1905), 1-5; 8°.

* — École Polytechnique. Journal, IIe sér., IXme cahier. 1904; 4°.

* — Société de Spéléologie. Bulletin et Mémoires, T. V, N. 38-41.

* — Société Zoologique de France. Mémoires, 1903, T. XVI; 8°.

* **Pavia**. Società Pavese di Storia patria. Bollettino, An. IV, fasc. 4 (1904); V, 1905; 8°.

* **Perugia**. R. Deputazione di Storia patria per l'Umbria. An. X, fasc. 3; XI, 1, 3. 1904; 8°.

* — R. Università. Annali della Facoltà di Giurisprudenza, Ser. III, 1904, vol. II, fasc. 3°, 4°; 1905, III, 1, 2. — Annali della Facoltà di Medicina, Ser. III, 1902, vol. II, fasc. 2; 1903, vol. III, fasc. 2-4.

* **Philadelphia**. Academy of Natural Sciences. Journal, 2nd Ser., Vol. XII, part 4; XIII, 1. 1904; 4°. — Proceedings, vol. LVI, 1904; 8°.

* — American Philosoph. Society. Proceedings, vol. XLIII, N. 176-178. 1904; 8°. — Transactions, N. S., vol. XXI, p. 1; 8°.

* **Pisa**. Società Toscana di scienze naturali. Alla memoria dei Proff. Seba-

stiano Richiardi e Fausto Sestini, xxix gennaio 1905. — Processi verbali, vol. XIV (1904-1905), N. 6-10.

Pisa. Società Cattolica italiana per gli studi scientifici. A. 1894, dic. 11-12; 1905, 1-7; 8°.

* — R. Scuola Normale superiore. Annali. Filosofia e filologia, vol. XVIII. 1905; 8°.

* — R. Università. Annuario per l'anno accademico 1904-1905; 8°.

— Università toscane. Annali. T. XXV. 1905; 4°.

Pompei Santuario. Calendario, 1905; 16°. — Il Rosario e la Nuova Pompei, 1905, XXII, quad. 1-10.

* **Porto**. Academia Polytechnica. Annaes scientificos. Vol. I, N. 1. Coimbra, 1905; 8°.

Potsdam. K. Preuszischen Geodätischen Institutes Veröffentlichung. N. F. No. 18-24. 1905; 4°. — Comptes Rendus des séances de la 14e Conférence générale de l'Association Géodétique internationale réunie à Copenhague du 4 au 13 août 1903 etc... 2nd vol. Rapports spéciaux. 1905; 4°.

* **Prag**. Ceské Akademie Cisaře Františka Josefa. Almanach. Ročník XV, 1905. — Archiv pro lexikografii a dialektologii, Cislo V. — Bibliografie České historie. Svazek 1. — Bulletin international. Résumé des travaux présentés. Classe des Sciences mathémat., naturelles et de la médecine. 1. Historicky Archiv, Cislo 24; Rozpravy, Třida II, Roč. XIII; Věstník, Roč. XIII. Praze, 1905; 8°.

— K. K. Sternwarte. Magnetische und Meteorologische Beobachtungen im Jahre 1904. 65 Jahrgang. 1905; 4°.

Pretoria. Transvaal Meteorological Department. Observation for the period 1st July 1903-30th June 1904, with appendix. First Report. 1905; 4°.

* **Rennes**. Société scientifique et médicale de l'Ouest. Bulletin. 1904. T. XIII, 1-3; 8°.

* **Riga**. Naturforscher Vereins Korrespondenzblatt, XLVII, 1904; 8°.

Rio de Janeiro. Ministerio da Industria, Viação e Obras Publicas. — Boletim mensal do Observatorio. 1904, Juno-Julho, Outubro a Dezembro.

* — Museu Nacional. Archivos, vol. X (1897-1899); XI (1901); XII (1903); 4°.

* — Bibliotheca Nacional. — Annaes da Bibl. Nacional, vol. XXIII (1901); XXIV (1902); XX (1903). Coelho Netto. Por montes e valles. Rio S. d. B. Lopes. Val de Jorios. Rio, 1900. La Illustracion Sud Americana (15 Nov. 1902). B. Aires, 1902. J. da Fonceca. Reorganisação naval. Rio. 1904. Synopse de neologismos. Rio, 1901. Anuario commercial do Estado de S. Paulo para 1904. S. Paulo, 1904. Visconde de Taunay. Céos e terra de Brazil. 2a edição. S. Paulo, 1904.

* **Rochester** (N. Y.). Academy of Science. Proceedings. Vol. IV, pp. 137-148 (1904); 8°.

Roma. Ministero degli Affari Esteri. Emigrazione e colonie. Raccolta di rapporti dei RR. Agenti diplomatici e consolari. Vol. I. Europa. Parte III. Germania, Lussemburgo, Belgio, Olanda, Stati Scandinavi, Russia, Penisola balcanica. Roma, 1905; 8°.

* — Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio: Censimento della

popolazione del Regno d'Italia al 10 febbraio. Vol. V (1904); 8°. — Bulletin de l'Institut international de Statistique, T. XII, livr. 1; XIV, 1, 3, 4; XV, 1. Berlin-Rome, 1905; 8°. — Statistica industriale, Riassunto delle notizie sulle condizioni industriali del Regno. Parte II. Riassunto per Provincie. 1905; 8°. — Statistica delle cause di morte nell'anno 1902. 1905; 8°. — Statistica dei debiti comunali e provinciali per mutui al 31 dicembre degli anni 1896, 1899, 1900. — Annali di Statistica. Atti della Commissione per la statistica giudiziaria e notarile. Sessione del luglio 1904, — Movimento della popolazione secondo gli Atti dello Stato Civile nell'anno 1903, matrimoni, nascite e morti: introduzione; 8°.

Roma. Ministero delle Finanze: Statistica del commercio speciale di importazione e di esportazione. Nov.-31 dic. 1904-1° genn. al 31 ott. 1905. — Bollett. di Legislazione e Statistica doganale e comm. 1904, a. XXI, novembre dicembre. 1905, anno XXII, gennaio-settembre. — Relazione sull'Amministrazione delle Gabelle per l'esercizio 1903-1904. 1905; 4°. — Tabella indicante i valori delle merci nell'anno 1904 per le statistiche commerciali. — Movimento commerciale del Regno d'Italia nell'anno 1904; 4°.

** — Ministero dell'Interno: Calendario generale del Regno d'Italia pel 1905; 8°.

* — Ministero della Pubblica Istruzione: Annuario 1905; 8°. — Cataloghi dei codici orientali di alcune Biblioteche d'Italia, fasc. 7°. Indice generale. 1904; 8°. — Le opere di Galileo Galilei, vol. XVI; 8°. — Ruoli di anzianità al 16 giugno 1905; 8°.

— Ministero della Marina. Monografia storica dei porti dell'antichità nella penisola iberica. Roma, 1905; 4°.

* — Senato del Regno. Bollettino delle pubblicazioni di recente acquisto. Anno 1904, N. 3; 1905, 1-4; 8°.

* — Camera dei Deputati. Legislatura XXI, 2ª Sessione 1902-1904. — Discussioni, vol. I-XIV e Indice. — Raccolta degli Atti stampati, vol. 1-12. Documenti, vol. 1-3; 4°.

* — R. Accademia dei Lincei: Annuario 1905; 16°. — Memorie, Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, serie V, vol. V, fasc. 1-13. — Rendiconti. — Atti, serie 5ª, Notizie degli scavi, 1904, vol. I. fasc. 4-12; II, 1-7. — Rendiconti. — Rendiconto dell'ad. solenne del 4 giugno 1905. Vol. III.

* — Pontificia Accademia Romana dei Nuovi Lincei. Atti, Anno LVIII; Sessione 1° dicembre 1904; 4°. — Memorie, Vol. XXII. 1904; 4°. — G. Lapponi. In memoria del Prof. Mons. Francesco Regnani. Roma, 1903; 4°.

* — Accademia di conferenze storico-giuridiche. Studi e documenti di storia e diritto. Anno XXV, fasc. 3°, 4°. 1904; 4°.

* — R. Comitato Geologico d'Italia. An. 1804, N. XXXV, 3-4; 1905, XXXVI, 1, 2; 8°. — Catalogo della Biblioteca dell' Ufficio geologico. 1° gennaio 1904, 5° suppl. (1902-1903); 8°. — Bollettino, 1904, 4; 8°.

* — Istituto di Diritto Romano. Bullettino, A. XVII, fasc. 1-3. 1905; 8°.

Roma. Società degli Agricoltori italiani. Bollett., 1904, An. IX; X, 1905.

* — Società italiana delle scienze. Memorie di matematica e di fisica, Serie 3ª, T. XIII, 1905; 4°.

* — Specola Vaticana. Pubblicazioni, vol. VII, 1905; 8°.

* — Ufficio centrale meteorologico e geodinamico italiano. Ser. II, vol. XIV, p. III, 1892; XX, 1, 1898; XXI, 1, 1899; XXII, 1, 1900. 1904; 4°.

* **Rovereto**. I. R. Accademia di scienze, lettere ed arti degli Agiati. Ser. III. 1904, vol. X, fasc. 3, 4; 1905, vol. XI, 1, 2; 8°.

— Museo Civico. Regesto dell'Archivio comunale della città di Rovereto, fasc. 1° (1280-1450). Rovereto, 1904; 8°.

* **Saint-Louis**. Academy of Sciences. Vol. XII (1902), N. 9, 10; XIII (1903); XIV (1904), N. 1-5; 8°.

* **St-Pétersbourg**. Académie Imp. des sciences. Mémoires. Classe Physico-Mathématiques. Vol. XIII, N. 6; XIV, XV, XVI, 1-3; 4°.

* — Comité Géologique. Mémoires, Nouvelle Sér., Livrs. 10, 11, 13; 4°. — Bulletins, 1903, Vol. XXII, N. 5-10.

* — Observatoire Physique Central Nicolas. Annales. 1900. Supplément (1902); Annales 1902. Part. 1re et 2e et Suppl. 1904; 4°.

* — Société physico-chimique russe. Journal.T. XXXVI, 9; XXXVII, 1-7; 8°.

* — **San Francisco**. California Academy of Sciences. Memoirs, vol. IV (1904); 4°. — Proceedings, 3 Ser. Botany, vol. II, N. 11. — Geology, vol. I, 10; — Zoology, vol. III, N. 7-13.

* **Sassari**. Università. Studi sassaresi. Sezione Scienze fisico-mediche. Anno III, Sez. II, fasc. 2°. — Sezione Scienze morali. Anno III, Sez. I, fasc. 2°.

* — R. Università. Annuario per l'anno scolastico 1904-1905; 8°.

* **Siena**. R. Accademia dei Fisiocritici. Atti, Serie 4ª, vol. XVI, 7-10; XVII, 1-4; 8°. — Cataloghi: Museo mineralogico, geologico e paleontologico.

* — R. Università degli studi. Annuario accademico 1904-1905; 8°.

* **Stockholm**. Académie R. Suédoise des sciences. Handlingar (Mémoires), Bd. 37, 3. Tst. & Ind. des vols. 37 et 38; 39, 1-5; 4°. — Archiv för matematik, astronomi och fysik. Bd. I, 3, 3; II, 1, 2; 8°. — Archiv för kemi, mineralogi och geologi. Bd. I, 3, 4; II, 1; 8°. — Archiv för Botanik. Bd. III, 4; IV, 1-4; 8°. — Archiv för Zoologi. Bd. II, 1-3; 8°. — Les prix Nobel en 1902. 1905; 8°. — Nobel Meddelanden. Bd. I, 1, Decomposition of Water by Radium by Ramsay. — Peter Artedi. A bicentenary memoir. — Les prix Nobel en 1901. 1904; 8°. — Accesions-Katalog 18-19, 1903-1904, 1.

* **Stuttgart**. Vereins für vaterländische Naturkunde in Würtemberg. Jahreshefte 61, Jahrgang 1905; 8°. — Beilage... Ergebnisse der pflanzengeographischen Durchforschung von Württemberg. Baden und Hohenzollern, I; 8°.

Sunderland. West Hendon House Observatory Publications. N. III. Observations of variable Stars, made in the Years 1866-1904 by T. W. Berckhouse, 1905; 4°.

* **Thonon**. Académie Chablaisienne. Mémoires et Documents. T. XVI (1902), XVII (1903); 8°.

Tōkyo. Medicinischen Facultät K.-Japanischen Universität. Mitteilungen. Bd. V, N. 3; VI, 3. 1904-1905; 8°.

* — College of Science Imp.-University Journal, Vol. XIV, 1904; XX, Art. 3-7 (1904).

— Earthquake Investigation Committee in Foreign Languages, Publications, Nos 19-21. 1904-1905; 8°.

* **Torino**. R. Accademia di Agricoltura. Annali, Vol. XLVII, 1904. 1905; 8°.

* — R. Accademia di Medicina. Giornale, An. LXVII, 1904, N. 11, 12; An. LXVIII, 1905, 1-10; 8°.

* — Club Alpino italiano. Rivista mensile 1904, Vol. XXIII, 12; 1905, XXIV, 1-12; 8°.

* — R. Osservatorio. Annuario astronomico pel 1905; 8°.

— Musei di Zoologia ed Anatomia comparata. Bollettino. Vol. XIX. 1904; 8°.

* — R. Museo Industriale Italiano. Annuario per l'anno scolastico 1901-2, 1902-3, 1903-4, 1904-5. Torino, 1905; 8°.

— Società di Archeologia e Belle Arti. Atti. Vol. VII, fasc. 5°. 1905; 8°.

* — Società degli Ingegneri e degli Architetti. Atti, An. VII, fasc. 7-9; VIII, fasc. 1-9. 1904; 8°.

* — Società Meteorologica italiana. Bollettino mensuale. 1903, Serie II, Vol. XXIII, N. 4-12; 1904, N. 1-6; 4°.

— R. Università. Annuario 1904-1905; 8°.

* — Istituto di scienze giuridico-politiche: Brusa (C. F.). La maggioranza richiesta per la nomina dei liquidatori di una Società per azioni. Milano, 1905; 8°. — Buraggi (G. C.). Uno statuto ignoto di Amedeo IX Duca di Savoia. Torino, 1905; 8°. — Castagneri (Elisa). Sulla persistenza dei " Collegia „ Romani nelle Corporazioni d'arti e mestieri medioevali. Torino, 1905; 8°. — Chironi (G.). Lo stato di necessità nel diritto privato. Torino, 1906; 8°. — Cuzzi (V.). Recensioni. Pisa, 1904; 8°. — Frola (G.). Gli statuti canavesani. Studio di diritto piemontese antico. Pinerolo, 1905; 8°. — Jacoangeli (Matilde). Condizione giuridica della donna nell'antichità ed evo medio. Torino, 1905; 8°. — Levi (G.). Della natura giuridica dei titoli al portatore. Milano, 1905; 8°. — Molle (G.). La concezione materialistica del diritto nella filosofia di F. Nietzsche. Oneglia, 1905; 8°. — Morano (A.). Reato e pena nell'antico diritto piemontese. Torino, 1905; 8°. — Olmo (L.). La beneficenza preventiva. Studio giuridico sociale. Torino, 1905; 8°. — Ottolenghi (E.). Rivista della giurisprudenza commerciale straniera. Francia: anni 1903-1904. Milano, 1905; 8°. — Palazzo (M.). La questione dell'origine del titolo al portatore. Torino, 1905; 8°. — Ricca-Barberis. Sulla tutela del nome commerciale. Milano, 1904; 8°. — Id. Sulla capacità a disporre dell'immagine. Milano, 1904; 8°. — Samarani (A.). L'evoluzione del diritto della donna nella storia di Roma. Pisa, 1904; 8°. — Sarfatti (M.). I trusts americani di fronte alla legislazione federale. Milano, 1905; 8°. — Id. Una nuova legge inglese sulle Trade-Unions. Milano, 1905; 8°. — Id. A proposito della natura giuridica del " servizio di cassette di sicurezza „ nelle Banche. Milano, 1905; 8°.

Torino. Consiglio Provinciale. Atti, Anno 1904. 1905; 8°.

* — Municipio. Annuario 1903-1904; 8°. — Bollettino statistico, An. XXXIII, N. 9-12, settembre-dicembre 1904; 4°; An. XXXIV, 1-10, gennaio-ottobre 1905; 4°. — Atti del Consiglio, anno 1904-5; 4°. — Relazione sulle condizioni igienico-sanitarie del Comune. Biennio 1902-1903; 1905; 8°.

* **Toronto**. Canadian Institute. Transactions, 1905, N. 16, vol. VIII, part 1.

* — University Studies. Philological Series. N. 1.

* **Toulouse**. Université. Annales de la Faculté des sciences, 1904, 2e Sér., T. VI, fasc. 1-4 (1904); VII, 1 (1905); 4°. — Annales du Midi, 16me sér., fasc. 63-65, 1904; 8°. — Annuaire pour l'année 1904-905; 16°.

Tufts College, Mass. Studies, N. 8 (Scientific Series). 1904; 8°.

* **Upsala**. Regiae Societatis scientiarum Upsaliensis Nova Acta, Ser. quartae, Vol. 1°, fasc. 1°. 1905; 4°.

* — Universitet. Katalog öfver västerås läroverksbiblioteks inkunabler; 8°. — Årsskrift. 1904; 8°.

— Bulletin mensuel de l'Observatoire Météorol. de l'Université. Vol. XXXVI. An. 1904. 1905; 4°.

* **Urbana** (Illn.). Illinois State Laboratory of natural history. Bulletin, vol. VII, 1905, art. 4.

* **Venezia**. R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Atti. Ser. VIII, T. LXIV, disp. 1-9, 8°. — Concorsi a premio. — Memorie, T. XXVIII, 3, 5; 4°. — Monumenti veneti nell'isola di Creta. Ricerche e descrizioni fatte dal Dr. G. Gerola per incarico del R. Istituto. Vol. I. Venezia, 1905; 4°.

* **Verona**. Accademia di agricoltura, scienze, lettere, arti e commercio. Atti e Memorie, ser. IV, vol. V, fasc. I; 8°. — Osservazioni meteorologiche dell'anno 1903.

* **Vicenza**. Accademia Olimpica. Atti 1903-1904, vol. XXXIV; 8°.

* **Washington**. Smithsonian Institution. Annual Report... the Year ending June 30, 1903. — Contributions to Knowledge, Part of vol. XXXIII, XXXIV, n. 1438, 1459. — Miscellaneous Collections, vol. XLIV, n. 1417, 1440; XLV, 1445; XLVI, 1441, 1447, 1543, 1544; XLVII, 1467 p. 1a; 1478 p. 2a e 3a. — National Museum, Special Bulletin, American Hydroids, p. II, The Sertularidae, 1904; Bulletin, N. 50, 53, p. 1a. — Proceedings, vol. XXVII. — The 1900 solar eclipse Expedition of the Anthrophisical Observatory. 1904; 4°.

* — Department of Commerce and Labor. Report of the Superintendent of the *Coast and Geodetic Survey* showing the progress of the Work from July 1, 1903, to June 30, 1904; 4°.

* — Department of Commerce and Labor. Bulletin of the Bureau of Standards. Vol. I (1904-1905), Ns 1, 2; 8°.

* — Department of Interior U. S. Geological Survey. Geological Atlas of the U. S., folio 91-106. Washington, 1904; f°.

* — Bureau of American Ethnology. 21° Annual Report, 1899-1900; 22d Annual Report. 1900-1901 in 2 vol.

— Librarian of Congress. Report... for the Fiscal Year ending June 30, 1903; June 30, 1904; 2 vol. 8°.

* **Wien**. K. Akademie der Wissenschaften. Almanach 1895, 1896, 1903. Archiv für österreichische Geschichte, XCII Bd., 2 Hälf.; XCIII, 1. — Denkschriften Mathematisch-Natürwiss. Klasse. Bd. LXXIV (1904); 4°. — Philosophisch-historische Klasse. XLVIII (1902) Bd.; XLIX, L (1904); 4°. — Register zu den Bd. XXXVI-L. — Fontes rerum austriacarum. Oesterreichische Geschichts-Quellen; I Abth., IX Bd., 1 Hälfte. II Abth. XLIII Bd. 1 Hälfte; LVII Bd. — Mittheilungen der Erdbeben-Kommission. N. F., N. 22, 23, 24. — Sitzungsberichte. Mathem.-Naturwissenschaftliche Klasse. Abth. I, CX Bd., 8-10 Heft (1901); CXI, 1-3 (1902); CXII, 1-10 (1903); Abt. II a, CXII, 7-10 (1903); Abt. II b, CX Bd. 10 Heft (1901); CXII, 7-10 (1903); Abth. III, CXII, Bd. 1-10 Heft (1903); 8°. — Sitzungsberichte Philosophisch-historische Klasse. CXLIV Bd. (1900); CXLVII, 1903; 8°.

* — K. K. Geologischen Reichsanstalt. 1904, Verhandlungen, N. 13-18; 1905, 1-12; Abhandlungen, Bd. XIX, 2, 3; XX; — Jahrbuch, Jahrgang 1903, LIV Bd.; LV, 1-4; General-Register der Bd. XLI-L des Jahrbuches und der Jahrg. 1891-1900 der Verhandlungen. 1905, 8°.

— Internationale Erdmessung. XIII Bd. 1903; 4°.

— K. u. K. Militär Geographischen Institutes. Die Ergebnisse der Triangulierungen. Bd. I-III. 1901-1905; 8°.

* — K. K. Zoologisch-botanischen Gesellschaft. Jahrg. 1904, LIV Bd.; 8°.

* **Würzburg**. Physikalisch-medicinischen Gesellschaft. 1904. Sitzungsberichte, 4-10; 1905, 1-2. — Verhandlungen. N. F., Bd. XXXVII, N. 3-10; XXXVIII, 1.

* **Zagreb**. Kr. Hrvatsko-Slavonsko-Dalmatinskog Zemaljskog Arkiva. Vjestnik, God. VII, Sves. 1-4.

* — Jugoslavenske Akademija znanosti i umjetnosti: ·Codex diplomaticus regni Croatiae, Dalmatiae et Slavoniae. Vol. II. Diplomata Saec. XII. — Grada za povijest književnosti krvastke. Kniga 4. — Ljetopis za godina 1904; 19 Svezak. — Rad, Razredi histor.-filolog. i filosof.-juridički. Knjiga 157, 160. — Rječnik hrvatskoga ili srpskoga jezika, Svezak 24. — Starine, knjiga XXXI; 8°. — Zbornik za narodni život i običaje južnih Slavena Kniga IX, Svezak 2, X, 1.

— Hrvatsko naravoslovno društvo (Societas scientiarum naturalium croatica). Glasnik. Godina XVI. Draga Polovina; XVII, Piva Polovina. 1905; 8°.

* **Zürich**. Naturforschenden Gesellsch. Vierteljahrsschrift, 1904. 1, 2, Heft; 8°.

* — Commission géologique suisse. Matériaux pour la Carte géologique de la Suisse: Erläuterungen zur geologischen Karte des unteren Aare-, Reuss- und Limmat-Tales in 1 : 25.000, von F. Mühlberg. Cartes spéciales N. 31, 34-36; Carte VII, 2 Ed., Rollier, Weissenstein et Rollier, Delémont.

— Schweiz. Polythechnichum. Festschrift zur Feier des fünfzigjähringen Bestehens des eidg. Polytechnichums: I Teil: Geschichte der Gründung des eidgenössischen Polytechnikums, mit einer übersicht seiner Entwickelung 1855-1905, von Wilhelm-Œchsli. — II. Teil.: Die bauliche Entwicklung Zürichs in Einzeldarstellungen von Mitgliedern des zürcher Ingenieur- und Architektenvereins. Zürich, 1905; 4° (*dono della Direzione del Politecnico*).

PERIODICI 1905.

** **Academy** (The) and Literature. London; 4°.
* **Acta** mathematica. Vol. 28, 29. Zeitschrift herausg. von G. Mittag-Leffler. Stockholm; 4°.
** **Allgemeine** Deutsche Biographie. N. 246-253. Leipzig; 8°.
** **Annalen** der Physik und Chemie. Leipzig; 8°.
** **Annales** de Chimie et de Physique. Paris; 8°.
* **Annals** and Magazine of Natural History. London; 8°.
** **Annals** of Mathematics, second series. Charlottesville; 4°.
** **Antologia** (Nuova). Rivista di scienze, lettere ed arti. Roma; 8°.
** **Archiv** für Entwickelungsmechanik der Organismen. Leipzig; 8°.
** **Archives** des Sciences physiques et naturelles, etc. Genève; 8°.
** **Archives** italiennes de Biologie... sous la direction de A. Mosso. Turin; 8°.
** **Archivio** per le Scienze mediche. Torino; 8°.
** **Archivio** storico italiano. Firenze; 8°.
* **Archivio** storico lombardo. Milano; 8°.
* **Archivio** storico sardo. Edito dalla Società storica sarda. Cagliari; 8°.
* **Ateneo** veneto. — Rivista mensile di scienze, lettere ed arti. Venezia; 8°.
** **Athenaeum** (The). Journal of English and Foreign Literature, Science, the Fine Arts, Music and the Drama. London; 4°.
* **Beiblätter** zu den Annalen der Physik und Chemie. Leipzig; 8°.
* **Beiträge** zur chemischen Physiologie und Pathol. VI Bd.; VII, 1-12 Heft. Braunschweig; 8°.
** **Berliner** philologische Wochenschrift; 8°.
** **Bibliografia** italiana. Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. Milano; 8°.
** **Bibliographie** der deutschen Zeitschriften-Litteratur, mit Einschluss von Sammelwerken und Zeitungen. Bd. XIV, XV, XVI, 1, 2. Supplementband, Liefg. 5. V. 1-5. Leipzig; 4°.
** **Bibliotheca** Philologica Classica. Vol. XXXI (1904); XXXII, 1905, primum, secundum. Lipsiae; 8°.
Biblioteca nazionale centrale di Firenze. Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. Firenze; 8°.
** **Bibliotheca** mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausg. von G. Ernesström. Stockholm; 8°.
** **Bibliothèque** de l'École des Chartes; Revue d'érudition consacrée spécialement à l'étude du moyen âge, etc. Paris; 8°.
** **Bibliothèque** universelle et Revue suisse. Lausanne; 8°.
** **Bulletins** de la Société anatomique de Paris, etc. Paris; 8°.
** **Bollettino** Ufficiale del Ministero dell'Istruzione Pubblica. Roma; 8°.
** **Bullettino** (Nuovo) di Archeologia cristiana. Roma; 8°.
** **Bullettino** di Archeologia e Storia dalmata. Spalato; 8°.
** **Centralblatt** für Mineralogie, Geologie und Paleontologie in Verbindung mit dem neuen Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Paleontologie. Stuttgart; 8°.
* **Cimento** (Il nuovo). Pisa; 8°.

** **Comptes-rendus** hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. Paris; 4°.
* **Elettricista** (L'). Rivista mensile di elettrotecnica. Roma; 4°.
** Ἐφεμερὶς ἀρχαιολογικὴ Ἐν Ἀθηναῖς. 4°.
** **Fortschritte** der Physik im Jahre 1904, 1, 2. Braunschweig; 8°.
* **Gazzetta** chimica italiana. Roma; 8°.
* **Gazzetta** Ufficiale del Regno. Roma; 4°.
* **Gegenbaurs** Morphologisches Jahrbuch. Leipzig; 8°.
* **Giornale** del Genio civile. Roma; 8°.
** **Giornale** della libreria, della tipografia e delle arti e industrie affini. Milano; 8°.
* **Giornale** storico e letterario della Liguria diretto da Achille Neri e da Ubaldo Mazzini. An. V, 1904; VI, 1905. Spezia; 8°.
** **Giornale** storico della Letteratura italiana. Torino; 8°.
** **Guida** commerciale ed amministrativa di Torino. 8°.
* **Heidelberger Jahrbücher** (Neue). Heidelberg; 8°.
* **Historische** Zeitschrift. München; 8°.
* **Jahrbuch** über die Fortschritte der Mathematik. 1901, Bd. XXXIII (1902), Heft 3; XXXIV (1903), 1, 2. Berlin; 8°.
** **Jahrbuch** (Neues), für Mineralogie, Geologie und Palaeontologie, etc. Stuttgart; 8°.
** **Jahresberichte** der Geschichtswissenschaft im Auftrage der historischen Gesellschaft zu Berlin, herausgegeben von E. Berner. XXVI Jahrg. 1903. Berlin; 8°.
* **Jornal** des sciencias Mathematicas e Astronomicas. Publicado pelo Dr. F. Gomes Teixeira. Coimbra; 8°.
* **Journal** (The American) of Science. Edit. Edward S. Dana. New-Haven; 8°.
** **Journal Asiatique**, ou Recueil de Mémoires, d'Extraits et de Notices relatifs à l'histoire, à la philosophie, aux langues et à la littérature des peuples orientaux. Paris; 8°.
** **Journal** de Conchyliologie, comprenant l'étude des mollusques vivants et fossiles. Paris; 8°.
** **Journal** de Mathématiques pures et appliquées. Paris; 4°.
** **Journal** des Savants. Paris; 8°.
** **Journal** für die reine u. angewandte Mathematik. Berlin; 4°.
* **Journal** of Physical Chemistry. Ithaca N. Y.; 8°.
** **Minerva**. Jahrbuch d. gelehrten Welt. XV. Jahrg. 1905-1906; Strassburg, 1906; 16°.
* **Monatshefte** für Mathematik und Physik. Wien; 8°.
** **Moyen** (Le) **Age**. Bulletin mensuel d'histoire et de philologie. Paris; 8°.
** **Nature**, a Weekly illustrated Journal of Science. London; 8°.
* **Nieuw Archieff** voor Wirskunde. Uitgegeven door hel Wiskundig Genootschap te Amsterdam; 8°.
** **Palaeontographica**. Beiträge zur Naturgeschichte der Vorzeit. Vol. 45, 46. Stuttgart, 1898-1900.
** **Petermanns** Mitteil. aus Justus Perthes' Geographisc. Anstalt. Gotha; 8°.
** — Ergänzung. N. 149 (1904), 151 (1905).

* **Physical Review** (The); a journal of experimental and theoretical physic... Published for Cornell University Ithaca; New-York; 8°.
** **Poggendorff's** biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften. Leipzig; 8°.
* **Prace** matematyczno fizyczne. T. XV-XVI. Warzawa, 1905; 8°.
* **Psichologische Studien** herausg. von W. Wundt. Neue Folge der Philosophische Studien. Leipzig; 8°.
** **Quarterly** Journal of pure and applied Mathematics. London; 8°.
** **Raccolta** Ufficiale delle leggi e dei decreti del Regno d'Italia. 8°.
** **Reichenbach** (L.) et (H. G.) fils. Icones florae germanicae et helveticae simul terrarum adjacentium ergo mediae Europae. Opus..... conditum, nunc continuatum Dre G. Beck de Mannagetta. Tom. XIX, 2, Decas 3-5; 24, Decas 7-8. Lipsiae et Gerae; 4°.
** **Revue** archéologique. Paris; 8°.
** **Revue** de la Renaissance. Paris; 8°.
* **Revue** de l'Université de Bruxelles. 8°.
** **Revue** des Deux Mondes. Paris; 8°.
** **Revue** générale des sciences pures et appliquées. Paris; 8°.
** **Revue** numismatique. Paris; 8°.
** **Revue** politique et littéraire, revue bleue. Paris; 4°.
** **Revue** scientifique. Paris; 4°.
* **Revue** semestrielle des publications mathématiques. Amsterdam; 8°.
* **Rivista** di Artiglieria e Genio. Roma; 8°.
** **Rivista** di Filologia e d'Istruzione classica. Torino; 8°.
** **Rivista** d'Italia. Roma; 8°.
Rivista di Topografia e Catasto. Torino; 8°.
** **Rivista** filosofica in continuazione della *Filosofia delle Scuole italiane* e della *Rivista italiana di Filosofia.* Pavia, 1903; 8°.
* **Rivista** internazionale di scienze sociali e discipline ausiliarie. Roma; 8°.
* **Rivista** italiana di Sociologia. Roma; 8°.
* **Rivista** storica italiana. Torino; 8°.
Rosario (Il) e la Nuova Pompei. Valle di Pompei; 8°.
** **Science**. New-York; 8°.
* **Science Abstracts**. Physics and Electrical Engineering. London; 8°.
** **Séances** et **travaux** de l'Acad. des sciences morales et polit. Paris; 8°.
* **Sperimentale** (Lo). Archivio di Biologia. Firenze: 8°.
** **Stampa** (La). Gazzetta Piemontese. Torino; f°.
** **Studi** medioevali diretti da F. Novati e R. Renier. Torino; 8°.
* **Tridentum**. Rivista mens. di studi scient. A. VIII, fasc. I-VIII. Trento; 8°.
Valle di Pompei. Anno 1905.
* **Wiskundige** Opgaven met de Oplossingen, door de leden van het Wiskundig Genootschap, VIII Deel. Achtste Stuk. Amsterdam; 8°.
* **Zeitschrift** für matematischen und naturwissenschaftl. Unterricht, herausg. v. J. C. Hoffmann. Leipzig; 8°.
** **Zeitschrift** für physikalische Chemie. Leipzig; 8°.
** **Zoologischer Anzeiger**, herausg. von Prof. J. Victor Carus in Leipzig; 8°.

Lascito del Colonnello Ottavio FORNACA.

Ackermann (L.). Pensées d'une solitaire précédées d'une autobiographie. Paris, 1882; 16°.

Acollas (E.). Philosophie de la science politique. Paris, 1877; 8°.

Adam (C.). La philosophie en France. Paris, 1894; 8°.

Adams (W. Davenport). Dictionary of English Literature. New and revised edition. London, Paris et New York s. a.; 8°.

Alberti (F. d'). Dizionario universale della lingua italiana. Milano, 1834-35, 6 vol., 4°.

Alfieri. Apostolat libéral d'un sénateur italien à Paris. Paris, 1889; 16°.

Almanacco italiano. 1896-1904. Firenze, 9 vol.; 16°.

André-Nuytz (L.). Le positivisme pour tous. Paris, 1866; 8°.

Angiulli (A.). La filosofia e la ricerca positiva. Quistioni di filosofia contemporanea. Napoli, 1868, 1 vol.; 8°.

Annales de l'empire depuis Charlemagne. Genève, 1776; 12°.

Arréat (L.). Journal d'un philosophe. Paris, 1887; 18°.

Aubé (B.). Histoire des persécutions de l'Église. 2e édit.

Autorità legittima de' vescovi e de' sovrani per procedere alla Riforma de' Regolari. Venezia, 1768; 8°.

Aviano e **Gabria**. Le favole tradotte da G. G. Trombelli. Venezia, 1735; 8°.

Bagehot (W.). Lois scientifiques du développement des nations. Paris, 1873; 8°.

Bain (A.). L'esprit et le corps. Paris, 1873; 8°.

Barbiera (R.). Il salotto della contessa Maffei e la società milanese (1834-1886). Milano, 1895; 8°.

Barnout (H.). Le monde sans Dieu. Paris, 1890; 18°.

Barthélemy Saint-Hilaire (J.). Le Bouddha et sa religion. Paris, 1866; 18°.

— Mahomet et le Coran. Paris, 1865; 18°.

Bartholomew (J. G.). The pocket atlas and guide to Paris. London, 1889; 16°.

— Handy reference Atlas of the World. London, 1888; 8°.

Bartoli (D.). Dell'huomo di lettere difeso et emendato. Venetia, 1689; 12°.

Bastiat (Fred.). Sophismes économiques. Paris, 1846-48, 2 vol.; 16°.

Bayle (P.). Dictionnaire historique et critique. Paris, 1820, 16 vol.; 8°.

Bembo (P.). Epistolarum. Basileae, 1539; 8°.

Benham (W.). The Dictionary of religion. London, 1891; 8°.

Béraud (P. M.). Étude sur l'idée de Dieu. Paris, 1875; 18°.

Bert (P.). La morale des Jésuites. 8e édit. Paris, 1880; 8°.

Berti (D.). Giordano Bruno da Nola, sua vita e sua dottrina. Nuova ediz. Torino, 1889; 8°.

Bertoldo, Bertoldino e **Cacasenno.** Venezia, 1791, 2 vol.; 8°.

Bertrand (A.). Lexique de philosophie. Paris, 1892; 8°.

Bianchi-Giovini (A.). Biografia di Fra Paolo Sarpi. Torino, 1849; Firenze. 1850, 2 vol. legati assieme.

— Storia dei Papi. Capolago-Torino, 1853-64, 12 vol.; 8°.

— La Storia biblica dalla creazione del mondo alla traslazione degli Ebrei a Babilonia. Torino, 1851, 1 vol.; 8°.

Bible Dictionary (A Concise) based on the Cambridge Companion to the Bible. Cambridge, s. a.; 8°.

Biblia ad vetust. exemplaria nunc recens castigata. Venetiis, 1598; 4°.

Bibliothèque des sciences contemporaines. 1e Sér., T. 1-20. Paris, 1876-97, 20 vol.; 8°. — 2e Sér., T. 1-3, 5. Paris, 1897-901, 4 vol.; 8°.

Binet (A.) et **Féré** (Ch.). Le magnétisme animal. Paris, 1887; 8°.

Blachie's Modern Cyclopedia of Universal information. London, 1899-1890, 8 vol.; 8°.

Blanc (Louis). Napoléon. Les deux clergés. Le divorce. Paris, 1870; 32°.

Blignières (C. de). Exposition abrégée et populaire de la philosophie et de la religion positives. Paris, 1857; 18°.

Block (M.). Dictionnaire général de la politique. Nouvelle édition. Paris, 1873-1874, 2 vol.; 8°.

Blondel (H.). Les approximations de la vérité. Paris, 1900; 8°.

Bobba (M.). Pitagora, i suoi tempi e il suo istituto. Torino, 1887; 8°.

Boccacci (G.). Il Decameron. Venetia, 1602; 4°.

Boccardo (G.). La sociologia nella storia, nella scienza, nella religione e nel cosmo. Torino, 1888; 8°.

Boissière (P.). Dictionnaire analogique de la langue française, répertoire complet des mots par les idées et des idées par les mots. 3e édition. Paris; 8°.

Bombard (E.). La marche de l'humanité et les grands hommes d'après la doctrine positive. Paris, 1900; 8°.

Bordier (A.). La vie des Sociétés. Paris, 1887; 8°.

Boselli (P.). Parole rivolte al Consiglio Provinciale nella riapertura della Sessione. Torino, 1882; 8°.

Bouillet (M. N.). Dictionnaire universel des sciences, des lettres et des arts. 10e édit. Paris, 1872; 8°.

Bourdeau (L.). Le problème de la mort. Paris, 1893; 8°.

— L'histoire et les historiens. Paris, 1888; 8°.

Bourdet (E.). Principes d'éducation positive. Nouv. édition. Paris, 1877; 8°.

Boursin (E.) et **Challamel** (A.). Dictionnaire de la Révolution française: institutions, hommes et faits. Paris, 1893; 4°.

Bovio (G.). Il naturalismo. Torino, 1882; 8°.

Bresson (L.). Idées modernes. Paris, 1880; 8°.

— Les trois évolutions: intellectuelle, sociale, morale. Paris, 1888; 8°.

Brewer (E. Cobham). Dictionary of phrase and fable. 14e édition. London, Paris, New York, s. a.; 8°.

Brillat-Savarin. Physiologie du goût. Paris, 1870; 18°.

Brothier (L.). Storia popolare della filosofia. Napoli, 1881; 16°.

Brown (J.). Élémens de médecine. Turin, an. 13; 8°.

Buccola (G.). La dottrina della eredità e i fenomeni psicologici. Palermo, 1882, 1 volumetto; 8°.

Büchner (L.). Scienza e natura, saggi di filosofia e scienza naturale; versione italiana di Stefanoni Luigi. Milano, 1868, 1 vol.; 8°.

— Forza e materia. Studi popolari di filosofia e storia naturale; versione italiana di Stefanoni Luigi, 2a ediz. Milano, 1868, 1 vol.; 8°.

Büchner (L.). Conférences sur la théorie darwinienne. Leipzig, 1869; 8°.
— L'homme selon la science. Paris, 1870; 8°.
— La vie psychique des bêtes. Paris, 1881; 8°.
— A l'aurore du siècle. Paris, 1901; 8°.
Buckle (H. T.). Histoire de la civilisation en Angleterre. Paris, 1865, 5 vol.; 8°.
Bulwer-Lytton (Edward). The last days of Pompeii. Leipzig, 1842; 16°.
Burnouf (E.). La vie et la pensée. Paris, 1886; 8°.
Caesaris Commentariorum. Parisiis, 1533; 8°.
Calendrier (Le nouveau) des grands hommes. Paris, 1893-1894, 2 volumi legati in 1 vol.; 8°.
Canestrini (G.). Origine dell'uomo. Milano, 1866; 8°.
Canini (A.). Mente, fantasia e cuore. Versi. Ed. 2ª corretta ed accresciuta, Atene, 1852; 8°.
Cantù (C.). Della letteratura italiana: esempii e giudizii. 2ª ediz. torinese. Torino, 1860; 8°.
Cappelletti (L.). Le donne della rivoluzione. 2ª ediz. Livorno, 1890; 8°.
Carducci (G. B.). Su le memorie e i monumenti di Ascoli nel Piceno. Discorso. Fermo, 1853, 1 vol.; 8°.
Carini (I.), **De Marchi** (E.), **Pazzi** (G.), **Penco** (G.). Cesare Cantù, educatore, cittadino, storico, letterato, filosofo: giudizii. Torino, 1895; 8°.
Carrano (F.). Ricordanze storiche del risorgimento italiano (1822-1870). Torino, 1885, 1 vol.; 8°.
Cassell's concise Cyclopaedia. London, 1883; 8°.
— illustrated Guide to Paris. London, 1886; 8°.
Castagnary, **Grousset**, **Ranc** et **Sarcey**. Le bilan de l'année 1868. Paris, 1869; 8°.
Castagnola (S.). Da Firenze a Roma. Diario storico-politico del 1870-71. Torino, 1896, 1 vol.; 8°.
Caston (A. de). Les marchands de miracles, histoire de la superstition humaine. Paris, 1864; 8°.
Catechisme (Le) du Concile de Trente. Mons, 1685, 2 vol.; 12°.
Cause (Le) delle nostre disfatte. Livorno, 1888; 8°.
Cavallotti (F.). Due Popoli. Leggenda. Milano, 1875; 8°.
César. Les Commentaires. Lyon, 1699; 12°.
Challemel-Lacour. La philosophie individualiste. Paris, 1864; 8°.
Champion (E.). Voltaire. Études critiques. Paris, 1893; 8°.
Chassagne. Histoire populaire des coups d'État en France. Le général Boulanger. Paris; 8°.
Chénier (M.-J. de). Charles IX ou l'école des rois. Tragédie. Beaucaire, 1790; 8°.
Chiaves (D.). Giudice mal giudicato. Apologia del giurì nei giudizii penali. Torino, 1879; 8°.
Cicero (M. T.). Cato. London, 1773; 8°.
— Rhetoricorum ad Herennium. Lugduni, 1579; 16°.
— Les deux livres de la divination. Paris, an. III; 12°.
Coignet (C.). La morale indépendante dans son principe et dans son objet. Paris, 1869; 8°.
Colajanni (N.). Nel regno della Mafia (dai Borboni ai Sabaudi). Roma, 1900; 8°.

Collins. Paradoxes métaphysiques sur le principe des actions humaines. Eleutheropolis, 1756; 12°.

Combes (L.). La Grèce. Paris, Alcan; 32°.

Compendio utilissimo di quelle cose le quali a nobili e christiani mercanti appartengono. In Milano, 1561; 8°.

Comte (A.). Principes de philosophie positive. Paris, 1868; 8°.

— Cours de philosophie positive. Paris, 1877, 6 vol.; 8°.

Concile (Le Saint) de Trente. Paris, 1690; 12°.

Confucius et **Mencius.** Les quatre livres de philosophie morale et politique de la Chine. Paris, 1862; 12°.

Constitution de la République française. Nouvelle édition. Turin; 8°.

Cormenin. Pamphlet sur l'indépendance de l'Italie. Paris-Turin, 1848; 16°.

[**Crebillon**]. Les amours de Zeokinizul. Constantinople, 1779; 12°.

— L'asiatique tolérant. Londres, 1779; 12°.

— L'écumoire, ou Tanzaï et Néadarné. Maestricht, 1779; 12°.

Crétet. Exposé de la situation de l'Empire français, présenté par S. Exc. le Ministre de l'Intérieur au Corps Législatif le 2 novembre 1808. Paris, 1808; 8°.

Dantés (A.) Dictionnaire biographique et bibliographique. Paris, 1875: 1 vol.; 8°.

Darwin (C.). De l'origine des espèces. Paris, 1870; 8°.

Dayot (A.). La révolution française. Paris; 4°.

De Castro (G.). Il mondo segreto. Milano, 1864, 9 vol.; 8°.

De Dominicis (S. F.). La dottrina dell'evoluzione. Torino, 1878, 1881, 2 vol.; 8°.

De-Filippi (F.). L'uomo e le scimie. 3ª ediz. Milano, 1855; 16°.

De Gubernatis (A.). Mitologia comparata. Milano, 1880, 1 vol.; 16°.

De Pompery (E.). Simple métaphysique. Paris, 1891; 8°.

Destutt-Tracy (A. L. C.). Élémens d'idéologie. Paris, 1804-1805, 3 vol.: 8°.

Dictionary. The " Graphic " clear type pronouncing Dictionary of the English language ecc. London and Glasgow; 8°.

Dictionnaire des sciences anthropologiques, anatomie, crâniologie, archéologie préhistorique, ethnographie (mœurs, arts, industrie), démographie, langues, religions. Paris, s. a.; 4°.

[**Diderot**]. Lettre sur les sourds et muets. Amsterdam, 1772; 12°.

— Œuvres choisies. Paris, 1884; 16°.

Diogenis Laertii de vita et moribus philosophorum, libri X. Lugduni, 1551; 8°.

Diversità somma di trattamento ricevuto dalla Corte Pontificia in parità di circostanze dalle Armate Cesaree nel 1527 e dalle Armate Francesi in Italia comandate dall'invitto Generale in capite Bonaparte l'anno 1797. S. a. l.; 8°.

Draper (J. W.). Les conflits de la science et de la religion. Paris, 1875; 8°.

— A history of the intellectual development of Europe. London, 1875, 2 vol.; 8°.

Dreyfus (C.). L'évolution des mondes et des sociétés. Paris, 1888; 8°.

Driault (E.). Les problèmes politiques et sociaux à la fin du XIX siècle. Paris, 1900; 8°.

Du Camp (M.). Expédition des Deux Siciles. Paris, 1881; 8°.

Dumas (A.). La pena di morte ed il giurì napoletano. Napoli, 1863; 8°.
— Le Pape devant les Évangiles, l'histoire et la raison humaine, réponse à Sa Grandeur Mr Dupanloup. Naples, 1861; 8°.
— Mes mémoires. Paris, 1863, 10 vol.; 8°.
Dumont (L. A.). Haeckel et la théorie de l'évolution en Allemagne. Paris, 1873; 8°.
Duruy (V.). Histoire de France. Paris, 1892; 4°.
[**Duvernet**]. La vie de Voltaire. Londres, 1786; 12°.
Eclaircissement de plusieurs difficultés touchant les Conciles généraux. Amsterdam, 1734; 12°.
Elementi del gius pubblico germanico. Livorno, 1783; 8°.
Éléments de science sociale. Londres, 1869; 8°.
Emerson (G. R.). Beeton's encyclopaedia of Universel information. New edit. London, s. a., 2 vol.; 8°.
Encyclopédie générale. Tomes I-III. Paris, 3 vol.; 8°.
— (La grande). Inventaire raisonné des sciences, des lettres et des arts. Paris, Lamirault et C., 31 vol.; 8°.
— méthodique. Dictionnaire des jeux. Planches: d'amusemens des sciences; d'antiquité; d'art oratoire. Padoue, 1800, 4 vol.; 4°.
Erasmo. Encomio della pazzia. Basilea, 1761; 8°.
Ermacora (G. B.). I fatti spiritici e le ipotesi affrettate. Osservazioni sopra un articolo del Prof. G. Lombroso. Padova-Verona, 1892; 8°.
Erny (A.). Le psychisme expérimental. Paris, 1895; 8°.
Exposition de 1889. Guide bleu du *Figaro* et du *Petit Journal*. Paris, 1889; 18°.
Fabre (J.). Histoire de la philosophie. Paris, s. a., 8°.
Faggi (A.). F. A. Lange e il materialismo. Firenze, 1896; 8°.
Fanfani (P.) e **Frizzi** (G.). Nuovo vocabolario metodico della lingua italiana. P. I, vocabolario domestico. Milano, 1 vol.; 8°.
[**Fauque**]. La dernière guerre des bêtes, fable. Londres, 1758; 12°.
Federici (R.). Les lois du progrès. Paris, 1888-91, 2 vol.; 8°.
Ferrari (G.). Teoria dei periodi politici. Milano-Napoli, 1874, 1 vol.; 8°.
— Il Governo a Firenze. Firenze, 1865; 8°.
Ferraz. Socialisme, naturalisme et positivisme. Paris, 1882; 8°.
— Histoire de la philosophie pendant la révolution (1789-1804). Paris, 1889; 8°.
Ferrière (É.). Le Darwinisme. Paris, 1872; 8°.
— Les Apôtres. Essai d'histoire religieuse d'après la méthode des sciences naturelles. Paris, 1879; 8°.
Feuerbach (L.). Trenta lezioni sulla essenza della religione. Versione italiana di Stefanoni Luigi. Milano, 1872, 1 vol.; 8°.
Flammarion (C.). La pluralité des mondes habités. Paris, 1875; 8°.
— Astronomie populaire. Paris, 1881; 4°.
— Les étoiles et les curiosités du ciel. Paris, 1882; 4°.
Fleury (J.-A.). Histoire d'Angleterre comprenant celle d'Ecosse, d'Irlande et des possessions anglaises, 7e édit. Paris, 1893; 8°.
Flourens (G.). Science de l'homme. T. 1r, 2e édit. Paris, 1869; 8°.
Foncin (P.). Géographie historique. Paris, 1888; 4°.
— Géographie générale. Paris, 1888; 4°.

Fontane (Marius). Histoire universelle. T. 3-13. Paris, 1883-1904, 11 vol.; 8°.
Franchi (A.). Il razionalismo del popolo. Milano, 1864, 1 vol.; 8°.
Freret. Examen critique des apologistes de la religion chrétienne. S. l., 1767; 8°.
G. S. A. C. Fra Dolcino. Memorie storiche e considerazioni. Milano, 1889; 8°.
Galinant (P.). L'Église à travers l'histoire. Paris, 1898; 8°.
Gamerra (G.). Ricordi di un prigioniero di guerra nello Scioa. Firenze, 1897, 1 vol.; 8°.
Gardiner (S. R.). Student's history of England from the earliest Times to 1885. 2d edition. London, 1891, 3 vol.; 8°.
Garlanda (F.). La nuova democrazia americana. Studi e applicazioni. Roma, 1891; 8°.
Gellius (Aulus). Œuvres complètes. Traduction française de MM. de Chaumont, Flambart et Buisson. Paris, s. a., 2 vol.; 8°.
— Noctes atticae. Lugduni, 1537; 8°.
— Id. Lugduni, 1566; 16°.
Gener (P.). La mort et le diable. Paris, 1880; 8°.
Ghisleri (A.). Le razze umane e il diritto nella questione coloniale, 2a ediz. Bergamo, 1896; 8°.
Gigli (G.). Regole per la toscana favella. Lucca, 1734.
Giozza (G.). Le pergamene d'Arborea, ossia le vere origini della letteratura italiana. Torino, 1868; 8°.
Giraud-Teulon (A.). Double péril social. Paris, 1895; 8°.
Gladstone (W. E.). Lettere due sui processi di Stato del Regno di Napoli. Torino, 1851; 16°.
Goblot (E.). Le vocabulaire philosophique. Paris, 1901; 8°.
Goffredo da Trani. Summa in Titulos Decretalium. Venetiis, 1586; 4°.
Goguet (A. Y.). Della origine delle leggi, delle arti e delle scienze. Lucca, 1761, 3 vol.; 4°.
Gorani (J.). Les prédictions sur la révolution de France. Londres, 1797; 8°.
Gorini (P.). Sulla purificazione dei morti per mezzo del fuoco: considerazioni, sperimenti e proposte. Milano, 1876, 1 vol.; 8°.
Gould (F. J.). A concise history of religion. London, 1893, 2 vol.; 8°.
Guardia (J. M.). Histoire de la médecine. Paris, 1884; 18°.
Guerrazzi (F. D.). Memorie scritte da lui medesimo. Livorno, 1849; 8°.
[**Guibert**]. Éloge du roi de Prusse. Londres, 1787; 12°.
Guichard (V.). La liberté de penser fin du pouvoir spirituel. 2e édit.
Guyot (Yves). La morale. Paris, 1883; 18°.
— Études sur les doctrines sociales du Christianisme. Paris, 1881; 18°.
Haeckel (E.). Anthropogénie ou histoire de l'évolution humaine. Paris, 1877; 8°.
— Le Monisme lien entre la religion et la science. Paris, 1897; 8°.
— Histoire de la création des êtres organisés d'après les lois naturelles. Paris, 1874, 1 vol.; 8°.
Handtke (F.). General-Karte des Schwarzen Meeres mit den Karten des Bosphorus und der Dardanellenstrasse. Glogau, 1877; 1 fol.

Hardwicke (W. W.). The evolution of Man: His religious systems and social customs. London, 1899; 8°.
Haro (A.). L'athéisme. Poëme. 2e édit. Paris, 1898; 8°.
Hartman (F. C.). Il perfezionamento della vita fisica dell'uomo, ovvero istruzione dietetica per condurla alla felicità. Vers. italiana sull'8a ediz. tedesca, 2a ediz. Milano-Biella, 1870; 8°.
Hartmann (E. de). La religion de l'avenir. Traduit de l'allemand. Paris, 1876; 8°.
Hartmann (R.). Les peuples de l'Afrique. Paris, 1880; 8°.
Hazell's Annual for 1886-1898, 1902-1904. London, 1886-1904, 16 vol.: 8°.
Helvetius. Œuvres complètes. Londres, 1781, 5 vol.
Herzen (A.). De l'autre rive. Genève, 1871; 16°.
— Sulla parentela fra l'uomo e le scimie. 2a ediz. Firenze, 1869; 8°.
[**Holbach**]. Systême de la nature. Paris, an. 2e, 6 vol.; 12°.
— Le bon sens du curé J. Meslier. Paris, 1830; 18°.
Hommel (C. F.). Catalogus testium alphabeticus. Vratislaviae, 1780; 8°.
Horatius. Satire, epistole, arte poetica, odi. Venezia, 1798, 2 vol.; 8°.
— Le odi. Versione poetica di D. Perrero col testo a fronte. Torino, 1876, 1 vol.; 16°.
— Le satire, le epistole e l'arte poetica recate in versi italiani, col testo a fronte, dall'avv. D. Perrero. Torino, 1881, 1 vol.; 12°.
Hovelacque (A.). Les débuts de l'humanité. Paris, 1881; 18°.
Hume (D.). The history of England. London, 1773, 8 vol.; 8°.
Huxley (T. H.). Leçons de physiologie élémentaire. Paris, 1869; 18°.
Huxley (T. E.). Prove di fatto intorno al posto che tiene l'uomo nella natura. Trad. dall'inglese del prof. P. Marchi. Milano, 1869, 1 vol.; 8°.
Janet (P.). Philosophie de la révolution française. Paris, 1875; 8°.
Inama (V.). Letteratura greca, 5a ediz. Milano, 1886, 1 vol.; 16°.
Isnard (F.). Spiritualisme et matérialisme. Paris, 1879; 18°.
Issel (A.). Sull' opuscolo " Gli esperimenti vulcanici ", del Prof. Gorini. Milano, 1873; 8°.
Julian. The Old et New testament examined. London; 8°.
[**La Beaumelle**]. Mes pensées. Berlin, 1755; 12°.
Lacassagne (A.). Précis d'hygiène. Paris, 1876; 18°.
Lacombe (P.). La famille dans la Société romaine. Paris, 1889; 8°.
— Mes droits. Paris, 1869; 18°.
Ladd (J. P. B.). Commentaries on Hebrew and christian Mythology. New York, 1896; 8°.
— Appendix to commentaries on Hebrew and christian Mythology. New York, 1898; 8°.
La Mettrie. Œuvres philosophiques. Paris, 1796, 3 vol.; 8°.
Lanfrey (P.). L'Église et les philosophes au dix-huitième siècle. Paris, 1879; 8°.
Lang (A.). La Mythologie. Traduit de l'anglais par L. Parmentier. Paris, 1886; 8°.
Lange (F. A.). Histoire du matérialisme et critique de son importance à notre époque. Paris, 1877-79, 2 vol.: 8°.

Larive et **Fleury**. Dictionnaire français illustré des mots et des choses. Paris, 1887-89; 3 vol.; 4°.
Larousse (P.). Flore latine des dames et des gens du monde etc. Paris, s. a.; 8°.
[**Laurent** (du)]. Le Compère Mathieu, ou les bigarrures de l'esprit humain. Malthe, 1793, 4 vol.; 12°.
Lavisse (E.) et **Rambaud** (A.). Histoire générale du IV^e siècle à nos jours. Paris, 1893-901, 12 vol.; 8°.
Leblais (A.). Matérialisme et spiritualisme: étude de philosophie positive. Paris, 1865; 8°.
Le Bon (G.). Les premières civilisations. Paris, 1889; 8°.
— Les lois psychologiques et l'évolution des peuples. Paris, 1894; 8°.
Ledrain (E.). Histoire d'Israël. Paris, 1879-82, 2 vol.; 12°.
Lefèvre (A.). L'homme à travers les âges. Paris, 1880; 16°.
— Les races et les langues. Paris, 1893; 8°.
Leonard (W. A.). The new Story of the Bible. 2^d and revised edition. London, 1904; 8°.
Letourneau (C.). Physiologie des passions. Paris, 1878; 16°.
— L'évolution de l'esclavage dans les diverses races humaines. Paris, 1897; 8°.
— La guerre dans les diverses races humaines. Paris, 1895; 8°.
— L'évolution juridique dans les diverses races humaines. Paris, 1891; 8°.
— L'évolution politique dans les diverses races humaines. Paris, 1890; 8°.
— L'évolution de la propriété. Paris, 1889; 8°.
— L'évolution du mariage et de la famille. Paris, 1888; 8°.
— L'évolution de la morale. Paris, 1887; 8°.
— L'évolution religieuse dans les diverses races humaines. Paris, 1892; 8°.
Lévi (E.). Histoire de la magie. Paris, 1860; 8°.
Lewes (G. H.). The history of philosophy from thales to Comte. 5 edition. London, 1880. 2 vol.; 8°.
— Comte's philosophy of the Sciences. London, 1878; 8°.
Libero (Il) pensiero. Giornale dei Razionalisti, 1869, anno IV, 1° settembre, al 26 dicembre, N^i 1 al 26. Milano-Parma, 1869, 1 vol.; 8°.
Lidfort (V. E.). Le memorie di Giorgio Pallavicino, giudicate dal V. E. L. dell'Università di Land in Isvezia. Torino; 8°.
Lignana (G.). Le trasformazioni delle specie e le tre epoche delle lingue e letterature Indo-europee. Discorso. Roma, 1871; 8°.
[**Liruti** (S. M.)]. De finibus utriusque potestatis, ecclesiasticae, et laicae commentarius. Lugani, 1779; 4°.
Littré (É.). Paroles de philosophie positive. 2^e édit. Paris, 1863; 8°.
— Auguste Comte et la philosophie positive, 2^e édit. Paris, 1864; 8°.
— Médecine et médecins. 2^e édit. Paris, 1872; 8°.
— Études sur les barbares et le moyen âge, 3^e édit. Paris, 1874; 8°.
— Conservation, révolution et positivisme. 2^e édit. Paris, 1879; 8°.
— Fragments de philosophie positive et de sociologie contemporaine. Paris, 1876; 8°.
— Littérature et histoire, 2^e édit. Paris, 1877; 8°.
— La science au point de vue philosophique, 5^e édit. Paris, 1884; 8°.

Li Taï. Mistère posthume. Causeries médicales sur la mort et la survie. Paris, 1903; 8°.

Livre (Les) d'or de la science. N. 1-8, 10-17, 19, 21. Paris, 1898-1900, 18 vol.; 16°.

[**Lomenie** (de)]. Galerie des contemporains illustres par un homme de rien. Bruxelles, 1847-48, 2 vol.; 4°.

Longeville (G. de). Le libre penseur solitaire. Paris, 1873; 8°.

Longman's Summary of English history. New edit. London, 1893; 8°.

Longmuir (J.). Walker and Webster combined in a Dictionary of the english language. London, 1873; 8°.

Lucrèce. Œuvres complètes. Paris, 1871; 18°.

— De la nature des choses. Trad. par A. Lefèvre. Paris, 1876; 8°.

Lucrezio. Della natura delle cose. Libri 6. Tradotti da A. Marchetti ecc. Milano, 1874, 1 vol.; 8°.

— Della natura delle cose. Trad. di Francesco Deantonio. Milano, 1883, 1 vol.; 8°.

Lussana (F.). Igiene dell'alimentazione. Padova, 1870, 1 vol.; 8°.

Machiavelli (N.). Opere complete. Milano, 1850, 2 vol.; 8°.

Majocchi (A.). Risposta di un Ufficiale garibaldino all'opuscolo *Italia! 1859-89.* Torino, 1889; 8°.

Marazzi (F.). Il contingente unico e le sue conseguenze. Roma, 1892; 8°.

Maréchal (E.). Histoire contemporaine depuis 1780. Paris (1881); 16°.

[**Maréchal** (Sylvain)]. Voyages de Pythagore en Égypte, dans la Chaldée, dans l'Inde, en Crète, à Sparte. Paris, an VII, 6 vol.; 8°.

— Pour et contre la Bible. Jérusalem, 1801; 8°.

Marey (E. J.). La machine animale. Paris, 1873; 8°.

Marselli (N.). La Scienza della Storia. I. Le fasi del Pensiero storico. Torino, 1873, 1 vol.; 8°.

Marsh (G.). L'uomo e la natura; ossia la superficie terrestre modificata per opera dell'uomo. Firenze, 1870, 1 vol.; 8°.

Martha (C.). Mélanges de littérature ancienne. Paris, 1896; 8°.

Maury (A.). La magie et l'astrologie dans l'antiquité et au moyen-âge. Paris, 1864; 8°.

Melisurgo (G.). Esperimenti di Artiglieria di Marina. La fregata turca *Memdouhiyé*, il *Dreadnought*, l'*Euphrates*. Roma, 1877; 8°.

— L'*Independencia*, la corvetta in acciaio *Comus*, corazzate giapponesi. Roma, 1878; 8°.

[**Mercier**]. Tableau de Paris. Neuchâtel, 1781-83, 2 vol.; 12°.

— L'an deux mille quatre cent quarante. S. l., 1786, 3 vol.; 12°.

Méreu (H.). L'Italie contemporaine. Paris, 1888; 8°.

Michela (M.). L'avvenire dei possedimenti italiani in Africa. Torino, 1889; 8°.

Michelet (J.). L'insecte. Paris, 1858; 18°.

— La Sorcière. Bruxelles, 1863; 12°.

Michiels (A.). Histoire secrète du gouvernement autrichien. 4e édit. Paris, 1879; 8°.

Middleton (C.). The history of the life of M. Tullius Cicero. New edition. Basil, 1790, 4 vol. legati in due; 8°.

Migliori (I) libri italiani consigliati da cento illustri contemporanei. Milano, 1892. 1 vol.; 8°.
Modeste (V.). La nuit du 4 août. 1789-1889. Paris, 1889; 18°.
Moleschott (J.). La circolazione della vita, lettere fisiologiche. Tradotte dal Prof. C. Lombroso. Milano, 1869, 1 vol.; 8°.
Montaigne. Essais. Paris, s. a., 4 vol.; 8°.
Monteil (E.). Catéchisme du libre-penseur. Anvers, 1877; 8°.
Montesquieu. Œuvres. Amsterdam, 1790, 7 vol.; 12°.
Morley (J.). On compromise. London, 1877; 8°.
Morselli (E.). Il suicidio. Saggio di statistica morale comparata. Milano, 1879, 1 vol.; 8°.
Müller (M.). La science de la religion. Paris, 1873; 8°.
Naquet (A.). Religion, propriété, famille. Paris, 1869; 18°.
[**Naigeon**]. Le Militaire philosophe ou difficultés sur la religion. Londres, 1768; 8°.
Nieupoort (G. H.). Rituum qui olim apud romanos obtinuerunt, succincta explicatio. Traiecti a. R., 1747; 8°.
Nöldeke (T.). Histoire littéraire de l'ancien Testament. Traduit de l'allemand par MM. H. Derenbourg et J. Soury. Paris, 1873; 8°.
Odysse-Barot. Lettre sur la philosophie de l'histoire. Paris, 1864; 8°.
Onetti (L.). Un po' di luce sul processo della polizia municipale di Torino. Torino, 1879; 8°.
Organisation des cultes. Paris, an X; 8°.
Ovidio. Degli amori. S. i. (sec. 18); 4°.
Palmaverde per l'anno 1818. Torino; 16°.
Pascal. Pensées sur la religion. Paris, Garnier; 18°.
Pecquet. Discours sur l'art de négocier. Paris, 1737; 8°.
Petrarca. Le Rime. Basilea, 1582; 4°.
— Rime. Venezia, 1784, 2 vol.; 8°.
Pfeiffer (J.). Voyage d'une femme autour du monde. Paris, 1859; 16°.
— Mon second voyage autour du monde. Paris, 1859; 18°.
— Voyage à Madagascar. Paris, 1862; 18°.
Pichon (R.). Histoire de la littérature latine. Paris, 1897; 8°.
Plauto (T. M.). Stico (Stichus). Versione metrica di S. Cognetti De Martiis. Torino, 1891; 8°.
Plautus. Fabulæ superstites XX. Lugd. Batav., 1594; 16°.
Plebano (A.). I possedimenti italiani in Africa. Roma, 1889; 8°.
Plinius (C.). Epistolarum. Basileae, 1526; 8°.
Polibio historico greco tradotto per M. L. Domenichi. Vinegia, 1546; 8°.
Pradt. Du Congrès de Vienne. Lugan, 1816; 8°.
Procès des ex-ministres; relation exacte et détaillée. Paris [1830-31], 3 vol.; 18°.
Procès-verbal de la cérémonie du sacre et du couronnement de l'emp. Napoléon. Paris, 1805; 4°.
[**Proisy d'Eppes** (César)]. Dictionnaire des girouettes. Paris, 1815; 8°.
Quadri (A.). Huit jours à Venise. Venise, 1852; 16°.

Quarenghi (C.). Storia dell'11° Reggimento di Fanteria (Casale). Genova, 1875; 16°.

Raccolta di documenti riguardanti le presenti emergenze tra la Repubblica francese e la Corte di Roma. S. a. l.; 8°.

Ramorino (F.). Letteratura romana. Milano, 1886, 1 vol.; 8°.

Raynal. Histoire du Stadhouderat. La Haye, 1748; 8°.

Recherches sur les miracles. Londres, 1773; 8°.

Reclus (E.). La Terre. Paris, 1868-69, 2 vol.; 8°.

— Nouvelle Géographie universelle. La Terre et les hommes. Paris, 1875-1894, 19 vol.; 4°.

— Tableaux statistiques de tous les États comparés. An. 1890-1893. Paris, 1894; 8°.

Regnard (A.). Histoire de l'Angleterre. Paris, Alcan; 32°.

— Le bilan du Judaïsme et du Christianisme. Vol. 1°. Paris, 1890; 8°.

Regnault (F.). Hypnotisme religion. Paris, 1897; 8°.

Reinach (T.). Histoire des Israélites. Paris, s. a.; 8°.

Renan (E.). Vie de Jésus. 4e édit. Paris, 1863; 8°.

— La réforme intellectuelle et morale. Paris, 1871; 8°.

Revue encyclopédique, 1891-1904. Paris, Larousse, 14 vol.; 4°.

Revue philosophique de la France et de l'étranger. Paris, 1876, 2 vol.; 8°.

Ribert (L.). Essai d'une philosophie nouvelle suggérée par la science. Paris, 1898; 8°.

Ribot (T.). La psychologie anglaise contemporaine. Paris, 1870; 8°.

— La philosophie de Schopenhauer. Paris, 1874; 8°.

Ricard (A.). L'amour, les femmes et le mariage. Paris, 1867; 12°.

Richard (D.). Histoire de la génération chez l'homme et chez la femme. Paris, 1875; 8°.

Rienzi (É.). Immortalisme et libre pensée. Paris, 1886; 8°.

Robinet. La philosophie positive. Paris, G. Baillière; 32°.

Rochefoucault (de la). Maximes et réflexions morales. Paris, Delarc; 16°.

Roggero (S.). L'immortalità dell'anima, ovvero studi biologici, fisiologici e psicofisici. Seconda ediz. Genova, 1871, 1 vol.; 8°.

Roisel. L'idée spiritualiste. Paris, 1896; 8°.

Rolland (C.). Histoire de la maison d'Autriche. Paris, Alcan; 32°.

Romanes (G. J.). L'intelligence des animaux. Paris, 1887; 8°.

[**Roussel**]. Politique de tous les cabinets de l'Europe pendant les règnes de Louis XV et de Louis XVI. Paris, 1793, 2 vol.; 8°.

Royer (C.). Origine de l'homme et des sociétés. Paris, 1870; 8°.

St. John (H.). A letter to Sir William Windham. London, 1753; 8°.

Salvador (J.). Paris, Rome, Jérusalem. Tome 1er. Paris, 1860; 8°.

Sanders (L. C.). Celebrities of the Century. London, 1887; 8°.

Schlegel (F. de). Storia della letteratura antica e moderna. Milano, 1857, 2 vol.; 8°.

Schmidt (O.). Les sciences naturelles et la philosophie de l'inconscient. Traduit de l'allemand par J. Soury et E. Meyer. Paris, 1879; 8°.

Secchi (A.). Sull'ecclisse totale del Sole che avrà luogo ai 22 decembre 1870. Milano, 1870; 8°.

Siculo (G.). Francesco Crispi a Torino. Torino, 1887; 8°.
Silvestri (E.). L'Istria. Vicenza, 1903; 4°.
Sonnino (Sidney). Il suffragio universale. Roma, 1881; 8°.
Souriau (M.). Louis XVI et la révolution. Paris, 1893; 8°.
Soury (J.). Portraits de femmes. Paris, 1875; 18°.
— Bréviaire de l'histoire du matérialisme. Paris, 1881; 18°.
Spencer (H.). Introduction à la science sociale. Paris, 1875; 8°.
— L'individu contre l'État. Traduit de l'anglais par J. Gerschel. Paris, 1885; 8°.
Spirito (Lo) della Corte di Roma o Considerazioni su i suoi diritti, sistemi, opinioni, ecc. 1784; 8°.
Stanski (G. P.). De la spontaneité de la matière dans les manifestations physiques et vitales. Paris, 1872; 8°.
Stapfer (P.). Montaigne. Paris, 1895; 8°.
Statius (A.). De Clitophontis et Leucippes amoribus. Bergomi (1587); 16°.
Stato (Lo) italiano nelle condizioni presenti, sua separazione dalla Chiesa per un ex-Ministro. Torino, 1889, 1 vol.; 8°.
Stecchetti (L.). Le rime. Bologna, 1903, 1 vol.; 8°.
[**Steele**]. Le Spectateur ou le Socrate moderne. Amsterdam, 1719-26, 6 vol.; 12°.
Stefanoni (L.). Dizionario filosofico. Milano, 1873; 8°.
Stillman (W. J.). The union of Italy 1815-1895. Cambridge, 1898; 8°.
Strauss (D. F.). L'ancienne et la nouvelle foi. Paris, 1876; 8°.
— Voltaire. Paris, 1876; 8°.
Strenna della Rivista Europea. Anno I, 1872. Firenze, 1871, 1 vol.; 8°.
Stuart Mill J., Utilitarismo. Prima versione italiana fatta sulla 2ª ediz inglese dell'Avv. E. Debenedetti. Torino, 1866, 1 vol.; 8°.
— Auguste Comte et le positivisme. Traduit de l'anglais par le Dr. G. Clémenceau. Paris, 1868; 8°.
— L'assujetissement des femmes. Traduit de l'anglais par M. E. Cazelles. Paris, 1869; 8°.
— Mes mémoires. Paris, 1874; 8°.
Sudre (A.). Histoire du communisme. Bruxelles, 1849; 8°.
Svetonius (T.). XII Caesares. Lugduni, 1565; 8°.
— Id. Lugduni, 1585; 16°.
[**Swift** (J.)]. A tale of a tub. London, 1734; 8°.
Syrenius (F. J.). De Unitate naturae Angelicae, libri tres. Bononiae, 1578; 4°.
Tableau actuel des coutumes, mœurs et usages de la nation anglaise. Paris 1802: 12°.
Tacite. Œuvres complètes. Paris, 1861; 18°.
Taine (H.). Carnets de voyage. Paris, 1897; 16°.
— Histoire de la littérature anglaise. Paris, 1866-72, 5 vol.; 16°.
— Les philosophes classiques du XIXᵉ siècle en France. Paris, 1868; 16°
— Notes sur l'Angleterre. Paris, 1872; 16°.
[**Tamburini** (Pietro) e **Zola** (Giuseppe)]. Della vana pretensione di alcuni filosofi di separare la religione dal sistema politico, ecc. Lettere due. S.a.l.
Tennemann. A Manual of the history of philosophy. London, 1873; 8°.
Thackeray. Les quatre Georges. Paris, 1869; 18°.
Tibullo tradotto da Agostino Peruzzi. Venezia, 1798; 8°.

Tommaseo (N.) e **Bellini** (B.). Dizionario italiano nuovamente compilato. Torino, 1865-1879, 4 vol.; 8°.

Topinard (P.). L'homme dans la nature. Paris, 1891; 8°.

Toscanelli (G.). Religione e patria osteggiate dal Papa. L'Italia si deve difendere. Firenze, 1890; 8°.

Traina (T.). La morale di Herbert Spencer. Torino, 1881, 1 vol.; 8°.

Trezza (G.). Epicuro e l'epicureismo. Firenze, 1877, 1 vol.; 8°.

Tridon (G.). Du Molochisme juif. Bruxelles, 1884; 8°.

Tyndall (I.). Fragments scientifiques. Traduits sur la cinquième édition anglaise par H. Gravez. Paris, 1877; 8°.

Ueberweg (Fr.). A history of philosophy. London, 1880, 2 vol.; 8°.

Vacher de Lapouge (G.). Les sélections sociales. Cours libre de science politique professé à l'Université de Montpellier (1888-1889). Paris, 1896; 8°.

Valla (L.). Elegantiarum latinae linguae, libri sex. Lugduni, 1566; 16°.

Vannucci (A.). Studi storici e morali sulla letteratura italiana. 3ª ediz. Torino, 1871, 1 vol.; 8°.

— Storia dell'Italia antica. Milano, 1873-1876, 4 vol.; 8°.

Vapereau (G.). Dictionnaire universel des littératures. Paris, 1876; 8°.

— Dictionnaire universel des contemporains contenant toutes les personnes notables. 6ᵉ édit. Paris, 1893; 8°.

Vaslet L., Introduzione alla scienza delle antichità romane. Venezia, 1765, 8°.

Verlière (A.). Guide du libre penseur dédié aux membres du concile œcuménique. Paris, 1869; 8°.

Viardot (L.). Libre examen. 4ᵉ édition. Paris, 1874; 8°.

Vida (M. H.). Opera. Lugduni, 1586; 16°.

Vie (La) politique à l'étranger. 2ᵉ année, 1890. Paris, 1891; 8°.

Vignoli (T.). Mito e scienza. Saggio. Milano, 1879, 1 vol.; 8°.

Vincent (B.). A dictionary of biography past and present, brought down to september 1877. London, 1877, 1 vol.; 8°.

— Haydn's Dictionary of dates and universal information relating to all ages and nations. Sixteenth edition. London, 1878; 8°.

Vinson (J.). Les religions actuelles. Paris, 1888; 8°.

Virgilio. Eneide di Annibal Caro. Venezia, 1796, 2 vol.; 8°.

— Bucolica e Georgica. Venezia, 1796; 8°.

Virgilius. L'Énéide traduite par J. Delille. Paris, 1804, 2 vol.; 12°.

Vives (J. L.). Excitationes animi in Deum. Lugduni, 1565; 16°.

Volney (C. F.). Œuvres complètes. Paris, 1821, 9 vol.; 8°.

Voltaire. Œuvres complètes. Paris, 1784-1801, 72 vol.; 8°.

[—] La Bible enfin expliquée. Londres, 1776, 2 t. in 1 vol.; 8°.

Voyages d'Antenor en Grèce et en Asie. Paris, an VIII, 5 vol.; 18°.

Webster's complete Dictionary english language. London, 1884; 4°.

Wheeler (J. M.). Footsteps of the Past. Being essays on human evolution London, s. a.; 8°.

— e **Foote** (G. W.). Voltaire. London, 1894; 8°.

White (J. T.). A latin-english dictionary. London, 1865; 8°.

Wilkins (A. S.). L'antiquité romaine. Paris, 1885; 32°.

Dal 25 Giugno al 19 Novembre 1905.

Albert 1er (Prince de Monaco). Expériences d'enlévement d'un hélicoptère. Paris, 1905; 2 c. 4°.
— Sur la campagne de la *Princesse Alice*. Paris, 1905; 1 c. 4°.
** **Berzenberger** (A.). Analysen vorgeschichtlicher Bronzen Ostpreussens. Königsberg, 1904; 4°.
Boscolo-Bragadin (R.). Della profilassi e della cura della pellagra. Udine, 1905; 8°.
— Il protargolo della pellagra. Ricerche chimiche. Udine, 1905; 8°.
— La somministrazione del protargolo al primo sintomo di pellagra. Padova, 1905; 8° (*dall'A. per il concorso al XIV premio Bressa*).
Cabreira (A.). Note sur les rapports des solides. Coimbra, 1905; 8° (*dall'A.*).
Faccin (Fr.). L'eclisse totale di sole del 30 agosto 1905 a Palma di Majorca. Pavia, 1905; 8° (*Id.*).
Fatio (V.). Distribution, adaptation et variabilité des poissons en Suisse. Paris, 1898; 8°.
— Quelques vertèbres de poissons provenant des fouilles du Schweizersbild. Zurich, 1901; 4°.
— A propos du Coregonus Macrophthalmus de Nüsslin. Genève, 1902; 8°.
— Principales lignes de passages des oiseaux à travers la Suisse et les Alpes. Berne, 1905; 8°.
— Liste préliminaire de Mammifères en vue d'un supplément général à la Faune des vertébrés de la Suisse. Genève, 1905; 8°.
— Campagnols et Musaraignes Suisses; quelques formes peu connues; importance variable de certains caractères. Genève, 1905; 8°.
— Hybride de Squalius cavedanus et Alburnus alborella du Lac de Lugano. Locarno, 1905; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).
Galdieri (A.). La Malacofauna triassica di Giffoni nel Salernitano. Napoli, 1905; 4° (*dall'A.*).
Guerrini (G.). Sur la fonction de l'hypophyse. Traduzione in lingua tedesca. Torino, 1904; 8°.
— Sulla funzione dei muscoli degenerati. Napoli, 1905; 8° (*Id.*).
** **Guichard** (C.). Sur les systèmes triplement indéterminés et sur les systèmes triple-orthogonaux. Paris; 8°.
Haeckel (E.). Der Kampf um den Entwickelungs-Gedanken. Berlin, 1905; 8° (*dall'A. Socio straniero*).
— Meraviglie della vita. Disp. 4ª e 5ª.
Kiseljak (M.). Grundlagen einer Zahlentheorie eines speziellen Systems von komplexen Grössen mit drei Einherten. Bonn, 1905; 8° (*dall'A.*).
** **Lacroix** (A.). La montagne Pelée et ses éruptions. Paris, 1904; 4°.
Lerch (M.). Zur Theorie des Fermatschen Quotienten. Leipzig, 1905; 8° (*dall'A.*).
Macchiati (L.). Cenno biografico del prof. F. Delpino. Savona, 1905; 8° (*Id.*).
** **Nachmanson** (E.). Laute und Formen der Magnetischen inschriften. Uppsala, 1903; 8°.

Noether (M.). George Salmon. Leipzig, 1905; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

Pascal (E.). Contributo alla teoria della forma ternaria biquadratica e delle sue varie decomposizioni in fattori. Napoli, 1905; 4° (*dall'A.*).

Righi (A.). Sull'elettrizzazione prodotta dai raggi del radio. Roma, 1905; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

Rosenbuch (H.). Mikroskopische Physiographie der Mineralien und Gesteim. Bd. I. Stuttgart, 1904; 8° (*Id.*).

Ruiz (D.). Genealogia de los símbolos. Barcelona, 1905; 2 vol. 16° (*dall'A.*).

Sabatier (P.) et **Senderens** (J. B.). Nouvelles méthodes générales d'hydrogénation et de dédoublement moléculaire basées sur l'emploi des métaux divisés. Paris, 1905; 8° (*dagli A.*).

Santos Lucas (A.). Quelques mots sur les Mathématiques en Portugal. Notice et défense des travaux de A. Cabreira avec biographie de l'auteur. Lisbonne, 1905; 8° (*dall'A.*).

Taramelli (T.). Discorso detto al rifugio che di lui porta il nome nel giorno dell'inaugurazione (9 agosto 1904). Rovereto. 1905; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

Tinter (W.). Die Schlussfehler der Dreiecke der Triangulierung erster Ordnung in der k. u. k. österreichisch-ungarischen Monarchie, etc. Wien, 1904, 1905; 2 fasc. 8° (*dall'A.*).

Tonetti (A.). Sulle elevate temperature osservate in Italia nel luglio 1905. Roma, 1905; 4° (*Id.*).

Volante (A.). Statistica curiosa sul raccolto della grandine nell'anno corrente, rimedi, cure e guarigione del male. I Frigoriferi. Torino, 1904; 8° (*Id.*).

Dal 2 Luglio al 26 Novembre 1905.

Angelitti (Filippo). Recensione critica delle due Memorie pubblicate nei tomi LI, LII della R. Accademia delle Scienze di Torino dal Dr. G. Boffito, intorno alla *Quaestio de Aqua et Terra*. Perugia, 1905; 8° (*dall'A.*).

Atti del V Congresso geogr. ital. tenuto in Napoli dal 6 all'11 aprile 1904. Vol. I. Notizie, rendiconti e conferenze. Vol. II. Temi, comunicazioni e memorie. Napoli, 1905, 2 vol.; 8° (*dono del Presidente del Congresso Prof. F. Porena, Socio corrispondente*).

Biàdego (G.). Un cremonese maestro a Verona (Bartolomeo Borfoni). Verona, 1905: 8°.

— Ingresso in Milano di Cristiana di Danimarca sposa del duca Francesco Maria Sforza (1534). Verona, 1905; 8°.

— Cattedra dantesca a Verona nel quattrocento. Verona, 1905; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

Boffito (G.). L'eresia degli antipodi. Firenze, 1905; 4° (*Id.*).

** **Boulanger** (C.). Le mobilier funéraire Gallo-Romain et Franc en Picardie et en Artois. Paris, 1902-1905, 5 fasc.; 4°.

Camerino (F.). Umanità. Romanzo sociale. Catania, 1902; 8° (*dall'A. per il premio di Letteratura di Fondazione Gautieri*).

Cenni (Brevi) della famiglia Palma di Cesnola, raccolti dall'amico L. D. Firenze, 1905; 8°.

** **Chevalier** (U.). Répertoire des sources historiques du Moyen-âge. Bio-bibliographie. Nouvelle édition refondue, corrigé et considérablement augmentée. T. I, A-I, fasc. 5^e, J-Laurent. Paris, 1905; 8°.

Chiostro (Il) di S. Maria delle Grazie in Varallo. Novara, 1905; 4° (*dono del sig. G. C. Barbavara dei conti di Gravellona*).

De Feis (L.). La fillossera della vite nell'antichità e l'Ampelite antifillosserica. Firenze, 1905; 4° (*dall'A.*).

Dhátumálá or a Garland of Metals compiled and translated into English from various sanskrit Works. By Raja-Sir Sourindro Mahun Tagore, Socio corrispondente dell'Accademia. Calcutta, 1903; 8°. Testo e trad.

Fea (P.). Tre anni di guerra e l'assedio di Torino del 1706. Narrazione storico-militare. Roma, 1905; 8° (*dono del Comitato torinese per la commemorazione bicentenaria dell'assedio*).

Gor (N.). Il prossimo aspetto sociale. Torino, 1905; 8° (*dall'A.*).

Lepesqueur (P.-Ch.). La France et le Siam. Paris, 1897; 8° (*Id.*).

** **Litta.** Famiglie celebri italiane. Ser. 2^a, fasc. XI, Moncada di Sicilia, Ruffo di Calabria; fasc. XII, Caracciolo di Napoli; fasc. XIII, D'Aquino di Capua; f°.

** **Maspero** (G.). Études égyptiennes. Vol. I, II, fasc. 1, 2. Paris, 1889-90; 8°.

Porena (F.). Eliseo Reclus. Napoli, 1905; 8°.

— Sul concetto di razza umana oggi possibile in geografia. Napoli, 1905; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

Rinaudo (G.). Proprietà rurale nelle provincie di Torino e Cuneo. Condizioni e mezzi per perfezionarla e renderla rimunerativa. Torino, 1905; 8° (*dall'A.*).

** **Rousselot** (P.). Pedagogie historique d'après les principaux pédagogues, philosophes et moralistes. Paris; 8°.

** **Schweizer** (Ed.). Grammatik der pergamenischen Inschriften. Berlin, 1898; 8°.

Sclopis (V.). Della vita e delle opere del conte Federigo Sclopis di Salerano, con cenni storici della sua famiglia. Torino, 1905; 8 (*dall'A.*).

Sforza (G.). Storia di Pontremoli dalle origini al 1500. Firenze, 1904; 8°.

— I Cavalieri aurati di Massa di Lunigiana. Genova, 1905; 8°.

— Trenta lettere inedite. Romanzieri, statisti, poeti, soldati, patriotti. Milano, 1905; 8° (*dall'A.*).

** **Trombetti** (A.). L'unità d'origine del linguaggio. Bologna, 1905; 8°.

Dal 19 Novembre al 3 Dicembre 1905.

Alessio (A.). Sulla determinazione delle costanti dell'apparato tripendolare per le misure di gravità relativa ecc. Relazione. Genova, 1904; 4° (*dal R. Osservatorio di Padova*).

Guareschi (I.). Sui colori degli antichi. Torino, 1905; 4° (*dall'A. Socio residente*).

Guidi (C.). Risultati sperimentali su conglomerati di cemento semplici ed armati. Torino, 1905; 8° (*Id.*).

In memoria di Giulio Bizzozero. Ciriè, 1905; 8°.

Sacco (F.). Collezione petrografica Cossa. Torino, 4 c. in-8°.

— Sopra una Pereiraia del Miocene della Sardegna. Perugia, 1905; 8°.

— Il piacenziano sotto Torino. Roma, 1905; 8°.

— Il futuro valico ferroviario attraverso l'Appennino genovese. Perugia 1905; 8°.

— Les formations ophitifères du crétacé. Bruxelles, 1905; 8°.

— Fenomeni stratigrafici osservati nell'Appennino settentrionale e centrale. Torino, 1905; 8° (*dall'A.*).

Semmola (E.). Le nevigate di Napoli durante l'inverno 1905; 8° (*Id.*).

Dal 26 Novembre al 10 Dicembre 1905.

Cantù (C.). La biografia ed alcuni scritti inediti o meno noti, a cura dell'Avv. Pietro Manfredi nel Centenario della nascita. Torino, Unione Tip. Edit., 1905; 8° (*dal Comitato per le onoranze a C. Cantù*).

** **Chevalier** (U.). Répertoire des sources historiques du moyen-âge. Bio-Bibliographie. Sixième fasc. Laurent-Nastagio. Paris, 1905; 8°.

** **Courbelin** (P. de). L'éducation anglaise en France. Paris, 1889; 8°.

— Universités transatlantiques. Paris, 1890; 8°.

** **Ferté** (H.). Rollin, sa vie, ses œuvres et l'Université de son temps. Paris, 1902; 8°.

Frola (G.). Gli statuti canavesani. Studio di diritto piemontese antico. Pinerolo, 1905 (*dall'A.*).

** **Roberts** (E. S.) and **Gardner** (E. A.). An introduction to Greek epigraphy. Part II. The inscriptions of Attica. Cambridge, 1905; 8°.

Romano (G.). Niccolò Spinelli da Giovinazzo diplomatico del sec. XIV. Napoli, 1902; 8° (*dall'A.*).

Scaetta (V.). La Divina Commedia interpretata colla storia del diritto italiano. Rocca S. Casciano, 1905; 8° (*Id.*).

Dal 3 al 17 Dicembre 1905.

Alsina (F.). Nouvelles orientations scientifiques. Paris, s. a.; 8° (*dall'A.*).

Ceradini (G.). Opere. Milano, 1906; 2 vol. 4° (*dono della signora Carlotta Bozzolo vedova Ceradini*).

Chionio (F.). Super formula de Snell. Torino, 1905; 8° (*dall'A.*).

Gola (G.). Ricerche sui rapporti tra i tegumenti seminali e le soluzioni saline. Roma, 1905; 8° (*Id.*).

Mattirolo (O.). Sulle condizioni dell'Orto sperimentale della R. Accademia d'Agricoltura di Torino (1904-1905). Lavori e bilanci. Relazione. Torino, 1905; 8°.

— Congresso internazionale botanico. Roma, 1905; 8°.

— Come le ariste delle Graminacee penetrano e migrano nei tessuti degli animali. Torino, 1905; 8°.

— Sulla Flora ipogea del Portogallo. Roma, 1905; 8°.

— e **Soave** (M.). Sui risultati ottenuti coll'impiego dei Bacterii " Moore " nella coltivazione dei Piselli e del Trifoglio. Torino, 1905; 8° (*dall'A. Socio residente*).

Dal 10 al 24 Dicembre 1905.

Biàdego (G.). Marcantonio Flaminio ai servigi di Gianmatteo Giberti vescovo di Verona. Venezia, 1905; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

** **Coco** (V.). Saggio storico sulla rivoluzione di Napoli. Torino; 8°.

** **Dictionnaire** (Nouveau) de poche des langues française et hollandaise. Leipzig, 1892; 16°.

Mittino (E.). Il genio. Novara, 1905; 8° (*dall'A.*).

** **Muratori** (L. A.). Rerum italicarum scriptores. Nuova edizione. Fasc. 1-33 Città di Castello, 1900-1905; 4°.

Pennisi Mauro (A.). L'Universale. Catania, 1905; 8° (*dall'A.*).

Pesce (A.). Alcune notizie intorno a Giovanni Antonio del Fiesco ed a Nicolò da Campofregoso (1443-1452). Genova, 1905; 8° (*Id.*).

Spécimens des caractères de l'imprimerie catholique Beyrouth (Syrie). Spécialités orientales; 4°.

Dal 17 al 31 Dicembre 1905.

Boet (G.). Le segnalazioni marittime. Genova, 1905; 4° (*dono di S. E. il Ministro della Marina*).

Guareschi (I.). La chimica e le arti. Discorso. Torino, 1905; 8° (*dall'A. Socio residente*).

Guidi (C.). Lezioni sulla scienza delle costruzioni. Appendice. Le costruzioni in Beton armato. Torino, 1906; 8° (*Id.*).

Haeckel (E.). Le meraviglie della vita. 1ª traduz. italiana del Dr. D. Rosa. Disp. 6ª. Torino, 1905; 8° (*dall'Unione Tip.-editrice torinese*).

Issel (A.). Saggio di un nuovo ordinamento sistematico degli alvei e delle rive marine. Genova, 1905; 8°.

— La nuova caverna di Frabosa. Udine, 1905; 8°.

— Excursion géologique dans les environs de Gênes. Gênes, 1905; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

Mosso (A.). Vita moderna degli Italiani. Milano, 1905; 8° (*dall'A. Socio residente*).

Dal 24 Dicembre 1905 al 7 Gennaio 1906.

Bassi (D.) e **Melzi d'Eril** (C.). Il P. Timoteo Bertelli Chierico regolare Barnabita. Firenze, 1906; 8° (*dagli AA.*).

Boffito (G.). Il " De eccentricis et epicyclis „ di Cecco d'Ascoli, nuovamente scoperto ed illustrato. Firenze, 1905; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

** **Muratori** (L. A.). Rerum italicarum scriptores; fasc. 34, 35. Nuova ediz. Città di Castello, 1905; 4°.

Dal 31 Dicembre 1905 al 14 Gennaio 1906.

Bosco (A.). Le correnti migratorie agricole fra i vari Stati e il collocamento degli emigranti. Roma, 1905; 8°.

Pochmann (E.). Ueber zwei neue und zwar dynamicale, durch innere actuelle Energie wirkende Eigenschaften der atmosphärischen Luft und deren Bedeutung für die Wärmemechanik..... Linz, 1896; 8°.

— Wärme ist nicht Kälte und Kälte ist nicht Wärme. Linz, 1890; 8°.

— Schlussätze zu " Ueber zwei neue und zwar dynamical Eigenschaften der atmosphärischen Luft „. 1 c. s. a. l.

— Nachtrag. Linz, 1900; 8° (*dall'A.*).

Dal 7 al 21 Gennaio 1906.

Bosco (A.). Le correnti migratorie agricole fra i vari stati e il collocamento degli emigranti. Roma, tip. Bertero, 1905; 8° (*dall'A.*).

** **Litta**. Famiglie celebri italiane. 2ª serie. Caracciolo di Napoli. Fasc. XIV. Napoli, 1905; f°.

** **Monumenta** Germaniae historica. Scriptorum. T. XXXII, p. I. Hannoverae, 1905; 4°.

Dal 14 al 28 Gennaio 1906.

Berthelot (M.). Traité pratique de calorimétrie chimique. Paris, 1905; 8° (*dall'A. Socio straniero*).

Bovero (A.). Intorno ad un gruppo di singolari canali vascolari del postsfenoide negli " Sciuromorpha „. Torino, 1905; 8° (*dall'A.*).

Bruni (A. C.). Contributo allo studio degli intimi rapporti fra gli elementi nervosi dell'asse cerebro-spinale. Torino, 1905; 8° (*Id.*).

Carnazzi (P.). Dilatazione e compressibilità delle miscele. Pisa, 1905; 8° (*Id.*).

Civalleri (A.). Contributo allo studio dei muscoli " Levatores glandulae thyreoideae „ ed alla innervazione dei muscoli " Sternothyroideus e Thyrehyoideus „. Torino, 1905; 8° (*Id.*).

Fusari (R.). Alberto von Kölliker. Commemorazione. Torino, 1905; 8° (*dall'A. Socio residente*).

Garbasso (A.). Vorlesungen über theoretische Spektroscopie. Leipzig, 1906; 8° (*dall'A.*).

Lussana (S.). A proposito di uno studio recente sul calore specifico dei gas. Pisa, 1905; 8° (*Id.*).

Nicola (B.). Sopra le inserzioni dei " musculi lumbricales „ nella mano dell'uomo. Roma, 1905; 8° (*Id.*).

** **Reichenow** (A.). Die Vögel Afrikas. 3 Band, 2e Hälfte. Neudamm, 1905.

Dal 21 Gennaio al 4 Febbraio 1906.

Aliotta (A.). La misura in psicologia sperimentale. Firenze, 1905; 8° (*dall'A. per concorrere al premio Gautieri di Filosofia*).

Gastaldi (G.). Carlo Arnò. Cenni biografici. Torino, 1906; 8° (*dall'A.*).

Grasselli (V.). Nella *Divina Commedia* un passo dai commentatori dichiarato incomprensibile, dallo stesso Dante chiaramente illustrato. Padova, 1905; 8° (*Id.*).

Lombardo-Radice (G.). Studi platonici. Arpino, 1906; 8° (*dall'A. per concorrere al premio Gautieri di Filosofia*).

Mantegazza (P.). Prime linee di psicologia positiva. Firenze, 1905; 8° (*Id.*).

Marucci (A.). La nuova filosofia del diritto criminale. Roma, 1904; 8° (*Id.*).

Morando (G.). Esame critico delle *XL Proposizioni rosminiane* condannate dalla S. R. U. Inquisizione. Milano, 1905; 8° (*Id.*).

Paoli (G. C.). Idea dell'Universo ovvero interpretazione della natura e sue conseguenze teoriche e pratiche. Palermo, Remo Sandron, 1906; 8° (*Id.*).

Porena (F.). Ferdinando von Richthofen e la sua opera scientifica. Firenze, 1906; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

Dal 28 Gennaio all'11 Febbraio 1906.

** **Almanacco** italiano 1906. Piccola enciclopedia popolare della vita pratica. An. XI. Firenze, 1906; 8°.

Carnera (L.) e **Volta** (L.). L'attività della stazione astronomica internazionale di Carloforte dall'ottobre 1903 a tutto l'anno 1904. Relazione. Firenze, 1905; 4° (*dono della R. Commissione Geodetica italiana*).

Haeckel (E.). Le meraviglie della vita; 7ª disp. Torino, 1906; 8° (*dono dell'Unione Tipografico-editrice*).

Handmann (E.). Ueber das Hirngewicht des Menschen auf Grund von 1414 im pathologischen Institut zu Leipzig vorgenommenen Hirnwägungen. Leipzig, 1906; 8° (*dal prof. Marchand, Socio corrispondente*).

Kölliker (A.). Die Entwicklung der Elemente des Nervensystems. Leipzig, 1905; 8°.

Natur und Staat. Beiträge zur naturwissenschaftlichen Gesellschaflehre. Organismen und Staaten von A. Menthner. Jena, 1906; 8° (*dono dei signori proff. Haeckel, Conrad und Fraas*).

Rosenbuch (H.). Studien im Gneisgebirge des Schwarzwaldes. Heidelberg, 1905; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

Rühl (K.). Bernardino Silva. München, 1905; 8° (*dall'A.*).

** **Sars** (G. O.). An account of the Crustacea of Norway. Vol. I. Amphipoda. Christiania and Copenhagen, 1895; testo e tav.

Silvestri (F.). Contribuzioni alla conoscenza biologica degli Imenotteri parassiti. I. Biologia del *Litomastix truncatellus* (Dalm.). Portici, 1906; 8° (*dall'A.*).

Venturi (A.). Nuove determinazioni di gravità relativa in Sicilia. Roma, 1905; 8° (*dalla Commissione Geodetica italiana*).

Verbeek (R. D. M.). Description géologique de l'île d'Ambon. Batavia, 1905; testo in-8° e atl. in-f° (*dall'A.*).

Dal 4 al 18 Febbraio 1906.

** **Archivio Muratoriano.** Studi e ricerche in servizio della nuova edizione dei "Rerum italicarum scriptores„ di L. A. Muratori. N. 3. Città di Castello, 1906; 8°.

Barrows (S. J.). Children's Courts in the United States. Washington, 1904; 8° (*dono del Socio residente Brusa*).

Bartlett (L.). Il sistema di prova in America. Roma, 1905; 8° (*Id.*).

** **Bertana** (E.). Vittorio Alfieri studiato nel pensiero, nella vita e nell'arte. Torino, 1904; 8°.

Capone (G.). De l'interpretazione dinamica del valore. Mondovì, 1904; 8°.

— Postulati giuridico-economici del Marxismo. Mondovì, 1906 (*dall'A. per il premio Gautieri di Filosofia*).

** **Chevalier** (U.). Répertoire des sources historiques du Moyen âge. Topo-Bibliographie. Montbéliard, 1894-1903; 8°.

Milani (L.). Il Socialismo. Bologna, 1905; 8° (*dall'A.*).

** **Muratori** (L. A.). Rerum italicarum scriptores, fasc. 36, 37. Città di Castello, 1905; 4°.

Pascoli (G.). Canti di Castelvecchio; 3ª ediz. accresciuta e corretta. Bologna, 1905; 8°.

— Poemi conviviali; 2ª ediz. accresciuta e corretta. Bologna, 1905; 8°.

** **Pearson** (K.). The Chances of Death and other Studies in Evolution. London-New York, 1897, 2 vol.; 8°.

Villa (G.). L'idealismo moderno. Torino, Bocca, 1905; 8° (*dall'A. per il premio Gautieri di Filosofia*).

Dall'11 al 25 Febbraio 1906.

Andreini (A.). Sulle reti di poliedri regolari e semiregolari e sulle corrispondenti correlative. Roma, 1906; 4° (*dall'A.*).

Castagneris (G.). L'Istituto speciale di Aerodinamica di Koutchino e lo sviluppo tecnico mondiale dell'Aerodinamica. Roma, 1905; 4° (*Id.*).

Grassi (G.). Corso di elettrotecnica. Vol. II. Roma-Torino, 1906; 8° (*dall'A. Socio residente*).

Haeckel (E.). Wanderbilder. Ser. I und II. Die Naturwunder der Tropenwelt. Gera-Untermbaus, 8 Liefg. fol.

Pirandello (E.). L'utilizzazione della forza motrice delle onde del mare e dei laghi, ecc. Lodi, 1906; 8° (*dalla Tip. successori Wilman*).

Taramelli (T.). Discorso letto nell'adunanza generale della Società Geologica italiana tenuta in Tolmezzo il 20 agosto 1905. Roma, 1905; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

Dal 18 Febbraio al 4 Marzo 1906.

Biàdego (G,). Dante e l'Umanesimo Veronese. Venezia, 1905; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

Brusa (E.). Responsabilités des États à raison des dommages soufferts par des étrangers en cas d'émeute ou guerre civile. Rapports et Projets; s. a. l.; 8°.

— Bibliographie pénale et pénitentiaire de l'Italie depuis 1885 jusqu'à 1899; s. a. l.; 8°.

— Grazia o condanna condizionale? Roma, 1901; 8°.

— La contravvenzione penale e l'azione civile. Torino, 1903; 8°.

— Simulazioni nelle costituzioni sociali. Torino, 1903; 8° (*dall'A. Socio residente*).

Caviglione (C.). Il rimorso. Saggio di psicologia e metafisica. Torino, 1903; 8° (*dall'A.*).

Coci (A.). La storia del diritto romano al Congresso internazionale di scienze storiche. Catania 1906; 8°.

De Seta (D.). Tra fossili e superuomini. Dialogo intorno all'origine dei fenomeni psichici. Acireale, 1904; 8° (*dall'A. per concorrere al premio Gautieri per la Filosofia*).

Giglio-Tos (E.). Maria Bricco e la fazione di Pianezza. 5-6 settembre 1706. Torino, 1905; 8°.

— Liberatione de l'assedio di Torino ecc... Diario del Principe Eugenio di Savoia. Torino, 1905; 8°.

— Il Maresciallo Ferdinando Marcin. Torino, 1905; 8°.

— Di tre lettere inedite sulla battaglia di Torino. 7 settembre 1706. Torino, 1906; 8° (*dall'A.*).

Rapports présentés par la Société générale des Prisons sur les seize questions inscrites au programme du Congrès pénitentiaire internationale de Budapest, 1905; s. a. l.; 8° (*dono del Socio Brusa*).

Dal 25 Febbraio all'11 Marzo 1906.

Dalla Vedova (G.). Commemorazione del Socio straniero Ferdinando von Richthofen. Roma, 1905; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

Haeckel (E.). Prinzipien der generellen Morphologie der Organismen. Berlin, 1906; 8°.

Helmert (R.). Generallieutenant dr. Oscar Schreiber. Leipzig, 1905; 8° (*dall'A. Socio straniero*).

Leyst (T.). Meteorologische Beobachtungen in Moskau im Jahre 1901, 1902, 1903; 8°.

— Beobachtungen angestellt im Meteorologische Observatorium der K. Universität Moskau im Jahre 1902. Moskau, 1903; 8°.

— Die Halophänomene in Russland. Moskau, 1903; 8°.

— Современныя задачи по изученію атмосфернаго электричества. Моска, 1904; 8°.

Piolti. Sull' alterazione della Lherzolite di Val della Torre (Piemonte). Torino, 1905; 8° (*dall'A.*).

Ricordo della costruzione del Policlinico Umberto I. Anno 1902 (*dono del Ministero dell'Istruzione Pubblica*).

Sella (P.). Piano di pubblicazione di un *Corpus Statutorum italicorum*. Roma, 1906; 8° (*dall'A.*).

Dal 4 al 18 Marzo 1906.

Boetti (V.). La teoria utilitaria nella morale socratica. Mortara-Vigevano, 1904; 8° (*dall'A. per concorrere al premio Gautieri per la Filosofia*).

** **Muratori** (L. A.). Rerum italicarum scriptores. Fasc. 38 (fasc. 1 del T. XXIV, p. XIV). Città di Castello, 1906; 4°.

Dall'11 al 25 Marzo 1906.

Bassani (Fr.). In memoria di Leopoldo Pilla. Napoli. 1905; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

Haeckel (E.). Le Meraviglie della vita. Complemento ai " Problemi dell'Universo ". Prima traduzione italiana autorizzata dall'autore del Dr. D. Rosa. Disp. 8ª. Torino, 1906; 8° (*dono dell'Unione tipogr.-editrice*).

Sinigaglia (Fr.). La Surchauffe appliquée à la machine à vapeur d'eau. Paris, 1906; 4° (*dall'A.*).

Dal 18 Marzo al 1° Aprile 1906.

Cimbali (G.). La città terrena. Roma-Torino, 1905; 8° (*dall'A. per concorrere al premio Gautieri di Filosofia*).

Fornarese (G.). Epigrafi commemorative dei Francesi caduti nell'assedio e nella battaglia di Torino l'anno 1706. Torino, 1906; 4° (*dall'A.*).

Dal 25 Marzo all'8 Aprile 1906.

Antropometria militare. Risultati ottenuti dallo spoglio dei fogli sanitarii dei militari delle classi 1859-63, eseguito dall'Ispettorato di sanità militare. Roma, 1905-1906; 4° (*dall'Ispettorato di Sanità militare*).

Mattirolo (O.). Prima contribuzione allo studio della Flora ipogea del Portogallo. Coimbra, 1906; 8° (*dall'A. Socio residente*).

** **Metz** (G. de). La double Réfraction accidentelle dans les liquides. Paris, 1906; 8°.

Tommasina (Th.). Ueber die kinetische Theorie des Elektrons als Grundlage der Elektronentheorie der Strahlung. 4°.

— Sur un dispositif pour mesurer la radioactivité des végétaux. Bruxelles, 1905; 8°.

— Radioactivité de la lave de la dernière éruption du Vesuve (1904). Bruxelles, 1905; 8°.

— Sur la théorie cinétique de l'électron qui doit servir de base à la théorie électronique des radiations. Bruxelles, 1905; 8°.

— **Sarasin** (Ed.) et **Micheli** (F. I.). Étude de l'effet Elster et Geitel. Radioactivité induite (*dall'A. sig. Th. Tommasina*).

Vicarelli (G.). Compte rendu de la Clinique obstétricale et gynécologique de l'Université Royale de Turin. Ciriè, 1905; 8° (*dall'A.*).

Dal 1° al 22 Aprile 1906.

Bargilli (G.). La Dragonessa. Roma, 1906; 8° (*dall'A.*).

Biàdego (G.). Il pittore Jacopo da Verona (1355-1442) e i dipinti di S. Felice, S. Giorgio e S. Michele di Padova. Treviso, 1906; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

Cassa (La) di Risparmio di Torino negli anni 1899-1905. Appendice alle Notizie storiche e statistiche dalla fondazione al 1900. Torino, 1906; 4°.

Coci (A.). La Storia del Diritto romano al Congresso internazionale di scienze storiche. Note. Catania, 1906; 8° (*dall'A.*).

** **De Gubernatis** (A.). Dictionnaire international des Écrivains du monde latin. 1e-4e partie. Rome-Florence, 1905-906; 8°.

Franceschini (G.). Il Dovere. Venezia, 1906; 8° (*dall'A.*).

** **Litta**. Famiglie celebri italiane; 2a Serie: Caracciolo di Napoli.

** **Muratori** (L. A.). Rerum italicarum scriptores. Fasc. 39. Città di Castello, 1906; 4°.

Sforza (G.). Alessandro Magni Griffi. Necrologia. Genova, 1906; 8° (*dall'A.*).

Valli (L.). Il Fondamento psicologico della religione. Roma, 1904; 8° (*dall'A. per il premio Gautieri di Filosofia*).

Dall'8 al 29 Aprile 1906.

Bassani (F.) e **Galdieri** (A.). Notizie sull'attuale eruzione del Vesuvio (Aprile 1906). Napoli, 1906; 8° (*dagli AA.*).

Haeckel (E.). Le Meraviglie della Vita. Disp. 9a. Torino, 1906; 8° (*dall'A. Socio straniero*).

Helmert (F. R.). Rapport sur les travaux du Bureau central de l'Association Géodésique internationale en 1905, et programme des travaux pour l'exercice de 1906. Leyde, 1906; 4° (*Id.*).

Klein (C.). Studien über Meteoriten vorgenommen auf Grund des Materials der Sammlung der Universität Berlin. Berlin, 1906; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

Mesure d'un arc de méridien au Spitzberg; Sections: II. B, V. VII. A, VIII. A, VIII. B, VIII. BI, VIII. BII, VIII. BIII, VIII. BIV. VIII. BV. VIII. C. X. Stockholm, 1903-1906. 12 fasc.; 4° (*dono della " Commission R. Suédoise pour la mesure d'un arc de méridien au Spitzberg "*).

Pizzaroli (R.) e **Masini** (A.). Osservazioni meteorologiche dell'annata 1904. Bologna, 1905; 4° (*dalla Direzione dell'Osservatorio*).

Raina (M.). Tavole per calcolare il nascere e il tramontare della Luna a Bologna e per ridurre il nascere e tramontare del Sole e della Luna da Bologna a un altro luogo qualunque d'Italia. Bologna, 1905; 4° (*dall'A.*).

Veronese (G.). Il vero nella matematica. Roma, 1906; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

Dal 22 Aprile al 6 Maggio 1906.

* **Archivio** Storico Lombardo. Indici della Ser. III, vol. I-XX (An. XXI-XXX, 1894-1903). Milano, 1906; 8°.

Gramantieri (D.). Gli amori di Dante Alighieri. Matera, 1906; 8° (*dall'A.*).

Isaia (C.). Turin et ses environs. Turin, 1906; 8° (*dall'A.*).

** **Muratori** (L. A.). Rerum italicarum scriptores. Fasc. 40. Città di Castello, 1906; 4°.

Rossi (G.). Alcune ricerche su Paolo Veneto. Torino, 1904; 8°.

— Agrippa di Nettesheym e la direzione scettica della Filosofia del Rinascimento. Torino, 1905; 8° (*dall'A. per il premio Gautieri di Filosofia*).

Dal 29 Aprile al 13 Maggio 1906.

Cabreira (A.). Sur le problème à la résolution d'un triangle dont on connait deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux. Paris, 1906; 8°.

— Sur les propriétés de deux cercles égaux et tangents. Coimbra, 1906; 8°.

— Biographie de A. Cabreira. Paris, 1906 (*dall'A.*).

Guerrini (G.). Ueber die Fällung des Eieralbumins durch Natriumsulfat. Strassburg, 1906; 8°.

— Sulla funzione dei muscoli degenerati. Napoli, 1906; 8° (*Id.*).

* **Janet** (Ch.). Description du matériel d'une petite installation scientifique. Limoge, 1903; 8°.

— Observations sur les fourmis. Limoge, 1904; 8°.

— Anatomie de la tête du *Lasius niger*. Limoge, 1905; 8° (*Id.*).

** **Petrovitch** (M.). La mécanique des phénomènes fondés sur les analogies. Paris, 1906; 8°.

Dal 6 al 20 Maggio 1906.

Battaglia di Torino (7 settembre 1706). Carlo Parrocel pinx. Pubblicazione fatta per cura della R. Deputazione di Storia patria di Torino [Veduta riprod. in fototipia] (*dono della R. Deputazione*).

Biàdego (G.). Don Giovanni Beltrame. Cenni necrologici. Roma, 1906; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

Geisler (V.). Was ist Philosophie? Was ist Geschichte der Philosophie? Berlin, 1905; 8° (*dall'A.*).

Gentile (G.). Dal Genovese al Galuppi. Ricerche storiche. Napoli, 1906; 8° (*Id.*).

Marazio (A). Il partito socialista italiano e il Governo (15 febbraio 1901-4 marzo 1905). Torino, 1906; 8° (*Id.*).

Dal 13 al 27 Maggio 1906.

Caldarera (F.). Corso di Meccanica razionale. Palermo, 1903-1906, Vol. II, fasc. II, III; 8° (*dall'A.*).

Colomba (L.). Sulla scheelite di Traversella. Roma, 1906; 8° (*Id.*).

Lehmann (O.). [Ventotto fotografie originali da lui eseguite, rappresentanti i fenomeni di apparente vitalità dei cristalli liquidi] Homöotropie und Zwiltingsbildung bei fliessend-weichen Kristallen; (Annalen der Physik. Bd. 19, 2, pp. 407, 1896).

Zahilkjanz (G.). Die Theorie, Berechnung und Konstruction der Dampfturbinen. Berlin, 1906; 8° (*dall'A.*).

Dal 20 Maggio al 10 Giugno 1906.

** **Justiniani Augusto**. Digestorum seu Pandectarum codex Florentinus olim Pisanus phototypice expressus. Vol. I, II, fasc. V. Roma, MCMV; f°.

** **Litta**. Famiglie celebri italiane (2ª ser.). Moncada di Sicilia. Caracciolo di Napoli. Fasc. XVI. Napoli, 1906; f°.

Messale (Il) miniato del Cardinale Nicolò Rosselli detto Cardinale d'Aragona. Codice della Biblioteca Nazionale Universitaria di Torino, riprodotto in fac-simile per cura della Reale Accademia delle Scienze di Torino. Torino, Frat. Bocca, edit., 1906; f°.

Torino. Cassa di Risparmio. Resoconto dell'anno 1905 approvato dal Consiglio di Amministrazione in seduta del 10 aprile 1906. Torino, 1906; 4° (*dall'Amministrazione*).

Dal 27 Maggio al 17 Giugno 1906.

Guareschi (I.). Notizie biografiche su Wöhler, Liebig e Mitscherliche. Torino, 1906; 8° (*dall'A. Socio residente*).

Issel (A.). Torriglia e il suo territorio. Roma, 1906; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

** **Ostwald** (W.). Lehrbuch der Allgemeinen Chemie. 2 Bd., 3 Theil. Leipzig, 1906; 8°.

Raspail (X.). Une station ornithologique dans l'Oise. Nouvelles observations sur les oiseaux ayant niché dans le périmètre du territoire de Gouvieux ecc. Paris, 1906; 8° (*dall'A.*).

Ruffini (F. P.). Delle coniche coniugate. Bologna, 1906; 4° (*Id.*).

Dal 10 al 24 Giugno 1906.

Amadori-Virgili (G.). Il sentimento imperialista. Studio psico-sociologico. Milano; 8° (*dall'A.*).

Dalla Vedova (G.). Commemorazione di Cristoforo Colombo. Roma, 1906; 8°.

** **De Gubernatis** (A.). Dictionnaire international des écrivains du monde latin. 5me livr. Rome, 1906; 8°.

** **Litta**. Famiglie celebri italiane; fasc. XVII: D'Aquino di Capua; Caracciolo di Napoli. Napoli, 1906; f°.

** **Muratori** (L. A.). Rerum italicarum scriptores. Fasc. 41 (T. VIII, p. 1). Città di Castello, 1906; 8°.

Zocco-Rosa (A.). Vom Beruf unserer Zeit für die Pflege der römischen Rechtsgeschichte. Breslau, 1906; 8° (*dall'A.*).

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 19 Novembre 1905.

PRESIDENZA DEL PROF. COMM. PAOLO BOSELLI
VICE PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Somigliana, Mosso, Segre, Grassi, Guareschi, Peano, Parona, Salvadori, Jadanza, Naccari, Spezia, Guidi, Morera, Foà e Camerano Segretario.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Il Vice Presidente comunica una lettera del Presidente dell'Accademia, Senatore D'Ovidio, il quale non potendo trovarsi alla seduta invia alla Classe i suoi saluti e gli augurii di felice anno accademico. Egli pronunzia le seguenti parole:

L'assenza del Presidente mi conferisce l'onore prezioso di presiedere questa classe dottissima e di inaugurare il nostro anno accademico.

Valga la mia presenza a questo seggio, se non altro, a significare la fraternità delle due classi e l'intima unione di tutto ciò che illumina e solleva il pensiero umano.

Ricambio anzitutto, in nome della classe, il saluto dello Illustre Presidente, presagendo con lui per i lavori della nostra Accademia un nuovo anno di attività, che ne onori sempre meglio la fama e giovi al progredire delle scienze e degli studî.

Nel tacere delle adunanze accademiche, questa classe perdette il Prof. Alberto von Koelliker dell'Università di Wurzburg, dove insegnava fisiologia e anatomia comparata. Voi, meglio assai di me, conoscete i meriti suoi, onde l'Accademia nostra lo volle, fin dal 1846, socio corrispondente, e l'elesse poi nel 1893 socio effettivo.

L'altra classe nostra fu acerbamente percossa da due gravissime perdite.

Morì nell'ottobre Domenico Pezzi: uomo d'ingegno potente e di carattere alto, egli visse intieramente per il ministerio degli studi e della scuola, sdegnoso di tutto ciò che non fosse sincerità di sapere e di parola e fierezza di animo liberissimo ed austero.

Morì testè Giovanni Battista Gandino, esemplare, ai dì nostri, purissimo di classica latinità e della instituzione della latinità nelle scuole italiane, maestro sicuro e chiarissima guida, consapevole dei metodi seguìti in altre contrade ed abile ad informarli a grado a grado all'indole della nostra gioventù.

L'altra classe perdette eziandio il Prof. Giulio Oppert dell'Istituto di Francia, che apparteneva, come socio corrispondente, alla sezione di linguistica e filologia orientale.

Fra gli omaggi, dei quali l'esimio Segretario vi darà ora notizia, piacemi rilevare la pubblicazione fatta quando l'Istituto di Patologia generale inaugurò il ricordo marmoreo a Giulio Bizzozero, perchè giova che rivivano sempre fra noi, come vivono nella nostra memoria e nei documenti della scienza i nomi di coloro che più illustrarono la nostra Accademia e più in alto levarono negli studi torinesi le facoltà indagatrici, promuovendo le rivelazioni della scienza ed apprestando nuovi benefizi all'Umanità.

Nè solo coi ricordi l'Accademia nostra si congiunge alla vita ed all'opera degli studi torinesi. Ma quando testè un nostro Collega, il Prof. Guareschi, aprì l'anno universitario intrecciando la copia dell'erudizione col senso dell'arte e colla sapienza dei consigli di civile dignità, indirizzati alle nuove generazioni, anche la nostra Accademia partecipò, in quel giorno, al merito del suo esimio socio, ed al plauso ad esso rivolto.

Anticipando, fors'anche arbitrariamente, il voto autorevole del Consiglio di Amministrazione e il consenso dell'Accademia, mi è grato annunciarvi che il Cav. Ottavio Fornaca, già colon-

nello dei bersaglieri, valoroso soldato, innamoratosi, nei suoi riposi, dei libri e delle letture, specie di filosofia positiva e di critica religiosa, legò alla nostra Accademia la sua numerosa e scelta biblioteca. In essa sono opere di pregio, e nel suo insieme raccoglie notabili pubblicazioni, riunite con una sola idea; poichè egli aderiva con tutto sè stesso al pensare della scuola positiva più assoluta e recisa.

Il Fornaca, cui io additai la biblioteca della nostra Accademia come stanza opportuna per serbare in essa i suoi libri, lasciò a me l'ufficio di farne scelta e consegna, e già, temporaneamente, salvo le regolari necessarie accettazioni, la biblioteca Fornaca è posta ordinatamente in questa nostra sede.

Rimembrando gli amici degli studî che più non sono, augurando a Voi, che validamente ne aumentate la gloria e i benefizî, vigorìa di forze e felicità di ispirazioni, il nuovo anno accademico abbia propizio incominciamento e prospero corso.

Il Socio Mosso pronunzia brevi parole di commemorazione di Alberto von Koelliker, che verranno stampate negli *Atti*.

Il Vice Presidente comunica le lettere di ringraziamento per la loro nomina a Soci di:

Prof. Giuseppe Lorenzoni a Socio nazionale non residente;

Prof. Giacomo Enrico Vant' Hoff a Socio straniero;

Prof. Walter Nernst a Socio corrispondente.

Il Socio Guareschi presenta in omaggio all'Accademia un suo lavoro: *Sui colori degli antichi*, parte I, con introduzione. Questo lavoro si connette con quello sulle pergamene e sul *De arte illuminandi*, che l'autore ha precedentemente presentato all'Accademia.

Il Socio Guidi presenta in omaggio un suo lavoro intitolato: *Risultati sperimentali su conglomerati di cemento semplici e armati.*

Il Vice Presidente ringrazia gli egregi donatori.

Egli presenta pure le pubblicazioni seguenti pervenute in dono all'Accademia:

Dal Comitato per le onoranze a Giulio Bizzozero un opuscolo intitolato: *In memoria di Giulio Bizzozero*;

Dal Socio straniero E. Haeckel: *Der Kampf um dem Entwickelungs'-Gedanken* ;

Dal Prof. Augusto Righi: *Sull'elettrizzazione prodotta dai raggi del radio*;

Dal Prof. Torquato Taramelli: *Discorso al rifugio Taramelli nella sua inaugurazione*;

Prof. Enrico Rosenbuch: *Mikroscopische Physiographie der Mineralien und Gesteine*, vol. I.

Prof Victor Fatio: Sei opuscoli di argomento zoologico;

Dalla Direzione della Scuola Politecnica di Zurigo, due volumi pubblicati in occasione del cinquantenario della sua fondazione.

Vengono presentati per l'inserzione negli *Atti* accademici i lavori seguenti:

1° Prof. G. Boccardi: *Metodo per la determinazione delle costanti dell'istrumento meridiano*, dal Socio Jadanza;

2° Ing. Ottavio Zanotti Bianco: *I concetti moderni sulla figura matematica della Terra: Appunti per la storia della Geodesia*, Nota III, dal Socio Jadanza;

3° Ing. Carlo Jorio: *Sui raccordi bicentrici - Teoria generale*, dal Socio Jadanza;

4° Il Socio Somigliana presenta un suo lavoro intitolato: *Sulla propagazione delle onde nei mezzi isotropi*;

5° Sig. Gaetano Rovereto: *Sull'età degli scisti cristallini della Corsica*, dal Socio Parona, a nome anche del Socio corrispondente Issel;

6° O. Tedone: *Sui problemi di equilibrio elastico a due dimensioni*, dal Socio Somigliana;

7° G. Giambelli: *Sulle varietà rappresentate coll'annullare determinanti minori contenuti in un determinante simmetrico od emisimmetrico generico di forme*, dal Socio Segre.

Vengono presentate per l'inserzione nelle *Memorie* i lavori seguenti:

1° Dal Socio Pio Foà un suo lavoro intitolato: *Dell'azione di alcuni sieri citotossici sugli organi ematopoetici.* La Classe con votazione segreta ne approva all'unanimità la stampa nei volumi delle *Memorie*;

2° Dal Socio Parona una Memoria del Prof. F. Sacco: *Sui resti fossili di Rinoceronte dell'Astigiano.* Il Presidente nomina i Soci Parona e Camerano per l'esame di detta Memoria;

3° Il Socio Camerano presenta il lavoro del Dott. Luigi Cognetti De Martiis: *Gli Oligocheti della Regione Neotropicale*, Parte seconda. Il Presidente nomina i Soci Salvadori e Camerano per l'esame di detta Memoria.

In ultimo il Socio Foà invita tutti i presenti ad intervenire alla Conferenza del Prof. A. Torre intorno al tema: *Unione nazionale per la coltura*, fatta sotto gli auspicî dell'Università Popolare.

LETTURE

ALBERTO von KÖLLIKER

Commemorazione del Socio ANGELO MOSSO.

È cosa eccezionale che uno scienziato appartenga per sessant'anni ad un'Accademia. Questa fortuna toccò ad Alberto von Kölliker, professore di Anatomia a Würzburg, nato a Zurigo nel 1817 il quale fu nominato Socio corrispondente della nostra Accademia nel 1846 e socio straniero nel 1893. L'onore che colla sua grande operosità recò il Kölliker alla nostra Accademia mi incoraggia a rendere alla sua memoria un tributo di ammirazione e di riconoscenza. Kölliker aveva ventisette anni quando pubblicò le ricerche anatomiche colle quali dimostrò l'indipendenza del simpatico e queste prime indagini gli acquistarono subito una grande riputazione.

Nel 1847 scoprì le fibre muscolari liscie. Fino allora erasi creduto che il connettivo fosse un tessuto contrattile, Kölliker descrisse pel primo le fibre dei muscoli lisci e la rappresentazione che egli ne fece rimase immutata come la conosciamo oggidì.

Il merito grande di tale scoperta non consiste solo nell'aver trovato un nuovo elemento anatomico, quanto nell'aver mostrato che si trovano muscoli lisci dove nessuno lo avrebbe sospettato. A questa diffusione delle ricerche sulle fibre muscolari liscie cooperò il Moleschott del quale m'è caro ricordare il nome in questa occasione, perchè col mezzo dell'acido acetico egli trovò un reattivo che contribuì ad estendere e completare la scoperta del Kölliker.

La fisiologia fu coltivata con successo dal Kölliker e basterebbe l'opera sua *Physiologische Untersuchungen über die Wirkung*

einiger Gifte pubblicata nel 1856 per dargli un posto eminente fra gli sperimentatori. Il nome suo è consociato a quello di Claudio Bernard nello studio del *curaro*. L'analisi dell'azione di questo veleno sui differenti muscoli, e la resistenza del cuore, e l'azione sulle terminazioni periferiche del vago, furono messe in luce dagli esperimenti classici del Kölliker.

La mente vasta del grande anatomico di Würzburg si volse fino dal 1844 allo studio della morfologia e recatosi a Messina studiò i Cefalopodi ed i polipi che illustrava con due memorie: *Entwickelungsgeschichte der Cephalopoden*, Zürich, 1844; e *Die Schwimmpolypen von Messina*, Leipzig, 1853.

Una carriera iniziata così luminosamente e con tale larghezza di concetti nei campi disparati dell'anatomia, della fisiologia e della zoologia, diede al Kölliker una superiorità incontrastata nel campo delle ricerche morfologiche. Il suo trattato di anatomia microscopica pubblicato in due volumi nel 1850 fu tra i libri di istologia quello che esercitò un'influenza più profonda sull'insegnamento, e fu l'opera che ebbe un numero maggiore di traduzioni in tutte le lingue.

La resistenza allo studio e la vastità delle cognizioni appare nell'ultima edizione di tale trattato. Erano trascorsi ventidue anni dopo che erasi stampata la quinta edizione. Kölliker oltrepassati i settant'anni si accinse all'immane lavoro di rifare tutta la sua opera. I disegni vecchi pei progressi compiuti dalla microscopia, per i perfezionamenti della tecnica, dei reattivi non servivano più, la scienza si era rinnovata nelle sue basi; ma Kölliker non si spaventò di questa fatica, e rifece completamente il suo trattato. Stampò da solo i due primi volumi e pel terzo chiese la cooperazione del prof. Victor v. Ebner così che l'opera celebre era finita nel 1902.

Gli Italiani sono grati a Kölliker per la simpatia che egli ha sempre mostrato al nostro paese. Egli parlava correntemente la nostra lingua e spesso veniva in Italia e fu ospite del professore Golgi a Pavia e del compianto Bizzozero a Varese.

Alto della persona, robusto e simpatico, continuò a lavorare indefessamente quando aveva già compiuto gli ottant'anni; ed era per noi una dolce commozione il ricevere le sue note con la dedica affettuosa come se la mente sempre giovine trovasse il tempo per tutte le piccole attenzioni, e le benevolenze

dell'amicizia per le quali molti credono che gli uomini sommi non abbiano più tempo da disporre.

Nel 1899 Kölliker scrisse la sua biografia *Erinnerung aus meinem Leben*. Nella prima parte vi sono i ricordi intimi di famiglia e nella seconda passa rapidamente in esame i suoi lavori, ma solo dei principali egli ragiona perchè nel 1900 erano 245 le sue pubblicazioni, senza tener conto delle tesi e dei lavori pubblicati sotto la sua guida.

Fra i professori tedeschi si può considerare Kölliker come una eccezione per la sua sedentarietà. L'essere rimasto sempre nella piccola Università di Würzburg forse impedì al Kölliker di esercitare per mezzo dell'insegnamento una influenza più vasta e profonda. Non gli mancarono però gli onori; e la Germania che l'aveva adottato come suo figlio, lo tenne in grande stima come uno dei fondatori dell'embriologia e dell'anatomia microscopica. Era l'indole sua modesta che lo tratteneva lontano dai grandi centri e il desiderio di consacrarsi tutto intero all'educazione dei suoi figliuoli, senz'altro conforto che quello della famiglia, della scuola e del laboratorio. Dopo Giovanni Müller non vi furono altri anatomici che abbiano saputo approfondire con tanto successo lo studio della fisiologia. La nostra ammirazione diventa sempre maggiore per questi sommi che dominarono la scienza, lasciando traccie indimenticabili nel campo dell'embriologia, dell'anatomia e della fisiologia, essendo biologi, osservatori profondi e maestri nell'arte di sperimentare.

Metodo per la determinazione delle costanti dell'istrumento meridiano.

Nota di GIOVANNI BOCCARDI.

Il lavoro di riosservazione di molte stelle fondamentali e di stelle di minore splendore (fra $7^m,0$ e $8^m,3$), intrapreso col circolo meridiano di questo R. Osservatorio, mi ha indotto a dare la forma spiegata qui appresso al calcolo delle costanti strumentali, per quanto riguarda le ascensioni rette. Sebbene fin da che assunsi la direzione di questo Istituto io abbia avuto premura di dotarlo di un pendolo sidereo sufficientemente esatto (1), pure, anzichè determinare l'andamento del pendolo mediante osservazioni in giorni diversi, ho scelto una disposizione di calcolo, che permette di dedurre quell'andamento dalle osservazioni stesse, le quali furono da me protratte per molte ore di seguito. Non volli determinare l'andamento del pendolo con osservare due gruppi di fondamentali, l'uno al principio della serie di osservazione delle stelline e l'altro alla fine, per diverse ragioni che ben si possono vedere. Per dirne una: ho stimato opportuno l'intercalare le osservazioni delle fondamentali fra quelle delle stelline, per ovviare alla possibile variazione nel modo di osservare nel corso di una stessa serata, variazione, che, se si avverava, doveva probabilmente influire egualmente sull'una e sull'altra classe di stelle, salva rimanendo la differenza ormai constatata, e da me verificata, dipendente dallo splendore diverso delle due classi. In vista di quest'ultima equazione di splendore, ho scelto, per un lavoro più delicato, le stelle fondamentali presso a poco dello stesso splendore, e per le stelline mi sono ristretto entro una grandezza o poco più: cosicchè sarà poi facile ridurre le mie osservazioni a un tipo unico di splendore. Un'altra ragione (che non si potrebbe indovinare da chi non conoscesse per pratica le condizioni infelici

(1) Questo pendolo fu costruito nell'Officina meccanica del Cavignato (Padova).

del cielo di Torino) si trova nella grande variabilità dello stato atmosferico, per cui spesso qui accade che le serate in apparenza più serene divengano cattive, per nebbia e nubi, da un istante all'altro; questo fatto non mi avrebbe sovente permesso di osservare il secondo gruppo di fondamentali, donde la determinazione dell'andamento dell'orologio sarebbe mancata.

Non potendo ridurre a valori molto piccoli l'azimut e la collimazione mediante la mira meridiana (a 4,4 chilometri), la quale, in causa della nebbia quasi perenne in Torino, si vede solo di rado, e d'altra parte le condizioni del nostro istrumento vecchio e rugginoso non permettendomi di fare assegnamento sulla invariabilità delle così dette costanti anche da un giorno all'altro, sono ricorso al laborioso metodo dei minimi quadrati per dedurre dalle osservazioni di ogni serie, o corso di parecchie ore, le costanti strumentali, la correzione del pendolo o il suo andamento.

Nel primo tipo di calcolo che qui appresso dò, x è la correzione suppletiva all'orologio nell'istante dato dall'ascensione retta della prima stella fondamentale, dopo la correzione presunta dai dati già posseduti: a è la correzione di azimut; c è la correzione per la collimazione più aberrazione diurna. Il simbolo y rappresenta la correzione ad x, dipendente dall'andamento del pendolo per 10 ore. In esso però entra ogni variazione proporzionale al tempo, e quindi (mi sembra bene) anche una piccola variazione nell'azimut, perchè le mie fondamentali hanno per lo più declinazioni poco diverse e si tratta solo di quantità differenziali.

Con θ è indicato l'intervallo in tempo sidereo di ogni stella dalla prima, espresso in frazione di 10 ore, cioè i fattori di y; i valori scritti nell'orizzontale ch'è di fronte ad i sono le correzioni da farsi per l'inclinazione (1), cioè i coefficienti di $\frac{cos(\varphi - \delta)}{cos \delta}$; f è il fattore dell'inclinazione, cioè $\frac{cos(\varphi - \delta)}{cos \delta}$ (2);

---

(1) In base a frequenti livellazioni (interpolando), i cui risultati sono riportati in principio di ogni tipo.

(2) S'intende che pel passaggio inferiore delle circumpolari questo coefficiente diventa $\frac{cos(\varphi + \delta)}{cos \delta}$, come, nelle equazioni di condizione, il coeff. di a è $sin(\varphi + \delta)$, e -1 il coefficiente di c.

i P sono i passaggi osservati; T indica P corretto d'inclinazione; α è l'ascensione retta apparente (calcolata appositamente quando manca negli Almanacchi); n denota la differenza $\alpha - T$ moltiplicata per $\cos\delta$ e per la radice quadrata del peso; $e_{m,1}$ è l'errore medio quadratico unitario dedotto dai residui.

Nella equazione di condizione per ogni stella, il coefficiente di x è l'unità moltiplicata pel coseno della declinazione δ della stella; il coefficiente di a è $sin\,(\varphi - \delta)$, ove φ indica la latitudine del luogo; quello di c è l'unità, essendo $c = c_0 - 0^s{,}021\, cos\,\varphi$. Il coefficiente di y è zero per la prima stella, e per ogni altra seguente è dato da θ moltiplicato per $cos\,\delta$. Si comprende che, per non dare grande preponderanza ai coefficienti della correzione per l'andamento dell'orologio, io ho adottato per l'incognita y la correzione per l'andamento in 10 ore. Similmente, per attenuare la preponderanza dei termini noti di una stella circumpolare e di una zenitale, anzi per tener conto del grado di precisione con cui sono osservate le singole stelle, il quale è press'a poco proporzionale al coseno della rispettiva declinazione, ho moltiplicato ogni equazione per $cos\,\delta$ corrispondente. Inoltre fu dato peso $^3/_4$ alla zenitale, perchè nel nostro istrumento, sprovvisto di oculare zenitale, le osservazioni di siffatte stelle sono un po' difficili.

Io non vorrei sostenere che i valori da me ottenuti per le incognite siano i più vicini alla verità; ma sembrami che quei valori debbano soddisfare nel miglior modo possibile alle osservazioni delle stelle fondamentali, e siano a buon diritto applicabili alle stelline.

Il II saggio di calcolo (relativo ad una serata sfavorevole, in cui non potei osservare che due fondamentali senza alcuna circumpolare) è indentico al I quanto alla forma (1); però, essendo applicato essenzialmente a stelline, richiede qualche parola di spiegazione. È noto che, trattandosi di stelle fondamen-

(1) Solo è da avvertire che in esso θ è espresso in frazione di ora, e quindi y dovrebbe rappresentare l'andamento per un'ora: ma lo si dovrà ritenere piuttosto come una incognita che abbraccia l'insieme di tutte le quantità proporzionali al tempo. Similmente non si può presumere che le altre incognite (sopratutto c ed x) corrispondano ai significati espressi innanzi. Però si è ricorso a questa forma di calcolo per trovar modo di mettere d'accordo nel miglior modo possibile tutte le osservazioni.

di tali posizione non assolutamente sicura, come quelle di cui mancano le effemeridi negli almanacchi, si può giungere a correggerne leggermente le posizioni con l'osservarle molte volte entro ristretti limiti di tempo. Osservando molte fondamentali (come fo io) e determinando col loro mezzo le costanti strumentali (coi minimi quadrati), dal confronto dei residui delle equazioni di condizione relative ad ogni stella in tutta la serie delle osservazioni si può giungere, per effetto di una perequazione, ad assegnare la correzione di cui ha bisogno la posizione della stella data dai Cataloghi.

Lo stesso procedimento mi sembra che possa applicarsi alle stelline, senza circolo vizioso, quando si sia giunti ad ottenerne posizioni di precisione equivalente a quella delle fondamentali della classe indicata or ora. Tali sono le 20 stelline (indicate coi numeri della *Bonner Durchmusterung*) del secondo esempio di calcolo, delle quali, in seguito a molte mie osservazioni, posseggo posizioni di alta precisione. Il calcolo relativo venne eseguito con molta diligenza dalla sig.[na] dottoressa Ernesta Fasciotti, Assistente volontaria in questo Osservatorio. La piccolezza dei residui lasciati dalle equazioni di condizione è al tempo stesso una prova della precisione con cui io osservo e di quella delle posizioni da me adottate per le stelline, ed è altresì una giustificazione della meticolosità avuta nel calcolo di riduzione, che sembrerà forse eccessiva a chi, favorito dalle eccellenti condizioni del cielo e dalla perfezione dei proprî strumenti, non può farsi ragione delle infelici condizioni in cui ho dovuto osservare. Per non uscire dal secondo esempio, sarebbe vano il tentativo di dedurre dall'insieme delle osservazioni una correzione unica a T, trascurando la differenza delle δ. Quella correzione sarebbe: $+0^s,699$, e con essa le stelle lascerebbero i residui seguenti:

$-0^s,039$	$+0,081$	$+0,101$	$+0,051$	$+0,025$	$+0,071$
$+0,061$	$+0,071$	$+0,061$	$+0,047$	$+0,041$	$+0,001$
$-0,009$	$-0,027$	$-0,013$	$-0,043$	$-0,059$	$-0,135$
$-0,029$	$-0,039$	$-0,119$	$-0,109$.		

Da essi si scorge l'effetto dell'andamento dell'orologio; ma riuscirebbe vano il volerlo determinare da due gruppi di stelle,

l'uno a principio della serie, l'altro alla fine. Infatti, esclusa la prima stella, la media degli α-T per le 4 stelle seguenti sarebbe $+ 0^s,064$ per $20^h.6^m$; la media corrispondente per le 4 ultime sarebbe $- 0^s,074$ per $20^h.53^m$; donde l'andamento orario $- 0^s,177$. Tenendo conto di questo, i residui diverrebbero:

$-0^s,057$	+0,072	+0,095	+0,054	+0,034	+0,083
+0,079	+0,093	+0,088	+0,097	+0,097	+0,063
+0,080	+0,053	+0,076	+0,051	+0,047	−0,014
+0,098	+0,097	+0,023	+0,041.		

Sicchè rimane giustificato il procedimento laborioso sì, ma sicuro, da me tenuto.

Nota. — I piccoli segni + e −, che seguono talvolta le ultime cifre dei numeri o dei logaritmi, si riferiscono al noto artifizio di Oppolzer costantemente da me adoperato.

I Tipo. *26 Novembre 1904.*

$21^h.0^m$

Risultati delle livellazioni: $-0^s,036$

	β Aquarii	γ Capricorni	3495 B. A. C.	δ Aquarii	β Piscium
θ	—	$+0^s,014$	+0,082	+0,138	+0,154
log θ	—	8,1461	8,9138	9,1399	9,1875
log cos δ	—	9,9804	8,9631	9,9821	9,9993
log *y*	—	8,1265	7,8769	9,1220	9,1868
i	$-0^s,029$	−0,027	−0,015	−0,006	−0,005
log *i*	$8^n,4624$	$8^n,4314$	$8^n,1761$	$7^n,7782$	$7^n,6990$
fi .	9,8007	9,6889	$0^n,8432$	9,6979	9,8734
	$8^n,2631$	$8^n,1203$	9,0193	$7^n,4761$	$7^n,5724$
	−0,02	−0,01	+0,10+	0,00	−0,00+
P	$21^h.25^m.19^s,34$	21.33.35,39	22.14.29,96-	22.48.22,62	22.57.49,04
T	21.25.19,32	21.33.35,38	22.14.30,06	22.48.22,62	22.57.49,04-
α	21.26.32,46	21.34.48,59	22.15.48,59-	22.49.35,87	22.59. 2,14
α − T	+1.13,14	+1.13,21	+1.18,53-	+1.13,25	+1.13,10+
−(S − Cav.) appross.	−1.13,00	−1.13,00	−1.13,00	−1.13,00	−1.13,00
diff.	+0,14	+0,21	+5,53-	+0,25	+0,10+
log diff.	9,1461	9,3222	0,7424	9,3979	9,0170
log cos δ	9,9976	9,9804	8,9631	9,9821	9,9993
log *n*	9,1437	9,3026	9,7055	9,3800	9,0163

Equazioni di condizione.

(logaritmi)

c	0,0000	0,0000	$0^n,0000$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	9,9375	0,0000	0,0000
x	9,9976	9,9804	8,9631	9,9821	9,9993	9,9995	0,0000	9,8715	9,9985	9,9998
a	9,8909	9,9466	9,8855	9,9435	9,8235	9,8281	9,8444	9,3292	9,8105	9,8622
y	—	8,1265	7,8769	9,1220	9,1868	9,2450	9,2856	9,1811	9,5144	9,5261
n	9,1437	9,3026	9,7055	9,3800	9,0163	8,7777	9,0170	$9^n,0299$	8,6975	9,2039
s	0,4641	0,4849	9,5744	0,5065	0,4657	0,4635	0,4765	0,2714	0,4799	0,5083

Residui

$0^s,000$	−0,013	+0,001	+0,021	+0,021
−0,028	−0,001	+0,008	−0,035	+0,026

$e_{mq} = \pm 0^s,021-$

26 Novembre 1904.

$22^{h}.55^{m}$ $0^{h}.26^{m}$

−0,004 — 0,036

6 γ Piscium	κ Piscium	72 Pegasi (zen.)	147 B Piscium	20 Ceti
+0,176	+0,193	+0,204	+0,328	+0,336
9,2455	9,2856	9,3096	9,5159	9,5263
9,9995	0,0000	9,9340	9,9985	9,9998
9,2450	9,2856	9,1811	9,5144	9,5261
−0,010	−0,013	−0,016	−0,042	−0,043
8^{n},0000	8^{n},1139	8^{n},2041	8^{n},6233	8^{n},6335
9,8695	9,8545	0,0524	9,8840	9,8362
7^{n},8695	7^{n},9684	8^{n},2565	8^{n},5073	8^{n},4697
−0,01	−0,01	−0,02	−0,03	−0,03
23.11. 1,02	23.20.50,36−	23.28. 1,62	0.42.10,99	0.46.56,10
23.11. 1,01	23.20.50,35−	23.28. 1,60	0.42.10,96	0.46.56,07
23.12.14,07	23.22. 3,45	23.29.14,46−	0.43.24,01	0.48. 9,23
+1.13,06	+1.13,10+	+1.12,86−	+1.13,05	+1.13,16
−1.13,00	−1.13,00	−1.13,00	−1.13,00	−1.13,00
+0,06	+0,10+	−0,14+	+0,05	+0,16
8,7782	9,0170	9^{n},1584	8,6990	9,2041
9,9995	0,0000	9,9340	9,9985	9,9998
8,7777	9,0170	9^{n},0299	8,6975	9,2039

Equazioni normali in numeri.

c	x	a	y	n	s
+9,7499	+8,4555	+5,3692	+1,4549	+0,4567	+25,4862
	+8,3721	+6,0991	+1,4373	+1,0046	+25,3686
		+5,1267	+0,9777	+1,1922	+18,7649
			+0,3523	+0,1389	+4,3611

Valori delle costanti.

$y = +\,0^{s},08341$

$a = +\,0,60749$

$x = -\,0,27189$

$c = -\,0,06435$

II Tipo. *22 Settembre 1904.*

	$19^h.55^m$	$21^h.5^m$
Risultati delle livellazioni:	$-0^s,002$	$+0,004$

Le correzioni d'inclinazione per le singole stelle sono trascurabili.

	63 τ Aquilae	+4°.4349	+1°.4212	+1°.4227
θ		+0,057	+0,080	+0,130
log θ	—	8,7559	8,9031	9,1139
log cos δ	—	9,9987	0,9999	9,9997
log y	—	8,7546	8,9030	9,1136
P = T	$19^h.58^m.49^s,94$	20.2.13,88	20.3.31,81	20.6.43,23
α	19.59.29,60+	20.2.53,66	20.4.11,61	20.7.22,98
α — T	+39,66+	+39,78	+39,80	+39,75
—(S—Cav.) appross.	—39,00	—39,00	—39,00	—39,00
diff.	+0,66+	+0,78	+0,80	+0,75
log diff.	9,8195	9,8921	9,9031	9,8751
log cos δ	9,9967	9,9987	9,9999	9,9997
log n	9,8162	9,8908	9,9030	9,8748

	+3°.4293	+2°.4124	+0°.4468	+1°.4255
θ	+0,166	+0,188	+0,216	+0,245
log θ	9,2201	9,2742	9,3344	9,3892
log cos δ	9,9992	9,9996	9,9999	9,9997
log y	9,2193	9,2738	9,3343	9,3889
P = T	20.8.48,34	20.10. 5,18-	20.11.47,11	20.13.32,32
α	20.9.28,06+	20.10.44,95-	20.12.26,87	20.14.12,09
α — T	+39,72+	+39,77	+39,76	+39,77
—(S—Cav.) appross.	—39,00	—39,00	—39,00	—39,00
diff.	+0,72+	+0,77	+0,76	+0,77
log diff.	9,8573	9,8865	9,8808	9,8865
log cos δ	9,9992	9,9996	9,9999	9,9997
log n	9,8565	9,8861	9,8807	9,8862

	+3°.4324	+2°.4175	+1°.4305	+1°.4311
θ	+0,277	+0,399	+0,455	+0,502
log θ	9,4425	9,6010	9,6580	9,7007
log cos δ	9,9990	9,9995	9,9995	9,9997
log y	9,4415	9,6005	9,6577	9,7004
P = T	20.15.28,09	20.22.49,48+	20.25.10,00	20.27. 0,41
α	20.16. 7,85	20.23.29,22	20.25.49,74	20.27.40,11
α — T	+39,76	+39,74-	+39,74	+39,70
—(S—Cav.) appross.	—39,00	—39,00	—39,00	—39,00
diff.	+0,76	+0,74-	+0,74	+0,70
log diff.	9,8808	9,8669	9,8692	9,8451
log cos δ	9,9990	9,9995	9,9997	9,9997
log n	9,8798	9,8664	9,8689	9,8448

II Tipo. *22 Settembre 1904.*

	$19^h.55^m$	$21^h.5^m$
Risultati delle livellazioni:	$-0^s,002$	$+0,004$

Le correzioni d'inclinazione per le singole stelle sono trascurabili.

	+1°.4323	+2°.4210	+1°.4345	+3°.4411
θ	+0,533	+0,567	+0,629	+0,676
log θ	9,7267	9,7536	9,7986	9,8299
log cos δ	9,9998	9,9994	9,9998	9,9991
log y	9,7265	9,7530	9,7984	9,8290
P = T	$20^h.30^m.\ 0^s,28$	20.32.50,92+	20.35.33,00	20.38.16,80+
α	20.30.39,97	20.33.30,64	20.36.12,69-	20.38.56,45
α — T	+39,69	+39,72-	+39,69-	+39,65-
—(S — Cav.) appross.	—39,00	—39,00	—39,00	—39,00
diff.	+0,69	+0,72-	+0,69-	+0,65-
log diff.	9,8388	9,8570	9,8363	9,8102
log cos δ	9,9998	9,9994	9,9998	9,9991
log n	9,8386	9,8567	9,8361	9,8093

	+3 Aquarii	+1°.4386	+2°.4269	+1°.4398
θ	+0,720	+0,811	+0,844	+0,877
log θ	9,8573	9,9090	9,9263	9,9430
log cos δ	9,9981	9,9998	9,9995	9,9997
log y	9,8554	9,9088	9,9258	9,9427
P = T	20.42. 3,58	20.47.29,53	20.49.29,15	20.51.43,51
α	20.42.43,22	20.48. 9,09+	20.50. 8,86	20.52.23,17+
α — T	+39,64	+39,56+	+39,67	+39,66+
—(S — Cav.) appross.	—39,00	—39,00	—39,00	—39.00
diff.	+0,64	+0,56+	+0,67	+0,66+
log diff.	9,8062	9,7482	9,8261	9,8195
log cos δ	9,9981	9,9998	9,9995	9,9997
log n	9,8043	9,7480	9,8256	9,8192

	+1°.4402	+2°.4289
θ	+0.915	+0,971
log θ	9,9614	9,9872
log cos δ	9,9999	9,9994
log y	9,9613	9,9866
P = T	20.53.44,67	20.57.15,94
α	20.54.24,25	20.57.55,53
α — T	+39,58	+39,59
—(S — Cav.) appross.	—39.00	—39.00
diff.	+0,58	+0,59
log diff.	9,7634	9,7708
log cos δ	9,9999	9.9994
log n	9,7633	9,7702

Equazioni di condizione in logaritmi

c	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
a	9,7899	9,8131	9,8394	9,8342	9,8217	9,8301	9,8421	9,8348
x	9,9967	9,9987	9,9999	9,9997	9,9992	9,9996	9,9999	9,9997
y	—	8,7546	8,9030	9,1136	9,2193	9,2738	9,3343	9,3889
n	9,8162	9,8908	9,9030	9,8748	9,8565	9,8861	9,8807	9,8862
s	0,5137	0,5418	0,5527	0,5516	0,5497	0,5602	0,5647	0,5679

c	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
a	9,8178	9,8299	9,8337	9,8335	9,8383	9,8259	9,8372	9,8197
x	9,9990	9,9995	9,9997	9,9997	9,9998	9,9994	9,9998	9,9991
y	9,4415	9,6005	9,6577	9,7004	9,7265	9,7530	9,7984	9,8290
n	9,8798	9,8664	9,8689	9,8448	9,8386	9,8567	9,8361	9,8093
s	0,5670	0,5806	0,5883	0,5890	0,5923	0,5970	0,6022	0,5996

c	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
a	9,8871	9,8375	9,8288	9,8335	9,8404	9,8263
x	9,9981	9,9998	9,9995	9,9997	9,9999	9,9994
y	9,8554	9,9088	9,9258	9,9427	9,9613	9,9866
n	9,8043	9,7480	9,8256	9,8192	9,7633	9,7702
s	0,6150	0,6083	0,6217	0,6250	0,6219	0,6261

Equazioni di condizione in numeri.

c	+1,0000	+1,0000	+1,0000	+1,0000	+1,0000	+1,0000	+1,0000	+1,0000
a	+0,6165	+0,6503	+0,6909	+0,6826	+0,6633	+0,6762	+0,6952	+0,6836
x	+0,9924	+0,9970	+0,9998	+0,9993	+0,9982	+0,9991	+0,9998	+0,9993
y	—	+0,0568	+0,0800	+0,1299	+0,1657	+0,1878	+0,2159	+0,2448
n	+0,6550	+0,7777	+0,7998	+0,7495	+0,7186	+0,7693	+0,7598	+0,7695
s	+3,2639	+3,4818	+3,5705	+3,5613	+3,5458	+3,6324	+3,6707	+3,6972

c	+1,0000	+1,0000	+1,0000	+1,0000	+1,0000	+1,0000	+1,0000	+1,0000
a	+0,6574	+0,6718	+0,6819	+0,6815	+0,6891	+0,6697	+0,6874	+0,6602
x	+0,9977	+0,9987	+0,9993	+0,9993	+0,9995	+0,9986	+0,9995	+0,9979
y	+0,2764	+0,3986	+0,4547	+0,5016	+0,5327	+0,5662	+0,6286	+0,6745
n	+0,7582	+0,7352	+0,7394	+0,6995	+0,6896	+0,7190	+0,6857	+0,6446
s	+3,6897	+3,8073	+3,8753	+3,8819	+3,9109	+3,9535	+4,0012	+3,9772

c	+1,0000	+1,0000	+1,0000	+1,0000	+1,0000	+1,0000
a	+0,7711	+0,6879	+0,6742	+0,6816	+0,6925	+0,6703
x	+0,9957	+0,9995	+0,9989	+0,9993	+0,9998	+0,9986
y	+0,7168	+0,8106	+0,8429	+0,8764	+0,9147	+0,9696
n	+0,6372	+0,5598	+0,6693	+0,6595	+0,5798	+0,5891
s	+4,1208	+4,0578	+4,1853	+4,2168	+4,1868	+4,2276

Equazioni normali in numeri.

c	*a*	*x*	*y*	*n*	*s*
+22,0000	+14,9382	+21,9672	+10,2452	+15,3651	+84,5157
	+10,1588	+14,9160	+7,0210	+10,4273	+57,4613
		+21,9346	+10,2346	+15,3424	+84,3948
			+6,7705	+6,8062	+41,0775

Valori delle costanti.

$y = -2^s,0109$
$x = +5,3233$
$a = +0,4306$
$c = -4,8158$

Residui.

$-0^s,077$ +0,017 +0,012 −0,022 −0,032 +0,013 −0,002 +0,020 +0,036 +0,023 +0,032
+0,003 +0,005 +0,045 +0,016 +0,001 −0,035 −0,078 +0,048 +0,038 −0,040 −0,005

$e_{mq} = \pm 0^s,035+$

Un'altra prova del notevole grado di precisione delle mie osservazioni, si può dedurre dal grande accordo fra le singole osservazioni di una medesima stella in date diverse. Quindi soggiungo nel quadro seguente una pagina del registro delle osservazioni, fatte nel 1905 e ridotte all'equinozio medio del 1904,0. Per brevità ometto le ore ed i minuti di ascensione retta. I numeri che precedono ogni osservazione si riferiscono il primo al mese (indicato col suo numero ordinativo nell'anno), il secondo al giorno del mese.

+4°.4349 (8,3)		+1°.4212 (8,4)		+1°.4227 (8,1)		+3°.4293 (8,2)	
6-28	51^s,01	6-28	8^s,97	6-28	20^s,19	6-28	25^s,28-
7-1	51,05	7-1	8,89	7-1	20,25	7-1	25,30
» 2	51,01	» 2	8,97-	» 2	20,32	» 2	25,27
» 4	51,05	» 4	8,91	» 4	20,26	» 4	25,30
	51,030	» 9	8,77+ (peso $\frac{1}{2}$)	» 9	20,33+	» 9	25,41 (peso $\frac{1}{2}$)
			8,916		20,271		25,300

+2°.4124 (7,4)		+0°.4468 (8,4)		+1°.4255 (7,7)		+3°.4324 (8,3)		+2°.4158 (7,7)	
6-28	42^s,18	6-28	24^s,21	6-28	9^s,36+	6-28	5^s,16	6-28	22^s,67
7-1	42,26-	7-1	24,20	7-1	9,36+	7-1	5,10	7-1	22,73
» 2	42,16	» 2	24,11	» 2	9,39	» 2	5,14	» 2	22,62
» 4	42,20+	» 4	24,22	» 4	9,36+	» 4	5,11+	» 4	22,64
» 9	42,27	» 9	24,06 (peso $\frac{1}{2}$)	» 9	9,39	» 9	5,17-	» 7	22,65
	42,214		24,171		9,375		5,136	» 9	22,62
									22,655

+2°.4175 (7,0)		+1°.4305 (8,3)		+1°.4314 (7,7)		+1°.4323 (8,0)		+2°.4210 (8,3)	
6-28	26^s,42	6-28	46^s,97-	6-28	5^s,75	6-28	37^s,16+	6-28	27^s,83+
7-1	26,48	7-1	46,88	7-1	5,75-	7-2	37,11	7-1	27,80
» 2	26,43	» 2	46,88	» 2	5,72	» 4	37,10+	» 2	27,85
» 4	26,51-	» 4	46,94	» 4	5,74	» 9	37,21	» 4	27,79
» 7	26,39	» 7	46,95	» 7	5,76		37,147	» 7	27,79
» 9	26,49+	» 9	46,96	» 9	5,79+			» 9	27,86
	26,453		46,929		5,752				27,821

+1°.4345 (8,1)		+3°.4411 (8,2)		+2°.4240 (8,3)		+3°.4435 (7,9)		+2°.4261 (8,1)	
6-28	9^s,85-	6-28	53^s,54	6-28	37^s,85	6-28	52^s,27	6-28	22^s,92+
7-1	9,86	7-1	53,59	7-1	37,83	7-1	52,24	7-1	22,93
» 2	9,79+	» 2	53,54	» 2	37,78	» 2	52,30-	» 2	22,93+
» 4	9,88-	» 4	53,63	» 9	37,76+	» 4	52,27-	» 4	22,93
» 7	9,80	» 7	53,63+		37,806	» 7	52,24	» 7	22,90
» 9	9,78-	» 9	53,59			» 9	52,20+	» 9	22,94+
	9,825		53,587				52,253		22,927

+1°.4386 (7,3)	
6-28	6^s,16+
7-1	6,18+
„ 2	6,26+
„ 4	6,16
„ 7	6,28-
„ 9	6,19
	6,207

+2°.4269 (8,1)	
6-28	5^s,98
7-1	5,92+
„ 2	5,98
„ 4	5,99
„ 7	5,94
„ 9	5,90-
	5,952

+1°.4398 (8,2)	
6-28	20^s,34
7-1	20,30
„ 2	20,28
„ 4	20,34
„ 7	20,29
„ 9	20,36-
	20,318

+1°.4402 (8,4)	
6-28	21^s,29-
7-1	21,35
„ 2	21,29
„ 4	21,34+
„ 7	21,26+
„ 9	21,28
	21,302

+3°.4480 (8,0)	
6-28	54^s,48+
7-1	54,53
„ 2	54,52+
„ 4	54,48
„ 7	54,51
„ 9	54,53
	54,510

+2°.4289 (7,2)	
6-28	52^s,64-
7-1	52,61-
„ 2	52,58
„ 4	52,53
„ 7	52,54+
„ 9	52,62
	52,586

+2°.4296 (8,3)	
6-28	51^s,49+
7-1	51,47
„ 2	51,39+
„ 4	51,37
„ 7	51,47+
„ 9	51,43
	51,439

+1°.4443 (8,4)	
6-28	37^s,28
7-1	37,31
„ 2	37,31+
„ 4	37,29
„ 9	37,35
	37,309

+4°.4631 (7,5)	
6-28	42^s,50+
7-1	42,44
„ 2	42,43
„ 4	42,44
„ 7	42,53
„ 9	42,46
	42,467

+4°.4639 (8,2)	
6-28	58^s,56
7-1	58,58
„ 2	58,45+
„ 4	58,53+
„ 7	58,48
„ 9	58,52
	58,521

+2°.4345 (7,4)	
6-28	30^s,99-
7-1	30,93
„ 2	30,95
„ 4	30,96
„ 9	30,96
	30,957

+1°.4471 (7,5)	
6-28	53^s,71
7-1	53,74-
„ 2	53,70
„ 4	53,66
„ 7	53,71
„ 9	53,64
	53,693

+4°.4675 (7,3)	
6-28	29^s,42
7-1	29,39+
„ 2	29,41
„ 4	29,47
„ 7	29,42
„ 9	29,46
	29,429

+4°.4688 (8,2)	
6-28	34^s,65
7-1	34,65+
„ 2	34,70
„ 4	34,68-
„ 9	34,70-
	34,675

+3°.4575 (7.6)	
6-28	21^s,58-
7-1	21,53
„ 2	21,56
„ 4	21,51+
„ 9	21,48
	21,532

+4°.4703 (8,3)	
6-28	7^s,71-
7-1	7,70-
„ 2	7,67
„ 4	7,71
„ 9	7,70
	7,696

+2°.4404 (7,0)	
6-28	56^s,57
7-1	56,56
„ 2	56,52
„ 4	56,55
„ 9	56,52
	56,544

+3°.4613 (7,7)	
6-28	20^s,37
7-1	20,41
„ 2	20,43
„ 4	20,43
„ 9	20,44-
	20,415

+4°.4753 (7,6)	
6-28	2^s,13
7-2	2,18
„ 4	2,15
„ 9	2,19
	2,163

+3°.4644 (7,6)	
6-28	38^s,91
7-1	38,96+
„ 2	38,88+
„ 4	38,88
„ 7	38,90
„ 9	38,89
	38,905

+4°.4791 (7,8)	
6-28	35^s,49
7-2	35,37-
„ 4	35,38
„ 7	35,41
„ 9	35,40-
	35,408

+1°.4579 (8,4)	
6-28	45^s,61
7-1	45,63
„ 2	45,62
„ 4	45,65-
„ 7	45,59+
„ 9	45,55+
	45,609

+3°.4669 (7,6)	
6-28	1^s,53
7-1	1,47
„ 2	1,57
„ 4	1,57
„ 7	1,52+
„ 9	1,56-
	1,537

+2°.4476 (7,8)	
6-28	25^s,04
7-1	25,00
„ 2	25,04
„ 4	25,07
„ 7	25,05+
„ 9	25,06-
	25,043

I concetti moderni sulla figura matematica della Terra. Appunti per la storia della Geodesia.

Nota Terza — *La gravità nelle isole e l'ipotesi di Pratt*

dell'Ing. OTTAVIO ZANOTTI BIANCO
Libero Docente di Geodesia nell'Univ. di Torino (*).

I.

Tutte le numerose misure di gravità istituite dopo Saigey hanno confermato il fatto da lui avvertito per il primo, e che cioè la gravità nelle isole oceaniche, sia pure ridotta al livello del mare, è maggiore della gravità normale corrispondente alla latitudine di ciascun' isola. Naturalmente la differenza fra la gravità normale e la gravità osservata varia per le isole, come per ogni altro luogo, a seconda della formola che s'impiega per il calcolo della gravità normale.

Noi adotteremo in questi studii per valori della gravità normale quelli provenienti dalla formola di Helmert, cioè:

$$\left.\begin{aligned}\gamma_0 &= 978^{cm},046\,\{1+0,005302\,\mathrm{sen}^2\varphi-0,000007\,\mathrm{sen}^2 2\varphi\}\\ \text{ovvero}\quad \gamma_0 &= 980^{cm},632\,\{1-0,002644\cos 2\varphi+0,000007\cos^2 2\varphi\}\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

cui va annesso la schiacciamento 1 : 298,3. Helmert avverte che l'impiego delle formole (1) può in generale venir sostituito da quello delle due seguenti:

$$\left.\begin{aligned}\gamma_0 &= 978^{cm},000\,(1+0,005310\,\mathrm{sen}^2\varphi)+0,020\\ \text{ovvero}\quad \gamma_0 &= 980^{cm},597\,(1-0,002648\cos^2\varphi)+0,020\end{aligned}\right\}\;(**)\quad(2)$$

(*) Nota Prima, vedi questa medesima pubblicazione accademica, volume XXXIX, 1904; Nota Seconda, vol. XL, 1904.

(**) *Die normale Theil der Schwerkraft im Meeres-niveau* — *Sitzungsberichte* dell'Accad. delle Scienze di Berlino. Ivi Helmert scrive: " Come io ho esposto più da vicino nel rapporto menzionato in principio, stando alle migliori determinazioni assolute di g, i valori di γ_0 calcolati dopo ciò ri-

Noi volendo esaminare, il più da vicino che è possibile, la gravità insulare in confronto alla gravità normale, ci atterremo alla formola (1). Rammentiamo che Helmert nel dedurre la formola (1) escluse dai calcoli le isole oceaniche. Noi confronteremo le anomalie della gravità insulare, ottenute colla formola di Helmert, con quelle ottenute a mezzo della formola di Ivanof, che nel ricavarla tenne conto anche delle isole oceaniche; così apparirà più chiara la natura di quelle anomalie.

La formola di Ivanof fu dedotta da 367 osservazioni di gravità, servendosi del metodo detto di condensazione insegnato da Helmert. Ivanof rigettò, per ragioni che non dichiara, un gran numero di osservazioni, comprese in massima parte fra

---

chiedono ancora una correzione di circa $-0^{cm},015$. Come regola, invece della nuova formola basterà la formola $\gamma_0 = 978^{cm},000\,(1 + 0,005310\,\mathrm{sen}^2\varphi)$, ovvero $\gamma_0 = 980^{cm},597\,(1 - 0,002648\cos 2\varphi)$ corretta di $+0^{cm},035$ o rispettivamente di $0^{cm},020$ „. Da questa dichiarazione derivano le formole (1) date nel testo. Il rapporto cui Helmert allude è quello stampato nel volume II dei *Comptes-rendus* delle sedute dell'Associazione Geodetica Internazionale, tenute a Parigi dal 25 IX al 6 X 1900. Ivi, a pag. 374, Helmert scrive: " Io presumo che la correzione della sovrastante assunzione per Vienna nel Geog. Inst. stia fra la semplice media $-0,015$ cm. ed il valore $-0,020$ cm. *Quindi si può prevedere che alle riduzioni provvisorie al " Wiener System „ date nelle tabelle si debba applicare ancora un importo da — 0,015 cm. fino a — 0,020 cm.* „. Nel rapporto sulle misure relative della gravità stampato nei *Comptes-rendus* delle sedute dell'Associazione Geodetica Italiana tenute in Kopenhagen durante l'agosto 1903 non vi è più cenno della correzione di circa $-0,015$ cm., o 0,020, ma si assume come espressione della gravità normale γ_0 le formole (1) date più sopra; indi Helmert scrive quanto segue: " Aggiungendo alla mia formola del 1884 (quella riportata più sopra nella nota presente) $+0,035$ cm. la differenza fra questa formola e la formola precedente (la (1) data nel testo) è così piccola, che essa rientra nell'ordine degli errori accidentali:

$$\left.\begin{array}{l}\gamma_0 = 978^{cm},000\,(1 + 0,005310\,\mathrm{sen}^2\varphi)\\ \text{ovvero} \\ \gamma_0 = 980^{cm},597\,(1 - 0,002648\cos 2\varphi)\end{array}\right\} + 0,035 \text{ „.} \qquad (2^{bis})$$

" Nel mio rapporto presentato a Parigi le deviazioni dei valori della gravità ridotte al sistema di Vienna si riferiscono alla formola del 1884, è d'uopo dunque diminuire tutte queste quantità di 0,035 cm. per ottenere le deviazioni dal valore normale „.

A pag. 43 del rapporto di Kopenhagen per errore il coefficiente 0,005310 è scritto 0,05310. Così pure a pag. 42 di quel medesimo rapporto linea 20 *ab imo*, leggesi 739, mentre si deve leggere 139.

$+40^\circ$ e $+50^\circ$ di latitudine: egli ridusse le 367 determinazioni di gravità ad un solo sistema, valendosi di 14 determinazioni fondamentali che egli ridusse al livello del mare colla formola di Bouguer (*). L'espressione seguente dovuta ad Ivanof ci dà la lunghezza del pendolo a secondi ridotta al livello del mare secondo il metodo di condensazione; in essa φ' è la latitudine geocentrica:

$$L = 99^{cm},0997 + 0,5240 \,\mathrm{sen}^2 \varphi' - 0,0016 \left(\mathrm{sen}\varphi' - \frac{5}{3} \mathrm{sen}^3 \varphi' \right).$$

Come già avvertimmo nella Nota Seconda, p. 15 („Atti „, p. 31), Helmert si limitò ai primi due termini e v'introdusse la latitudine geodetica φ, invece della geocentrica φ', ed ottenne così per γ_0 l'espressione:

$$\gamma_0 = 978^{cm},075(1 + 0,005287 \,\mathrm{sen}^2 \varphi - 0,000018 \,\mathrm{sen}^2 2\varphi). \quad (3)$$

Egli avverte poi che a cagione del termine di 4° grado trascurato, il coefficiente di $\mathrm{sen}^2 2\varphi$ non è completo; ma che il suo ammontare non è molto diverso da quello che è richiesto dall'ipotesi idrostatica. Wiechert e Darwin (**), nell'ipotesi della stratificazione idrostatica della Terra, avevano trovato rispettivamente il coefficiente di $\mathrm{sen}^2 2\varphi$: $-0,000007$ e $-0,0000074$.

Trasformiamo ora la (3) in modo da introdurvi il $\cos 2\varphi$, si ha:

$$\gamma_0 = 980,643 (1 - 0,002636 \cos 2\varphi + 0,000018 \cos^2 2\varphi). \quad (4)$$

(*) Ivanof, *De l'influence des termes du troisième ordre de la fonction perturbatrice du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité sur les formules de la nutation*, „Bollettino dell'Accademia delle Scienze di Pietroburgo „, marzo 1898, vol. VIII, n. 3, p. 219.

(**) Wieckert E., *Ueber die Massenvertheilung im Innern der Erde*, „Atti dell'Accademia delle Scienze di Göttingen „, 1897. — Darwin G. H., *The Theory of the Figure of the Earth carried on to the second order of small quantities*, „Monthly Notices della R. Società Astronomica di Londra „, dicembre 1899. Questo importantissimo lavoro di Darwin non è registrato nel *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* pel 1899. Quello di Ivanof lo è nell'annata 1898, non sotto la lettera *I*, ma sotto l'*J*, nell'indice è detto trovarsi a pag. 814, mentre in realtà si trova a pag. 813.

Nel rapporto sulla gravità presentato a Kopenhagen e citato nella nota prima della presente memoria, redatto da Borrass sotto la direzione di Helmert, si adotta per l'espressione della gravità normale la formola (1). Ivi sono anche date: 1° una tavola per passare da γ_0 (1884) a γ_0 (1901); 2° una tavola per il calcolo della formola (1) cioè di γ_0 (1901), secondo la notazione adottata in quel rapporto. Noi ci uniformeremo a questo rapporto e calcoleremo la gravità normale colle (1), quando parleremo di valori secondo Helmert e colle (3) e (4), quando ci riferiremo ad Ivanof.

II.

Nel 1830, Airy pubblicò nella *Metropolitan Cyclopedia* un suo lavoro sulla figura della Terra: in esso naturalmente egli tratta delle determinazioni col pendolo: non fa alcun cenno dei lavori di Saigey, ma circa la gravità sulle isole scrive quanto segue: " Nell'analizzare gli errori delle osservazioni di primo ordine, apparirebbe, che, *caeteris paribus*, la gravità è maggiore nelle isole che sui continenti. Questa però è una conclusione che non può essere accolta, finchè la correzione per l'elevazione non sia determinata con maggiore sicurezza. Le stazioni d'osservazione sui continenti, o grandi isole, sono frequentemente più elevate di quelle sulle piccole isole; e quindi, se la nostra correzione (la correzione usuale moltiplicata per 0,6) è troppo piccola, essendo essa additiva, renderà la lunghezza del pendolo ridotta al livello del mare, d'assai troppo scarsa alle stazioni continentali, e non troppo scarsa sulle isole. Tuttavia noi riteniamo come buona la nostra correzione (quella del D.r Young), giacchè essa rimuove anomalie apparenti. A Clermont, ad esempio, stazione elevata, colla correzione solita, la gravità appare troppo grande, colla nostra non vi è alcuna disuguaglianza notevole. Ciò prova quanto si debba andar cauti nell'adottare qualsiasi teoria che si appoggi sopra differenze di gravità molto minute ". E in nota: " Il capitano Sabine ha notato (e noi crediamo giustamente) che in molti casi le disuguaglianze della forza di gravità sembrano dipendere dalla natura geologica dello strato. Sulle roccie basaltiche, ad esempio, il numero di vibrazioni è maggiore, e sui terreni d'alluvione minore, di quanto si sarebbe

potuto inferire dalla latitudine della stazione „. Forse si è a questa opinione di Sabine ed Airy, che allude Saigey nel brano riportato a p. 23 (" Atti „, p. 38) della nostra Nota Seconda.

Il lavoro di Airy pur ora esaminato servì assai a Stokes nel suo celebre studio sulla figura della Terra.

Stokes nella sua memoria: *On the Variation of gravity* (Vedi Note precedenti), si occupa varie volte della gravità nelle isole. È curioso l'avvertire che egli come Saigey attribuisce a depressioni del livello del mare, in luoghi molto lontani dalle coste, come le isole oceaniche, l'eccesso di gravità nelle isole.

Stokes chiama g la gravità osservata ridotta al livello del mare, tenendo conto soltanto dell'altezza della stazione d'osservazione. g_1 la gravità osservata ridotta al livello del mare per mezzo della correzione di Young; e g' l'attrazione della massa compresa fra il pendolo ed il livello del mare, e che egli calcola quale attrazione di un disco infinitamente esteso di spessore h (altezza della stazione sul mare) e di densità ρ e cioè $g' = 2\rho\pi h$. Sarà evidentemente $g = g_1 + g'$. Ciò posto Stokes scrive: " L'attrazione g' non è la sola irregolarità della grandezza della forza di gravità che deriva dalla irregolarità nella distribuzione della terra e del mare, e nell'altezza della terra e profondità del mare, benchè sia la sola irregolarità proveniente da quella causa, che sia soggetta a variare bruscamente da un punto della superficie ad un altro non molto lontano. Il rivestimento irregolare del globo terrestre, oltre all'attrazione prodotta dalla parte di esso rivestimento che sottostà alla stazione, nei suoi dintorni immediati, produrrà un'attrazione irregolare, e per di più darà origine ad una elevazione o depressione irregolare del livello del mare, e quindi produrrà una diminuzione, od un accrescimento nel valore di g_1 „ (*Mathematical papers*, vol. II, p. 152).

Al § 20 (p. 154 l. c.), si legge: " Ma oltre il suo effetto diretto, l'attrazione del rivestimento terrestre produrrà un effetto indiretto alterando il livello del mare „. Giova riferire la definizione che Stokes dà del rivestimento terrestre. " Si consideri l'attrazione proveniente dalla terra che sta sopra il livello del mare, e dal difetto di materia attraente nel mare. Si chiami questo eccesso o difetto di materia il *rivestimento* del globo terrestre „. Egli chiama poi g''. l'aumento che la gravità subisce in conseguenza dell'attrazione del rivestimento generale, e di-

mostra che: " pertanto gli effetti diretti ed indiretti del rivestimento generale diminuiranno la gravità di $3g''$, e si propone di apprezzare la grandezza che può assumere $3g''$, in alcune date circostanze „. Circa le idee di Stokes a questo riguardo giova trascrivere un brano della prefazione che il generale Walker ha messo a capo del volume V (Pendulum) del *Trigonometrical Survey of India*, Calcutta, 1879, p. XXVIII, nel quale discorre del confronto fra i risultati dell'osservazione e quelli del calcolo per la gravità, quali appaiono da una tavola compilata dal maggiore Herschel: " ..... noi troviamo una notevole diminuzione nel numero delle vibrazioni del pendolo — cioè nella forza di gravità — all'Hymalaya ed alle più elevate stazioni, relativamente a quanto si verifica alla costa e nelle stazioni insulari. Non possiamo tuttavia attribuire questa deficienza di gravità intieramente a cause locali, perchè, già molti anni or sono, Sir Giorgio Airy, nella sua discussione delle osservazioni del pendolo, vedasi *Encyclopedia Metropolitana*, art. *Figure of the Earth*, ha accennato al fatto che la gravità sembra essere maggiore nelle stazioni oceaniche, che in quelle continentali, stando alla prova fornita dai numeri delle vibrazioni dei pendoli che erano stati fatti oscillare a varie stazioni nelle diverse parti del mondo, sulle coste ed isole dell'Atlantico e del Pacifico, nonchè sui continenti di Europa e di America „. Di poi, nel 1849, il prof. Stokes mostrò che queste differenze fra l'osservazione e la teoria potevano essere dovute ad un innalzamento generale del livello del mare in prossimità dei continenti, sopra il livello delle isole oceaniche, a motivo della densità dei continenti maggiore di quella del mare. Egli dimostrò che: " se immaginiamo attorno ad una stazione un circolo di terra ferma dello spessore di $\frac{1}{3}$ di miglio (536^{m}) e di 1000 miglia (1609 km.) di raggio, e lo confrontiamo con un cerchio di mare dello stesso raggio e della profondità di 3,5 miglia (5631 m.) circondante un'altra stazione, si ottiene una differenza di circa 3,5 nel numero delle oscillazioni compiute in un giorno da un pendolo a secondi. È appena necessario l'avvertire che altipiani elevati produrranno un effetto molto maggiore che terra emergente appena dal livello del mare, ma si dovrebbe notare che la parte principale della correzione è dovuta alla profondità del mare. Così si ri-

chiederebbe un'elevazione uniforme di circa 2,1 miglia (3378 m.), affinchè la terra elevantesi sopra il livello del mare produca un effetto eguale a quello causato dalla differenza fra uno strato di terra di 3,5 miglia (5631,5 m.) di spessore ed un eguale strato d'acqua „. Appare quindi dalle ricerche del prof. Stokes, che ogni qual volta si paragonarono i risultati delle osservazioni pendolari nell'India, con quelli di osservazioni pendolari istituite in lontane stazioni oceaniche, ci si doveva aspettare a che il numero di vibrazioni osservato, paragonato con quello teorico, venisse trovato generalmente in difetto nelle stazioni indiane, ed in eccesso in quelle oceaniche. Ciò è quanto il maggiore Herschel crede di aver constatato, nelle sue investigazioni preliminari circa le relazioni fra le osservazioni pendolari nell'India e quelle istituite in altre parti del mondo „.

Stokes riferisce poi l'opinione di Airy sulla gravità alle isole, indi scrive le linee seguenti: " Questa circostanza sembra essere completamente chiarita dalla teoria precedente. Risulta che i massimi errori positivi appartengono alle stazioni oceaniche, il che è appunto quanto ci si doveva aspettare. Così i soli errori col segno + che ammontino a 5 vibrazioni sono: Isle of France + 7 · 0; Marianne + 6 · 8; Isole Sandwich + 5 · 2; Pulo Gaunsah Lout (una piccola isola presso la Nuova Guinea e quasi all'equatore) + 5 · 0 „.

III.

Dopo ciò si presentano i lavori dell'Arcidiacono Pratt. Le teorie esposte da questo illustre matematico inglese vanno trovando conferma in tutte le moderne determinazioni di gravità, e nei calcoli sulle deviazioni del filo a piombo: ad esse dobbiamo quindi dedicare una assai lunga trattazione (*).

Nella quarta edizione della sua *Figure of the Earth* che Pratt curò, ma non vide pubblicata, troviamo riassunti i suoi

(*) Un cenno ai lavori di Pratt fu da noi dato nelle note ed aggiunte ad una traduzione del discorso dell'americano Tittmann sullo stato presente della geodesia, " Rivista di Topografia e Catasto „, Torino, Bona, 1905.

lavori sull'argomento che ci occupa, e qui traduciamo quella succinta esposizione, che evidentemente ci rappresenta le ultime idee dell'autore al riguardo.

" § 98. In questo capitolo vennero esposti varii metodi per tener conto dell'effetto dell'attrazione locale nello svolgimento di un rilievo trigonometrico. Se la Terra avesse la figura di uno sferoide perfetto, e fosse omogenea in densità, o costituita da strati sferoidici, obbedienti alla legge, secondo la quale si disporrebbero se il tutto fosse una massa fluida eterogenea, allora la gravità sarebbe in ogni punto perpendicolare alla superficie sferoidica, e nel passare da una latitudine all'altra seguirebbe una legge fissa e definita. Ma in realtà la Terra non possiede queste regolarità nè di forma nè di densità. Pertanto in ogni luogo, la gravità differisce leggermente tanto in intensità quanto in direzione da questo valore teorico. Per ogni luogo, si dice attrazione locale di esso luogo, la differenza sia in eccesso che in difetto.

" In questi ultimi tempi si ebbe riguardo a ciò assai più di un tempo. Narreremo qui le circostanze che condussero ai problemi considerati nel presente trattato intorno a quell'argomento.

" Il fu maggior generale Sir Giorgio Everest, sovraintendente al Trigometrical Survey in India, fissò a Kaliana, nella longitudine del capo Comorin, e distante meno di 60 miglia (*) dalla base dei monti Himalaya, l'estremità nord del grande arco indiano di meridiano. Egli ciò fece sperando che sarebbe stata abbastanza lontana dalle montagne, da scansare qualsiasi effetto materiale sul filo a piombo proveniente dalla loro attrazione. Tuttavia, quando nel 1847 egli pubblicò il suo volume finale, egli dichiarò che le ampiezze astronomiche della prima e della seconda divisione (stendentisi rispettivamente sopra circa 5°24′ e 6°4′ di latitudine) erano l'una minore di 5″,24 e l'altra maggiore di 3″,79 delle ampiezze misurate colle operazioni geodetiche. Il suo successore richiese l'autore di queste pagine di rivolgere la sua attenzione allo scopo di scoprire una qualche spiegazione del fatto. Il risultato fu una serie di scritti nelle *Transactions and Proceedings of the Royal Society* e nel *Philoso-*

(*) Chilometri 9654.

phical Magazine; i punti principali di quello studio sono stati riprodotti nel presente lavoro. Nelle *Transactions* pel 1855 egli (Pratt) pubblicò il metodo esposto agli articoli 84-87, per trovare l'attrazione orizzontale di una data massa superficiale irregolare, che applicato agli Himalaya, fece manifesto che l'attrazione della massa della montagna, ben lungi dall'essere insignificante, deve produrre all'estremità nord dell'arco (Kaliana) una deviazione meridiana di non meno di 28″, e che l'effetto ne deve essere risentito giù giù fino al capo Comorin, e che al centro dell'India (a Damargida) deve produrre assai prossimamente 7″, deviazione superiore di quella che Sir George Everest aveva scoperto a Takal Kera, e che lo indusse ad abbandonare quel luogo, come stazione principale „.

“ Il Sig. Airy avendo saputo che l'effetto degli Himalaya è così grande, suppose che la massa sotto le montagne fosse meno densa di quella sotto le pianure, basando la sua teoria sopra una ipotesi che ammette che la crosta terrestre è molto sottile e più leggiera del fluido sul quale si suppone insista: vedi *Phil. Transactions*, 1855, p. 101. Ciò naturalmente farebbe equilibrio al forte importo di deviazione cagionato dalla massa montagnosa esterna; ma i dati assunti non sono soddisfacenti, giacchè senza dubbio la crosta terrestre non è sottile (Vedi il capitolo seguente, § 3), quindi la crosta, per contrazione, sarebbe più pesante del fluido. Per di più, nella seconda comunicazione alla Società reale, l'autore (Pratt) dimostrò con un' ulteriore applicazione del suo metodo, che il vasto Oceano a sud dell' India, a cagione della deficienza della densità dell' acqua rispetto a quella della roccia, deve avere anche un effetto molto considerevole sul filo a piombo, alle stazioni del grande arco, alla quale la spiegazione del Sig. Airy non s'attaglierebbe. Nella successiva memoria l'autore (Pratt) fece una terza applicazione del suo metodo, accettando l'idea di deficienza di materia al di sotto, proposta dal Sig. Airy, e provò (Vedi art. 94-97), senza alcuna supposizione concernente lo spessore della crosta, che un eccesso od un difetto anche piccolo, ma largamente diffuso nella densità sotto la superficie, produrrebbe ovunque delle attrazioni locali tanto ragguardevoli quanto qualsiasi altra cagionata sia da monti che dal mare. Sembra quindi che nelle regioni sotterranee si abbia una risorsa illimitata donde trarre spiegazioni di qualsiasi ano-

malia di attrazione locale si possa riscontrare alla superficie. Ciò tuttavia lasciò la questione in una condizione di incertezza senza uscita, giacchè noi ignoriamo l'esatta condizione dell' interno della Terra, e non si presentava alcun mezzo di trovare anche l'effetto risultante, solamente di tutte le cause di perturbazione. I due grandi problemi la risoluzione dei quali costituisce il compito dei grandi rilievi trigonometrici condotti con principii scientifici, cioè il fare accuratamente la carta della superficie della Terra, e la determinazione delle sue dimensioni e della sua figura media, sono entrambi affetti da attrazioni locali cagionate da ignote variazioni di gravità (*), e sono imperfettamente risolti, finchè non si trovi qualche modo di superare la difficoltà. Ciò fu fatto in larga misura nelle memorie successive, come apparirà dalla seconda parte di questo trattato, nella quale ora entriamo. Poichè abbiamo narrato il progresso di questa ricerca su questo importante argomento, fino a questo punto, noi anticiperemo quanto sarà esposto nelle pagine seguenti, onde completare la nostra narrazione „.

“ In una quarta memoria publicata nelle *Transactions of the Royal Society*, l'autore (Pratt) dimostrò che l'attrazione locale non può sensibilmente influire sulla posizione *relativa* di luoghi disegnati sopra una carta, a mezzo di operazioni di rilievo: così che le carte eseguite dal Survey sono internamente corrette, benchè la posizione di tutta la carta sulla superficie della Terra dipenda dalla ignota deviazione locale in longitudine e latitudine al luogo dal quale il Survey comincia le sue misure. In una quinta memoria pubblicata nei *Proceedings of the Royal Society*, n° 64, nel 1864, ed in due scritti stampati nei numeri per gennaio e febbraio del *Philosophical Magazine*, 1867, l'autore (Pratt) ottenne delle formole per gl'assi medii della figura

(*) Il testo dice: “ are both affected by the variation in gravity caused by unknown local attraction „, che tradotto letteralmente suona: “ sono entrambi affetti da variazione in gravità cagionate da attrazioni locali sconosciute „. Al traduttore parve migliore la lezione riprodotta nel testo, inquantochè stando al procedere ordinario della geodesia, le attrazioni locali, nel senso di deviazione del filo a piombo, sono quelle che, note, rivelano le variazioni in gravità o meglio in densità. Da un certo punto di vista potrebbe reggere però anche la traduzione letterale, e cioè quando per *unknown local attraction* s'intenda l'azione di masse sconosciute.

della Terra espressa a mezzo delle incognite deviazioni locali del filo a piombo cagionate dalle attrazioni locali, alle stazioni d'osservazione; ed assumendo che i tre lunghi archi misurati — l'Anglo-gallico, il Russo e l'Indiano — siano parti di una medesima ellisse, vale a dire, ammettendo ciò che tutte le ricerche della figura della Terra ammettono, che la figura media sia un'ellissoide schiacciata, si trovarono gli assi medii, col metodo dei minimi quadrati, e si computarono i valori della deviazione locale del filo a piombo a tutte le stazioni di questi archi. Pertanto le difficoltà opposte dall'esistenza di attrazioni locali incognite sono state in buona parte sormontate „.

“ Il risultato dell'ultimo computo sovra menzionato è che il valore dell'attrazione locale non è grande ad alcuna stazione, se la si paragona coi grandi valori separati, positivi o negativi, prodotti dalle montagne e dall'oceano, o da estese, e sian pure leggiere variazioni nella densità della crosta. Ciò condusse l'autore ad adottare la seguente ipotesi concernente la costituzione della crosta della Terra: che cioè le varietà che la superficie della Terra ci presenta di montagne, pianure e fondi di oceano, sono provenute dall'essere la Terra stata una volta fluida o semifluida, e che la massa nel solidificarsi si contrasse disugualmente, così da formare cavità dove la contrazione è stata massima, nelle quali cavità l'acqua affluì e formò mari e oceani, e così pure da lasciare elevati altipiani e regioni montagnose, dove la contrazione è stata minore. Ciò fu annunziato nella memoria dei *Proceedings* sopra menzionata. Di recente l'autore (Pratt) ha inviato un'altra memoria che è stampata nelle *Transactions of the Royal Society*, per il 1871, nella quale egli saggia l'ipotesi riguardante la costituzione della crosta, coi dati ora forniti dalle numerose osservazioni del pendolo eseguite nell'India. Queste materie sono tutte trattate nelle pagine seguenti. Vedi negli articoli 202-209, 161-174 e 192-196 „.

Non è chi non veda di quanta importanza sia per la geologia l'ipotesi di Pratt: eppure di essa non si trova menzione in molti e molti trattati che vanno per la maggiore. Va quindi data gran lode al prof. De Marchi, che nel suo eccellente trattato di *Geografia Fisica* (Milano, Vallardi, 1902), l'espose con chiarezza e sani intendimenti critici: e su ciò ritorneremo a suo tempo.

IV.

Ed ora come documento traduciamo dal già citato volume del pendolo un brano che ci fornirà un'idea sommaria, ma esatta e chiara, dei lavori di Pratt, nonchè un autorevole giudizio intorno ad essi.

" Ad ogni modo però, pur facendo larghissima parte a tutte queste cause, rimane il fatto esteso che le osservazioni alle stazioni pendolari indiane dimostrano un notevole accrescimento della gravità, quando si procede dall'interno del continente alla costa, e quindi alle isole dell'oceano, così pure esse attestano di un decrescimento assai spiccato, andando verso gli Himalaya, ed ascendendone gli elevati altipiani. Questi fatti accennano ad una condensazione della materia della crosta terrestre sotto il letto degli oceani, ed un'attenuazione di materia sotto alla giacitura delle montagne, la crosta essendosi contratta e condensata ovunque s'affondò a cavità, ed essendosi dilatata ed attenuata ovunque s'innalzò a montagne, come fu suggerito dall'arcidiacono Pratt „.

" Questo sembra luogo acconcio per dare un breve riassunto dei lavori e delle investigazioni dell'arcidiacono Pratt, intorno all'argomento degli effetti dell'attrazione degli Himalaya sulle operazioni geodetiche del grande rilievo trigonometrico dell'India „.

" La questione attrasse per la prima volta la sua attenzione nel 1852, e si fu per opera del sovraintendente generale d'allora Sir Andrea Waugh. Fra le ampiezze osservate e calcolate delle due sezioni più settentrionali del grande arco, Damargida-Kalianpur-Kaliana, si erano avvertite delle discrepanze rispettivamente di 5″.2 e 3″.8: i valori osservati risultarono in difetto nella sezione nord, ed in eccesso in quella meridionale. Si suppose che esse fossero dovute all'azione della grande catena di montagne a nord, benchè distante ben 60 miglia (96,5 km.) da Kaliana, la più vicina delle tre stazioni. L'arcidiacomo Pratt diè opera a calcolare l'effettivo ammontare dell'attrazione della massa degli Himalaya, e la deviazione del filo a piombo che potrebbe produrre nelle tre stazioni. Il risultato raggiunto fu

di molto superiore a quanto s'attendeva, e di quanto si richiedeva a chiarire le differenze fra le ampiezze astronomiche e le geodetiche. Queste investigazioni furono comunicate alla Società Reale e pubblicate nelle *Philosophical Transactions*, pel 1854 (*). A questa memoria ne tenne dietro una di G. B. Airy, Esquire, astronomo reale, nella quale si faceva osservare che l'effetto delle montagne poteva essere controbilanciato dall'essersi le basi delle montagne affondate per qualche profondità nella densa lava fluida sottostante, sulla superficie della quale si può supporre che ordinariamente si posi la crosta; un tale affondamento cagionerebbe uno spostamento o meglio sostituzione di materia densa con una più leggera, il che tenderebbe a compensare l'eccesso di materia al di sopra (**). Pur facendo la sue riserve sulla forma di questo argomento, l'arcidiacono Pratt ne colse l'idea, e ridusse in calcoli un'altra ipotesi concernente la deficienza di materia sotto le montagne, che cioè i rilievi della superficie montagnosa sono derivati dal dilatarsi verso l'alto

---

(*) *On the attraction of the Himalaya Mountains and of the elevated regions beyond them, upon the plumb line in India*, " Roy. Soc. London Phil. Transac. ", CXLV, 1855, vedasi anche " Monthly Notices Roy. Astr. Soc. ", XVI, 1855-56. Questo però non è il primo lavoro geodetico di Pratt; il primo è intitolato: *On the curvature of the Indian Arc, and the great geological law that the various parts of the solide crust of the earth are perpetually undergoing a change of level*, " Philosophical Magazine ", X, 1855. Nella *Bibliografia Geodetica* pubblicata dall' " U. S. Coast and Geodetic Survey " (Washington, 1903), a proposito di questo lavoro di Pratt si legge quanto segue: " La conclusione è che ovunque la superficie esterna della crosta s'innalza a montagne o si sprofonda a letto di oceani, immediatamente al disotto di quelle ondulazioni, la superficie interna prende una forma precisamente simile ma inversa, così da raddoppiare quasi l'ammontare dell'aumento o diminuzione dello spessore della crosta ". Questo sarebbe dunque l'inizio di quelle indagini geodetico-geologiche che condussero Pratt alla sua ipotesi, che tutte le osservazioni confermano, come vedremo nel seguito di questi studî storici, e che sembra destinata a render conto di molti e molti fatti finora inspiegati.

(**) *On the computation of the effect of the attraction of mountain masses, on disturbing the apparent latitude of stations in geodetic surveys*, " Roy. Soc. London Phil. Transactions ", CXLV, 1855. " Monthly Notices R. Astronom. Society ", XVI, 1855-56. È curioso l'avvertire che questa memoria non è registrata nella Bibliografia del pendolo che va annessa al citato vol. V del pendolo nell'India.

della crosta terrestre, dalle sottostanti profondità, dilatarsi che innalzò le montagne, ma produsse una leggiera ma estesa attenuazione di materia sotto di esse. Egli dimostrò che questa attenuazione è sufficiente a produrre un notevole importo nella compensazione dell'attrazione montuosa, ma egli avverte che non sgombra le difficoltà, e che essendo una mera ipotesi, nulla di certo si può stabilire intorno ad essa (*). Di poi egli investigò l'influenza dell'oceano sul filo a piombo nell'India, e trovò che esso pure esercitava una notevole azione sulle stazioni dell'arco, e nella stessa direzione dell'attrazione degli Himalaya (**) „.

" Intanto l'arcidiacono era stato proclive ad attribuire, in qualche misura, le deviazioni del filo a piombo calcolate, ad errori negli elementi della figura della Terra che erano stati usati nei calcoli geodetici. Ma nel 1860 egli si persuase che tale non era il caso, e che vi *sono* cause occulte — variazioni di densità nella crosta sotto l'arco indiano — le quali, combinandosi coll'attrazione delle montagne e dell'oceano, spiegano la tenuità delle discrepanze che si erano incontrate (***) „.

" Fino a quel punto la sua attenzione si era rivolta unicamente all'attrazione orizzontale, che produce le deviazioni del filo a piombo e ne è misurata. Quando s'intrapresero le operazioni pendolari nell'India, egli tenne loro dietro con molto interessamento, per vedere se quella misura diretta dell'attrazione verticale appoggiasse le sue vedute intorno all'attenuazione di materia sotto le montagne. I suoi calcoli sono dati nella sua *Figure of the Earth*, 4ª edizione, 1871 (****) „.

(*) *On the deflection of the plumb line in India caused by the attraction of the Himalaya Mountains and the elevated regions beyond, and its modification by the compensating effect of a deficiency of matter below the mountain mass.* Comunicata da Stokes, " Proceedings Roy. Soc. London „, IX, 1858, p. 493-496, Postscriptum 701-702: " Philosophical Transact. „ pel 1858, 1859, 745, 748.

(**) *On the influence of the Ocean on the plumb-line in India.* Comunicata da Stokes, " Proceedings R. Soc. London „, 1858, p. 597, 599, " Philosoph. Trans. „ pel 1855, 1859, 779-796.

(***) *On the indian arc of meridian,* " Philos. Trans. „, 1861.

(****) La prima edizione è di Cambridge, 1860. A questo riguardo nella bibliografia geodetica americana sono sfuggite alcune inesattezze.

" Egli dimostra, nell'art. 196, che le discrepanze fra teoria ed osservazione si riducono d'assai se si ammette che sotto qualsiasi porzione o calotta della crosta terrestre, che si elevi sopra il livello del mare, vi è un'attenuazione di materia eguale a quella della calotta, protendentesi all'ingiù da cinquanta a cento volte lo spessore della calotta. A questo risultato egli era giunto, quando egli non aveva ancora a sua disposizione che l'evidenza delle stazioni fra Minicoy e Kaliana, la più elevata delle quali è alta solo 3000 piedi (915 m.) sul livello del mare. Successivamente, rivedendo le bozze del volume in corso di stampa, seppe delle osservazioni a Morè del capitano Basevi: egli allora istituì un calcolo che mostrò che, assumendo un'attenuazione di materia eguale a quella dell'altipiano di Morè, protendentesi ad una profondità eguale all'altezza dell'altipiano e tenendone conto nelle riduzioni, si ridurrebbe la differenza fra teoria ed osservazione ad essere così tenue, da averne fortissima prova della verità della sua ipotesi. Vedasi art. 201 „.

" L'arcidiacono Pratt morì prima che questa edizione della sua *Figure of the Earth* fosse pubblicata. Le sue vedute furono poi ulteriormente confermate dalla misura di due archi longitudinali attraverso alla penisola meridionale dell'India, da Madras a Mangalore e da Vizagapatam a Bombay. Le stazioni terminali essendo in ciascuno dei due archi situate sulla linea di costa, era probabile che a ciascuna stazione il filo a piombo sarebbe stato deviato verso terra, a cagione dell'attrazione della terra superiore a quella del mare, nel qual caso le ampiezze astronomiche sarebbero maggiori delle geodetiche: ciò provò che il filo a piombo era deviato verso il mare a cagione dell'esistenza di materia sottostante alla terra, meno densa di quella sottostante al fondo del mare „.

" Un calcolo interessante nelle ultime ricerche sulla figura della Terra del colonnello Clarke ha fornito un nuovo appoggio all'ipotesi dell'arcidiacono (*). Il colonnello Clarke, basandosi sulle osservazioni geodetiche nell'India, ha calcolato la deviazione (in un piano verticale) della curva che rappresenta meglio il meridiano indiano, dalla curva che meglio corrisponde a tutta la Terra, dedotta dalle osservazioni geodetiche tanto in India,

---

(*) *On the Figure of the Earth*, " Philosophical Magazine „, agosto 1878.

quanto in tutte le altre parti del mondo. Egli dimostra che le due curve s'incrociano fra loro e che il loro distacco non può in alcun caso superare 20 piedi (6 decim.); e scrive: Questo divario può o non essere dovuto all'attrazione degli Himalaya; ad ogni modo, noi abbiamo qui un' indicazione che il vasto altipiano non produce la perturbazione che *a priori* si sarebbe potuto presupporre. Ciò è d'accordo col fatto che a Mangalore e Madras, e leggermente anche a Bombay, vi è un'attrazione verso il mare: ed io penso che abbiamo qui una corroborazione della teoria dell'arcidiacono Pratt, che ove la crosta terrestre è più spessa, è meno densa; e là dove è più sottile, come nel letto degli oceani, ivi ha densità massima „.

Nel 1880 il colonnello Clarke pubblicava il suo classico trattato di geodesia: in esso, al capitolo IV, si tratta delle ipotesi di Airy e Pratt: crediamo pregio dell'opera il tradurre qui quelle pagine, perchè ci dànno l'opinione sull'argomento di una delle più poderose intelligenze che di esso si siano occupate fino ad oggi.

" Ora, applichiamo questo calcolo molto grossolanamente approssimato ad un caso reale, all'altipiano degli Himalaya. L'area sulla quale insistono questi monti, benchè non circolare, è equivalente in estensione ad un cerchio di circa 5° di raggio, e l'altezza è di circa 15.000 piedi (4575 m.): ciò ci dà in cifre tonde y di 600 piedi (183 m.) (*). Questo calcolo quindi ci insegna che larghi tratti di paese possono produrre grandi perturbazioni del livello del mare, ma è per lo meno discutibile, se in realtà ciò avvenga. L'attrazione degli Himalaya, deviante il filo a piombo in varii luoghi dell'India (**), è stata calcolata, ed è risultato che vi è poca corrispondenza fra la teoria e l'osservazione, giacchè l'attrazione degli Himalaya si rende solamente percettibile all'osservazione in luoghi del tutto vicini ad essi. Quindi bisogna concludere che vi è qualche causa contrastante, che annulla l'attrazione della massa visibile. Nella completa nostra ignoranza circa il modo nel quale la crosta della

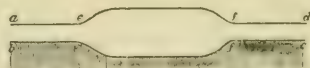
(*) y è il sollevamento dell'acqua sulla costa del disco sferico di 5° di raggio e di 15.000 piedi di spessore e di densità eguale alla densità media della Terra.

(**) Cita il trattato ed i lavori precedenti di Pratt.

Terra giunse alla sua forma presente, si può far poco di più che inventare delle ipotesi di maggiore o minore probabilità, per chiarire il fenomeno fisico apparentemente singolare, nel quale qui c'imbattiamo „.

“ La prima spiegazione fu proposta dall' astronomo reale Sir Giorgio Airy (nelle *Philosophical Transact.* per il 1855, p. 101); essa è fondata sulla supposizione che la crosta terrestre sia sottile. Si ammetta ad esempio che l' interno della Terra sia fluido e che la crosta solida abbia lo spessore di 10 miglia (16.090 m.). S' immagini ora che un altipiano di 100 miglia (161 km.) di larghezza, nella sua minore dimensione orizzontale e alto 2 miglia (3200 m.), sia disposto sulla superficie; sarà questa massa sostenuta, ovvero infrangendo la crosta s'immer-

gerà parzialmente nel fluido sottostante? Nell'annessa figura, sia *abcd* parte della crosta terrestre, e *fg* l'altipiano, e suppongasi che la roccia sia spaccata da fessure verticali, indicate dalle linee punteggiate, e s'immagini che queste fessure siano aperte, come se lo fossero per l'immergersi della parte centrale della massa, le due metà girando sui loro punti più bassi di connessione col rimanente della crosta. Sia W il peso di un miglio cubico di roccia, e C la coesione o forza necessaria a staccare un miglio quadrato. La coesione in h è $10C$, ed in i è $12C$; il peso sovraincombente di ciascuna metà è $2 \times 50\,W$; pertanto, considerando soltanto una metà come eg e prendendo i momenti $10^2C + 12^2C + 2 \times 50^2 W$, si ha che C è circa $20\,W$. Cioè, la coesione dovrebbe essere sufficiente a sopportare una colonna pendente di 20 miglia di roccia. Se lo spessore della crosta si fosse assunto di un centinaio di miglia, noi avremmo trovato *cæteris paribus* $C = \frac{1}{4}$ W. Anche in questo caso la forza di coesione necessaria è maggiore di quanto si può supporre sia, pertanto l'altipiano non sarà sostenuto dalla crosta. Sembra quindi probabile che tali masse montagnose debbano essere accompagnate da corrispondenti depressioni solide, quali $e'f'$, od addentellamenti nel fluido a fine di mantenere l'equilibrio. Ora, se

noi supponiamo una stazione in *a*, vi sarà una deviazione verso *e*, dovuta all'attrazione della materia *ef* incombente; ma la sostituzione della materia *e'f'* più leggiera, alla materia fluida più densa, produce un'attrazione negativa nella stessa direzione. La diminuzione di materia attrattiva al di sotto è sensibilmente eguale all'aumento di materia attraente al di sopra, e se il punto *a* non è vicino ad *ef*, può accadere che non vi sia alcuna perturbazione di sorta; ma se *a* è vicino all'altipiano, specialmente

se la crosta sia di uno spessore di circa 100 miglia, vi sarà una perturbazione molto sensibile. Il ragionamento qui applicato ad altipiani non si applica naturalmente a piccole montagne compatte, come i Shehallien, od altri colli isolati, od a piccole porzioni di regioni di collina „.

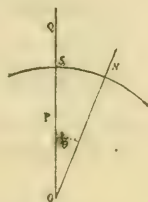
“ L'arcidiacono Pratt, come risultato dei suoi calcoli estesi, relativi all'attrazione degli Himalaya, non solo in quanto affettano colla componente orizzontale la direzione del filo a piombo, ma altresì in quanto colla componente verticale agiscono sulle oscillazioni del pendolo in India, escogitò la teoria che, la varietà della superficie terrestre costituita da elevazioni e depressione, in montagne e pianure e fondi di oceano, deriva da ciò che la massa, nel divenir solida, dalla condizione fluida o semifluida, si contrasse disugualmente, e che sotto monti e piani vi è una deficienza di materia approssimativamente uguale in ammontare alla massa sovrastante al livello del mare: e che sotto gli oceani vi è un eccesso di materia approssimativamente eguale al difetto dell'oceano in confronto della roccia: cosicchè la quantità di materia in ogni colonna verticale che dalla superficie si protenda fino ad una superficie di livello sotto alla crosta è la medesima in ogni parte della Terra „.

“ Secondo questa teoria, che riceve molto valido appoggio dai risultati delle operazioni geodetiche dell'India, la perturbazione del livello del mare, cagionata dalle masse apparenti di continenti, deve essere di un ordine molto piccolo. Poichè la perturbazione risulta come se provenisse da un mero trasporto

di materia nella crosta terrestre verso il centro della Terra od allontanandosi da esso. È evidente di per sè che un tale spostamento di materia perturba solo leggermente il livello del mare; ma possiamo farci qualche idea numerica netta dal seguente caso immaginario „.

Nello svolgere questo problema svilupperemo i calcoli che Clarke, secondo è suo stile, ommette quasi intieramente. Questo problema d'altronde è molto importante, perchè è una prova teorica, ma persuasiva, dell'attendibilità e validità dell'ipotesi di Pratt.

Sia una sfera di raggio c e densità ρ_0 ed avente il centro in O.

Si supponga ora che entro questa sfera e col centro in P e di raggio $PS = SQ = h$ stia una sfera di raggio h e di densità ρ: siano M ed m la massa delle due sfere sarà $M = \frac{4}{3}\pi\rho_0 c^3$; $m = \frac{4}{3}\pi\rho h^3$: col pensiero si trasporti la sfera piccola ad avere il centro in Q.

Si osservi che evidentemente ρ non può essere maggiore di ρ_0, perchè si tratta di considerare un'attenuazione di materia, e quindi si ha un'asportazione di materia da introdurre nel calcolo: nell'esempio numerico Clarke suppone $\rho = \frac{1}{2}\rho_0$: così si viene implicitamente, come si scrisse, ad assumere che l'attenuazione di materia equivale all'esportazione di una sfera di densità ρ e di raggio h: si suppone inoltre che h sia piccolissimo rispetto a c. Sia N un punto di una superficie equipotenziale coincidente assai prossimamente colla superficie della sfera originale. Sia $ON = c + y$; sarà:

$$\frac{M}{c+y} - \frac{m}{NP} + \frac{m}{NQ} = \text{costante}.$$

Svolgendo $(c+y)^{-1}$ e trascurando le quantità inferiori a c^{-2} sarà:

$$\frac{M}{c} - \frac{M}{c^2}y - \frac{m}{NP} + \frac{m}{NQ} = \text{cost}; - \frac{M}{c^2}y - \frac{m}{NP} + \frac{m}{NQ} = \text{cost} - \frac{M}{c} = C$$

e dividendo tutto per $-\frac{M}{c^2}$:

$$y+\frac{mc^2}{M}\left(\frac{1}{NP}-\frac{1}{NQ}\right)=C,$$

e per i valori sopra scritti di M ed m:

$$y+\frac{\rho}{\rho_0}\frac{h^3}{c^3}\left(\frac{c^2}{NP}-\frac{c^2}{NQ}\right)=C,$$

e ponendo $\frac{h}{c}=\beta$:

$$y+\frac{\rho}{\rho_0}\beta^3\left(\frac{c^2}{NP}-\frac{c^2}{NQ}\right)=C.$$

Ora dal triangolo OQN si ha:

$$NQ=\left\{(c+h)^2+(c+y)^2-2(c+h)(c+y)\cos\theta\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Svolgendo, trascurando il quadrato di y e ponendo

$$P^2=h^2+4c^2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\theta,$$

si ha

$$NQ=P\left\{1+\frac{2ch\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\theta}{P^2}+y\frac{2c\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}-h\cos\theta}{P^2}\cdots\right\}.$$

Se in questa espressione si cambia il segno di h, si ottiene il valore di NP, ponendo $P=2cP_1$, si avrà dopo facili riduzioni

$$\frac{c^2}{NP}-\frac{c^2}{NQ}=\frac{h}{2}\frac{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\theta}{P_1^3}-\frac{yh}{4c}\frac{\cos\theta}{P_1^3}.$$

Si ponga $\frac{\rho}{\rho_0}h\beta^3=\eta$, allora l'equazione della superficie equipotenziale diviene:

$$y\left\{1-\frac{\eta}{4c}\frac{\cos\theta}{P_1^3}\right\}+\frac{1}{2}\eta\frac{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\theta}{P_1^3}=C.$$

ma β essendo molto piccolo, si può trascurare $y\beta^3$, e l'equazione si può scrivere:

$$y+\frac{1}{2}\eta\frac{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\theta}{\frac{P^3}{8c^3}}=y+\frac{1}{2}\eta\frac{8c^3\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\theta}{P^3}=y+\frac{1}{2}\eta\frac{8c^3\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\theta}{\left(4c^2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\theta+h^2\right)^{\frac{3}{2}}}=$$

$$=y+\frac{1}{2}\eta\frac{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\theta}{\left(\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\beta^2\right)^{\frac{3}{2}}}=C.$$

La costante C deve essere determinata in guisa che la superficie equipotenziale che si considera racchiuda un volume eguale a quello della sfera che si considerava inizialmente, in modo cioè che l'espressione $\iint y \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\psi$, estesa a tutta la superficie sferica, sia zero: in quella ψ essendo la coordinata sferica analoga alla longitudine. Quella condizione sarà soddisfatta se sarà nullo l'integrale di $y\operatorname{sen}\theta\, d\theta = 2y\, d \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\theta$ esteso a tutta la superficie.

Ponendo $\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\theta = x$, quella condizione d'eguaglianza di volume sarà espressa da:

$$\int_0^1 C dx-\frac{1}{2}\eta\int_0^1\frac{x dx}{\left(x+\frac{1}{4}\beta^2\right)^{\frac{3}{2}}}=0.$$

Da questa trascurando $\frac{1}{4}\beta^2$, si ha $C=\eta$, e quindi

$$y=\eta-\frac{\eta}{2}\frac{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\theta}{\left(\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\beta^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (1)$$

Pertanto l'elevazione del mare in S, dove $\theta=0$, è η, mentre trascurando al solito $\frac{1}{4}\beta^2$, nel punto diametralmente opposto della sfera dove $\theta=180^\circ$, è $\frac{\eta}{2}$.

I punti in cui y svanisce si ottengono eguagliando a zero il secondo membro della (1)

$$\eta - \frac{\eta}{2} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta}{\left(\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\beta^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \eta\left(1 - \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta}{\left(\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\beta^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right) = 0,$$

$$1 = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta}{\left(\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\beta^2\right)^{\frac{3}{2}}};$$

donde quadrando

$$4\left(\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\beta^2\right)^3 = \operatorname{sen}^4 \frac{1}{2}\theta,$$

donde

$$\left(4\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta + \beta^2\right)^3 = 16\operatorname{sen}^4 \frac{1}{2}\theta$$

e ponendo

$$z = 4\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta; \quad (z + \beta^2)^3 - z^2 = 0.$$

Le radici di questa equazione sono per approssimazione:

$$z_1 = 1 - 3\beta^2 - 3\beta^4 - \ldots; \; z_2 = \beta^3 + \frac{3}{2}\beta^4 + \ldots; \; z_3 = -\beta^3 + \frac{3}{2}\beta^4.$$

Di queste l'ultima dà valori immaginarii, le altre due reali dànno approssimativamente:

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta = \pm \frac{1}{2}; \quad \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta = \pm \frac{1}{2}\beta^{\frac{3}{2}}.$$

Il primo di questi valori corrisponde, ed assai prossimamente, a $\theta = \pm 60^\circ$, mentre la seconda corrisponde ad un valore di θ molto piccolo. Se nell'annessa figura c ed f sono i due punti nei quali y svanisce; allora da S ad e, y è positivo, da e ad f negativo. Colle solite regole del calcolo differenziale si deduce che il massimo valore negativo è:

$$\eta\left(1 - \frac{2}{3\beta\sqrt{3}}\right)$$

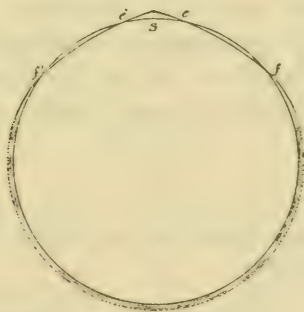
la cui parte maggiore è:

$$-\frac{2\eta}{3\beta\sqrt{3}}.$$

A partire da f, y è positivo e cresce fino a $\theta = 180°$ ed in quell'intervallo è approssimativamente rappresentato da

$$\eta \left(1 - \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \theta}\right).$$

L'alterazione massima del livello del mare avviene fra e ed f, e ad una distanza angolare da S, eguale a $2\sqrt{h}$.

" Si supponga che il raggio della piccola sfera sia di 10 miglia (km. 16,09) e che da essa si esporti una quantità di materia, equivalente ad una diminuzione di densità di 0,5, di guisa che $\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{2}$, ciò sarà come se si trasportasse dalla primitiva posizione, cioè da quella in cui il centro era di 10 miglia sotto la superficie, alla nuova, cioè col centro ad un'altezza di dieci miglia, una sfera di raggio 10 miglia e di densità $\rho = \frac{\rho_0}{2}$, così che $h = 10$ miglia e $c = 3960$ miglia. Allora si troverà che la massima depressione fra e ed f è di circa 0,8 pollici ($0^m,0203$), mentre l'elevazione positiva diviene molto piccola ".

Abbiamo creduto cosa utile il riportare questo problema di Clarke che offre, in un caso teorico, una prova convincente della portata dell'ipotesi di Pratt, sulla quale dovremo ancora trattenerci nelle note seguenti.

Sui raccordi bicentrici. Teoria generale.

Nota dell'Ing. CARLO JORIO.

In un lavoro precedente (*) abbiamo studiato il problema di raccordare due rettifili con una svolta circolare a due centri: questo studio però rappresenta una limitata parte della questione più generale di tali raccordi. Infatti il problema: *Costruire due cerchi tangenti fra loro e tangenti a due direzioni in punti determinati*, ammette infinite soluzioni che si possono dividere in gruppi, secondo la regione in cui avviene il raccordo circolare e secondo la posizione reciproca dei cerchi raccordanti.

Nel campo delle applicazioni ognuno di questi casi dà luogo ad un'altra soluzione, secondo che si considera una parte o l'altra dei cerchi di raccordo: alcune di queste soluzioni possono in pratica rappresentare un caso eccezionale od impossibile; non si esclude però che, p. es., nel tracciamento di ferrovie, anche questi casi eccezionali possano trovare talvolta la loro pratica applicazione.

La soluzione del problema per ogni singolo gruppo più sopra accennato, può costituire argomento a sè e venire studiato separatamente: con maggior vantaggio però la loro trattazione può farsi dipendere da un principio unico e generale, ciò che forma argomento di questo studio, che fa seguito e completa il precedente.

I.

1. — Nel nostro lavoro sopra citato abbiamo considerato le seguenti funzioni (**):

$$R = \frac{t_1+t_2}{2}\cot g\frac{\omega}{2} + \frac{t_1-t_2}{2}\tan g\frac{\omega}{2} \qquad (1)$$

$$R_1 = \frac{t_1+t_2}{2}\cot g\frac{\omega}{2} + \frac{t_1-t_2}{2}\cot g\frac{\alpha_1}{2} \qquad (2)$$

$$R_2 = \frac{t_1+t_2}{2}\cot g\frac{\omega}{2} - \frac{t_1-t_2}{2}\cot g\frac{\alpha_2}{2} \qquad (3)$$

(*) Cfr. C. Jorio, *Contributo allo studio delle curve di raccordo a due centri*, " Atti della R. Accad. delle Scienze ", 1903.

(**) Rimandiamo il lettore al nostro lavoro citato per tutto ciò che riguarda il significato delle lettere e gli assi coordinati assunti.

$$\mathfrak{A} = R_1 - R_2 = \frac{t_1 - t_2}{2}\left[\cot g \frac{\alpha_1}{2} + \cot g \frac{\alpha_2}{2}\right] \tag{4}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{h + k \cot g \frac{\alpha_1}{2}}{h - k \cot g \frac{\alpha_2}{2}} \tag{5}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} = \frac{2(t_1 - t_2)\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}}{A\cos^2\frac{\alpha_1}{2} + B \operatorname{sen}\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_1}{2} - C\operatorname{sen}^2\frac{\alpha_1}{2}} \tag{6}$$

Siamo inoltre arrivati alle conclusioni seguenti (*):

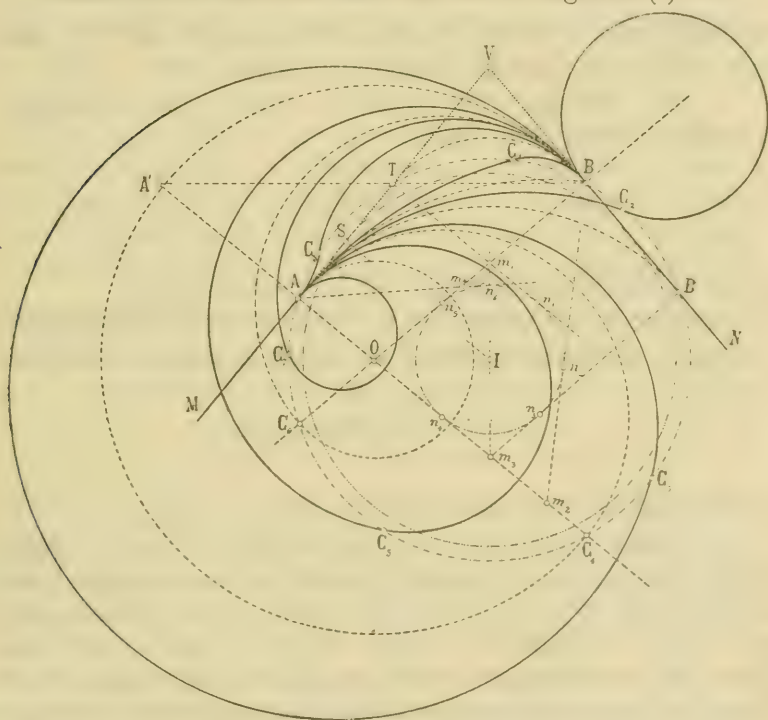



Fig. 1.

1° Il luogo geometrico dei punti di contatto dei due centri raccordanti è un cerchio di centro il punto I (fig. 1) le cui coordinate sono:

$$X_I = \frac{t_1 - t_2}{2}$$

$$Y_I = \frac{t_1 + t_2}{2} \cot g \frac{\omega}{2}$$

(*) Cfr. anche D'Ocagne, *Leçons sur la topométrie.* Paris, 1904.

e di raggio

$$\rho = \frac{t_1 - t_2}{2 \operatorname{sen} v}$$

questo cerchio venne per brevità indicato col simbolo $(I\rho)$.

2° L'inviluppo delle tangenti ai due centri nel loro punto di contatto è un cerchio di centro il punto I e di raggio:

$$\sigma = \frac{t_1 - t_2}{2 \operatorname{tang} v}$$

esso passa per il punto S medio del segmento AT. Per analogia indicheremo questo cerchio col simbolo $(I\sigma)$.

3° L' inviluppo delle rette dei centri è pure un cerchio di centro il punto I e raggio:

$$\tau = \frac{t_1 - t_2}{2}$$

questo cerchio verrà indicato con la scrittura $(I\tau)$.

Risulta che le quantità ρ, σ, τ sono elementi del triangolo rettangolo avente per cateto τ ed angolo opposto v. Si ha poi:

$$\rho - \sigma = \frac{t_1 - t_2}{2} \operatorname{tang} \frac{v}{2}$$

equidistanza dei due cerchi $(I\rho)$ ed $(I\sigma)$.

Nel nostro studio precedentemente fatto abbiamo tacitamente supposto che il raccordo dovesse soltanto avvenire nell'angolo acuto delle due direzioni e nella parte superiore, cioè che il luogo dei punti di raccordo dei cerchi raccordanti fosse l'arco TB del cerchio $(I\rho)$ con le posizioni limiti i punti T e B a cui corrispondevano per posizioni limiti delle rette dei centri la tangente al cerchio $(I\tau)$ parallela alla AO e quella passante per il punto B, per cui, detti n_1 ed n_2 i punti di contatto di queste due tangenti, l'arco $n_1 n_2$ di $(I\tau)$ rappresenta il luogo dei punti di contatto delle varie posizioni che può assumere la retta dei centri nella ipotesi fatta (*).

(*) Cfr. D'Ocagne, *Sur le raccordement par arc de cercle,* " Nouvelles Annales de Mathématique ", 1898,

È ovvio però che le due direzioni date possono venire raccordate in infiniti altri modi, quando si ammetta che il raccordo possa avvenire fuori dell'arco TB di $(I\rho)$, il che corrisponde a considerare altre posizioni della retta dei centri, i cui punti di contatto col cerchio $(I\tau)$ siano esterni all'arco $n_1\,n_2$ prima considerato. In questa ipotesi è interessante vedere come si comportano le funzioni (2), (3), (4), (5), (6), per quali valori della variabile esse assumano valori singolari, ed in quale regione avvenga il raccordo.

Per procedere ordinatamente nel nostro studio divideremo in sei intervalli tutti i valori che può assumere α_1 variando da 0 a 2π.

2. — $\omega - 2v > \alpha_1 > 0$. Questo intervallo corrisponde a quello che fu oggetto del nostro lavoro precedente: in questo caso si è trovato che per la prima posizione limite ($\alpha_1 = 0$) la retta dei centri è parallela alla AO e la curva di raccordo si trasforma nel segmento rettilineo AT ($R_1 = \infty$) ed all'arco tangente in T e B ai due rettifili, con centro in m_1 e raggio $R_2 = t_2 \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2}$. La 2^a posizione limite ($\alpha_1 = \omega - 2v$) corrisponde al valore $R_2 = 0$ (fig. 1), la retta dei centri è la tangente condotta per B a $(I\tau)$ e la curva di raccordo si riduce ad un arco di cerchio di centro m_2, tangente in A al primo rettifilo passante per B e raggio $R_1 = \frac{t_1 + t_2 \cos\omega}{\operatorname{sen}(\omega - 2v)}$, il 2° arco si riduce ad un punto coincidente con B. Come fu visto, in questo intervallo le funzioni $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ passano per valori minimi rispettivamente per $\alpha_1 = \frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega}{2} - v$, $\frac{\omega}{2} - 2v$. Nel 1° caso la retta dei centri è perpendicolare alla TB, nel 2° caso essa è perpendicolare alla AB ed il punto C sta sulla bisettrice VI; nel 3° caso il punto C sta sulla perpendicolare alla AB nel suo punto medio. Geometricamente, considerando le curve rappresentate dalle funzioni (2), (3), (4), (5), (6), che, come è evidente, sono curve asintotiche, si scorge che in questo campo esse sono tutte positive. La curva R_1 (*), diventa asintotica all'asse delle y per $\alpha_1 = 0$, mentre

(*) Per brevità indicheremo con la stessa lettera la funzione e la curva da essa rappresentata.

la curva R_2 incontra l'asse delle x per il 2° valore limite: la curva $\mathfrak{A}$ taglia la curva R_1 per il 2° valore limite di α_1. La curva $\mathfrak{B}$. asintotica per i due limiti. presenta in questo intervallo un ramo con la concavità nella direzione positiva delle y; la curva $\mathfrak{C}$ pure positiva tocca il valore ∞ per il 2° limite. Il luogo geometrico dei punti di raccordo è l'arco TB del cerchio ($I\rho$).

3. — $\omega > \alpha_1 > \omega - 2v$. Per avere la 2ª posizione limite della retta dei centri basterà condurre la tangente a ($I\tau$) parallela alla BO, che incontra la VB in B' ($BB' = AT$); il valore di R_2 sarà $= \infty$, mentre per $\alpha_1 = \omega$ si ha:

$$R_1 = t_1 \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2}\,. \qquad (*)$$

La linea di raccordo è in questo caso costituita dall' arco di cerchio tangente in A e B' coi due rettifili con centro in m_2, e dal segmento rettilineo $B'B$ (con verso negativo).

Considerando ora una posizione qualunque O_1O_2 della retta dei centri (**), si scorge che il punto O_2 si trova dalla parte opposta di O rispetto a B e poichè è $OO_2 = y$ si avrà:

$$R_2 = y - R = -(R - y)$$

il segno — dice che R_1 e R_2 hanno direzioni opposte. In questo intervallo R_2 varia da O ad ∞ mantenendosi negativa. Può interessare in questo caso il valore di α_1 per cui è:

$$R_1 = -R_2$$

che è dato dalla relazione:

$$\cos\left(\alpha_1 + v - \frac{\omega}{2}\right) = \cos v \cos \frac{\omega}{2}$$

(*) Si confronti questo valore col valore di R_2 per $\alpha_1 = 0$.

(**) Retta non segnata in figura, ma che il lettore può facilmente immaginare tracciata, conducendo dal centro O_2 del cerchio, esterno tangente in B, la tangente a ($I\tau$) che incontrerà in O_1 la AO.

la curva 𝔄 nel campo positivo assume valore ∞ per il 2° valore limite, mentre 𝔅 e ℭ asintotiche per il 1° valore di α_1 si mantengono negative in questo intervallo, toccando la seconda il valore O per $\alpha_1 = \omega$.

In questo intervallo il raccordo presenta curva e controcurva, si mantiene esterno all'angolo dei due rettifili ed il luogo del raccordo dei cerchi è l'arco BB' di $(I\rho)$; il luogo del punto di contatto della retta dei centri è l'arco $n_2 n_3$ di $(I\tau)$.

4. — $\pi > \alpha_1 > \omega$. La 2ª posizione limite della retta dei centri in questo caso è la stessa retta AO: il centro O_1 del 1° arco coincide col punto n_4 di contatto della AO col cerchio $(I\tau)$, mentre il punto O_2 cade in O. Dovendo il punto C di raccordo dei due centri trovarsi sulla AO stessa, si deduce che per la 2ª posizione limite la curva di raccordo è costituita da un semicerchio costruito sulla AO con centro n_4 (per verifica dovrà essere $AC_4 \doteq 2X_I$ essendo C_4 il punto di incontro della AO con $(I\rho)$ C_4 punto di raccordo), e da un arco di cerchio di raggio $R = OB$ che dovrà anche passare per il punto A'.

In questo intervallo R_1 passa dal valore

$$t_1 \cot g \frac{\omega}{2} \quad \text{a} \quad \frac{t_1 + t_2}{2} \cot g \frac{\omega}{2}$$

mentre $R_2 = R + y$ (considerando anche il verso della OO_2) varia tra $+\infty$ ed R; le curve si mantengono entrambe nel campo positivo ed in ogni caso è $R_2 > R_1$: le curve 𝔄, 𝔅, ℭ non presentano punti singolari, la prima varia tra $-\infty$ e $-\frac{t_1 - t_2}{2} \operatorname{tang} \frac{\omega}{2}$, la seconda, positiva, fra O e $\dfrac{\cos \frac{\omega}{2} \cos v}{\cos\left(\frac{\omega}{2} - v\right)}$, la terza, negativa come la prima, varia tra i limiti:

$$-\frac{1}{t_1 \cot g \frac{\omega}{2}} \quad \text{e} \quad -\frac{(1 - \cos\omega) \operatorname{tang} v}{t_1 + t_2 \cos \omega}.$$

Per questo intervallo il luogo geometrico dei punti di raccordo è l'arco $B'C_4$ di $(I\rho)$. In figura la curva AC_3B rappre-

senta un raccordo qualunque in questo intervallo. Come si scorge, volendo raccordare i rettifili nella direzione segnata, la curva assume una forma che probabilmente in pratica non potrà ricevere applicazione alcuna, presentando uno sviluppo troppo grande e punti di doppio passaggio.

5. — $\pi + \omega > \alpha_1 > \pi$. Quando α_1 assume il valore $\pi + \omega$, la retta dei centri diviene la BO, il cui punto di contatto n_5 con $(I\tau)$ sarà il centro O_2, mentre il punto O_1 viene a coincidere col punto O. La curva di raccordo in questo caso si compone di un semicerchio costruito sulla retta OB di centro il punto n_5 e raggio $n_5 B$ e di un arco di cerchio di centro il punto O e raggio OA. Il punto C_5 di questo secondo limite giace nell' incontro della BO con $(I\rho)$. Per questa posizione limite si ha:

$$R_1 = \frac{t_2 + t_1 \cos \omega}{\operatorname{sen} \omega}$$

$$R_2 = \frac{t_1 + t_2}{2} \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2}$$

$$\mathfrak{A} = - \frac{t_1 - t_2}{2} \operatorname{tang} \frac{\omega}{2}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{\cos\left(\frac{\omega}{2} + v\right)}{\cos v \cos \frac{\omega}{2}}$$

$$\mathfrak{C} = - \frac{2 \operatorname{tang} v \operatorname{tang} \frac{\omega}{2}}{t_2 + t_1 \cos \omega} .$$

In questo intervallo R_2 si mantiene costantemente positivo e maggiore di R_1, differendo da questo per le posizioni estreme di una stessa quantità: si deduce che le funzioni $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{C}$ saranno negative, mentre $\mathfrak{B}$ si manterrà nel campo positivo.

In queste ipotesi ponendo:

$$\epsilon_1 = \alpha_1 - \pi$$

$$\epsilon_2 = \omega - \epsilon_1$$

si avrà:

$$R_1 = \frac{t_1+t_2}{2} \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2} - \frac{t_1-t_2}{2} \operatorname{tang} \frac{\epsilon_1}{2}$$

$$R_2 = \frac{t_1+t_2}{2} \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2} + \frac{t_1-t_2}{2} \operatorname{tang} \frac{\epsilon_2}{2}$$

da cui:

$$\mathfrak{A} = -\frac{t_1-t_2}{2} \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2}\left[\operatorname{tang} \frac{\epsilon_1}{2} + \operatorname{tang} \frac{\epsilon_2}{2}\right]$$

$$\mathfrak{B} = \frac{h - k \operatorname{tang} \frac{\epsilon_1}{2}}{h + k \operatorname{tang} \frac{\epsilon_2}{2}}$$

$$\mathfrak{C} = -\frac{k\left(\operatorname{tang} \frac{\epsilon_1}{2} + \operatorname{tang} \frac{\epsilon_2}{2}\right)}{\left(h+k \operatorname{tang} \frac{\epsilon_2}{2}\right)\left(h-k \operatorname{tang} \frac{\epsilon_1}{2}\right)}.$$

ove siasi posto:

$$h = \frac{t_1+t_2}{2} \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2}$$

$$k = \frac{t_1-t_2}{2}$$

Riferendoci p. es. alla prima, essa assumerà un valore minimo quando sia:

$$\frac{\partial A}{\partial \epsilon_1} = \frac{\partial A}{\partial \epsilon_2}$$

cioè quando si abbia:

$$-\frac{t_1-t_2}{2} \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2}\left[\frac{1}{2\cos^2\frac{\epsilon_1}{2}} - \frac{1}{2\cos^2\frac{\epsilon_2}{2}}\right] = 0$$

da cui si ricava:

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{\omega}{2}$$

i valori di R_1 ed R_2 corrispondenti a tale valore minimo sono rispettivamente:

$$R_1 = R - \frac{d}{4}\left[\operatorname{tang}^2 \frac{\omega}{2} - 1\right]$$

$$R_2 = R - \frac{d}{4}\left[\operatorname{tang}^2 \frac{\omega}{2} + 1\right] \quad (*)$$

si conchiude quindi che la funzione $\mathfrak{A}$ assume un altro valore minimo per:

$$\alpha_1 = \pi + \frac{\omega}{2}$$

la retta dei centri in questo caso sarà ancora parallela alla bisettrice VI distandone dalla quantità costante $\frac{t_1 - t_2}{2}$ e quindi parallela alla posizione già considerata che corrisponde al minimo di $\mathfrak{A}$ nel 1° intervallo.

Sostituendo i valori di ϵ_1 ed ϵ_2 in $\mathfrak{A}$ si ricava:

$$\mathfrak{A} = -(t_1 - t_2) \operatorname{tang} \frac{\omega}{4}$$

confrontandola con quella analoga trovata nel 1° intervallo, si conclude che dei due valori minimi che può assumere la funzione $\mathfrak{A}$ (**), il 2° è negativo sempre e minore in valore assoluto del 1°, e poichè in ogni caso è $\omega < \pi$ si deduce che il 2° valore minimo sarà sempre minore di $t_1 - t_2$, mentre il 1° ne sarà maggiore e quindi sotto questo rispetto la curva di raccordo nel 2° caso è preferibile.

Per ciò che riguarda la funzione $\mathfrak{B}$ essa ha valori eguali, ai limiti dell'intervallo che consideriamo, e passa per un valore massimo intermedio.

Si ha:

$$\frac{\partial \beta}{\partial \epsilon_1} = -\frac{k}{h + k \operatorname{tang} \frac{\epsilon_2}{2}} \cdot \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\epsilon_1}{2}}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \epsilon_2} = -\frac{h - k \operatorname{tang} \frac{\epsilon_1}{2}}{\left[h + k \operatorname{tang} \frac{\epsilon_2}{2}\right]^2} \cdot \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\epsilon_2}{2}}$$

(*) Si sono scritte sotto questa forma queste espressioni, per confrontarle con le analoghe (22) nel nostro lavoro citato.

(**) Cfr. la formola (23) del lav. cit.

eguagliando tra loro queste due relazioni e riducendo si trova:

$$\epsilon_1 = \frac{\omega}{2} - v$$

$$\epsilon_2 = \frac{\omega}{2} + v$$

cioè:

$$\alpha_1 = \pi + \frac{\omega}{2} - v$$

$$\alpha_2 = \pi + \frac{\omega}{2} + v$$

Anche in questo caso si conclude che la retta dei centri sarà tangente al cerchio $(I\tau)$ condotta perpendicolare alla AB e quindi parallela alla direzione corrispondente studiata nel 1° intervallo.

In modo analogo si trova che la funzione $\mathfrak{C}$ in questo intervallo si mantiene costantemente negativa e passa per un 2° valore minimo per

$$a_1 = \pi + \frac{\omega}{2} - 2v$$

$$a_2 = \pi + \frac{\omega}{2} + 2v.$$

Anche in questo caso la retta dei centri è parallela alla corrispondente posizione del 1° intervallo ed il punto di raccordo si trova sull'incontro del cerchio $(I\rho)$ con la perpendicolare alla AB nel suo punto medio.

Dalla figura si scorge che la curva di raccordo AG_5B presenta in questo intervallo uno sviluppo minore dell' intervallo precedente: il raccordo avviene interno all' angolo dei rettifili ed il luogo geometrico dei punti di raccordo è in questo caso l'arco C_4C_6 ove sia C_6 il punto di incontro della BO con $(I\rho)$.

6. — $2\pi - 2v > \alpha_1 > \pi + \omega$. L'intervallo della variazione dell'angolo α_1 è $\pi - (\omega + 2v)$; per la 2ª posizione limite la retta dei centri si riduce alla tangente al cerchio $(I\tau)$ condotta dal punto A (analoga alla Bm_2): la curva di raccordo si riduce ad un punto coincidente col punto A ed all'arco di cerchio di centro

il punto m_1: in questo caso R_1 diventa zero ed R_2 assume il valore

$$\frac{t_1 \cos\omega + t_2}{\operatorname{sen}(\omega - 2v)}$$

formola simmetrica a quella di R_1 nel caso di $R_2 = 0$.

La funzione $\mathfrak{A}$ assume lo stesso valore di R_2 col segno negativo, $\mathfrak{B}$ passa per il valore 0 e $\mathfrak{C}$ diventa infinito.

La curva AC_7B in figura rappresenta un raccordo qualunque svolto in questo intervallo: esso presenta uno sviluppo minore che negli altri due casi; il raccordo si fa ancora nell'interno dell'angolo delle direzioni date ed il luogo dei punti C è rappresentato dall'arco C_6A di $(I\rho)$.

7. — $2\pi > \alpha_1 > 2\pi - 2v$. Il 2° limite coincide col 1° limite del 1° intervallo. Nella figura 1 la curva AC_8B rappresenta un raccordo in questo intervallo: come si vede, il punto O_1 [per avere i punti $O_1 O_2$ basterà condurre da C_8 la tangente ad $(I\tau)$] si trova da banda opposta di O rispetto ad A per cui R_1 è negativo e varia in questo intervallo da O a $-\infty$, mentre R_2 positivo varia tra

$$\frac{t_1 \cos\omega + t_2}{\operatorname{sen}(\omega - 2v)} \quad \text{e} \quad t_2 \operatorname{cotang} \frac{\omega}{2}.$$

Il luogo dei punti C in questo caso è l'arco AT di $(I\rho)$ esterno cioè all'angolo dei due rettifili, la curva AC_8B mostra l'andamento di un raccordo qualunque in questo intervallo: come si vede, questo raccordo presenta curvature di segno opposto, cioè curva e controcurva; esso non presenta punti doppi e quindi può venire applicato in certi casi.

Le funzioni $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ si mantengono negative, mentre $\mathfrak{C}$ è positiva, e tutte e tre assumono valore ∞ per il 2° limite.

8. — Abbiamo detto in principio del presente studio che ogni soluzione teorica del problema dà luogo a due soluzioni pratiche. La figura 1 contiene di tutti i casi considerati una sola delle soluzioni, supponendo che l'andamento dei rettifili da raccordare sia quale è segnato con tratto pieno e tenendo conto di una parte dei cerchi raccordanti. È chiaro però che si avranno altrettante soluzioni, considerando invece le rimanenti parti e

supponendo che i rettifili abbiano le direzioni opposte a quelle precedenti. Tutto questo è rappresentato nella fig. 2. Nella quale sono conservate le posizioni dei vari punti C della 1ª figura. Da questo si scorge che le curve AC_1B ed AC_8B presentano punti di passaggio e la prima uno sviluppo troppo grande per venire applicata praticamente. La curva BC_2A per la sua forma di curva e contro curva può ricevere qualche applicazione, come pure le altre AC_3B, AC_4B, AC_5B, AC_6B, AC_7B, specialmente quando l'angolo ω sia molto ottuso.

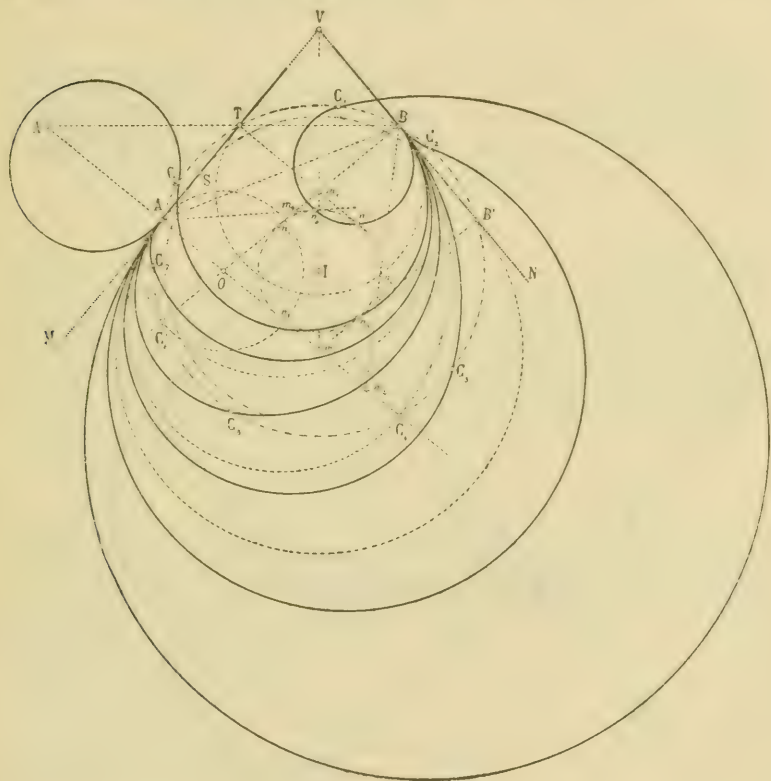



Fig. 2.

Concludendo, qualunque siano le direzioni dei rettifili dati, entrambe, o da parte opposta o dalla stessa parte di V rispetto ad A e B, sarà in ogni caso possibile e facile trovare la soluzione del raccordo che soddisfi alle migliori esigenze tecniche, dietro la considerazione dei cerchi $(I\rho)$ ed $(I\tau)$.

II.

Siano ancora date le direzioni MA ed NB da raccordare con una svolta circolare bicentrica, si voglia però che essa presenti curvatura opposta nell'interno dell'angolo dei due rettifili (fig. 3)

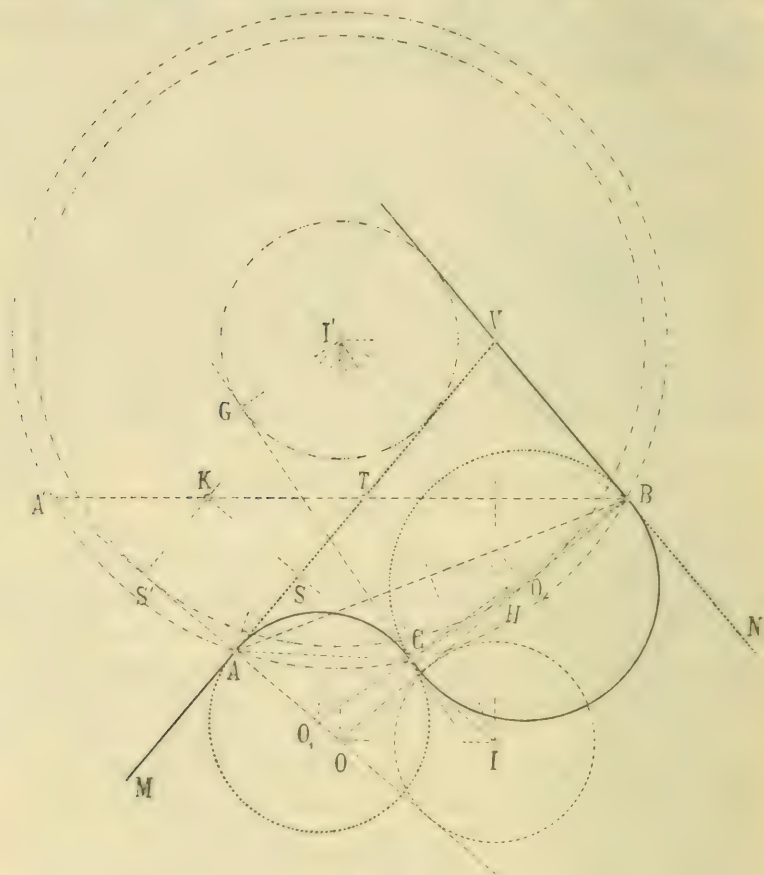



Fig. 3.

stessi. Supponiamo risolto il problema e rappresenti la curva $A - C - B$ una soluzione, si tirino le corde AC e CB e si innalzino le perpendicolari nel loro punto di mezzo: queste perpendicolari si incontreranno in un punto I' che starà pure sulla

bisettrice dell' angolo AOB; esisterà quindi un cerchio che avrà il suo centro in I' e passerà per i punti A, B, C e per il punto A', tale che sia $OA' = OB = R$; da I' abbassando la perpendicolare sopra AO si hanno i punti S' e K medi di AA' ed $A'T$ rispettivamente; dal triangolo $I'S'O$ e per le notazioni precedenti si avrà facilmente:

$$S'A = X_{I'} = \frac{t_1 - t_2}{2} \operatorname{tang} \frac{\omega}{2}$$

$$S'I = Y_{I'} = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

(assumendo ancora le direzioni AO ed AV come assi coordinati, direzione positiva delle x contraria alla precedente) espressioni analoghe a quelle di I. Si consideri il triangolo $II'K$ si ricava:

$$II' = \frac{AB}{\operatorname{sen} \omega}$$

e la II' sarà perpendicolare alla AB nel suo punto medio. Di qui una costruzione facile per avere I' quando sia noto I.

Il cerchio di centro I' e passante per A, B, C è il luogo dei punti di raccordo dei due cerchi raccordanti, e dal triangolo $IS'A$ si ricava:

$$I'A = \rho' = \frac{t_1 + t_2}{2 \cos v}$$

questo cerchio per analogia lo indicheremo col simbolo $(I'\rho')$.

Si immagini condotta nel punto C la tangente comune ai due cerchi e da I' si abbassi la perpendicolare $I'G$ sovra di essa: poichè è ancora:

$$\text{ang. } GCI = v$$

si ricava dal triangolo GCI':

$$GI' = \sigma' = \frac{t_1 - t_2}{2 \operatorname{cotang} \frac{\omega}{2}}$$

cioè questa distanza è indipendente dalla posizione del punto C e quindi l'inviluppo delle tangenti è ancora un cerchio di centro I' e raggio σ', rappresentato con $(I'\sigma')$.

Analogamente abbassando sulla retta dei centri O_1O_2 la perpendicolare $I'H$ dal triangolo $CI'H$ si ricava:

$$I'O = \frac{t_1 + t_2}{2} = \tau',$$

cioè anche le rette dei centri inviluppano un cerchio di centro I' e raggio τ', cerchio che indicheremo con $(I'\tau')$; esso passerà per il punto S'; di qui una costruzione facile di esso.

Indicando con D (*) il punto d'incontro della $I'O$ con la AC, e considerando il triangolo ADO, si ricava:

$$R_1 = \frac{t_1 + t_2}{2\cos v} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\alpha_1}{2} + v\right)}{\operatorname{sen}\frac{\alpha_1}{2}}$$

ed

$$R_2 = \frac{t_1 + t_2}{2\cos v} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\alpha_2}{2} - v\right)}{\operatorname{sen}\frac{\alpha_2}{2}}.$$

Da cui:

$$R_1 = \frac{t_1 + t_2}{2} \cot\frac{\alpha_1}{2} - \frac{t_1 - t_2}{2} \operatorname{tang}\frac{\omega}{2}$$

$$R_2 = \frac{t_1 + t_2}{2} \cot\frac{\alpha_2}{2} + \frac{t_1 - t_2}{2} \operatorname{tang}\frac{\omega}{2}$$

formole analoghe a quelle trovate nella 1ª parte. Si potrebbe così seguendo lo stesso procedimento trovare l'espressione grafica di R_1 ed R_2 non che le coordinate del punto C di raccordo e le relazioni tra i segmenti che la tangente CG intercetta sulle due direzioni MA ed NB date.

Le funzioni analoghe delle $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ prendono le seguenti forme:

(*) Punto non segnato in figura.

$$\mathfrak{A}' = \frac{t_1 + t_2}{2} \left[\cot \frac{\alpha_1}{2} - \cot \frac{\alpha_2}{2} \right] - (t_1 - t_2) \operatorname{tang} \frac{\omega}{2}$$

$$\mathfrak{B}' = \frac{h' \cot \frac{\alpha_1}{2} - k'}{h' \cot \frac{\alpha_2}{2} + k'}$$

$$\mathfrak{C}' = \frac{h' \left[\cot \frac{\alpha_1}{2} - \cot \frac{\alpha_2}{2} \right] - 2k'}{\left(h' \cot \frac{\alpha_1}{2} + k' \right) \left(h' \cot \frac{\alpha_1}{2} - k' \right)}$$

ove sia posto:

$$h' = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

$$k' = \frac{t_1 - t_2}{2} \operatorname{tang} \frac{\omega}{2}$$

e sopra di esse si potrebbe fare la discussione più sopra accennata nella 1ª parte e trovare per quali valori della variabile essi passino per valori minimi.

Così pure teoricamente sarebbe possibile esaminare le varie posizioni che può assumere la retta dei centri, e quindi come varî la forma delle linee di raccordo e quali siano i varî valori limiti delle funzioni considerate.

Si scorge però subito che avendo il cerchio $(I'\tau')$, raggio sufficientemente grande, in pratica saranno solo a considerarsi quelle posizioni delle rette dei centri nelle vicinanze dei punti A e B, poichè altrimenti assumendo i raggi R_1 ed R_2 valori troppo grandi non sarebbero attuabili tali raccordi. Nella fig. 3 la parte punteggiata dei rettifili e delle curve mostra la seconda soluzione del problema in questo caso.

Dal fin qui esposto risulta che la trattazione dei raccordi nell'ipotesi ora fatta procede simmetrica a quella precedente, e si può quindi concludere che, qualunque sia la forma del raccordo con cui si vogliano collegare le due direzioni date, sarà sempre possibile, con la considerazione dei cerchi $(I\rho)$, $(I\sigma)$, $(I\tau)$ o dei corrispondenti $(I'\rho')$, $(I'\sigma')$, $(I'\tau')$ dare al problema una facile soluzione.

Novembre 1905.

Sulla propagazione delle onde nei mezzi isotropi.

Nota del Socio CARLO SOMIGLIANA.

§ 1.

In un lavoro recente: *The propagation of wave-motion in an isotropic elastic solid medium* (*) il sig. A. E. H. Love ha esteso la celebre formola, su cui Kirchhoff ha fondata la teoria della propagazione dei raggi luminosi nei mezzi isotropi, agli integrali delle equazioni generali dei movimenti vibratori nel mezzo stesso. Tale estensione, studiata da tempo e per diverse vie, viene ottenuta nel modo più diretto e più semplice.

Come Kirchhoff si fonda sul teorema di Green, il sig. Love applica il teorema di Betti alle componenti di un movimento generale e di un movimento speciale dotato di singolarità in un punto isolato, e che può considerarsi come il movimento prodotto in un mezzo indefinito da una forza variabile col tempo, secondo una legge arbitraria, ed agente soltanto in quel punto, e secondo una direzione costante.

Gl'integrali che rappresentano questo movimento e che noi chiameremo *integrali elementari*, come l'autore avverte, non differiscono sostanzialmente da altri già trovati da Stokes nella celebre memoria *On the dynamical Theory of Diffraction*. Il sig. Love, con felice procedimento, li deduce dagli integrali generali trovati da Lorenz pei moti prodotti in un mezzo indefinito da forze agenti in un campo finito, supponendo che tale campo impiccolisca sino a ridursi ad un punto.

Gli integrali di Lorenz si ottengono mediante una doppia integrazione estesa allo spazio occupato dal corpo, ed al campo in cui agiscono le forze, cioè in ultima analisi mediante integrali sestupli. Invece questi integrali elementari portano alla

(*) " Proceedings of the London Mathematical Society ,, S. 2, V. I, 1904.

soluzione dello stesso problema con una sola integrazione estesa al campo delle forze. Il movimento prodotto nel mezzo da un sistema di forze può quindi considerarsi come la somma dei movimenti prodotti dalle singole forze applicate in ciascun punto. E le espressioni che rappresentano tale movimento hanno una notevole importanza nella quistione della estensione della formola di Kirchhoff in quanto costituiscono quella parte delle formole finali che corrisponde all'integrale triplo della formola di Green.

Ma noi arriviamo così a questa soluzione definitiva partendo prima dalla soluzione complessa di Lorenz, poi deducendone gli integrali elementari e quindi applicando a questi un'ulteriore integrazione.

Mi pare pertanto non sia privo di interesse il far conoscere un procedimento diretto che conduce alla loro determinazione immediata colla considerazione di un integrale unico ed assai semplice di un'equazione a derivate parziali del 4° ordine, il quale è funzione di una distanza r e del tempo t ed ha rispetto a questa equazione un ufficio analogo a quello dell'integrale $\frac{1}{r}$ per l'equazione di Laplace. Mediante di esso si possono costruire delle funzioni analoghe ai potenziali ordinari ed ai potenziali ritardati, le quali dànno appunto la soluzione del problema proposto.

L'equazione del quarto ordine, a cui abbiamo accennato, può essere scritta, con notazioni conosciute, senza che vi sia bisogno di richiamarne il significato, nel modo seguente:

$$(1) \qquad (D_t^2 - a^2\Delta_2)\,\Delta_2\varphi = 0\,,$$

ove a è una costante, φ la funzione incognita delle variabili r e t. Noi possiamo assegnarne assai facilmente l'integrale particolare di cui abbiamo bisogno.

Essendo nel caso nostro:

$$\Delta_2\varphi = \frac{1}{r}\,\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi)$$

la (1) può dedursi immediatamente dalla equazione:

$$(2) \qquad \frac{1}{r}\,\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi) = \frac{1}{r}\,\chi\left(t - \frac{r}{a}\right)$$

applicando ai due membri l'operazione $D_t^2 - a^2\Delta_2$, qualunque sia la funzione arbitraria χ. Dalla (2) applicando due volte l'integrazione rispetto ad r fra 0 ed r si ha:

$$\varphi = \frac{1}{r} \int_0^r dr \int_0^r \chi\left(t - \frac{r}{a}\right) dr. \tag{3}$$

È questo l'integrale cercato. Ammettendo che χ sia funzione regolare nell'intorno del punto $r=0$, per qualunque valore di t, la funzione φ definita dalla formola (3) si comporta nell'intorno di questo punto come la r. Ammesso infatti che, per qualsiasi valore di t e per r sufficientemente piccolo, si abbia:

$$\chi\left(t - \frac{r}{a}\right) = \chi_0(t) + \frac{r}{a}\chi_1(t) + \dots$$

si ricava integrando:

$$\varphi = \frac{r}{2}\chi_0(t) + \frac{r^2}{2.3a}\chi_1(t) + \dots$$

il che prova l'asserto.

Le singolarità della φ per $r=0$ si presentano quindi nelle sue derivate rispetto ad x, y, z; nè all'infuori di questo punto, essa può presentare in generale altre singolarità a distanza finita.

Introducendo la funzione $\psi(t)$ definita dalla relazione:

$$\psi''(t) = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \chi(t)$$

possiamo avere una espressione assai semplice della φ. Si trova infatti dalla (3):

$$\varphi = \frac{a^2}{r}\left\{\psi\left(t - \frac{r}{a}\right) - \psi(t)\right\} + a\psi'(t).$$

e quando si tratti unicamente di trovare un integrale della (1) che si comporti nel modo voluto, potremmo senz'altro considerare ψ come una funzione arbitraria qualsiasi.

Possiamo pure esprimere la funzione φ mediante integrali semplici:

$$\varphi = \int_0^r \chi\left(t - \frac{r}{a}\right) dr - \frac{1}{r}\int_0^r r\chi\left(t - \frac{r}{a}\right) dr,$$

o anche

$$\varphi = a\int_0^{\frac{r}{a}} \chi(t - t')dt' - \frac{a^2}{r}\int_0^{\frac{r}{a}} t'\chi(t - t')\,dt'.$$

Per indicare la dipendenza della φ dalla costante a e dalla funzione χ, noi indicheremo questa funzione colla notazione:

$$\varphi_a(r, t, \chi).$$

È noto come mediante l'integrale:

$$\frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{a}\right)$$

della equazione:

$$(D_t^2 - a^2\Delta_2)\varphi = 0 \tag{4}$$

si possa costruire la teoria dei così detti *potenziali ritardati*, la quale presenta analogie notevolissime colla teoria dei potenziali newtoniani ordinari, e torna assai utile nello studio degli integrali dell'equazione (4) che è fondamentale nell'ottica e nell'acustica teorica. Ai potenziali newtoniani di spazio corrispondono potenziali ritardati di spazio rappresentati da espressioni della forma:

$$U = \int_S f\left(t - \frac{r}{a}\right) \frac{\partial S}{r} \tag{5}$$

(ove S è un campo a tre dimensioni dato, ed $f(t)$ una funzione del tempo t e delle variabili x, y, z), pei quali sussiste l'equazione di Lorenz (*):

$$(D_t^2 - a^2\Delta_2)U = 4\pi a^2 f(t)$$

analoga all'equazione di Poisson.

Ora noi possiamo considerare dei potenziali ritardati formati in modo analogo colla funzione $\varphi_a(r, t, \chi)$ precedentemente considerata.

Supporremo che la funzione χ dipenda, oltre che dal tempo t, anche dalle variabili x, y, z,

$$\chi = \chi(t, x, y, z)$$

e posto:

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

(*) Lorenz L., *Mémoire sur la théorie de l'élasticité des corps homogènes à élasticité constante,* " Crelle ", Bd. 58, 1861.

possiamo costruire l'integrale:

$$\int_S \varphi_a(r, t, \chi)\, dS,$$

ove $dS = dx\, dy\, dz$ è l'elemento di uno spazio S dato qualunque. Esso risulterà funzione in generale di t, x_0, y_0, z_0 e risulterà determinato per qualunque terna di valori di x_0, y_0, z_0, cioè in tutto lo spazio S_0.

Queste funzioni:

$$V(t, x_0, y_0, z_0) = \int_S \varphi_a(r, t, \chi)\, dS$$

potranno essere designate col nome di *potenziali ritardati di secondo ordine*, riserbando quello di potenziali ritardati *di primo ordine* ai potenziali ritardati ordinari o di Lorenz.

Ricordando l'equazione (2) a cui soddisfa la funzione φ_a, troviamo subito:

$$\Delta_2 V = \int_S \chi\left(t - \frac{r}{a}\right) \frac{dS}{r} \tag{6}$$

e questa relazione è valida in tutto lo spazio.

Possiamo poi scrivere V sotto la forma:

$$V = a^2 \int_S \psi\left(t - \frac{r}{a}\right) \frac{dS}{r} - a^2 \int_S \psi(t) \frac{dS}{r} - a \int_S \psi'(t)\, dS$$

e chiamando rispettivamente V_1, V_2, V_3 queste tre espressioni che compongono V, si trova per la formola di Lorenz:

$$(D_t^2 - a^2\Delta_2) V_1 = 4\pi a^4 \psi(t)$$

e per la formola di Poisson:

$$(D_t^2 - a^2\Delta_2) V_2 = - a^2 \int_S \chi(t) \frac{dS}{r} - 4\pi a^4 \psi(t)$$

e inoltre:

$$(D_t^2 - a^2\Delta_2) V_3 = - a \int_S \chi'(t)\, dS.$$

Sommando, troviamo per lo spazio S:

$$(D_t^2 - a^2\Delta_2) V = - a^2 \int_S \chi(t) \frac{dS}{r} - a \int_S \chi'(t)\, dS. \tag{6'}$$

Sia dalla (6) che dalla (6') risulta immediatamente per lo spazio S:

$$(D_t^2 - a^2\Delta_2)\Delta_2 V = 4\pi a^2 \chi(t) \tag{7}$$

formola che è la corrispondente di quella di Lorenz pei potenziali ritardati di secondo ordine.

Nello spazio esterno ad S si ha invece:

$$(D_t^2 - a^2\Delta_2)\Delta_2 V = 0. \tag{7'}$$

Si vede poi facilmente che la (6') è valida anche esternamente allo spazio S.

§ 2.

Vediamo ora come mediante i potenziali ora considerati si possano esprimere nel modo il più semplice gli integrali del moto prodotto in un mezzo indefinito da forze arbitrariamente date in uno spazio finito.

Siano φ, ψ, χ e φ', ψ', χ' due terne di funzioni delle variabili x, y, z e del tempo t, e poniamo:

$$\Theta = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\chi}{\partial z} \qquad \Theta' = \frac{\partial\varphi'}{\partial x} + \frac{\partial\psi'}{\partial y} + \frac{\partial\chi'}{\partial z}.$$

Indichiamo con u, v, w le componenti di spostamento, e poniamo:

$$\left\{\begin{aligned} u &= \frac{\partial\Theta}{\partial x} - \frac{\partial\Theta'}{\partial x} + \Delta_2\varphi' \\ v &= \frac{\partial\Theta}{\partial y} - \frac{\partial\Theta'}{\partial y} + \Delta_2\psi' \\ w &= \frac{\partial\Theta}{\partial z} - \frac{\partial\Theta'}{\partial z} + \Delta_2\chi' \end{aligned}\right. \tag{8}$$

mentre le equazioni del movimento, indicando con X, Y, Z le componenti delle forze sono, come è noto:

$$\left\{\begin{aligned} (a^2 - b^2)\frac{\partial\theta}{\partial x} + b^2\Delta_2 u + X &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ (a^2 - b^2)\frac{\partial\theta}{\partial y} + b^2\Delta_2 v + Y &= \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ (a^2 - b^2)\frac{\partial\theta}{\partial z} + b^2\Delta_2 w + Z &= \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned}\right. \tag{9}$$

dove

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

ed a, b sono le due costanti del mezzo.

Dalle (8) si ricava:

$$\theta = \Delta_2 \Theta,$$

e quindi la prima delle equazioni (9) mediante le stesse formole viene trasformata nella seguente:

$$a^2 \frac{\partial \Delta_2 \Theta}{\partial x} + b^2 \left\{ \Delta_2 \Delta_2 \varphi' - \frac{\partial \Delta_2 \Theta'}{\partial x} \right\} + X = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \Delta_2 \varphi' - \frac{\partial \Theta'}{\partial x} \right\}.$$

Per soddisfare a questa equazione poniamo:

$$\text{(10)} \qquad \frac{\partial^2 \Delta_2 \varphi'}{\partial t^2} - b^2 \Delta_2 \Delta_2 \varphi' = X$$

e dovremo allora avere:

$$\text{(11)} \qquad a^2 \frac{\partial \Delta_2 \Theta}{\partial x} - b^2 \frac{\partial \Delta_2 \Theta'}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \frac{\partial \Theta}{\partial x} - \frac{\partial \Theta'}{\partial x} \right\}.$$

Ed altre due equazioni analoghe si avranno dalle altre due equazioni del movimento, stabilendo per φ', ψ' due relazioni analoghe alla (10).

Stabiliremo dunque per la terna φ', ψ', χ' le relazioni:

$$\text{(12)} \qquad \begin{cases} (D_t^2 - b^2 \Delta_2) \Delta_2 \varphi' = X \\ (D_t^2 - b^2 \Delta_2) \Delta_2 \psi' = Y \\ (D_t^2 - b^2 \Delta_2) \Delta_2 \chi' = Z \end{cases}$$

e per la funzione Θ fisseremo che debba soddisfare alla equazione:

$$\text{(13)} \qquad (D_t^2 - a^2 \Delta_2) \Theta = (D_t^2 - b^2 \Delta_2) \Theta'$$

da cui segue la (11) e le altre due analoghe.

Quando siano soddisfatte queste ultime quattro relazioni, le (8) ci dànno degli integrali delle equazioni del moto.

Le equazioni (12) sono della forma della equazione studiata nel paragrafo precedente e sono indipendenti fra loro. Potremo quindi rappresentarne gli integrali colla formola trovata mediante potenziali ritardati di 2° ordine.

In quanto alla (13) osserviamo che dalla (12) risulta:

$$(D_t^2 - b^2\Delta_2)\Delta_2\Theta' = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

e quindi si deve avere:

$$(D_t^2 - a^2\Delta_2)\Delta_2\Theta = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}.$$

Questa equazione è ancora del tipo delle (12), e noi possiamo sostituirvi la terna:

$$(14)\qquad \begin{cases} (D_t^2 - a^2\Delta_2)\Delta_2\varphi = X \\ (D_t^2 - a^2\Delta_2)\Delta_2\psi = Y \\ (D_t^2 - a^2\Delta_2)\Delta_2\chi = Z \end{cases}$$

poichè essa ne deriva immediatamente. Queste equazioni sono della stessa forma delle (12), soltanto vi compare la costante a in luogo della b. Per quanto abbiamo visto le due terne saranno soddisfatte ponendo:

$$(15)\qquad \begin{cases} \varphi = \dfrac{1}{4\pi a^2}\displaystyle\int_S \frac{dS}{r}\int_0^r dr\int_0^r X\left(t - \frac{r}{a}\right)dr \\ \psi = \dfrac{1}{4\pi a^2}\displaystyle\int_S \frac{dS}{r}\int_0^r dr\int_0^r Y\left(t - \frac{r}{a}\right)dr \\ \chi = \dfrac{1}{4\pi a^2}\displaystyle\int_S \frac{dS}{r}\int_0^r dr\int_0^r Z\left(t - \frac{r}{a}\right)dr \end{cases}$$

e analogamente:

$$(16)\qquad \begin{cases} \varphi' = \dfrac{1}{4\pi b^2}\displaystyle\int_S \frac{dS}{r}\int_0^r dr\int_0^r X\left(t - \frac{r}{b}\right)dr \\ \psi' = \dfrac{1}{4\pi b^2}\displaystyle\int_S \frac{dS}{r}\int_0^r dr\int_0^r Y\left(t - \frac{r}{b}\right)dr \\ \chi' = \dfrac{1}{4\pi b^2}\displaystyle\int_S \frac{dS}{r}\int_0^r dr\int_0^r Z\left(t - \frac{r}{b}\right)dr \end{cases}$$

oppure colla notazione introdotta nel paragrafo precedente:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi a^2} \int_S \varphi_0(r, t, X) dS, \text{ ecc.}$$

ove S è il campo nel quale agiscono le forze X, Y, Z.

Per completare la dimostrazione che le equazioni del movimento sono effettivamente soddisfatte da queste posizioni, conviene dimostrare che con esse si soddisfa anche alla (13).

Ora dalle (15) per la formola (6′) del paragrafo precedente si ha:

$$(D_t^2 - a^2\Delta_2)\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int_S X(t)\frac{dS}{r} - \frac{1}{4\pi a}\int_S X'(t)dS$$

$$(D_t^2 - a^2\Delta_2)\psi = -\frac{1}{4\pi}\int_S Y(t)\frac{dS}{r} - \frac{1}{4\pi a}\int_S Y'(t)dS$$

$$(D_t^2 - a^2\Delta_2)\chi = -\frac{1}{4\pi}\int_S Z(t)\frac{dS}{r} - \frac{1}{4\pi a}\int_S Z'(t)dS$$

da cui:

$$(D_t^2 - a^2\Delta_2)\Theta = -\frac{1}{4\pi}\int_S \left(X\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + Y\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + Z\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dS.$$

Per ragioni di simmetria un'espressione identica si ricava dalle (16) per:

$$(D_t^2 - b^2\Delta_2)\Theta',$$

ed è perciò soddisfatta la (13).

Tutte le considerazioni precedenti valgono per lo spazio S. ove agiscono le forze. È però assai facile verificare, ricordando la (7′) del paragrafo precedente, che esse sono valide anche nel campo esterno ad S. nel quale, invece delle equazioni (9), devono essere verificate le equazioni che ne risultano ponendo $X = Y = Z = 0$.

Possiamo perciò dire che *le espressioni* (8), *quando per* φ, ψ, χ *e* φ', ψ', χ' *si prendano i potenziali ritardati di secondo ordine rappresentati dalle formule* (15) (16), *dànno un sistema di integrali delle equazioni* (9) *del movimento valido in tutto lo spazio.*

Per concludere che questi integrali rappresentano la soluzione del problema del moto prodotto in un mezzo indefinito da forze agenti in un campo finito, basta osservare che nelle (8)

compaiono soltanto le derivate seconde delle funzioni φ, ψ, ..., e quindi quelle espressioni si comportano all'infinito, come funzioni potenziali ordinarie di spazio; perciò si annullano colle loro derivate, mentre a distanza finita non presentano in generale alcuna singolarità.

I due movimenti, longitudinale e trasversale, di cui risulta composto il moto generale, dipendono rispettivamente dalle due terne di funzioni φ, ψ, χ e φ', ψ', χ' che sono formate in modo identico colle costanti a e b proprie di questi movimenti.

§ 3.

Possiamo ora dedurre facilmente dalle formole stabilite le espressioni delle vibrazioni *elementari*, quelle cioè dovute ad una forza unica $X(t)$ agente in un unico punto della massa e secondo una direzione costante, che possiamo supporre sia quella dell'asse delle x.

Converrà nelle formole del paragrafo precedente supporre $Y=Z=0$ e X diversa da zero in un sol punto (x_0, y_0, z_0), e tale che $\int \rho X dS$ rimanga finito, quando il campo S diventa evanescente, essendo ρ la densità. Noi porremo:

$$\int \rho X dS = \omega(t).$$

Dalle formole trovate avremo così:

$$\varphi(r,t) = \frac{1}{4\pi a^2 \rho} \frac{1}{r} \int_0^r dr \int_0^r \omega\left(t - \frac{r}{a}\right) dr$$

$$\varphi'(r,t) = \frac{1}{4\pi b^2 \rho} \frac{1}{r} \int_0^r dr \int_0^r \omega\left(t - \frac{r}{b}\right) dr$$

$$\psi = \chi = 0 \qquad \psi' = \chi' = 0$$

e le componenti del moto divengono:

$$(17) \qquad \begin{cases} u = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(\varphi - \varphi') + \Delta_2 \varphi' \\[2ex] v = \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\varphi - \varphi') \\[2ex] w = \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial z}(\varphi - \varphi'). \end{cases}$$

Volendo trovare le espressioni effettive di queste derivate è più utile scrivere le φ, φ' sotto la forma:

$$\varphi(r,t) = \frac{1}{4\pi a^2 \rho} \int_0^r \frac{dr}{r^2} \int_0^r r\omega\left(t - \frac{r}{a}\right) dr$$

$$\varphi'(r,t) = \frac{1}{4\pi b^2 \rho} \int_0^r \frac{dr}{r^2} \int_0^r r\omega\left(t - \frac{r}{b}\right) dr$$

la cui identità colla precedente si verifica immediatamente con un'integrazione per parti o anche osservando che l'operazione del secondo membro eseguita sulla espressione:

$$\frac{1}{r}\,\omega\left(t - \frac{r}{a}\right)$$

è l'inversa della operazione:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right),$$

che è una delle forme del Δ_2 per una funzione che dipende dalla sola r. Si ha così:

$$4\pi b^2 \rho \Delta_2 \varphi' = \frac{1}{r}\,\omega\left(t - \frac{r}{b}\right)$$

$$4\pi a^2 \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} \int_0^r r\omega\left(t - \frac{r}{a}\right) dr + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \omega\left(t - \frac{r}{a}\right)$$

$$4\pi a^2 \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} \int_0^r r\omega\left(t - \frac{r}{a}\right) dr + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) \omega\left(t - \frac{r}{a}\right)$$

. . . .

Per la differenza $\varphi - \varphi'$ che compare nelle (17) si ottiene facilmente la espressione:

$$\varphi - \varphi' = -\frac{1}{4\pi} \int_0^r \frac{dr}{r^2} \int_{\frac{r}{a}}^{\frac{r}{b}} t\omega(t - t')\, dt'$$

e riduzioni analoghe si possono fare nelle espressioni delle de-

rivate di questa differenza. Si trova così alla fine per le componenti del moto:

$$4\pi\rho u = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} \int_{\frac{r}{a}}^{\frac{r}{b}} t'\omega(t-t')\,dt' + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \left\{ \frac{1}{a^2}\omega\left(t-\frac{r}{a}\right) - \frac{1}{b^2}\omega\left(t-\frac{r}{b}\right) \right\} + \frac{1}{b^2}\frac{1}{r}\omega\left(t-\frac{r}{a}\right)$$

$$4\pi\rho v = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} \int_{\frac{r}{a}}^{\frac{r}{b}} t'\omega(t-t')\,dt' + \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y} \left\{ \frac{1}{a^2}\omega\left(t-\frac{r}{a}\right) - \frac{1}{b^2}\omega\left(t-\frac{r}{b}\right) \right\}$$

$$4\pi\rho w = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} \int_{\frac{r}{a}}^{\frac{r}{b}} t'\omega(t-t')\,dt' + \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial z} \left\{ \frac{1}{a^2}\omega\left(t-\frac{r}{a}\right) - \frac{1}{b^2}\omega\left(t-\frac{r}{b}\right) \right\}.$$

Sono precisamente queste le espressioni trovate dal sig. Love per le componenti del movimento prodotto da una forza agente in un punto di una massa indefinita, secondo una direzione fissa (cfr. formole (14) della memoria citata).

Quando fosse ω indipendente da t, queste espressioni dànno la deformazione elementare che porta a determinare le formole analoghe a quella di Green pel problema statico. Le considerazioni che precedono sono una estensione naturale di quelle che si fanno appunto in quel caso, prendendo come punto di partenza l'equazione $\Delta_2\Delta_2\varphi = 0$, a cui precisamente si riduce la nostra (1) quando scompare la variabile t.

Sull'età degli scisti cristallini della Corsica.

Nota di GAETANO ROVERETO.

Da parecchio tempo mi occupo della geologia e della morfologia della Corsica, e le mie ricerche sono specialmente rivolte a stabilire la successione stratigrafica e l'età delle varie sorta di scisti cristallini costituenti la parte orientale di quell'isola. Sinora dai geologi che hanno trattato di essi, sia che li riferissero — cito per ora i soli autori di carte geologiche — come Dufrénoy ed Elie de Beaumont e come il Pareto al cretaceo, come l'Hollande al primitivo, come il Nentien al precambriano, sono stati ritenuti, per un preconcetto quasi tradizionale, formanti un tutto unico per età e per condizioni stratigrafiche. A me pare però che, applicando un metodo di indagine diverso, ossia ricercando non solo le corrispondenze che la Corsica può presentare con la vicina Sardegna, come ha fatto l'Hollande, seguìto quindi dal Nentien; ma anche i rapporti che l'isola può avere col continente, e specialmente con i terreni cristallini delle Alpi e della Liguria, si viene alla conclusione già accennata da altri, ma non ancora dimostrata, che la serie degli scisti cristallini corsi corrisponde a quella delle Alpi e non a quella della Sardegna.

Le località che ho più particolarmente studiate e sulle quali mi sono basato per venire a questa conclusione sono le vicinanze di Corte, la valle del Golo da Ponteleccia a Casamozza, i dintorni del ponte di Castirla, di Soveria, di Omessa e di Castiglione, i territori di San Fiorenzo e di Patrimonio.

Il Nentien (1), nel suo recente e classico studio sulla Corsica, premette che per risolvere la questione degli scisti cristallini

(1) Nentien, *Étude sur la constitution géologique de la Corse,* " Mémoire Carte Géolog. France ", pag. 156 e seg., 1897.

bisogna partire dallo studio del contatto che questi scisti presentano in un solo tratto dell'isola, tra Patrimonio e Poggio d'Oletta, con dei calcari riferiti dall'Hollande al carbonifero per una analogia di *facies* da essi presentata con i calcari carboniferi dei dintorni di Orsani e di Campitello. Una sezione quindi del Nentien, partendo dalla splendida spiaggia del golfo di San Fiorenzo, taglia una pila di strati miocenici inclinati di una quindicina di gradi verso Ovest, e quindi una serie profondamente trasgressiva fra i suoi membri e che comprende scisti e puddinghe eoceniche con ammassi diabasici, calcari neri dell'infralias, quarziti del trias, calcari grigio cenere ritenuti carboniferi. Sotto di questi succede, sempre secondo il Nentien, il complesso scistoso, il quale nella sua parte superiore contiene delle intercalazioni di cipollini: in tal modo l'età precarbonifera degli scisti e dei cipollini sarebbe evidentemente dimostrata.

Ma nelle mie prime gite in questa località, che rimontano alla scorsa primavera, trovai traccie di *Gyroporella* in un calcare intercalato agli scisti, per cui compresi che l'ordinamento del Nentien era erroneo; ma non riuscii a decifrarlo in modo diverso, e solo ritornato colà quest'autunno, dopo aver percorso

Fig. 1ª. — *i*, calcari infraliassici; *cq*, calcare ritenuto carbonifero; *q*, quarziti del trias inferiore; *cp*, cipollini; *c*, calcescisti.

le altre parti dell'isola, con un nuovo concetto sull'assetto tettonico e stratigrafico dei suoi scisti, potei trovare il bandolo della matassa, anzi la prova della esattezza delle osservazioni fatte altrove.

Tracciando una sezione (fig. 1ª) alquanto più a nord di quella del Nentien, in direzione pressochè Est-Ovest, e passante sotto la chiesa di Patrimonio, si incontra dapprima, venendo da San Fiorenzo, la piccola pila dei calcari ritenuti infraliassici, pendenti di circa 40° verso ovest; immediatamente sottostanti sono le quarziti — le comuni quarziti del trias inferiore — le quali racchiudono una zona di calcescisti profondamente decalcificati, ossia scisti lucidi che possono avere riscontro fra i più tipici delle Alpi. Questi scisti si continuano sotto la chiesa di Patrimonio e sino al piazzale di questa, e dalle loro varie immersioni si comincia a comprendere che non si ha una serie monoclinale come tutti sinora hanno creduto, i cui termini stabiliscano con la loro sovrapposizione l'ordine cronologico; ma una serie affetta da piccole pieghe che alterano la sua successione stratigrafica.

Il coro della chiesa è fondato su calcari scistosi micacei, che potrebbero rappresentare calcescisti molto calcitiferi per variazione locale, oppure i calcari facenti parte a sè, del tipo di alcuni cipollini alpini: sono alla base degli scisti lucidi e a loro volta posano sulle quarziti che ritornano a comparire a oriente della chiesa. Queste quarziti, raggiunta la scorciatoia che porta alla strada superiore, si vedono a loro volta posare su di un calcare cinereo cristallino, probabilmente quello che l'Hollande ritenne carbonifero, ed è visibilissima la cerniera anticlinalica per la quale tale calcare affiora. Su l'altro fianco dell'anticlinale sono posate le quarziti e quindi i calcescisti, i quali continuano ad essere tormentati da pieghe secondarie.

Ora, da tutto ciò, qualunque geologo che abbia qualche conoscenza di geologia alpina deve trarre la conclusione che i calcescisti, ossia gli scisti sericitosi precambriani del Nentien, non sono più antichi del trias, perchè posteriori alle quarziti, le quali in tutto corrispondono al trias inferiore alpino, ciò che anche il Nentien ha ammesso. In quanto ai cipollini, che si trovano interrottamente fra essi e le quarziti, rappresentano con tutta probabilità il trias medio, ed hanno esatta corrispondenza con quei calcari dolomitici e cipollini che nelle Alpi Occidentali, specialmente nel gruppo del Gran Paradiso, sostengono i calcescisti, l'età dei quali può andare dal trias superiore al lias e forse oltre.

In quanto al calcare cinereo, ritenuto carbonifero, deve osservarsi che alquanto più a mezzogiorno della linea di sezione prescelta l'anticlinale per il quale affiora, e che presso la chiesa di Patrimonio è appena visibile per il suo estradosso, si rialza, si amplia e mostra chiaramente la sua piegatura anticlinalica allungata nella direzione del nord-ovest, e ne risulta più esteso l'affioramento alla superficie della roccia che lo compone. A poche centinaia di metri dalla chiesa di Patrimonio si ha un'alta rupe detta la Tozza, costituita da questo calcare, in cui è visibilissimo l'arco della piega, la quale però appare falsamente ad asse verticale, perchè si scorge solo la parte superiore dell'arco, mentre invece è complessivamente abbattuta verso l'est, e quindi incurvata nei calcescisti, i quali appunto sembrano ora superiori ed ora inferiori ad essa. Ho supposto che questo rovesciamento esista anche nella sezione rappresentata dalla fig. 1ª, ed è riconoscibile come per spaccato naturale osservando la Tozza dalle piccole alture dirimpetto, dei dintorni di Frucinasca. Un'altra cerniera ben visibile dello stesso anticlinale si trova a parecchi chilometri di distanza, nell'isola di calcare cristallino che esiste sotto il colle di Teghime, e notata sulla carta come cipollino precambriano. In questo caso è piega chiusa, ad asse verticale, una piega carenata secondo la nomenclatura americana, la quale sopporta evidentemente tutta la serie calcescistosa. Ora è a notarsi che alla Tozza il calcare è collegato alle quarziti in modo tale da non poternelo separare, perchè osservansi dei banchi di quarzite alternanti con gli strati di calcare, e delle piccole zone costituite da una breccia in grossi frammenti a spigoli vivi, dell'una e dell'altra roccia insieme commisti. Di un fatto simile non esiste esempio nei terreni cristallini della Liguria, e per quanto conosco non è stato ancora segnalato delle Alpi.

Risolto il problema stratigrafico dei dintorni di Patrimonio, mi è stato facile ricostrurre la sezione della fig. 2ª, la quale attraversa la base di Capo Corso e va dai pressi di San Fiorenzo a Bastia. Si segue la carrozzabile che porta al colle di Teghime, e vedonsi succedere regolarmente sovrapposte le diverse varietà di rocce della serie calcescistosa, con molta somiglianza con i calcescisti dei dintorni di Voltri in Liguria, specialmente per le intercalazioni di serpentine, di clorititi e anfiboliti plagio-

clasiche, non notate nella sezione per non complicarne il disegno.

Presso Poggio affiora il calcare cipollino per una ondulazione secondaria del sinclinale coricato formante il fianco ovest della costola montuosa di Capo Corso, e che è appunto notato nella sezione a fondo ondulato, mentre la sua parte affiorante apparisce ad un'unica inclinazione rovesciata, eccettuato un breve tratto mediano alla piega.

Fig. 2ª. — *m*, calcari e sabbioni miocenici; *eo*, scisti eocenici; *d*, diabase; *p*, idromicascisti permiani (per le altre lettere ved. fig. 1ª) 1 : 80.000.

Dai pressi del colle di Teghime si scorgono nel monte Orcajo le traccie dell'anticlinale, qui acuto e ristretto, che forma la spina mediana di Capo Corso, e sulla sua continuazione verso mezzogiorno, dal disotto di esso, spunta il calcare per la piega carenata sopradescritta. Oltrepassato il colle, e cominciata la discesa verso Bastia, incontransi diverse piccole ondulazioni le quali sono molto istruttive. In un primo anticlinale si ha la seguente successione regolarmente sovrapposta (ved. fig. 3ª): calcescisto, cipollino, quarzite, idromicascisto cloritico, il quale ultimo corrisponde per composizione e per natura litologica agli idromicascisti che nelle Alpi e in Liguria sono da tutti considerati permiani. Susségue un sinclinale occupato dai calcescisti, e poi nuovamente è ben visibile una volta anticlinalica, a lieve inclinazione dei fianchi, che presenta sovrapposti gli idromicascisti permiani, il cipollino, sostituito da una facies di calcare dolomitico, e i calcescisti; qui la quarzite manca stante la sua disposizione, che è, come sempre, lenticolare.

Questa constatazione di idromicascisti o sericitoscisti permiani, affioranti dalla serie dei calcescisti, modifica profondamente

la carta geologica di Capo Corso (1), perchè non solo è da mutarsi il riferimento cronologico dei suoi scisti, ma bisogna anche distinguere un nuovo termine, il quale segue interrottamente l'affiorare dei calcari triassici, in gran parte cipollini, in strette ed allungate striscie. La sezione 2ª passa alquanto più a nord del tratto lungo la strada ora esaminato, e lungh'essa esiste un solo affioramento di scisti permiani, perchè le ondulazioni si sono semplificate. A questo anticlinale, sia lungo la strada, sia secondo la linea di sezione che raggiunge la strada al ponte sul torrente di Lupino, succede un ampio sinclinale, le cui inclina-

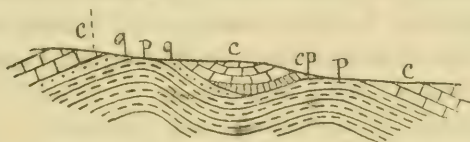



Fig. 3ª.

zioni dei fianchi sono ben riconoscibili, ed è composto da calcescisti racchiudenti notevoli ammassi di serpentine e banchi di antiboliti, finchè, giunti sopra Bastia, incontrasi la cerniera di un quarto anticlinale che porta a giorno i cipollini: e Bastia trovasi sulla gamba inclinata a mare di questa piega littoranea, formata dai calcescisti, qui assai contorti, uniti a notevoli intercalazioni delle solite pietre verdi.

La sezione fra Bastia e il colle di Teghime fu pubblicata anche dall'Hollande (2), ma non rende affatto la struttura della regione, poichè in essa gli strati sono considerati quasi orizzontali, e troncati da parecchie faglie. Il Pareto (3) ha dato pure una sezione fra Bastia e San Fiorenzo passante per la Serra del Pigno (poco lungi da M. Orcajo), in cui figurano esattamente rilevati alle due estremità della sezione i terreni miocenici e i

(1) *Carte Géologique Générale de la France* " *Corse* „ par Nentien, 1897, alla scala di 1:320.000.

(2) Hollande, *Géologie de la Corse*, " Ann. Scienc. Géol. „, vol. IX, n. 2, tav. VIII, fig. 4, 1877.

(3) Pareto L., *Cenni geognostici sulla Corsica*, " Atti 6ª Riunione Scienziati Italiani „, pag. 601-638. Milano, 1845.

diversi calcari: però alla cresta divisoria è fatto corrispondere un sinclinale anzichè un anticlinale, e ciò è curioso, perchè nel testo è detto chiaramente che a levante del colle gli strati pendono verso Bastia e a ponente verso San Fiorenzo, riconoscendo quindi come noi un anticlinale: comunque, la sezione del Pareto è di gran lunga più esatta di quella dell'Hollande, benchè pubblicata trentadue anni prima.

Risalendo la valle del Golo da Casamozza a Ponte Leccia, per il tratto che essa taglia trasversalmente in forma di uno stretto solco tutta la zona scistosa orientale, si scorgono assai bene i rapporti fra le varie rocce da cui questa zona è composta, e si riconoscono alcune ondulazioni che sono continue quasi da un capo all'altro di essa.

A Casamozza si cominciano ad osservare i calcescisti, i quali poi per un lungo tratto sono quasi privi di pietre verdi, per cui è ben netto fra Barchetta e Prunelli un anticlinale con qualche mediana ondulazione, il quale è quello stesso che passa con direzione quasi meridiana per Bastia ed è attraversato dalla sez. 2ª. Qui però è più ampio, meno raddrizzato, e quindi i cipollini inferiori rimangono profondi; ma affiorano sulla sua direzione alquanto più a sud, sulla sinistra del Fiumalto, da dove poi deviano verso il sud-est.

Oltrepassato alquanto Barchetta, cominciano a prevalere sui calcescisti le pietre verdi, e come avviene in Liguria, dove si ha la stessa prevalenza, si altera l'andamento delle pieghe. Ad ogni modo ho supposto, tenendo calcolo della potenza che sembrano avere i calcescisti (di quasi 3000 m.), che la gran zona di essi esistente a Pontenuovo sia piegata in un sinclinale chiuso, laterale all'anticlinale di Prunelli, e che, continuato verso il nord, corrisponderebbe alla conca di San Fiorenzo, la quale però è invece aperta e non rovesciata (1). Ammesso questo sinclinale, si riconosce che il rimanente della serie sino al contatto con le roccie anteriori è rovesciato e abbattuto verso l'esterno del mas-

(1) Una sezione dettagliata, servente di schematica illustrazione a queste osservazioni, verrà da me pubblicata nello studio complessivo sulla geomorfologia dell'isola che ho in preparazione.

siccio granitico contro cui si è corrugato, e che è a questo superiore, benchè apparentemente si immerga sotto di esso.

Interessante assai sarebbe stato di stabilire chiaramente i rapporti che questa serie scistosa ha con le roccie riferite dalla carta geologica all'infralias e al trias, e che trovansi al di là di Ponte Leccia; ma disgraziatamente, per le condizioni del terreno e della vegetazione, e perchè sul contatto fra le due serie, metamorfica e normale, esiste una copertura di scisti eocenici con diabase, ciò non mi è stato possibile; debbo però soggiungere che sulla cresta dell'Orianda, che divide la valle del Golo da quella dell'Asco, fra i calcari ritenuti infraliassici, ho potuto distinguere dei calcari dolomitici, con intercluse masse di serpentina, i quali, con tutta probabilità, sono immersi sotto i calcescisti e appartengono al trias. Le osservazioni fatte a Patrimonio sarebbero quindi riconfermate.

Secondo le indicazioni della carta geologica, rimane però da studiarsi una regione in cui parrebbe evidente che gli scisti cristallini siano più antichi del trias, e questa è estesa fra il Golo e il Tavignano, lungo la ferrata per Corte, dove, sempre secondo la carta, una grande zona di permo-trias (carniole, dolomie, gessi e scisti variegati) è coperta dall'infralias e posa sugli scisti cristallini. Ma le mie conclusioni sono che anche qui la carta deve essere profondamente modificata.

Partendo dalla stazione di Francardo, dove la zona triassica è notata come molto potente, si riconosce che spetta solo a questo periodo una pila di quarziti e di quarzosciti: il rimanente della zona e gli scisti ritenuti precambriani sui quali questi posano spettano al permiano: poichè sono idromicascisti ed altri scisti sericitici, con zone cloritiche e gneissiche, identici a quelli del Finalese in Liguria e delle Alpi Occidentali accompagnanti la *facies* non metamorfica del mesozoico, e che per essere compresi fra il trias e il carbonifero si riferiscono alla fine del paleozoico.

Continuando a risalire la valle, la serie degli idromicascisti permiani ci presenta le sue varietà più spiccate, specialmente scisti cloritici sericitosi, ed è modellata attorno ad una propaggine del protogino. Al ponte di Castirla questi scisti contengono un ammasso di diorite, somigliante a quella delle valli di Cogne

e di Valsavaranche, quindi si fanno assai sfogliati, inclinati di 40° verso oriente.

Gradatamente la loro inclinazione aumenta con l'avvicinarsi al grande massiccio granitico, e raggiunge sino i 75°. Trovasi così raddrizzata una roccia porfirica del tipo dei porfidi laminati delle Alpi Liguri, e specialmente del Besimauda, che poggia su antiboliti microcristalline molto compatte, di colore scuro, costituenti un particolare livello, che ritroveremo altrove chiaramente più antico del trias, e qui formante evidentemente la base del permiano. Di quest'ultima roccia non conosco esempi nelle Alpi ed in Liguria, se pur non le corrispondono le dioriti antiboliche e micacee che osservansi nella valle del Chisone incluse nella zona grafitica del carbonifero. Nella loro parte inferiore queste antiboliti passano ad una roccia pirossenico-antibolica a struttura listata, e vengono a contatto con la massa granitica.

L'ammasso granitico è costituito a contatto da una roccia finamente granulare, di tipo aplitico, la quale, gradatamente andando verso il centro della massa, si fa ad elementi più grossi e distinti, sino a che diventa, dopo una trentina di metri, un tipico protogino: dimostrando con ciò che costituisce una zona periferica di contatto modificata nella sua struttura da fenomeni endomorfici. Gli scisti antibolici sarebbero quindi più antichi del granito.

Un altro contatto assai interessante si osserva lungo la strada che da Castirla porta a Castiglione, presso il ponte sul torrente Ancina. Qui il granito sporge dal versante con una parete perpendicolare, come sarebbe quella di un dicco, ed è accompagnato da uno a due metri di scisti feldispatizzati e cloritici, cui susseguono degli scisti neri filladici, con inclusi strati di arenarie micacee carboniose che, con tutta probabilità, data la loro *facies* e la loro posizione, sono da riferirsi al carbonifero; non mi nascondo però che se ne hanno di simili anche nell'eocene. Su di essi sembrano posare gli idromica-scisti che ho riferiti al permiano. La carta del Nentien nota in questo punto la continuazione di una striscia di scisti precambriani che si allungherebbe per molti chilometri, dalla valle del Tavignano alla Balagna; ma la sua limitazione è molto imperfetta e abbraccia varie sorta di roccie.

Gli stessi scisti filladici si ritrovano fra Castiglione e Po-

polasca, dove pure è notato il precambriano, e formano una lente compresa nel granito, isolata dal rimanente degli scisti sinora esaminati. Nella sua parte superiore, o, per meglio dire, al tetto della sua pila, esiste un calcare bigio cristallino, della cui età nulla di preciso per ora può dirsi.

Ritornando a Castirla è interessante seguire la strada che porta a Corte sino al colle dell'Ominanda, e poi da questo colle prendere il sentiero che conduce a Soveria. Nella carta geologica è notato in questa regione un'allungata striscia di cipollini continuata sino a Corte ed oltre, e considerata come una intercalazione lenticolare negli scisti precambriani; ma io credo invece che a nord di Corte sia posata e incuneata per piccoli fondi sinclinalici negli scisti permiani, e che a Corte e a mezzogiorno di questo sia intercalata come strato separante un gruppo di scisti superiori, ossia calcescisti mesozoici, da un gruppo inferiore, ossia micascisti e anfiboloscisti permo-carboniferi.

Valle dell'Ominanda

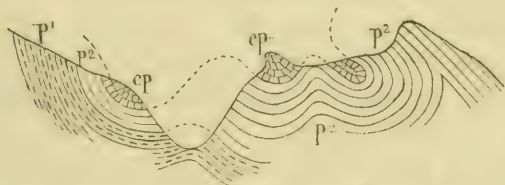



Fig. 4ª. — p^1, cloritescisti induriti; p^2, scisti sericitici fogliettati; *cp*, cipollino.

Fra Castirla e il colle dell'Ominanda a vece di una striscia continua si hanno delle isolette; le principali sono due, di calcare dolomitico con intercalati straterelli di ftanite diasprigna, ricordanti quelli dei pressi di Montenotte in Liguria, le quali sono posate direttamente su degli scisti sericitici fogliettati, che potrebbero rappresentare la parte superiore degli idromicascisti permiani (ved. fig. 4ª), oppure una sostituzione delle quarziti, come avviene tra la Val Varaita e la Val Maira nelle Alpi Piemontesi. Alla base di questi scisti si hanno dei cloritescisti induriti e compatti che sporgono dai versanti in forma di acuti pinnacoli, abbattuti secondo l'inclinazione del banco di cui sono la parte a giorno.

Essendo cosa essenziale per l'ordinamento qui proposto il dimostrare che questi calcari sono superiori agli scisti sericitici

e non intercalati ad essi, ho accuratamente studiato il territorio dove essi affiorano, e ho trovato sui poggi che si scolcano, seguendo la strada che dall'Ominanda porta a Soveria, un ammasso piuttosto notevole di calcare dolomitico (1), alternante nella sua parte inferiore con i sericitoscisti fogliettati e con le ftaniti, formare chiaramente una piccola conca sinclinale fasciata da alcuni strati di scisto di color vinato facenti parte a sè, e sostituenti anch'essi il solito livello quarzitico.

Quindi evidentemente questi cipollini corrispondono al livello calcareo-dolomitico del trias medio alpino, e per il limitato spessore e per la loro continuità ricordano più specialmente i cipollini e i calcari che trovansi alla base dei calcescisti nel versante nord del Gran Paradiso, al Nivolet ed oltre verso levante. Non è escluso che dove sono mancanti siano sostituiti, come nelle Alpi, da scisti micacei, o che tale sostituzione sia solo parziale; del resto le alternanze ora ricordate accennano a questo fatto.

Continuando ad esaminare verso l'est tutto il complesso degli scisti rappresentato dalla fig. 4ª, si trova che è ricoperto dalla zona triassico-infraliassica notata in modo esatto nella carta di Francia, ed estendentesi lungo la valletta dell'Ascia ed oltre in alto sul versante, lungo la destra del Golo. È una serie corrispondente in tutto, eccettuato il suo termine superiore, alle serie permo-triassiche della zona non metamorfica del Brianzonese, e qui, come nelle Alpi, trovasi allungata contro la zona metamorfica che sta a suo oriente.

Una delle località dove più facilmente ho potuto studiarla è la trincea lungo la strada ferrata, dove questa, di contro ad Omessa, fa una grande ansa (fig. 5ª). Per una serie di piccole arricciature, che corrispondono al motivo tettonico regionale, così difficile a riconoscersi perchè d'ordinario ha pieghe chiuse e abbattute in modo da simulare un unico insieme isoclinale, si hanno calcari a tratti cipollini, a tratti convertiti in carniole, sopra-

(1) Su di un poggio vicino, sopra a Soveria, esiste invece un'isola di calcare nummulitico. La scoperta in Corsica delle prime nummuliti, d'ordinario attribuita al Collomb, spetta invece al Pareto (*Cenni geognostici*, l. cit., pag. 613 e 614) che segnalavale in due località assai distanti fra loro, alle Forche dell'Asinao e a Belgodere.

stanti ad anageniti ed a quarziti, e queste a loro volta posano sugli idromicascisti permiani identici a quelli finora descritti. Tutto questo complesso viene ricoperto dai calcari che costituiscono l'accidentato rilievo del Caporalino, riferiti dall'Hollande e dal Nentien all'infralias, dal De Stefani (1), se ho ben compreso, in parte al giura e in parte al cretaceo.

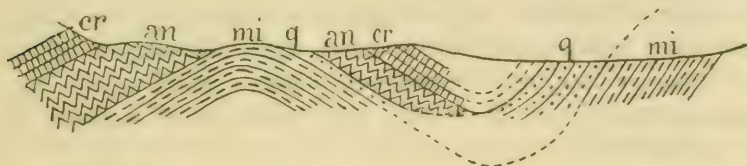



Fig. 5ª. — *cr*, carniole; *an*, anageniti; *q*, quarziti; *mi*, idromicascisti.

Certo è che esiste un *hiatus* fra le roccie permo-triassiche inferiori e questi calcari superiori, poichè una marcata discordanza si ha, ed è visibilissima dalla parte di Francardo, fra le due roccie, la superiore inclinata di 15°, la inferiore di 40°; e ciò spiega pure l'anomalia che osservasi a Patrimonio (vedasi fig. 1ª), dove l'infralias viene a contatto con le quarziti, e non con i calcescisti superiori. Anche il De Stefani ha riconosciuto che l'infralias corso copre con trasgressione i terreni anteriori, ed ha giustamente ricordato che ciò si verifica pure in Toscana; ma per il caso del Caporalino ho ritenuto, come ora si è detto, che invece di infralias si tratti di giura superiore e di creta.

Io ho trovato nel calcare del Caporalino, negli strati più profondi, presso la stazione di Omessa, dei numerosi resti indeterminabili di brachiopodi, di coralli e di pelecipodi, tra cui credo di aver riconosciuto dei *Megalodon*; si tratterebbe quindi in quel punto di trias superiore, ossia del livello della dolomia principale di Lombardia, che, per citare una località continentale vicina alla Corsica, trovasi anche all'Alpe di Corfino, dove in una

---

(1) De Stefani C., *Terreni mesozoici e neozoici della Corsica*, " Rendic. Acc. Lincei ,, 1° sem., fasc. 2°, 1893. L'A. trattò della Corsica anche nel suo lavoro sul M. Pisano (" Mem. R. Comitato Geologico ,, vol. III, p. 1ª, 1876) e ne riconobbe gli scisti sericitici ed i cipollini che riferì al trias; la sua ultima opinione però è che sieno anteriori ad ogni terreno fossilifero (l. cit., II sem., fasc. 11°).

mia precedente pubblicazione, ripetendo inconsciamente un errore altrui, l'ho ritenuta superiore al retico: ma non escludo che nella parte superiore di quella pila possano esistere altri strati appartenenti a periodi più recenti.

Nel periodo eocenico questi calcari vennero profondamente erosi, e in essi si intagliò un'alta ripa, contro la quale si depositarono i sedimenti in parte conglomeratici e brecciati e in parte fini ed argillosi di quel periodo; dando luogo a scisti i quali contengono grossi massi arrotondati del calcare, contro cui furono poi piegati e fortemente pigiati: non è quindi ammissibile l'ipotesi del De Stefani che queste roccie possano essere carbonifere.

Un'altra regione classica sono i dintorni di Corte, studiati specialmente dal Pareto, dall' Hollande, dal De Stefani e dal Nentien nei lavori già citati.

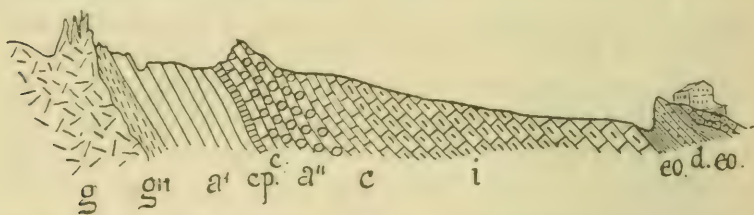



Fig. 6ª. — *g*, granito protoginico; *gn*, micascisto gneissico; *a'*, anfiboliti inferiori; *cp*, cipollino; *c*, calcescisti; *a''*, anfiboliti superiori; *i*, calcari infraliassici; *eo*, scisto eocenico con calcari; *d*, diabase.

L' Hollande ha fatto una sezione lungo la Restonica, assai interessante, da me minutamente verificata e che riproduco alquanto corretta con la fig. 6ª. Partendo dalla massa granitica indicata giustamente dall'Hollande, e poi dal Nentien, come protoginica, si riconosce un intimo legame fra questa roccia e dei micascisti gneissici cui sembra, per fenomeni di dinamometamorfismo, gradatamente fare passaggio. Su di questi posano degli scisti anfibolici, notati semplicemente come scisti dall'Hollande, i quali sono susseguiti da uno strato di marmo cipollino, ricco in spalmature cloritiche e micacee, da una pila di calcescisti che racchiudono nel loro mezzo altri scisti anfibolici, alquanto diversi per aspetto da quelli inferiori, e infine da una serie notevole di strati calcari in cui l'Hollande ha distinto il

carbonifero e l'infralias, il De Stefani solo il paleozoico, il Nentien solo l'infralias. Accetto quest'ultima ipotesi, poichè si tratta di un calcare nero compatto, nella cui pila non ho potuto osservare variazioni di struttura, identico ai calcari infraliassici della Spezia e delle Alpi Apuane.

Evidentemente, accettando i riferimenti dell'Hollande, ne consegue che la serie calcescistosa è precarbonifera; mentre che seguendo il Nentien non si ha alcun motivo di crederla così antica; anzi, ammettendo che i cipollini rappresentino un livello triassico, ne risulta chiara la conferma di quanto sinora si è sostenuto; che essi sono alla base dei calcescisti mesozoici e dividono questi da una serie scistosa anteriore, paleozoica.

Ciò che succintamente ho esposto credo sia sufficiente per concludere: possono distinguersi negli scisti di Corsica, riferiti al precambriano, non meno di cinque sorta di gruppi litologi e stratigrafici:

a) Micascisti gneissici modificati dal contatto dei graniti della valle del Golo e del Tavignano, da paragonarsi ai micascisti del M. Bianco attraversati dal protogino, e quindi corrispondenti al primo termine della serie cristallina delle Alpi. Scisti anfibolici inferiori.

b) Scisti filladici con intercalazioni di arenarie micacee e carboniose, spettanti probabilmente al carbonifero, dei dintorni di Castiglione e di Popolasca.

c) Scisti cloritici, idromicascisti, quarzoscisti cloritici e simili, con qualche filone di porfirite e di diorite, estesi per tutta la zona scistosa mediana dell'isola, da nord di Corte a Castifao; affioranti per strette e allungate striscie dalla zona scistosa orientale; incuneati nei graniti lungo la valle dell'Ostriconi nel ponente dell'isola. Sono permiani e corrispondono al secondo termine della serie cristallina alpina.

d) Quarziti e micascisti quarzitici e sericitici del Capo Corso e della zona mediana dell'isola, solo in parte distinti nella carta geologica, spettanti al trias inferiore.

e) Calcescisti o scisti lucidi, più o meno decalcificati, accludenti notevoli ammassi di serpentine, anfiboliti, eufotidi, più recenti del trias medio, e in gran parte riconosciuti più antichi dell'infralias. Costituiscono quasi tutta la zona scistosa orientale

dell'isola, e qua e là sono anche presenti nella mediana, come presso Corte. Corrispondono al terzo termine della serie cristallina metamorfica delle Alpi, il quale però include anche livelli liassici e giuresi.

Genova, dal R. Museo Geologico, 27 ottobre 1905.

Sui problemi di equilibrio elastico a due dimensioni - Ellisse.

Nota di ORAZIO TEDONE.

§ 1. Generalità.

1. — I principii da noi introdotti per la risoluzione di problemi di equilibrio elastico trovano il più ampio campo di applicazione nello studio di quegli stati di equilibrio elastico di corpi cilindrici, che dipendono soltanto dalle loro dimensioni trasversali, ovvero, il che è lo stesso dal punto di vista analitico, nei problemi di equilibrio delle membrane piane. Sorvoleremo sui problemi che hanno i loro analoghi in quelli a tre dimensioni da noi già risoluti e ci fermeremo solo su qualche caso speciale importante col proposito di tentare, in seguito, qualche risultato generale. E, per cominciare, esporremo in questa nota la soluzione del problema per il caso di un cilindro ellittico di cui supponiamo le generatrici parallele all'asse z.

Supponiamo che la sezione trasversale del nostro cilindro abbia per equazione:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a>b \tag{1}$$

e, per maggior semplicità, supponiamo che la distanza focale $\sqrt{a^2-b^2}$ sia eguale ad uno.

Potremo sempre determinare un numero positivo β_0 tale che

$$a=E\beta_0, \qquad b=\epsilon\beta_0$$

dove, adottando le notazioni chiare di Lamé, abbiamo posto:

$$E\beta=\cos(\beta\sqrt{-1})=\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2}, \quad \epsilon\beta=-\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}(\beta\sqrt{-1})=\frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{2}. \tag{2}$$

Basterà perciò prendere $\beta_0 = \log(a+b)$. Se ora poniamo:

$$x + y\sqrt{-1} = \cos(\alpha - \beta\sqrt{-1}) = E\beta\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\mathcal{E}\beta\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

e quindi:

$$(3) \qquad x = E\beta\cos\alpha\,, \qquad y = \mathcal{E}\beta\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

la nostra ellisse corrisponderà al valore β_0 del parametro β ed α, β saranno parametri isometrici. La porzione del piano interna all'ellisse si otterrà facendo variare β fra 0 e β_0 ed α fra 0 e 2π. E pel quadrato dell'elemento lineare, avremo:

$$(4) \qquad ds^2 = H^2(d\alpha^2 + d\beta^2) = \frac{1}{2}(E2\beta - \cos 2\alpha)(d\alpha^2 + d\beta^2).$$

2. — Com'è noto, le *funzioni armoniche fondamentali*, nel caso che consideriamo, sono:

$$(5) \quad \varphi_0 = \frac{1}{2}\,, \quad \psi_0 = 0\,; \quad \varphi_m = Em\beta\cos m\alpha\,, \quad \psi_m = \mathcal{E}m\beta\,\mathrm{sen}\,m\alpha\,, \ (*)$$

con m intero, ed ogni funzione θ armonica e regolare nell'interno dell'ellisse e che sul contorno acquista dati valori, soggetti alle solite condizioni generali, può essere rappresentata dalla formola:

$$(6) \qquad \theta = \sum_{0}^{\infty}{}_m \left(\mathfrak{a}_m \frac{\varphi_m}{Em\beta_0} + \mathfrak{b}_m \frac{\psi_m}{\mathcal{E}m\beta_0} \right)$$

con:

$$(7) \qquad \mathfrak{a}_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \theta\cos m\psi\, d\psi\,, \quad \mathfrak{b}_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\theta\,\mathrm{sen}\,m\psi\, d\psi.$$

3. — Introduciamo, insieme alle funzioni (5), le funzioni ausiliarie:

$$(8) \quad \begin{cases} \varphi'_m = E(m+2)\beta\cos m\alpha - Em\beta\cos(m+2)\alpha\,, \\ \psi'_m = \mathcal{E}(m+2)\beta\,\mathrm{sen}\,m\alpha - \mathcal{E}m\beta\,\mathrm{sen}\,(m+2)\alpha, \end{cases}$$

e notiamo che avremo, in particolare, per $m = 0$:

$$\varphi_0' = 2H^2, \qquad \psi_0' = 0.$$

(*) Vedi Mathieu, *Cours de phys. mathém.*, pag. 75 e 76.

Troviamo allora, facilmente:

$$(9)\qquad \begin{cases} H^2 \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x} = \dfrac{m}{2}\, \varphi'_{m-1}, & H^2 \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial y} = -\dfrac{m}{2}\, \psi'_{m-1} \\ H^2 \dfrac{\partial \psi_m}{\partial x} = \dfrac{m}{2}\, \psi'_{m-1}, & H^2 \dfrac{\partial \psi_m}{\partial y} = \dfrac{m}{2}\, \varphi'_{m-1}. \end{cases}$$

Tenendo conto che è anche:

$$(10)\qquad \begin{cases} H^2 \varphi_0 = \dfrac{1}{4}\, \varphi_0', \; H^2 \psi_0 = 0, \; H^2 \varphi_1 = \dfrac{1}{4}\, \varphi_1', \; H^2 \psi_1 = \dfrac{1}{4} \psi_1' \\ H^2 \varphi_m = \dfrac{1}{4}\, (\varphi'_m - \varphi'_{m-2}), \; H^2 \psi_m = \dfrac{1}{4}\, (\psi'_m - \psi'_{m-2}); \; m > 1 \end{cases}$$

e che quindi:

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{\varphi'_{2m}}{H^2} = 4 \sum_0^m {}_i\, \varphi_{2i}, & \dfrac{\varphi'_{2m+1}}{H^2} = 4 \sum_0^m {}_i\, \varphi_{2i+1}, \\ \dfrac{\psi'_{2m}}{H^2} = 4 \sum_0^m {}_i\, \psi_{2i}, & \dfrac{\psi'_{2m+1}}{H^2} = 4 \sum_0^m {}_i\, \psi_{2i+1}, \end{cases} \qquad m = 0, 1, \ldots \infty$$

le (9) diventeranno:

$$(9')\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_{2m}}{\partial x} = 4m \sum_0^{m-1} {}_i\, \varphi_{2i+1}, & \dfrac{\partial \varphi_{2m}}{\partial y} = -4m \sum_0^{m-1} {}_i\, \psi_{2i+1}, \\ \dfrac{\partial \varphi_{2m+1}}{\partial x} = 2(2m+1) \sum_0^m {}_i\, \varphi_{2i}, & \dfrac{\partial \varphi_{2m+1}}{\partial y} = -2(2m+1) \sum_0^m {}_i\, \psi_{2i}, \\ \dfrac{\partial \psi_{2m}}{\partial x} = 4m \sum_0^{m-1} {}_i\, \psi_{2i+1}, & \dfrac{\partial \psi_{2m}}{\partial y} = 4m \sum_0^{m-1} {}_i\, \varphi_{2i+1}, \\ \dfrac{\partial \psi_{2m+1}}{\partial x} = 2(2m+1) \sum_0^m {}_i\, \psi_{2i}, & \dfrac{\partial \psi_{2m-1}}{\partial y} = 2(2m+1) \sum_0^m {}_i\, \psi_{2i}. \end{cases}$$

Con l'aiuto di queste formole possiamo calcolare le derivate parziali rispetto ad x e y di qualunque funzione armonica, come θ, e porla sotto la stessa forma (7).

§ 2.

Caso in cui sul contorno sono dati gli spostamenti.

1. *Soluzione del problema nell'ipotesi che sia nota la dilatazione elementare.* — È noto che il problema consiste nel determinare due funzioni u e v (componenti degli spostamenti) in modo che sul contorno dell'ellisse acquistino dati valori, nell'interno sieno regolari e soddisfino alle equazioni:

$$(12)\quad \Delta^2 u + \frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial\theta}{\partial x} = 0,\quad \Delta^2 v + \frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial\theta}{\partial y} = 0,\quad \Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

dove θ (dilatazione elementare) è una funzione armonica che, pel momento, supponiamo nota in tutto il campo, e λ e μ sono le costanti di Lamé. Se indichiamo con s il contorno dell'ellisse, con G la funzione di Green, con n la normale interna e con ξ, η i valori di x, y su questo contorno, avremo:

$$(13)\quad \begin{cases} u = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_s u\frac{dG}{dn}\,ds - \frac{\lambda+\mu}{2\mu}x\theta + \frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu}\int_s \xi\theta\frac{dG}{dn}\,ds, \\ v = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_s v\frac{dG}{dn}\,ds - \frac{\lambda+\mu}{2\mu}y\theta + \frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu}\int_s \eta\theta\frac{dG}{dn}\,ds, \end{cases}$$

e, nell'ipotesi fatta che θ sia nota, il nostro problema si può ritenere risoluto quando si è riusciti a determinare G. Ma noi ci serviremo dell'espressione di G soltanto per rappresentare speditamente le funzioni armoniche che sul contorno assumono dati valori, e procederemo altrimenti per costruire le funzioni armoniche che compaiono nelle (13). Essendo dati i valori di u e v sul contorno s, i primi termini del secondo membro si possono ritenere noti e posti sotto la forma:

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_s u\frac{dG}{dn}\,ds = \sum_0^\infty{}_m \left(a_m\frac{\varphi_m}{E_m\beta_0} + b_m\frac{\psi_m}{\epsilon_m\beta_0}\right), \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_s v\frac{dG}{dn}\,ds = \sum_0^\infty{}_m \left(a'_m\frac{\varphi_m}{E_m\beta_0} + b'_m\frac{\psi_m}{\epsilon_m\beta_0}\right). \end{cases}$$

Supponiamo, inoltre, che θ sia data dalla (6) e proponiamoci di calcolare gli altri termini che compaiono nelle (13). Poichè

questi termini sono anch'essi delle funzioni armoniche e regolari nell'interno dell'ellisse, possiamo supporli sviluppati nella solita forma (6). Calcolando allora i coefficienti di questi sviluppi con l'aiuto delle formole analoghe alle (7), si trova:

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_s \xi\theta \frac{dG}{dn}\, ds = \dfrac{E\beta_0}{2}\Big\{ \mathfrak{a}_1 + \sum_1^\infty{}_m \Big[(\mathfrak{a}_{m+1} + \mathfrak{a}_{m-1}) \dfrac{\varphi_m}{Em\beta_0} + (\mathfrak{b}_{m+1} + \mathfrak{b}_{m-1}) \dfrac{\psi_m}{\mathsf{E}m\beta_0} \Big] \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_s \eta\theta \frac{dG}{dn}\, ds = \dfrac{\mathsf{E}\beta_0}{2}\Big\{ \mathfrak{b}_1 + \sum_1^\infty{}_m \Big[(\mathfrak{b}_{m+1} - \mathfrak{b}_{m-1}) \dfrac{\varphi_m}{Em\beta_0} - (\mathfrak{a}_{m+1} - \mathfrak{a}_{m-1}) \dfrac{\psi_m}{\mathsf{E}m\beta_0} \Big] \end{cases}$$

sicchè potremo scrivere:

$$(16)\quad \begin{cases} u = \dfrac{a_0}{2} - \dfrac{\lambda+\mu}{4\mu} (\mathfrak{a}_0 E\beta \cos\alpha - \mathfrak{a}_1 E\beta_0) + \\ \quad + \displaystyle\sum_1^\infty{}_m \Big\{ a_m - \frac{\lambda+\mu}{2\mu} \Big[\mathfrak{a}_m E\beta\cos\alpha - \frac{1}{2}(\mathfrak{a}_{m+1} + \mathfrak{a}_{m-1}) E\beta_0 \Big] \Big\} \frac{\varphi_m}{Em\beta_0} + \\ \quad + \displaystyle\sum_1^\infty{}_m \Big\{ b_m - \frac{\lambda+\mu}{2\mu} \Big[\mathfrak{b}_m E\beta\cos\alpha - \frac{1}{2}(\mathfrak{b}_{m+1} + \mathfrak{b}_{m-1}) E\beta_0 \Big] \Big\} \frac{\psi_m}{\mathsf{E}m\beta_0}, \\ v = \dfrac{a_0}{2} - \dfrac{\lambda+\mu}{4\mu} (\mathfrak{a}_0 \mathsf{E}\beta \,\mathrm{sen}\,\alpha - \mathfrak{b}_1 \mathsf{E}\beta_0) + \\ \quad + \displaystyle\sum_1^\infty{}_m \Big\{ a'_m - \frac{\lambda+\mu}{2\mu} \Big[\mathfrak{a}_m \mathsf{E}\beta \,\mathrm{sen}\,\alpha - \frac{1}{2}(\mathfrak{b}_{m+1} - \mathfrak{b}_{m-1}) \mathsf{E}\beta_0 \Big] \Big\} \frac{\varphi_m}{Em\beta_0} + \\ \quad + \displaystyle\sum_1^\infty{}_m \Big\{ b'_m - \frac{\lambda+\mu}{2\mu} \Big[\mathfrak{b}_m \mathsf{E}\beta \,\mathrm{sen}\,\alpha + \frac{1}{2}(\mathfrak{a}_{m+1} - \mathfrak{a}_{m-1}) \mathsf{E}\beta_0 \Big] \Big\} \frac{\psi_m}{\mathsf{E}m\beta_0}. \end{cases}$$

2. *Determinazione di* θ. — Nel problema d'equilibrio elastico che ci siamo proposti di risolvere, i dati sono i valori di u e v sul contorno dell'ellisse. Per la sua completa soluzione ci resta da determinare θ per mezzo dei dati valori di u e v, ossia a determinare le costanti $\mathfrak{a}_m$ e $\mathfrak{b}_m$ per mezzo delle costanti a_m, b_m, a'_m, b'_m. Perciò teniamo presente che:

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

e che, quindi, dev'essere verificata l'equazione:

$$(17)\quad \frac{\lambda+2\mu}{\mu}\theta+\frac{\lambda+\mu}{2\mu}\left(x\frac{\partial\theta}{\partial x}+y\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)-\frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int_s\xi\theta\frac{dG}{dn}ds+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial y}\int_s\eta\theta\frac{dG}{dn}ds\right)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int_s u\frac{dG}{dn}ds+\frac{\partial}{\partial y}\int_s v\frac{dG}{dn}ds\right).$$

Tenendo conto delle (10), si trova:

$$H^2\theta=\frac{1}{4}\sum_0^\infty{}_m\left[\left(\frac{\mathfrak{a}_m}{Em\beta_0}-\frac{\mathfrak{a}_{m+2}}{E(m+2)\beta_0}\right)\varphi'_m+\left(\frac{\mathfrak{b}_m}{\epsilon m\beta_0}-\frac{\mathfrak{b}_{m+2}}{\epsilon(m+2)\beta_0}\right)\psi'_m\right],$$

$$H^2\left(x\frac{\partial\theta}{\partial x}+y\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial\alpha}+\frac{1}{2}\frac{\partial\theta}{\partial\beta}\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial\beta}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\,\mathrm{sen}2\alpha+\frac{\partial\theta}{\partial\beta}\,\epsilon 2\beta\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\sum_0^\infty{}_m\left[\left((m+2)\frac{\mathfrak{a}_{m+2}}{E(m+2)\beta_0}+\frac{m\mathfrak{a}_m}{Em\beta_0}\right)\varphi'_m+\right.$$

$$\left.+\left((m+2)\frac{\mathfrak{b}_{m+2}}{\epsilon(m+2)\beta_0}+\frac{m\mathfrak{b}_m}{\epsilon m b_0}\right)\psi'_m\right].$$

Si trova similmente, tenendo conto delle (9):

$$\frac{H^2}{2\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int_s\xi\theta\frac{dG}{dn}ds+\frac{\partial}{\partial y}\int_s\eta\theta\frac{dG}{dn}ds\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\sum_0^\infty{}_m(m+1)\left\{\left[\frac{E\beta_0}{E(m+1)\beta_0}(\mathfrak{a}_{m+2}+\mathfrak{a}_m)-\frac{\epsilon\beta_0}{\epsilon(m+1)\beta_0}(\mathfrak{a}_{m+2}-\mathfrak{a}_m)\right]\varphi'_m\right.$$

$$\left.+\left[\frac{E\beta_0}{\epsilon(m+1)\beta_0}(\mathfrak{b}_{m+2}+\mathfrak{b}_m)-\frac{\epsilon\beta_0}{E(m+1)\beta_0}(\mathfrak{b}_{m+2}-\mathfrak{b}_m)\right]\psi'_m\right\},$$

$$\frac{H^2}{2\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int_s u\frac{dG}{dn}ds+\frac{\partial}{\partial y}\int_s v\frac{dG}{dn}ds\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_0^\infty{}_m(m+1)\left[\left(\frac{a_{m+1}}{E(m+1)\beta_0}+\frac{b'_{m+1}}{\epsilon(m+1)\beta_0}\right)\varphi'_m+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{b_{m+1}}{\epsilon(m+1)\beta_0}-\frac{a'_{m+1}}{E(m+1)\beta_0}\right)\psi'_m\right].$$

Sostituendo questi risultati nell'equazione (17), moltiplicata per H^2, e ponendo:

$$
(18)\left\{\begin{aligned}
A_m &= \frac{m\lambda+(m-2)\mu}{2\mu E(m+2)\beta_0} - \frac{(m+1)(\lambda+\mu)}{\mu}\,\frac{\epsilon m\beta_0}{\epsilon 2(m+1)\beta_0},\\
A'_m &= -\frac{(m+2)\lambda+(m+4)\mu}{2\mu E m\beta_0} + \frac{(m+1)(\lambda+\mu)}{\mu}\,\frac{\epsilon(m+2)\beta_0}{\epsilon 2(m+1)\beta_0} = A_m\frac{E(m+2)\beta_0}{E m\beta_0}\\
B_m &= \frac{m\lambda+(m-2)\mu}{2\mu\epsilon(m+2)\beta_0} - \frac{(m+1)(\lambda+\mu)}{\mu}\,\frac{E m\beta_0}{\epsilon 2(m+1)\beta_0},\\
B'_m &= -\frac{(m+2)\lambda+(m+4)\mu}{2\mu\epsilon m\beta_0} + \frac{(m+1)(\lambda+\mu)}{\mu}\,\frac{E(m+2)\beta_0}{\epsilon 2(m+1)\beta_0} = B_m\frac{\epsilon(m+2)\beta_0}{\epsilon m\beta_0},
\end{aligned}\right.
$$

$$
(19)\left\{\begin{aligned}
\Phi_m &= A_m\mathfrak{a}_{m+2} - A'_m\mathfrak{a}_m - 2(m+1)\left(\frac{a_{m+1}}{E(m+1)\beta_0} + \frac{b'_{m+1}}{\epsilon(m+1)\beta_0}\right),\\
\Psi_m &= B_m\mathfrak{b}_{m+2} - B'_m\mathfrak{b}_m - 2(m+1)\left(\frac{b_{m+1}}{\epsilon(m+1)\beta_0} - \frac{a'_{m+1}}{E(m+1)\beta_0}\right),
\end{aligned}\right.
$$

si trova:

$$
\frac{1}{4}\sum_0^\infty{}_m(\Phi_m\varphi'_m + \Psi_m\psi'_m) = \frac{1}{4}\sum_0^\infty{}_m(\Phi_{2m}\varphi'_{2m} + \Psi_{2m}\psi'_{2m}) +
$$

$$
+\frac{1}{4}\sum_0^\infty{}_m(\Phi_{2m+1}\varphi'_{2m+1} + \Psi_{2m+1}\psi'_{2m+1}) = 0.
$$

Dividendo, quindi, questa equazione per H^2 e tenendo conto delle (11), questa equazione si trasforma facilmente nell'altra:

$$
(17')\quad \sum_0^\infty{}_i\left[\varphi_{2i}\sum_i^\infty{}_m\Phi_{2m} + \psi_{2i}\sum_i^\infty{}_m\Psi_{2m}\right] + \sum_0^\infty{}_i\left[\varphi_{2i+1}\sum_i^\infty{}_m\Phi_{2m+1} + \psi_{2i+1}\sum_i^\infty{}_m\Psi_{2m+1}\right] = 0.
$$

Affinchè questa equazione sia soddisfatta identicamente, dev'essere:

$$
\sum_i^\infty{}_m\Phi_{2m} = 0,\quad \sum_i^\infty{}_m\Phi_{2m+1},\quad \sum_i^\infty{}_m\Psi_{2m+1} = 0,\qquad i = 0, 1, 2, \ldots, \infty
$$

$$
\sum_i^\infty{}_m\Psi_{2m} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots\infty
$$

ossia anche:

$$
(20)\left\{\begin{aligned}
&\Phi_0 = \Phi_2 = \Phi_4 = \ldots = 0,\quad \Phi_1 = \Phi_3 = \Phi_5 = \ldots = 0,\\
&\Psi_2 = \Psi_4 = \ldots = 0,\quad \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_5 = \ldots = 0,\\
&\sum_0^\infty{}_m\Phi_{2m} = 0,\quad \sum_0^\infty{}_m\Phi_{2m+1} = 0,\quad \sum_1^\infty{}_m\Psi_{2m} = 0,\quad \sum_0^\infty{}_m\Psi_{2m+1} = 0.
\end{aligned}\right.
$$

Le equazioni del primo rigo ci determinano successivamente $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_6, \ldots$ in funzione di $\mathfrak{a}_0$, e $\mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_5, \mathfrak{a}_7, \ldots$ in funzione di $\mathfrak{a}_1$. Le equazioni del secondo rigo ci determinano successivamente $\mathfrak{b}_4, \mathfrak{b}_6, \ldots$ in funzione di $\mathfrak{b}_2$ e $\mathfrak{b}_3, \mathfrak{b}_5, \mathfrak{b}_7, \ldots$ in funzione di $\mathfrak{b}_1$. Le ultime quattro equazioni ci determinano $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_1$ come ora andiamo a far vedere. Dall'equazione $\Phi_{2m} = 0$ abbiamo:

$$\mathfrak{a}_{2(m+1)} = \mathfrak{a}_{2m} \frac{E2(m+1)\beta_0}{E2m\beta_0} + 2\frac{2m+1}{A_{2m}}\left(\frac{a_{2m+1}}{E(2m+1)\beta_0} + \frac{b'_{2m+1}}{\mathsf{E}(2m+1)\beta_0}\right)$$

e quindi

$$\mathfrak{a}_{2(m+1)} = \mathfrak{a}_0 E2(m+1)\beta_0 + \tag{21}$$

$$+ 2E2(m+1)\beta_0 \sum_0^m{}_i \frac{2i+1}{A_{2i}E2(i+1)\beta_0}\left(\frac{a_{2i+1}}{E(2i+1)\beta_0} + \frac{b'_{2i+1}}{\mathsf{E}(2i+1)\beta_0}\right).$$

Ora l'equazione $\sum_0^\infty{}_m \Phi_{2m} = 0$ si può scrivere

$$-A'_0\mathfrak{a}_0 + \sum_0^\infty{}_m (A_{2m} - A'_{2(m+1)})\mathfrak{a}_{2(m+1)} = \tag{22}$$

$$= 2\sum_0^\infty{}_m (2m+1)\left(\frac{a_{2m+1}}{E(2m+1)\beta_0} + \frac{b'_{2m+1}}{\mathsf{E}(2m+1)\beta_0}\right),$$

quindi, sostituendo, in questa equazione, per $\mathfrak{a}_{2(m+1)}$ l'espressione (21), si ha

$$\mathfrak{a}_0[-A'_0 + \sum_0^\infty{}_m (A_{2m} - A'_{2(m+1)})E2(m+1)\beta_0] = \tag{23}$$

$$= 2\sum_0^\infty{}_m (2m+1)\left(\frac{a_{2m+1}}{E(2m+1)\beta_0} + \frac{b'_{2m+1}}{\mathsf{E}(2m+1)\beta_0}\right) -$$

$$-2\sum_0^\infty{}_m E2(m+1)\beta_0(A_{2m} - A'_{2(m+1)})\sum_0^m{}_i \frac{2i+1}{A_{2i}E2(i+1)\beta_0}\left(\frac{a_{2i+1}}{E(2i+1)\beta_0} + \frac{b'_{2i+1}}{\mathsf{E}(2i+1)\beta_0}\right)$$

donde ricaviamo il valore di $\mathfrak{a}_0$. Questa equazione è suscettibile di notevoli semplificazioni. L'espressione

$$-A'_0 + \sum_0^\infty{}_m (A_{2m} - A'_{2(m+1)})E2(m+1)\beta_0 = -\lim_{m=\infty} A'_{2(m+1)}E2(m+1)\beta_0 = \frac{\lambda+3\mu}{2\mu}.$$

Similmente è

$$\sum_0^\infty{}_m E2(m+1)\beta_0(A_{2m}-A'_{2(m+1)})\sum_0^m{}_i\frac{2i+1}{A_{2i}E2(i+1)\beta_0}\left(\frac{a_{2i+1}}{E(2i+1)\beta_0}+\frac{b'_{2i+1}}{\epsilon(2i+1)\beta_0}\right)=$$

$$=\lim_{m'=\infty}\left\{\sum_0^{m'}{}_m(2m+1)\left(\frac{a_{2m+1}}{E(2m+1)\beta_0}+\frac{b'_{2m+1}}{\epsilon(2m+1)\beta_0}\right)-\right.$$

$$\left.-A'_{2(m'+1)}E2(m'+1)\beta_0\sum_0^{m'}{}_i\frac{2i+1}{A_{2i}E2(i+1)\beta_0}\left(\frac{a_{2i+1}}{E(2i+1)\beta_0}+\frac{b'_{2i+1}}{\epsilon(2i+1)\beta_0}\right)\right\}=$$

$$=\sum_0^\infty{}_m(2m+1)\left(\frac{a_{2m+1}}{E(2m+1)\beta_0}+\frac{b'_{2m+1}}{\epsilon(2m+1)\beta_0}\right)+$$

$$+\frac{\lambda+3\mu}{2\mu}\sum_0^\infty{}_i\frac{2i+1}{A_{2i}E2(i+1)\beta_0}\left(\frac{a_{2i+1}}{E(2i+1)\beta_0}+\frac{b'_{2i+1}}{\epsilon(2i+1)\beta_0}\right).$$

Potremo dunque scrivere le (23), (21) sotto la forma:

$$(24)\quad\begin{cases} a_0=-2\sum_0^\infty{}_i\dfrac{2i+1}{A_{2i}E2(i+1)\beta_0}\left(\dfrac{a_{2i+1}}{E(2i+1)\beta_0}+\dfrac{b'_{2i+1}}{\epsilon(2i+1)\beta_0}\right), \\ \dfrac{a_{2m}}{E2m\beta_0}=-2\sum_m^\infty{}_i\dfrac{2i+1}{A_{2i}E2(i+1)\beta_0}\left(\dfrac{a_{2i+1}}{E(2i+1)\beta_0}+\dfrac{b'_{2i+1}}{\epsilon(2i+1)\beta_0}\right), \end{cases}$$

e, di queste due formole, la prima si ottiene dalla seconda per $m=0$.

In modo perfettamente analogo, dall'equazione $\Phi_{2m-1}=0$, si ottiene:

$$(21')\quad a_{2m+1}=a_{2m-1}\frac{E(2m+1)\beta_0}{E(2m-1)\beta_0}+\frac{4m}{A_{2m-1}}\left(\frac{a_{2m}}{E2m\beta_0}+\frac{b'_{2m}}{\epsilon 2m\beta_0}\right)=$$

$$=a_1\frac{E(2m+1)\beta_0}{E\beta_0}+4E(2m+1)\beta_0\sum_1^m{}_i\frac{i}{A_{2i-1}E(2i+1)\beta_0}\left(\frac{a_{2i}}{E2i\beta_0}+\frac{b'_{2i}}{\epsilon 2i\beta_0}\right);$$

e, sostituendo questa espressione di a_{2m+1} nell'equazione

$$(22')\quad \sum_0^\infty{}_m\Phi_{2m+1}=-A'_1a_1+\sum_1^\infty{}_m(A_{2m-1}-A'_{2m+1})\,a_{2m+1}-$$

$$-4\sum_1^\infty{}_m m\left(\frac{a_{2m}}{E2m\beta_0}+\frac{b'_{2m}}{\epsilon 2m\beta_0}\right)=0,$$

si ha:

$$(23') \quad \frac{\mathfrak{a}_1}{E\beta_0}\left[-A_1' E\beta_0 + \sum_1^\infty {}_m (A_{2m-1} - A'_{2m+1}) E(2m+1)\beta_0\right] =$$

$$= 4 \sum_1^\infty {}_m m \left(\frac{a_{2m}}{E 2m\beta_0} + \frac{b'_{2m}}{\epsilon 2m\beta_0} \right) -$$

$$-4 \sum_1^\infty {}_m E(2m+1)\beta_0 (A_{2m-1} - A'_{2m+1}) \sum_1^m {}_i \frac{i}{A_{2i-1} E(2i+1)\beta_0} \left(\frac{a_{2i}}{E 2i\beta_0} + \frac{b'_{2i}}{\epsilon 2i\beta_0} \right).$$

Questa equazione si semplifica ed abbiamo:

$$(24') \quad \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{a}_1}{E\beta_0} = -4 \displaystyle\sum_1^\infty {}_i \frac{i}{A_{2i-1} E(2i+1)\beta_0} \left(\frac{a_{2i}}{E 2i\beta_0} + \frac{b'_{2i}}{\epsilon 2i\beta_0} \right), \\[2ex] \dfrac{\mathfrak{a}_{2m+1}}{E(2m+1)\beta_0} = -4 \displaystyle\sum_{m+1}^\infty {}_i \frac{i}{A_{2i-1} E(2i+1)\beta_0} \left(\frac{a_{2i}}{E 2i\beta_0} + \frac{b'_{2i}}{\epsilon 2i\beta_0} \right). \end{cases}$$

Le costanti $\mathfrak{b}$ sono date da espressioni analoghe che, per brevità, non staremo a scrivere.

3. *Verifica della soluzione ottenuta.* — Il procedimento seguìto mostra che il problema comporta una soluzione soltanto. In quanto poi alle verifiche che si riferiscono alla soluzione ottenuta, è chiaro che vi può essere qualche dubbio soltanto riguardo alla convergenza delle serie che in essa vi compaiono. Ora questi dubbii si eliminano con facilità se ammettiamo che i valori di u e v, dati sul contorno dell'ellisse, hanno le derivate prime finite e soddisfacenti alle ipotesi di Dirichlet. In questa ipotesi sappiamo che le serie:

$$\sum_0^\infty {}_m a_m, \quad \sum_1^\infty {}_m b_m, \quad \sum_0^\infty {}_m a'_m, \quad \sum_0^\infty {}_m b'_m$$

sono assolutamente ed uniformemente convergenti (*). Inoltre il rapporto fra un termine ed il precedente, p. es., nella serie

$$\sum_0^\infty {}_i \frac{2i+1}{A_{2i} E 2(i+1)\beta_0} \, \frac{|a_{2i+1}|}{E(2i+1)\beta_0},$$

(*) Vedi Picard, *Traité d'Analyse*, T. 1, p. 235.

che è la serie dei valori assoluti di una delle serie che compaiono nella prima delle (24), è dato da

$$\frac{2i+1}{2i-1}\,\frac{A_{2(i-1)}E2i\beta_0}{A_{2i}E2(i+1)\beta_0}\,\frac{E(2i-1)\beta_0}{E(2i+1)\beta_0}\,\frac{|a_{2i+1}|}{|a_{2i-1}|}.$$

Ed il limite di questo rapporto, per $i=\infty$, è

$$e^{-2\beta_0}\lim_{i=\infty}\frac{|a_{2i+1}|}{|a_{2i-1}|}<\lim_{i=\infty}\frac{|a_{2i+1}|}{|a_{2i-1}|},$$

per cui la nostra serie è anch'essa assolutamente ed uniformemente convergente.

Allo stesso modo si prova la convergenza assoluta ed in egual grado di tutte le altre serie che compaiono nelle nostre formole.

§ 3. Caso in cui sul contorno son date le tensioni.

1. *Trasformazione delle condizioni al contorno.* — Chiamiamo L ed M le componenti delle tensioni applicate ad un punto qualunque del contorno, secondo gli assi x e y. L e M saranno funzioni periodiche di α, col periodo 2π, ed inoltre dovranno soddisfare le condizioni:

$$(25)\qquad \int_s L ds=\int_0^{2\pi}HLd\alpha=0,\quad \int_0^{2\pi}HMd\alpha=0,\quad \int_0^{2\pi}H(M\xi-Ly)d\alpha=0.$$

Ammettiamo che HL ed HM sieno sviluppabili in serie di Fourier, e che quindi si abbia:

$$(26)\quad HL=\sum_1^\infty{}_m(L_m\cos m\alpha+\bar{L}_m\operatorname{sen}m\alpha),\ HM=\sum_1^\infty{}_m(M_m\cos m\alpha+\bar{M}_m\operatorname{sen}m\alpha)$$

con

$$(25')\qquad M_1E\beta_0=\bar{L}_1\epsilon\beta_0.$$

Se ora indichiamo con $\hat{\omega}$ la rotazione elementare, sul contorno devono essere soddisfatte le condizioni:

$$L = -\lambda\theta\cos nx - 2\mu\left(\frac{du}{dn} + \hat{\omega}\cos ny\right),$$

$$M = -\lambda\theta\cos ny - 2\mu\left(\frac{dv}{dn} - \hat{\omega}\cos nx\right),$$

e, notando che:

$$\cos nx = -\left(\frac{1}{H}\frac{\partial x}{\partial\beta}\right)_{\beta=\beta_0}, \quad \cos ny = -\left(\frac{1}{H}\frac{\partial y}{\partial\beta}\right)_{\beta=\beta_0},$$

$$\frac{du}{dn} = -\left(\frac{1}{H}\frac{\partial u}{\partial\beta}\right)_{\beta=\beta_0}, \quad \frac{dv}{du} = -\left(\frac{1}{H}\frac{\partial v}{\partial\beta}\right)_{\beta=\beta_0},$$

le condizioni precedenti possono anche scriversi:

$$(27) \quad \begin{cases} HL = \lambda\theta\mathcal{E}\beta_0\cos\alpha + 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial\beta} + \hat{\omega}E\beta_0\,\mathrm{sen}\,\alpha\right), \\ HM = \lambda\theta E\beta_0\,\mathrm{sen}\,\alpha + 2\mu\left(\frac{\partial v}{\partial\beta} - \hat{\omega}\mathcal{E}\beta_0\cos\alpha\right) \end{cases}$$

nelle quali va posto sempre β_0 invece di β.

2. *Risoluzione del problema.* — Per risolvere il problema propostoci partiremo dalla soluzione trovata nel § precedente. Calcoleremo i secondi membri delle (27), corrispondentemente a questa soluzione e quindi cercheremo di determinare i valori degli spostamenti sul contorno per mezzo delle date tensioni L, M, ovvero, ciò che è lo stesso, cercheremo di determinare le costanti a_m, b_m, a'_m, b'_m per mezzo delle L_m, $\bar{L}_m$, M_m, $\bar{M}_m$, in modo che sieno soddisfatte le (27).

Perciò notiamo che, nel nostro caso:

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} + 2\mu\frac{\partial\hat{\omega}}{\partial\beta} = 0, \qquad (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial\beta} - 2\mu\frac{\partial\hat{\omega}}{\partial\alpha} = 0$$

e che, quindi, se, come abbiamo posto:

$$\theta = \sum_{0}^{\infty}{}_m\left(\mathfrak{a}_m\frac{\varphi_m}{Em\beta_0} + \mathfrak{b}_m\frac{\psi_m}{\mathcal{E}m\beta_0}\right),$$

si dovrà porre anche:

$$(28) \qquad \hat{\omega} = \hat{\omega}_0 + \frac{\lambda+2\mu}{2\mu} \sum_1^\infty {}_m \left(- \mathfrak{b}_m \frac{\varphi_m}{\mathfrak{E} m\beta_0} - \mathfrak{a}_m \frac{\psi_m}{E m\beta_0} \right).$$

La costante $\hat{\omega}_0$ si può soltanto ricavare, col calcolo diretto, dalle (16). Si trova così:

$$\hat{\omega}_0 = \frac{1}{2} \sum_0^\infty {}_m (2m+1) \left(\frac{a'_{2m+1}}{E(2m+1)\beta_0} - \frac{b_{2m+1}}{\mathfrak{E}(2m+1)\beta_0} \right) +$$

$$+ \frac{\lambda+\mu}{2\mu} \sum_1^\infty {}_m m \frac{\mathfrak{b}_{2m}}{\mathfrak{E} 2m\beta_0} - \frac{\lambda+\mu}{4\mu} \sum_0^\infty {}_m (2m+1) \frac{\mathfrak{b}_{2m+1} E 2m\beta_0 + \mathfrak{b}_{2m} E 2(m+1)\beta_0}{\mathfrak{E} 2(2m+1)\beta_0}.$$

Se da questa espressione di $\hat{\omega}_0$ eliminiamo tutte le differenze:

$$\frac{a'_{2m+1}}{E(2m+1)\beta_0} - \frac{b_{2m+1}}{\mathfrak{E}(2m+1)\beta_0},$$

per $m \geq 1$, con l'aiuto delle equazioni $\Psi_m = 0$, si ha semplicemente:

$$(29) \qquad \hat{\omega}_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{a'_1}{E\beta_0} - \frac{b_1}{\mathfrak{E}\beta_0} \right) - \frac{\lambda+2\mu}{4\mu} \frac{\mathfrak{b}_2}{\mathfrak{E} 2\beta_0}.$$

Ricavando ora dalle (16) i valori di $\left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)_{\beta=\beta_0}$ e di $\left(\frac{\partial v}{\partial \beta}\right)_{\beta=\beta_0}$ e sostituendo nei secondi membri delle (27), si trova:

$$2HL = \sum_1^\infty {}_m \cos m\alpha \Big\{ \mathfrak{a}_{m-1} \Big[-\mu \mathfrak{E}\beta_0 + m(\lambda+\mu) E\beta_0 \frac{\mathfrak{E} m\beta_0}{E m\beta_0} -$$

$$-(m\lambda+(m+1)\mu) E\beta_0 \frac{\mathfrak{E}(m-1)\beta_0}{E(m-1)\beta_0} \Big] + \mathfrak{a}_{m+1} \Big[-\mu \mathfrak{E}\beta_0 + m(\lambda+\mu) E\beta_0 \frac{\mathfrak{E} m\beta_0}{E m\beta_0} -$$

$$-(m\lambda+(m-1)\mu) E\beta_0 \frac{\mathfrak{E}(m+1)\beta_0}{E(m+1)\beta_0} \Big] + 4m\mu a_m \frac{\mathfrak{E} m\beta_0}{E m\beta_0} \Big\} +$$

$$+ \sum_1^{\infty}{}'_m \operatorname{sen} m\alpha \Big\{ \mathfrak{b}_{m-1} \Big[-\mu \mathfrak{E}\beta_0 + m(\lambda+\mu) E\beta_0 \frac{E m\beta_0}{\mathfrak{E} m\beta_0} -$$

$$-(m\lambda+(m+1)\mu) E\beta_0 \frac{E(m-1)\beta_0}{\mathfrak{E}(m-1)\beta_0} \Big] + \mathfrak{b}_{m+1} \Big[-\mu \mathfrak{E}\beta_0 + m(\lambda+\mu) E\beta_0 \frac{E m\beta_0}{\mathfrak{E} m\beta_0} -$$

$$-(m\lambda+(m-1)\mu) E\beta_0 \frac{E(m+1)\beta_0}{\mathfrak{E}(m+1)\beta_0} \Big] + 4m\mu b_m \frac{E m\beta_0}{\mathfrak{E} m\beta_0} \Big\},$$

$$2HM = \sum_{1}^{\infty}{}'_m \operatorname{sen} m\alpha \Big\{ \mathfrak{a}_{m-1} \Big[-\mu E\beta_0 + m(\lambda+\mu)\epsilon\beta_0 \frac{Em\beta_0}{\epsilon m\beta_0} -$$

$$-(m\lambda+(m+1)\mu)\epsilon\beta_0 \frac{\epsilon(m-1)\beta_0}{E(m-1)\beta_0}\Big] + \mathfrak{a}_{m+1}\Big[\mu E\beta_0 - m(\lambda+\mu)\epsilon\beta_0 \frac{Em\beta_0}{\epsilon m\beta_0} +$$

$$+(m\lambda+(m-1)\mu)\epsilon\beta_0 \frac{\epsilon(m+1)\beta_0}{E(m+1)\beta_0}\Big] + 4m\mu b'_m \frac{Em\beta_0}{\epsilon m\beta_0}\Big\} +$$

$$+\sum_{1}^{\infty}{}'_m \cos m\alpha \Big\{ \mathfrak{b}_{m+1}\Big[\mu E\beta_0 - m(\lambda+\mu)\epsilon\beta_0 \frac{\epsilon m\beta_0}{Em\beta_0} +$$

$$+(m\lambda+(m+1)\mu)\epsilon\beta_0 \frac{E(m-1)\beta_0}{\epsilon(m-1)\beta_0}\Big] + \mathfrak{b}_{m+1}\Big[-\mu E\beta_0 + m(\lambda+\mu)\epsilon\beta_0 \frac{\epsilon m\beta_0}{Em\beta_0} -$$

$$-(m\lambda+(m-1)\mu)\epsilon\beta_0 \frac{E(m+1)\beta_0}{\epsilon(m+1)\beta_0}\Big] + 4m\mu a'_m \frac{\epsilon m\beta_0}{Em\beta_0}\Big\},$$

dove gli accenti, sulle sommatorie che li portano, indicano che i coefficienti di sen α e di cos α, sono leggermente diversi da quelli scritti. Dalle equazioni precedenti ricaviamo:

$$(30)\quad \begin{cases} 2\dfrac{L_m}{\epsilon m\beta_0} = 4m\mu \dfrac{a_m}{Em\beta_0} + \mathfrak{a}_{m-1}\Big[-\mu\dfrac{\epsilon\beta_0}{\epsilon m\beta_0} + m(\lambda+\mu)\dfrac{E\beta_0}{Em\beta_0} - \\ \qquad\qquad -(m\lambda+(m+1)\mu)\dfrac{E\beta_0}{\epsilon m\beta_0}\dfrac{\epsilon(m-1)\beta_0}{E(m-1)\beta_0}\Big] + \\ + \mathfrak{a}_{m+1}\Big[-\mu\dfrac{\epsilon\beta_0}{\epsilon m\beta_0} + m(\lambda+\mu)\dfrac{E\beta_0}{Em\beta_0} - (m\lambda+(m-1)\mu)\dfrac{E\beta_0}{\epsilon m\beta_0}\dfrac{\epsilon(m+1\beta_0}{E(m+1)\beta_0}\Big], \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

Per mezzo di queste equazioni possiamo eliminare le costanti a_m, b_m, a'_m, b'_m dalle (20) e le nuove equazioni che, così, si ottengono, sono atte a determinare le $\mathfrak{a}_m, \mathfrak{b}_m$ per mezzo delle $L_m, \bar{L}_m, M_m, \bar{M}_m$. Le (30) determinano allora a_m, b_m, a'_m, b'_m per mezzo delle stesse quantità $L_m, \ldots$ Abbiamo intanto:

$$2(m+1)\left(\frac{a_{m+1}}{E(m+1)\beta_0} + \frac{b'_{m+1}}{\epsilon(m+1)\beta_0}\right) = \frac{1}{\mu}\left(\frac{L_{m+1}}{\epsilon(m+1)\beta_0} + \frac{\bar{M}_{m+1}}{E(m+1)\beta_0}\right) -$$

$$-\frac{1}{\mu\epsilon 2(m+1)\beta_0}\Big\{[(m+1)\lambda + m\mu]\epsilon(m+2)\beta_0 Em\beta_0 -$$

$$-[(m+1)\lambda + (m+2)\mu]\epsilon m\beta_0 E(m+2)\beta_0\Big\}\left(\frac{\mathfrak{a}_m}{Em\beta_0} - \frac{\mathfrak{a}_{m+2}}{E(m+2)\beta_0}\right),$$

$$2(m+1)\left(\frac{\mathfrak{b}_{m+1}}{\epsilon(m+1)\beta_0}-\frac{\mathfrak{a}'_{m+1}}{E(m+1)\beta_0}\right)=\frac{1}{\mu}\left(\frac{\overline{L}_{m+1}}{E(m+1)\beta_0}-\frac{M_{m+1}}{\epsilon(m+1)\beta_0}\right)-$$
$$-\frac{1}{\mu\epsilon 2(m+1)\beta_0}\{[(m+1)\lambda+m\mu]E(m+2)\beta_0\epsilon m\beta_0-$$
$$-[(m+1)\lambda+(m+2)\mu]Em\beta_0\epsilon(m+2)\beta_0\}\left(\frac{\mathfrak{b}_m}{\epsilon m\beta_0}-\frac{\mathfrak{b}_{m+2}}{\epsilon(m+2)\beta_0}\right).$$

Le prime di queste formole valgono per ogni valore di m e le seconde per ogni valore di m tranne il valore $m=0$. Se ora poniamo:

$$(31)\left\{\begin{aligned}\overline{A}_m&=-\frac{\lambda+2\mu}{2\mu}\frac{1}{E(m+2)\beta_0}+\frac{\epsilon m\beta_0}{\epsilon 2(m+1)\beta_0}-\frac{(m+1)\lambda+m\mu}{2\mu}\frac{\epsilon 2\beta_0}{E(m+2)\beta_0\,\epsilon 2(m+1)\beta_0}\\ \overline{A}'_m&=\overline{A}_m\frac{E(m+2)\beta_0}{Em\beta_0},\\ \overline{B}_m&=-\frac{\lambda+2\mu}{2\mu}\frac{1}{\epsilon(m+2)\beta_0}+\frac{Em\beta_0}{\epsilon 2(m+1)\beta_0}+\frac{(m+1)\lambda+m\mu}{2\mu}\frac{\epsilon 2\beta_0}{\epsilon(m+2)\beta_0\,\epsilon 2(m+1)\beta_0}\\ \overline{B}'_m&=\overline{B}_m\frac{\epsilon(m+2)\beta_0}{\epsilon m\beta_0},\end{aligned}\right.$$

avremo subito:

$$(32)\left\{\begin{aligned}\Phi_m&=\overline{A}_m\mathfrak{a}_{m+2}-\overline{A}'_m\mathfrak{a}_m-\frac{1}{\mu}\left(\frac{L_{m+1}}{\epsilon(m+1)\beta_0}+\frac{\overline{M}_{m+1}}{E(m+1)\beta_0}\right),\\ \Psi_m&=\overline{B}_m\mathfrak{b}_{m+2}-\overline{B}'_m\mathfrak{b}_m-\frac{1}{\mu}\left(\frac{\overline{L}_{m+1}}{E(m+1)\beta_0}-\frac{M_{m+1}}{\epsilon(m+1)\beta_0}\right).\end{aligned}\right.$$

Questo risultato mostra che le equazioni trasformate delle (20) si risolvono ora, precisamente come nel caso precedente ed avremo:

$$(33)\left\{\begin{aligned}\frac{\mathfrak{a}_{2m}}{E2m\beta_0}&=-\frac{1}{\mu}\sum_m^\infty{}_i\frac{1}{A_{2i}E2(i+1)\beta_0}\left(\frac{L_{2i+1}}{\epsilon(2i+1)\beta_0}+\frac{\overline{M}_{2i+1}}{E(2i+1)\beta_0}\right),\\ \frac{\mathfrak{a}_{2m+1}}{E(2m+1)\beta_0}&=-\frac{1}{\mu}\sum_{m+1}^\infty{}_i\frac{1}{A_{2i-1}E(2i+1)\beta_0}\left(\frac{L_{2i}}{\epsilon 2i\beta_0}+\frac{\overline{M}_{2i}}{E2i\beta_0}\right).\end{aligned}\right.\quad m=0,1,2\ldots$$

Da formole perfettamente analoghe sono determinate le $\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_1, \ldots.$ Determinate così $\mathfrak{a}_m, \mathfrak{b}_m$, le (30) ci determinano, come abbiamo detto, le a_m, b_m, a'_m, b'_m. Resta però a dire ancora qualche

parola sulle formole che contengono b_1, e a_1', nelle quali apparisce anche la costante $\hat{\omega}_0$. Queste due equazioni sono:

$$(34)\left\{\begin{aligned}\frac{\overline{L}_1}{E\beta_0} &= 2\mu\hat{\omega}_0 + 2\mu\frac{b_1}{\epsilon\beta_0} + \frac{\mathfrak{b}_2}{2}\left[-\mu\frac{\epsilon\beta_0}{E\beta_0} + (\lambda+\mu)\frac{E\beta_0}{\epsilon\beta_0} - \lambda\frac{E2\beta_0}{\epsilon 2\beta_0}\right],\\ \frac{M_1}{\epsilon\beta_0} &= -2\mu\hat{\omega}_0 + 2\mu\frac{a'_1}{E\beta_0} + \frac{\mathfrak{b}_2}{2}\left[-\mu\frac{E\beta_0}{\epsilon\beta_0} + (\lambda+\mu)\frac{\epsilon\beta_0}{E\beta_0} - \lambda\frac{E2\beta_0}{\epsilon 2\beta_0}\right].\end{aligned}\right.$$

Da esse ricaviamo:

$$\frac{L_1}{E\beta_0} - \frac{M_1}{\epsilon\beta_0} = 4\mu\hat{\omega}_0 + 2\mu\left(\frac{b_1}{\epsilon\beta_0} - \frac{a'_1}{E\beta_0}\right) + (\lambda+2\mu)\frac{\mathfrak{b}_2}{\epsilon 2\beta_0}$$

e questa equazione, a causa della (29), ci dà:

$$\frac{\overline{L}_1}{E\beta_0} - \frac{M_1}{\epsilon\beta_0} = 0$$

la quale condizione sappiamo essere soddisfatta. Ne viene che la (29) è conseguenza delle (34) e queste ultime equazioni dànno b_1 e a_1' con la costante arbitraria $\hat{\omega}_0$. Nella soluzione ottenuta vi sono, in totale, le tre costanti arbitrarie $a_0, a_0'. \hat{\omega}_0$, com'era da prevedersi.

Le serie che compaiono in questa soluzione sono della stessa natura di quelle incontrate nel § prec. e quindi il loro studio non offre altre difficoltà.

Sulle varietà rappresentate coll'annullare determinanti minori contenuti in un determinante simmetrico od emisimmetrico generico di forme.

Nota di GIOVANNI Z. GIAMBELLI.

Lo studio delle varietà rappresentate coll'annullare gruppi *convenienti* di determinanti minori contenuti in una matrice *(generica* o *speciale)* di forme ammette come parte essenziale la ricerca del loro ordine (cfr. § 7). Nella seguente Nota si considererà una classe di varietà, la quale contiene come sua parte quella delle varietà rappresentate coll'annullare tutti i minori di dato ordine contenuti in un determinante simmetrico od emisimmetrico generico di forme.

1. **Definizioni**.

Essendo $h_0, h_1, \dots, h_r$ numeri interi tali che $0 \leq h_0 < \dots < h_{r-1} < h_r$, con $\{h_0, h_1, \dots, h_r\}_r^{(x)}$ si designerà la funzione simmetrica caratteristica [1]

$$\begin{vmatrix} x_0^{h_0} & x_1^{h_0} & \dots & x_r^{h_0} \\ x_0^{h_1} & x_1^{h_1} & \dots & x_r^{h_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0^{h_r} & x_1^{h_r} & \dots & x_r^{h_r} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0^r & x_1^r & \dots & x_r^r \end{vmatrix}$$

[1] Sebbene si facciano alcuni lievi cambiamenti nelle notazioni, pure è utile confrontare la mia Nota, *Alcune proprietà delle funzioni simmetriche caratteristiche*, " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", XXXVIII, 1903.

nelle lettere $x_0, x_1, \ldots, x_r$. Per brevità porremo:

$$s_{i,r}^{(x)} = \{0, 1, \ldots, r-i, r-i+2, \ldots, r+1\}_r^{(x)}$$

$$(i = 0, 1, \ldots, r+1);$$

$s_{i,r}^{(x)} = 0$, se i è negativo, oppure maggiore di $r+1$;

$$V_{i,r}^{(x)} = \{0, 1, \ldots, r-1, r+i\}_r^{(x)} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots);$$

$V_{i,r}^{(x)} = 0$, se i è negativo.

Per analogia quando invece delle $x_0, x_1, \ldots, x_r$ si considerano altri gruppi di lettere $p_0, p_1, \ldots, p_m$, ecc., è chiaro quale sarà il significato dei simboli

$$\{h_0, h_1, \ldots, h_m\}_m^{(p)}, \quad s_{i,m}^{(p)}, \quad V_{i,m}^{(p)},$$

ecc.

Scriveremo

$$D(0, \mu) \qquad \text{(essendo } \mu \text{ un numero intero positivo)}$$

in luogo del prodotto

$$\begin{matrix} (p_0 - p_1) & (p_0 - p_2) & \ldots & (p_0 - p_\mu) \\ & (p_1 - p_2) & \ldots & (p_1 - p_\mu) \\ & & \ldots\ldots & \\ & & & (p_{\mu-1} - p_\mu) \end{matrix}$$

e

$$D_r(0, \mu) \qquad (0 \leq r \leq \mu)$$

in luogo di

$$\frac{D(0, \mu)}{(p_0 - p_r)(p_1 - p_r) \ldots (p_{r-1} - p_r)(p_r - p_{r+1}) \ldots (p_r - p_\mu)};$$

inoltre

$$F(r) \qquad (r = 0, 1, \ldots, m)$$

rappresenterà il prodotto

$$(p_r + p_0)(p_r + p_1) \ldots (p_r + p_m).$$

Si designi con S il determinante simmetrico *generico* $|a_{ik}|$ $(i=0, 1, \ldots, m;\ k=0, 1, \ldots, m;\ a_{ik}=a_{ki})$ di $(m+1)^{\text{simo}}$ ordine, nel quale gli elementi a_{ik} sono forme di ordine p_i+p_k nelle $z_0, z_1, \ldots, z_d$, coordinate omogenee di punto nello spazio fondamentale $[d]$, e dove rispetto ai numeri $p_0, p_1, \ldots, p_m$ sono possibili questi due casi: 1° $p_0, p_1, \ldots, p_m$ sono interi positivi zero incluso; 2° $p_0-\frac{1}{2}$, $p_1-\frac{1}{2}, \ldots, p_m-\frac{1}{2}$ sono interi positivi zero incluso. Essendo μ, c numeri interi tali che $0 \leq \mu \leq c < m$, col simbolo $S(m;\mu)_c$ si designerà la varietà rappresentata coll'annullare tutti i minori di ordine $c+1$ contenuti nel detto determinante S, di più supponendo nulla la matrice $\|a_{ik}\|$ $(i=0, 1, \ldots, \mu;\ k=0, 1, \ldots, m)$, costituita dalle prime $\mu+1$ linee di S. I punti della $S(m;\mu)_c$ appartengono pure alla varietà rappresentata coll'annullare la matrice $\|a_{ik}\|$ $(i=0, 1, \ldots, m;\ k=0, 1, \ldots, \mu)$ costituita dalle prime $\mu+1$ colonne di S.

Si designi invece con E il determinante emisimmetrico generico $|a_{ik}|$ $(i=0, 1, \ldots, m;\ k=0, 1, \ldots, m;\ a_{ik}+a_{ki}=0)$ di $(m+1)^{\text{simo}}$ ordine, nel quale gli elementi a_{ik} sono forme di ordine p_i+p_k nelle $z_0, z_1, \ldots, z_d$, coordinate omogenee di punto nello spazio fondamentale $[d]$, e dove rispetto ai numeri $p_0, p_1, \ldots, p_m$ sono possibili questi quattro casi: 1° $p_0, p_1, \ldots, p_m$ sono interi positivi zero incluso; 2° $p_0-\frac{1}{2}, p_1-\frac{1}{2}, \ldots, p_m-\frac{1}{2}$ sono interi positivi zero incluso; 3° uno qualunque dei numeri p, che s'indicherà con $p_{i'}$, è un intero negativo qualunque, e $p_i+p_{i'}$ $(i=0, 1, \ldots, i'-1, i'+1, i'+2, \ldots, m)$ sono numeri interi positivi zero incluso; 4° uno qualunque dei numeri $p_0-\frac{1}{2}$, $p_1-\frac{1}{2}, \ldots, p_m-\frac{1}{2}$, che s'indicherà con $p_{i'}-\frac{1}{2}$ è un intero negativo non nullo, e $p_i+p_{i'}$ $(i=0, 1, \ldots, i'-1, i'+1, i'+2, \ldots, m)$ sono numeri interi positivi zero incluso. Essendo μ, c numeri interi tali che $0 \leq \mu \leq c \leq m$, col simbolo $E(m;\mu)_c$ si designerà la varietà rappresentata coll'annullare tutti i minori di ordine $c+1$ contenuti nel detto determinante E e coll'annullare la matrice $\|a_{ik}\|$ $(i=0, 1, \ldots, \mu;\ k=0, 1, \ldots, m)$ costituita dalle prime $\mu+1$ linee di E. I punti della $E(m;\mu)_c$ appartengono pure alla varietà rappresentata coll' annullare la matrice $\|a_{ik}\|$ $(i=0, 1, \ldots, m;$ $k=0, 1, \ldots, \mu)$ costituita dalle prime $\mu+1$ colonne di E. Per c

dispari vale: $E(m;\mu)_c = E(m;\mu)_{c-1}$, se $\mu < c$; $E(m;c)_c = E(m;c-1)_{c-1}$; infatti il determinante emisimmetrico gode della nota proprietà di avere nulli tutti i minori di ordine c, essendo c dispari, quando s'impone ad esso la condizione di avere nulli tutti i minori di ordine $c+1$.

In tutto il lavoro poi si ammetterà sufficientemente grande d, dimensione dello spazio fondamentale $[d]$; solo per i teoremi dei §§ 5, 6 si scriverà esplicitamente il limite inferiore di d.

2. Teoremi fondamentali.

Dai teoremi 2° e 3° del § 2 della mia Memoria ([1]) segue:

TEOREMA I. — *Essendo* μ, c, m *numeri interi per cui* $0 \leq \mu \leq c \leq m$, *l'ordine della varietà* $S(m;\mu)_c$ *è uguale alla funzione*

$$(m;\mu;p_0,p_1,\ldots,p_m)_c$$

nelle $p_0, p_1, \ldots, p_m$ *definita dalle seguenti condizioni:*

1°
$$\begin{aligned}(p_{\mu-1}-p_\mu)\,.\,(m;\mu;p_0,p_1,\ldots,p_m)_c = \\ = (m;\mu-1;p_0,p_1,\ldots,p_{\mu-2},p_{\mu-1},p_\mu,p_{\mu+1},\ldots,p_m) - \\ - (m;\mu-1;p_0,p_1,\ldots,p_{\mu-2},p_\mu,p_{\mu-1},p_{\mu+1},\ldots,p_m)_c,\end{aligned}$$

se è $\mu > 0$;

2°
$$(m;\mu;p_0,p_1,\ldots,p_m)_c$$

non muta comunque si permutino tra loro le lettere $p_0, p_1, \ldots, p_\mu$ *e comunque si permutino tra loro le lettere* $p_{\mu+1}, p_{\mu+2}, \ldots, p_m$;

3° $$(m;0;p_0,p_1,\ldots,p_m)_c = F(0)\,.\,(m-1;c;p_1,p_2,\ldots,p_m)_c,$$

quando $m > c$;

4° $$(c;0;p_0,p_1,\ldots,p_c)_c = (p_0+p_0)\,.\,(p_0+p_1)\cdots(p_0+p_c).$$

([1]) *Ordine di una varietà più ampia di quella rappresentata coll'annullare tutti i minori di dato ordine estratti da una data matrice generica di forme*, “Mem. R. Ist. Lombardo „, (3), 11, 1904. — I teoremi del § 3 di questa Memoria non sono atti a dedurre i teoremi I, II di sopra del testo. In appresso per brevità col simbolo 𝔐 si designerà questa mia Memoria.

TEOREMA II. — *Essendo* μ, c, m *numeri interi per cui* $0 \leq \mu \leq c < m$, *e di più essendo* c *pari, l'ordine della varietà* $E(m;\mu)_c$ *è uguale alla funzione*

$$[m;\mu;p_0,p_1,\ldots,p_m]_c$$

nelle $p_0, p_1, \ldots, p_m$ *definita dalle seguenti condizioni:*

1° $$(p_{\mu-1}-p_\mu)\cdot[m;\mu;p_0,p_1,\ldots,p_m]_c=$$
$$=[m;\mu-1;p_0,p_1,\ldots,p_{\mu-2},p_{\mu-1},p_\mu,p_{\mu+1},\ldots,p_m]_c-$$
$$-[m;\mu-1;p_0,p_1,\ldots,p_{\mu-2},p_\mu,p_{\mu-1},p_{\mu+1},\ldots,p_m]_c,$$

se è $\mu>0$;

2° $$[m;\mu;p_0,p_1,\ldots,p_m]_c$$

non muta comunque si permutino tra loro le lettere $p_0, p_1, \ldots, p_\mu$ *e comunque si permutino tra loro le lettere* $p_{\mu+1}, p_{\mu+2}, \ldots, p_m$;

3° $$[m;0;p_0,p_1,\ldots,p_m]_c=\frac{1}{(p_0+p_0)}\cdot F(0).[m-1;c;p_1,p_2,\ldots,p_m]_c,$$

quando $m>c+1$;

4° $$[c+1;0;p_0,p_1,\ldots,p_{c+1}]_c=(p_0+p_1)\cdot(p_0+p_2)\ldots(p_0+p_{c+1}).$$

Solo la 1ª condizione per le due funzioni ora definite si può considerare come l'interpretazione funzionale del 3° teorema del § 2 di 𝔐, le altre tre condizioni si deducono poi in modo assai semplice. imitando le considerazioni fatte nel § 5 di 𝔐 rispetto alle condizioni 2ª. 3ª, 5ª per la funzione $(m,n;\mu,\nu;p_0,p_1,\ldots,p_m;q_0,q_1,\ldots,q_n)_c$ (1).

3. Formole di trasformazione.

Del simbolo $(m,n;\mu,\nu;p_0,p_1,\ldots,p_m;q_0,q_1,\ldots,q_n)_c$, considerato in 𝔐, chiamiamo corrispondenti i due simboli $(m;\mu;p_0,p_1,\ldots,p_m)_c$, $[m;\mu;p_0,p_1,\ldots,p_m]_c$, quando i numeri m, μ, c sono gli stessi e le lettere $p_0, p_1, \ldots, p_m$ sono pure le stesse, e quando in più c è pari, se si considera il simbolo $[m;\mu;p_0,$

(1) La 4ª condizione sopra questa funzione definita in 𝔐 è stata stampata in modo inesatto; si deve leggere invece:

$$(m,n;\mu,\nu;p_0,p_1,\ldots,p_m;q_0,q_1,\ldots,q_n)_c=(n,m;\nu,\mu;q_0,q_1,\ldots,q_n;p_0,p_1,\ldots,p_m)_c.$$

$p_1, \ldots, p_m]_c$. Ad ogni simbolo del tipo $(m, n; \mu, \nu; p_0, p_1, \ldots, p_m; q_0, q_1, \ldots, q_n)_c$ corrisponde sempre un solo simbolo del tipo $(m; \mu; p_0, p_1, \ldots, p_m)_c$; viceversa ad un simbolo di questo tipo corrispondono sempre infiniti simboli del primo tipo, per la libertà di scelta sui numeri n, ν e sulle lettere q. Ad ogni simbolo del tipo $(m, n; \mu, \nu; p_0, p_1, \ldots, p_m; q_0, q_1, \ldots, q_n)_c$ corrisponde un solo simbolo del tipo $[m; \mu; p_0, p_1, \ldots, p_m]_c$, quando c è pari e $c < m$; se c è dispari non esiste il simbolo corrispondente. Inversamente al simbolo $[m; \mu; p_0, p_1, \ldots, p_m]_c$ corrispondono sempre infiniti simboli dell'altro tipo per la libertà di scelta su n, ν e sulle q. Questa corrispondenza, sebbene non sia biunivoca e nel 2° caso nemmeno perfettamente univoca, pure è tale che i calcoli delle pagine 15 [115], 16 [116] di 𝔐 si possono subito trasformare in calcoli sopra i simboli $(m; \mu; p_0, p_1, \ldots, p_m)_c$, $[m; \mu; p_0, p_1, \ldots, p_m]_c$. Se alle due formole corrispondenti alla (8′) di 𝔐 si associano (in modo analogo a quello ivi usato per la (8′)) le condizioni 2ª, 3ª dei teoremi I, II del § precedente si ottengono le seguenti due formole:

$$\text{(I)} \qquad D(0, \mu) \,.\, (m; \mu; p_0, p_1, \ldots, p_m)_c =$$

$$= \sum_{r=0}^{r=\mu} (-1)^r D_r(0, \mu) \,.\, F(r) \,.\, (m-1; c; p_0, p_1, \ldots, p_{r-1}, p_{r+1}, \ldots, p_m)_c ,$$

ove è $m > c$ e dove si faccia $D(0, \mu) = D_r(0, \mu) = 1$, quando $\mu = 0$. Se è poi $m = c$ la (I) vale ancora, purchè in luogo di $(m-1; c; p_0, p_1, \ldots, p_{r-1}, p_{r+1}, \ldots, p_m)_c$ si ponga l'unità.

$$\text{(II)} \qquad D(0, \mu) \,.\, [m; \mu; p_0, p_1, \ldots, p_m]_c =$$

$$= \sum_{r=0}^{r=\mu} (-1)^r D_r(0, \mu) \,.\, \frac{1}{(p_r + p_r)} \,.\, F(r) \,.\, [m-1; c; p_0, p_1, \ldots, p_{r-1}, p_{r+1}, \ldots, p_m]_c ,$$

ove è $m > c+1$ e dove si faccia $D(0, \mu) = D_r(0, \mu) = 1$, quando $\mu = 0$. Se è poi $m = c+1$, la (II) vale ancora, purchè in luogo di $[m-1; c; p_0, p_1, \ldots, p_{r-1}, p_{r+1}, \ldots, p_m]_c$ si ponga l'unità.

Dimostriamo ora le formole fondamentali:

$$\text{(III)} \quad (m; c; p_0, p_1, \ldots, p_m)_c = 2^{m-c+1} \,.\, \}0, 1, \ldots, c-1, c+1, c+3, \ldots, 2m-c+1\{^{(p)}_m$$

$$\text{(IV)} \quad [m; c; p_0, p_1, \ldots, p_m]_c = \}0, 1, \ldots, c, c+2, c+4, \ldots, 2m-c\{^{(p)}_m .$$

Per procedere più rapidamente nella dimostrazione col simbolo $G(a, b; u)$ si designerà la serie dei numeri $a, a+u, a+2u, \ldots, a+bu$, con $G(a, -1; u)$ la serie *costituita da nessun numero* e con $G(a, b; 2)_r$ la serie ottenuta disponendo in ordine crescente l'insieme dei numeri costituito da $G(a, b; 2)$ e dal numero $a+2b-2r+1$. Siccome nelle (I), (II) si pone l'unità in luogo dei simboli $(c-1; c; p_0, p_1, \ldots, p_{r-1}, p_{r+1}, \ldots, p_c)_c$, $[c; c; p_0, p_1, \ldots, p_{r-1}, p_{r+1}, \ldots, p_{c+1}]_{c+1}$, nel dimostrare le formole (III), (IV) possiamo supporle vere per $m-1$, essendo $m \geq c$ rispetto alla (III) $m \geq c+1$ rispetto alla (IV), ossia basta dimostrare le identità:

$$D(0, c) . \}G(0, c-1; 1), G(c+1, m-c; 2)\{^{(p)}_m =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{r=c}(-1)^r D_r(0, c). F(r). \}G(0, c-1; 1), G(c+1, m-c-1; 2)\{^{(p)}_{(m-1,r)},$$

$$D(0, c) . \}G(0, c; 1), G(c+2, m-c-1; 2)\{^{(p)}_m =$$

$$= \sum_{r=0}^{r=c}(-1)^r D_r(0, c) . \frac{1}{(p_r+p_c)} . F(r). \}G(0, c-1; 1), G(c+2, m-c+2; 2)\{^{(p)}_{(m-1,r)}$$

dove con $\}h_0, h_1, \ldots, h_{m-1}\{^{(p)}_{(m-1,r)}$ si conviene d'indicare la funzione simmetrica caratteristica $\}h_0, h_1, \ldots, h_{m-1}\{^{(x)}_{m-1}$, quando in luogo di $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$ si pensino le lettere $p_0, p_1, \ldots, p_{r-1}, p_{r+1}, \ldots, p_m$; nella 1ª identità è $m \geq c$, nella 2ª è $m \geq c+1$ ed inoltre c è pari.

Queste due identità si possono scrivere così:

$$D(0, m) . \}G(0, c-1; 1), G(c+1, m-c; 2)\{^{(p)}_m =$$

$$= \sum_{r=0}^{r=m}\frac{1}{2}(-1)^r D_r(0, m) . F(r). (p_r - p_{c+1}) . (p_r - p_{c+2}) \ldots (p_r - p_m) .$$

$$. \}G(0, c-1; 1), G(c+1, m-c-1; 2)\{^{(p)}_{(m-1,r)}$$

(essendo $0 \leq c \leq m$);

$$D(0, m) . \}G(0, c; 1), G(c+2, m-c-1; 2)\{^{(p)}_m =$$

$$= \sum_{r=0}^{r=m}(-1)^r D_r(0, m) . \frac{1}{(p_c+p_r)} . F(r). (p_r - p_{c+1}) . (p_r - p_{c+2}) \ldots (p_r - p_m) .$$

$$. \}G(0, c; 1), G(c+2, m-c-2; 2)\{^{(p)}_{(m-1,r)}$$

(essendo $0 \leq c < m$ ed inoltre c pari);

per cui, sviluppato il prodotto

$$F(r) \, . \, (p_r - p_{c+1}) \, . \, (p_r - p_{c+2}) \dots (p_r - p_m),$$

risulta esser sufficiente il provare che

$$\frac{1}{2} \sum_{u=0}^{u=m+1} \sum_{r=0}^{r=m} (-1)^r D_r(0, m) p_r^{2m-l+1-u} \, s_{u,m}^{(p)} \, . \\ . \, \} G(0, c-1; 1), \; G(c+1, m-c-1; 2) \{_{(m-1,r)}^{(p)}$$

è uguale a

$$D(0, m) \, . \, \} G(0, c-1; 1), \; G(c+1, m-c; 2) \{_{m}^{(p)},$$

quando $l = c \leq m$, ed è zero quando per l'intero l si ha $c < l \leq m$, ed il provare l'identità

$$\sum_{u=0}^{u=m+1} \sum_{r=0}^{r=m} (-1)^r D_r(0, m) p_r^{m-u} \, s_{u,m}^{(p)} \} G(0, c; 1), G(c+2, m-c-2; 2) \{_{(m-1,r)}^{(p)} = 0,$$

essendo $0 \leq c < m$ ed inoltre c pari.

In virtù di opportune ma facili semplificazioni si conclude che basta dimostrare:

$$\sum_{v=0}^{v=\min\left(\left[\frac{m}{2}\right], \, m-c\right)} (-1)^v s_{2v+1,m}^{(p)} \} G(0, c-1; 1), \; G(c+1, m-c-1; 2)_v \{_{m}^{(p)} = \\ = \} G(0, c-1; 1), \; G(c+1, m-c; 2) \{_{m}^{(p)}, \tag{1}$$

essendo $0 \leq c \leq m$;

$$\sum_{v=w}^{v=\min\left(\left[\frac{m}{2}\right]+w, \, m-c\right)} (-1)^v s_{2v-2w+1,m}^{(p)} \} G(0, c-1; 1), \; G(c+1, m-c-1; 2)_v \{_{m}^{(p)} = 0, \tag{2}$$

essendo $0 \leq c \leq m$ ed inoltre w un intero tale che $0 < w \leq \frac{m-c}{2}$;

$$\sum_{v=w}^{v=\min\left(\left[\frac{m+1}{2}\right]+w, \, m-c\right)} (-1)^v s_{2v-2w,m}^{(p)} \} G(0, c-1; 1), \; G(c+1, m-c-1; 2)_v \{_{m}^{(p)} = 0 \tag{3}$$

essendo $0 \leq c < m$ ed inoltre w un intero tale che $0 \leq w \leq \frac{m-c-1}{2}$;

$$\sum_{v=\left[\frac{m-c}{2}\right]}^{v=m-c-1} (-1)^v s^{(p)}_{2v-m+c+1,m} \rbrace G(0, c; 1),\ G(c+2, m-c-2; 2)_v \lbrace^{(p)}_m +$$

(4)

$$+ (-1)^m \rbrace G(0, c+1; 1),\ G(c+3, m-c-2; 2) \lbrace^{(p)}_m = 0,$$

essendo $0 \leq c < m$ ed inoltre c pari;

dove $\left[\frac{m}{2}\right]$, $\left[\frac{m+1}{2}\right]$, $\left[\frac{m-c}{2}\right]$ indicano rispettivamente la parte intera di $\frac{m}{2}$, $\frac{m+1}{2}$, $\frac{m-c}{2}$.

4. Identità algebriche.

Per la dimostrazione delle identità algebriche (1), (2), (3), (4) enunciate nel § precedente è opportuno introdurre il simbolo $\Psi(\rbrace h_0, h_1, \ldots, h_m \lbrace^{(p)}_m; u; l)$ essendo l'intero l tale che $2 \leq l \leq m+1$, per rappresentare la $\Sigma_i \rbrace h_0 + i_0, h_1 + i_1, \ldots, h_m + i_m \lbrace^{(p)}_m$, dove la sommatoria è estesa a tutti i valori delle i, la cui somma è l e ognun dei quali vale zero oppure uno coll' ipotesi però che $i_{m-u} = i_{m-u-1} = 1$; se $l = 0, 1$, $\Psi(\rbrace h_0, h_1, \ldots, h_m \lbrace^{(p)}_m; u; l) = 0$.

In virtù della formola (1) del § 2 della mia citata Nota (*Alcune proprietà delle funzioni simmetriche caratteristiche*) si ottengono subito le seguenti identità:

$$s^{(p)}_{r,m} . \rbrace G(0, c-1; 1),\ G(c+1, m-c-1; 2)_v \lbrace^{(p)}_m =$$

(5)

$$= \Psi(\rbrace G(0, c-1; 1),\ G(c+1, m-c-1; 2)_{v+1} \lbrace^{(p)}_m; v+1; r+2),$$

essendo $r = 0$, $v = 0, 1, \ldots, m-c-1$, oppure essendo $r = 1$, $v = 1, 2, \ldots, m-c-1$;

$$s^{(p)}_{1,m} . \rbrace G(0, c-1; 1),\ G(c+1, m-c-1; 2)_0 \lbrace^{(p)}_m =$$

(6)

$$= \rbrace G(0, c-1; 1),\ G(c+1, m-c; 2) \lbrace^{(p)}_m +$$

$$+ \Psi(\rbrace G(0, c-1; 1),\ G(c+1, m-c-1; 2)_1 \lbrace^{(p)}_m; 1; 3);$$

$$
\begin{aligned}
&s^{(p)}_{r,m} \,.\, \{G(0,\, c-1;\, 1),\ G(c+1,\ m-c-1;\, 2)_v\{^{(p)}_m = \\
(7)\qquad &= \Psi(\{G(0,\ c-1;\ 1),\ G(c+1,\ m-c-1;\ 2)_v\{^{(p)}_m;\ v;\ r)+ \\
&+\Psi(\{G(0,c-1;\, 1),\ G(c+1,\, m-c-1;\, 2)_{v+1}\{^{(p)}_m;\ v+1;\ r+2),
\end{aligned}
$$

essendo $r=2,\ 3,\ ...,\ m-1,\quad v=1,\ 2,\ ...,\ m-c-1$;

$$
\begin{aligned}
&s^{(p)}_{r,m} \,.\, \{G(0,\, c-1;\, 1),\ G(c+1,\, m-c-1;\, 2)_v\{^{(p)}_m = \\
(8)\qquad &= \Psi(\{G(0,\ c-1;\ 1),\ G(c+1,\ m-c-1;\ 2)_v\{^{(p)}_m;\ v;\ r),
\end{aligned}
$$

essendo $r=m,\ m+1,\quad v=1, 2, ..., m-c-1$, oppure essendo $r>m-c,\ v=m-c$;

$$
\begin{aligned}
&s^{(p)}_{m-c,m} \,.\, \{G(0,\ c-1;\ 1),\ G(c+1,\, m-c-1\,;\, 2)_{m-c}\{^{(p)}_m = \\
(9)\qquad &= \Psi(\{G(0,c-1;\, 1),\ G(c+1,\, m-c-1;\, 2)_{m-c}\{^{(p)}_m;\ m-c;\ m-c)+ \\
&+\{G(0,\, c;\, 1),\ G(c+2,\ m-c-1;\, 2)\{^{(p)}_m;
\end{aligned}
$$

in tutte queste identità poi deve essere $0\leq c\leq m$.

Da queste formole (5), (6), (7), (8), (9) risultano subito dimostrate le identità (1), (2), (3), (4) del § precedente, perchè alla (1) basta applicare le formole (6), (7), (8), alle (2), (3) applicare invece le formole (5), (7), (8). Infine rispetto alla (4) conviene anzitutto sostituirla colla (4'), essendo l'identità (4') quella ottenuta dalla (4) ponendo $c-1$ in luogo di c, supponendo di conseguenza dispari la nuova c e tale che $1\leq c\leq m$; quindi alla (4') basta applicare le formole (5), (7), (9) ed osservare che $(-1)^{m-c}=(-1)^{m-1}$ perchè c (cioè la nuova c) è dispari.

Riassumendo si conclude che risultano dimostrate le formole (III), (IV): la dimostrazione fatta è forse un po' rapida, ma elegante e completa senza alcun dubbio.

5. Ordine della varietà rappresentata coll'annullare tutti i minori di dato ordine contenuti in un determinante simmetrico generico di forme. — Risultato più ampio del precedente.

Il teorema I associato alla formola (III) permette di enunciare:

TEOREMA III. — *L'ordine della* $\mathrm{S}(\mathrm{m};\, \mathrm{c})_c$, *cioè della varietà di dimensione* $\frac{(\mathrm{m}-\mathrm{c}+1)(\mathrm{m}-\mathrm{c}+2)}{2}$ *rappresentata coll' annullare*

tutti i minori di ordine $c+1$ $(0 \leq c \leq m)$ *contenuti nel determinante* S, *ossia nel determinante simmetrico generico* $|a_{ik}|$ $(i=0, 1, \ldots, m;\ k=0, 1, \ldots, m;\ a_{ik}=a_{ki})$, *in cui le* a_{ik} *sono forme di ordine* p_i+p_k (*essendo rispetto ai numeri* $p_0, p_1, \ldots, p_m$ *possibili questi due casi:* 1° $p_0, p_1, \ldots, p_m$ *sono interi positivi zero incluso;* 2° $p_0-\frac{1}{2}, p_1-\frac{1}{2}, \ldots, p_m-\frac{1}{2}$ *sono interi positivi zero incluso*) *nelle* $z_0, z_1, \ldots, z_d$ $\left(d \geq \frac{(m-c+1)(m-c+2)}{2}\right)$ *è uguale a*

$$(V) \qquad 2^{m-c+1}.\{0, 1, \ldots, c-1, c+1, c+3, \ldots, 2m-c+1\}_m^{(p)}.$$

Per mezzo di una nota formola del Trudi sulle funzioni simmetriche caratteristiche e della formola duale (cfr. per tali formole il § 5 della mia citata Nota, *Alcune proprietà delle funzioni simmetriche caratteristiche*) segue:

Teorema IV. — *L'ordine della varietà* $S(m; c)_c$, *ossia l'espressione* (V), *è uguale al determinante di* $(m-c+1)^{simo}$ *ordine, nel quale gli elementi della colonna* $(k+1)^{sima}$ $(k=0, 1, \ldots, m-c)$ *sono:*

$$2 . V^{(p)}_{2k+1,m}, \quad 2 . V^{(p)}_{2k,m}, \quad \ldots, \quad 2 . V^{(p)}_{2k-m+c+1,m},$$

oppure:

Il detto ordine (ossia la (V)*) è anche uguale al determinante di* $(m-c+1)^{simo}$ *ordine, nel quale gli elementi della colonna* $(k+1)^{sima}$ $(k=0, 1, \ldots, m-c)$ *sono:*

$$2 . s^{(p)}_{2k+1,m}, \quad 2 . s^{(p)}_{2k,m}, \quad \ldots, \quad 2 . s^{(p)}_{2k-m+c+1,m}.$$

Per brevità di spazio mi limito qui ad enunciare la seguente proposizione sul limite di una funzione simmetrica caratteristica [1]:

---

[1] Questa proposizione si troverà forse dimostrata in un altro mio Lavoro.

TEOREMA V. — *Quando* $x_0 = x_1 = \dots = x_s = \lambda$, *la funzione simmetrica caratteristica* $\{h_0, h_1, \dots, h_s\}^{(x)}$ *nelle* $x_0, x_1, \dots, x_s$ *è uguale a*

$$\frac{(s+1)!\,(s+2)!\dots(s+t+1)!}{(s+t+1-k_0)!\,(s+t+1-k_1)!\dots(s+t+1-k_t)!}\cdot\frac{\lambda^{h_0+h_1+\dots+h_s-\frac{s(s+1)}{2}}}{k_0!\,k_1!\dots k_t!}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_0 & k_1 & \dots & k_t \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_0^t & k_1^t & \dots & k_t^t \end{vmatrix}$$

dove con $k_0, k_1, \dots, k_t$ *(essendo* t *un intero qualunque ma non minore di* $h_s - s - 1$*) si designa ciò che diventa la serie dei numeri* $0, 1, \dots, s+t+1$, *quando si tolgano i numeri*

$$s+t+1-h_s,\ s+t+1-h_{s-1},\ \dots,\ s+t+1-h_0\,.$$

Da questa proposizione si trae che l'ordine della varietà definita nel teorema III, ossia la (V), nel caso particolare $p_0 = p_1 = \dots = p_m = \frac{1}{2}\lambda$ (cioè nel caso in cui tutte le forme a_{ik} sono dello stesso ordine λ) diventa uguale a

$$\text{(VI)}\qquad \frac{(m+1)!\,(m+2)!\dots(2m-c)!\,(2m-c+1)!}{c!\,(c+2)!\dots(2m-c-2)!\,(2m-c)!}\cdot\frac{0!\,1!\dots(m-c-1)!\,(m-c)!}{1!\,3!\dots(2(m-c)-1)!\,(2(m-c)+1)!}\cdot\lambda^{\frac{(m-c+1)(m-c+2)}{2}}\,.$$

Tale formola (VI), scritta in modo diverso, costituisce un risultato ottenuto in una importante Nota [1] dal Prof. SEGRE interpretando geometricamente una formola dello SCHUBERT sopra i numeri delle quadriche di più dimensioni soddisfacenti a date condizioni fondamentali [2].

---

[1] *Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da una data matrice,* " Rend. R. Acc. Lincei ", (5), 9, 1900.

[2] *Allgemeine Anzahlfunctionen für Kegelschnitte, Flächen und Räume*

Il teorema I, la formola (III) e le citate formole sulle funzioni simmetriche caratteristiche danno risultati più generali dei precedenti, cioè vale:

Teorema VI. — *Ricordando che con* S *si è designato il determinante simmetrico generico* $|a_{ik}|$ $(i=0, 1, \ldots, m; k=0, 1, \ldots, m; a_{ik}=a_{ki})$, *essendo le* a_{ik} *forme di ordine* p_i+p_k *(dove per le* $p_0, p_1, \ldots, p_m$ *si fanno le medesime ipotesi del teorema* (IV) *nelle* $z_0, z_1, \ldots, z_d$ $\left(d-\frac{(m-c+1)(m-c+2)}{2}+c-\mu\right)$. *L'ordine della* $S(m;\mu)_c$, *ossia della varietà di dimensione* $d-\frac{(m-c+1)(m-c+2)}{2}-c+\mu$ *rappresentata coll'annullare tutti i minori di ordine* $c+1$ $(0\leq c\leq m)$ *contenuti nel determinante* S, *supponendo inoltre nulla la matrice* $\|a_{ik}\|$ $(i=0, 1, \ldots, \mu; k=0, 1, \ldots, m; 0\leq\mu\leq c)$ *costituita dalle prime* $\mu+1$ *linee di* S *e supponendo di conseguenza nulla la matrice* $\|a_{ik}\|$ $(i=0, 1, \ldots, m; k=0, 1, \ldots, \mu)$ *costituita dalle prime* $\mu+1$ *colonne di* S, *è uguale a*

$$\text{(VII)}\quad 2^{m-c}\cdot\sum_{i=0}^{i=\mu}\frac{(p_i+p_0)(p_i+p_1)\ldots(p_i+p_m)}{(p_i-p_0)(p_i-p_1)\ldots(p_i-p_{i-1})(p_i-p_{i+1})(p_i-p_{i+2})\ldots(p_i-p_\mu)}\cdot$$

$$\cdot\{0, 1, \ldots, c-1, c+1, c+3, \ldots, 2m-c-1\}^{(p)}_{(m-1,i)}.$$

---

zweiten Grades in n *Dimensionen*, " Math. Annalen ", 45, 1894. — Qui per brevità di spazio non espongo il calcolo che dimostra l'identità della (VI) per $\lambda=1$ e delle formole (4) della citata Nota del Prof. Segre; tale identità permette di scrivere in modo più elegante un risultato della ora nominata Memoria dello Schubert, perchè alle formole (43), (44) di essa si può sostituire la seguente unica formola:

$$\frac{(n+1)!(n+2)!\ldots(2n-p-1)!(2n-p)!}{(p+1)!(p+3)!\ldots(2n-p-3)!(2n-p-1)!}\cdot\frac{0!\,1!\ldots(n-p-2)!(n-p-1)!}{1!3!\ldots(2(n-p-1)-1)!(2(n-p)-1)!}$$

Così si vede come si ottengano risultati scritti in modo elegante, quando si applichi la teoria algebrica delle funzioni simmetriche caratteristiche; per mezzo di questa teoria si possono poi ottenere nuovi notevoli risultati intorno al problema dello Schubert sulle condizioni fondamentali imponibili ad una quadrica iperspaziale; naturalmente occorre tener conto anche dell'interpretazione simbolica del problema degli spazî secanti e delle formole d'incidenza (Cfr. G. Z. Giambelli, *La teoria delle formole d'incidenza e di posizione speciale e le forme binarie*, " Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino ", 40, 1905).

dove, come nella pag. 9, $\{0, 1, \ldots, c-1, c+1, c+3, \ldots, 2m-c-1\}^{(p)}_{(m-1,i)}$ *indica la funzione simmetrica caratteristica* $\{0, 1, \ldots, c-1, c+1, c+3, \ldots, 2m-c-1\}^{(x)}_{m-1}$, *quando in luogo di* $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$ *si pensino le lettere* $p_0, p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, p_{i+2}, \ldots, p_m$.

Il fattore $\{0, 1, \ldots, c-1, c+1, c+3, \ldots, 2m-c-1\}^{(p)}_{(m-1,i)}$ *di questa formola* (VII) *si può sostituire col determinante (uguale ad esso) di* $(m-c)^{\text{simo}}$ *ordine, nel quale gli elementi della colonna* $(k+1)^{\text{sima}}$ $(k=0, 1, \ldots, m-c-1)$ *sono:*

$$V^{(p)}_{2k+1,(m-1,i)}, \quad V^{(p)}_{2k,(m-1,i)}, \quad \ldots, \quad V^{(p)}_{2k-m+c+2,(m-1,i)},$$

dove con $V^{(p)}_{r,(m-1,i)}$ *indica la* $V^{(x)}_{r,m-1}$, *quando in luogo di* $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$ *si pensino le lettere* $p_0, p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, p_{i+2}, \ldots, p_m$.

Il medesimo fattore si può pure sostituire col determinante di $(m-c)^{\text{simo}}$ *ordine, nel quale gli elementi della colonna* $(k+1)^{\text{sima}}$ $(k=0, 1, \ldots, m-c-1)$ *sono:*

$$s^{(p)}_{2k+1,(m-1,i)}, \quad s^{(p)}_{2k,(m-1,i)}, \quad \ldots, \quad s^{(p)}_{2k-m+c+2,(m-1,i)},$$

dove $s^{(p)}_{r,(m-1,i)}$ *indica la* $s^{(x)}_{r,m-1}$, *quando in luogo di* $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$ *si pensino le lettere* $p_0, p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_m$.

OSSERVAZIONI. — Nei precedenti teoremi IV, V, VI, non si è assegnato esplicitamente il massimo numero delle p_i uguali a zero, perchè quando tale limite è superato le corrispondenti espressioni sull'ordine di $S(m; c)_c$, di $S(m; \mu)_c$ sono uguali a zero e sono uguali a zero solo in questo caso.

Dal teorema I del § 2 e da quanto si è enunciato in questo § si deduce come si può scrivere il polinomio nelle $p_0, p_1, \ldots, p_m$ equivalente alla $(m; \mu; p_0, p_1, \ldots, p_m)_c$; anzi questo polinomio si può porre sotto forma elegante in più modi, e risulta subito evidente quando si deve applicare p. es. la formola (V), oppurre la (VII), ecc. Nel seguente § 7 per enunciare in breve i teoremi si farà uso anche della funzione $(m; \mu; \eta_0, \eta_1, \ldots \eta_m)_c$, la quale non significa altro che il polinomio equivalente alla $(m; \mu; p_0, p_1, \ldots, p_m)_c$, quando in luogo delle $p_0, p_1, \ldots, p_m$ si pensino rispettivamente le $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m$.

6. — Ordine della varietà rappresentata coll'annullare tutti i minori di dato ordine contenuti in un determinante emisimmetrico generico di forme. — Risultato più ampio del precedente.

Dal teorema II, dalle formole (II), (IV) e dalle stesse proprietà sulle funzioni simmetriche caratteristiche applicate nel § precedente si ricavano teoremi, analoghi ai teoremi IV, V, VI, relativi però ad un determinante emisimmetrico generico; per brevità riassumiamo questi teoremi nel seguente unico enunciato:

Teorema VII. — *Si ricordi che con* E *si è definito il determinante emisimmetrico generico* $|a_{ik}|$ $(i=0, 1, ..., m; k=0, 1, ..., m: a_{ik}+a_{ki}=0)$ *essendo le* a_{ik} *forme di ordine* p_i+p_k *nelle* $z_0, z_1, ..., z_d$, *dove rispetto ai numeri* $p_0, p_1, ..., p_m$ *sono possibili questi quattro casi:* 1° $p_0, p_1, ..., p_m$ *sono interi positivi zero incluso;* 2° $p_0-\frac{1}{2}$, $p_1-\frac{1}{2}, ..., p_m-\frac{1}{2}$ *sono interi positivi zero incluso;* 3° *uno qualunque dei numeri* p, *che s'indicherà con* $p_{i'}$ *è un intero negativo qualunque, e* $p_i+p_{i'}$ $(i=0, 1, ..., i'-1, i'+1, i'+2, ..., m)$ *sono interi positivi zero incluso;* 4° *uno qualunque dei numeri* $p_0-\frac{1}{2}$, $p_1-\frac{1}{2}, ..., p_m-\frac{1}{2}$, *che s'indicherà con* $p_{i'}-\frac{1}{2}$ *è un intero negativo non nullo e* $p_i+p_{i'}$ $(i=0, 1, ..., m)$ *sono interi positivi zero incluso.*

Essendo c *un numero intero pari tale che* $0 \leq c < m$, *supposto* $d \geq \frac{(m-c)(m-c+1)}{2}$, *l'ordine della* $E(m; c)$, *cioè della varietà di dimensione* $d-\frac{(m-c)(m-c+1)}{2}$ *rappresentata coll'annullare tutti i minori di ordine* $c+1$ *contenuti nel determinante* E *è uguale a*

$$\text{(VIII)} \qquad \{0, 1, ..., c, c+2, c+4, ..., 2m-c\}^{(p)}_{m};$$

ossia anche uguale al determinante di $(m-c)^{\text{simo}}$ *ordine nel quale gli elementi della colonna* $(k+1)^{\text{sima}}$ $(k=0, 1, ..., m-c-1)$ *sono:*

$$V^{(p)}_{2k+1,m}, \quad V^{(p)}_{2k,m}, \quad \dots, \quad V^{(p)}_{2k-m+c+2,m};$$

oppure al determinante dello stesso ordine nel quale gli elementi della colonna $(k+1)^{sima}$ $(k=0, 1, \ldots, m-c-1)$ *sono invece:*

$$s^{(p)}_{2k+1,m}\ ,\ s^{(p)}_{2k,m}\ ,\ \ldots\ ,\ s^{(p)}_{2k-m+c+2,m}\ .$$

(Non occorre ricordare che la varietà rappresentata coll'annullare tutti i minori di ordine $c+2$ *contenuti in* E *coincide colla varietà ora considerata).*

.—. *In particolare l'ordine di questa varietà si riduce a*

$$\text{(IX)}\qquad \frac{1}{2^{m-c}}\cdot\frac{(m+1)!(m+2)!\ldots(2m-c-1)!(2m-c)!}{(c+1)!(c+3)!\ldots(2m-c-3)!(2m-c-1)!}\cdot \frac{0!\,1!\ldots(m-c-2)!(m-c-1)!}{1!3!\ldots(2(m-c)-3)!\,(2(m-c)-1)!}\cdot\lambda^{\frac{(m-c)(m-c+1)}{2}}=$$

$$=\frac{[1!\,3!\ldots(c-1)!]\,.\,[(2m-2c+2)!(2m-2c+4)!\ldots(2m-c)!]}{(m-c+1)!\,(m-c+2)!\ldots m!}\cdot\lambda^{\frac{(m-c)(m-c+1)}{2}},$$

quando $p_0=p_1=\ldots=p_m=\frac{1}{2}\lambda$ (¹).

.—. *Essendo* c *un numero intero pari tale che* $0\leq c<m$, *supposto* $d\geq\frac{(m-c)(m-c+1)}{2}+c-\mu$, $(0\leq\mu\leq c)$, *l'ordine della* $E(m;\mu)_c$, *cioè della varietà di dimensione* $d-\frac{(m-c)(m-c+1)}{2}-c+\mu$ *rappresentata coll'annullare tutti i minori di ordine* $c+1$ *contenuti in* E, *supponendo inoltre nulla la matrice* $\|a_{ik}\|$ $(i=0, 1, \ldots, \mu;$ $k=0, 1, \ldots, m)$ *costituita dalle prime* $\mu+1$ *linee di* E *e supponendo di conseguenza nulla la matrice* $\|a_{ik}\|$ $(i=0, 1, \ldots, m;$ $k=0,1,\ldots,\mu)$ *costituita dalle prime* $\mu+1$ *colonne di* E, *è uguale a*

$$\text{(X)}\quad \sum_{i=0}^{i=\mu}\frac{(p_i+p_0)(p_i+p_1)\ldots(p_i+p_m)}{(p_i-p_0)(p_i-p_1)\ldots(p_i-p_{i-1})(p_i-p_{i+1})(p_i-p_{i+2})\ldots(p_i-p_\mu)}\cdot\frac{1}{(p_i+p_i)}\cdot$$

$$\cdot\left\{0, 1, \ldots, c, c+2, c+4, \ldots, 2m-c-2\right\}^{(p)}_{(m-1,i)}$$

(¹) Qui si applica l'identità della (VI) e delle formole (4) della citata Nota del Prof. Segre (cfr. la 3ª nota del § precedente). La (IX) per $\lambda=1$ costituisce un risultato di F. Palatini dedotto per mezzo di considerazioni geometriche sopra i complessi lineari di rette nella Nota, *L'ordine della varietà che annulla i subdeterminanti di un dato grado di un determinante emisimmetrico,* " Rend. R. Acc. Lincei ", (5), 11, 1902.

dove $\}0, 1, \ldots, c, c+2, c+4, \ldots, 2m-c-2\{^{(p)}_{(m-1,i)}$ *indica la* $\}0, 1, \ldots, c, c+2, c+4, \ldots, 2m-c-2\{^{(x)}_{m-1}$, *quando in luogo di* $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$, *si pensino le lettere* $p_0, p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, p_{i+2}, \ldots, p_m$.

Il fattore $\}0, 1, \ldots, c, c+2, c+4, \ldots, 2m-c-2\{^{(p)}_{(m-1,i)}$ *della* (X) *si può sostituire col determinante di* $(m-c-1)^{\text{simo}}$ *ordine, i cui elementi della colonna* $(k+1)^{\text{sima}}$ $(k=0, 1, \ldots, m-c-2)$ *sono*

$$V^{(p)}_{2k+1,(m-1,i)}, \quad V^{(p)}_{2k,(m-1,i)}, \quad \ldots, \quad V^{(p)}_{2k-m+c+3,(m-1,i)};$$

oppure si può sostituire col determinante pure di $(m-c-1)^{\text{simo}}$ *ordine, i cui elementi della colonna* $(k+1)^{\text{sima}}$ $(k=0,1, \ldots, m-c-2)$ *sono*

$$S^{(p)}_{2k+1,(m-1,i)}, \quad S^{(p)}_{2k,(m-1,i)}, \quad \ldots, \quad S^{(p)}_{2k-m+c+3,(m-1,i)};$$

ricordando poi rispetto alle $V^{(p)}_{r,(m-1,i)}$, $S^{(p)}_{r,(m-1,i)}$ *il significato attribuito ad esse nel teorema* VI (*Cfr. l'ultima parte della nota a* pag. 26).

Osservazioni. — Nel teorema precedente rispetto alle $p_0, p_1, \ldots, p_m$ si sono distinte quattro ipotesi. Per la 1ª non si è assegnato esplicitamente il massimo numero delle p_i uguali a zero, perchè quando questo limite è superato le corrispondenti espressioni sull'ordine di $E(m; c)_c$, di $E(m; \mu)_c$ sono uguali a zero e sono uguali a zero solo in questo caso. Per la 3ª e per la 4ª ipotesi se la $p_{i'}$ è uguale (solamente) in valore assoluto ad alcune delle altre p_i, allora è nulla la corrispondente espressione sull'ordine di $E(m; 0)_0$, e se diventa zero almeno una delle somme $p_0 + p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ è nullo anche l'ordine di $E(m; 0)_c$, essendo $c > 1$.

Dal teorema II del § 2 e da quello enunciato in questo §, si vede come si può scrivere il polinomio nelle $p_0, p_1, \ldots, p_m$ equivalente alla $[m; \mu; p_0, p_1, \ldots, p_m]_c$; anzi segue subito che questo polinomio si può porre sotto forma elegante in più modi, e non vi sarà alcun dubbio, quando occorra applicare p. es. la formola (VIII), oppure la (X) ecc. Per maggior chiarezza si aggiungerà che la funzione $[m; \mu; \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m]_c$ usata nel seguente § 7, non significa altro che il polinomio equivalente alla $[m; \mu; p_0, p_1, \ldots, p_m]_c$, quando alle $p_0, p_1, \ldots, p_m$ si sostituiscano rispettivamente le $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m$.

7. — Applicazioni geometriche.

Per esporre in breve altri principali risultati [1] sulle varietà $S(m;\mu)_r$, $E(m;\mu)_r$, considerate nei §§ precedenti, si farà anzitutto l'ipotesi di *aver presente tutto quanto si è detto nel* § 1 *del mio Lavoro* [2]; si ricorderà però esplicitamente che, indicando con $\Delta_{(y;z)}$ l'espressione simbolica (operazione di polare)

$$\sum_{i=0}^{i=d} y_i \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad \text{si è definito} \qquad \nabla_r^{(y;z)} = \frac{1}{r!}\left[\Delta_{(y;z)}\right]^r.$$

Gli stessi ragionamenti atti a dedurre il teor. III di 𝔄 [3], applicati invece al caso del determinante simmetrico generico, permettono di enunciare:

Teorema VIII. — *Gli elementi* a_{ik} $(i=0,1,\dots,m;k=0,1,\dots,m)$ *del determinante* S *siano forme nelle* $z_0, z_1, \dots, z_d$, *coordinate omogenee di punto nello spazio ambiente* $[d]$, *tali che il punto generico* Z^* *di coordinate* $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_d$ *sia* $(\eta_i+\eta_k)^{\text{uplo}}$ (*ove rispetto ai numeri* $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_m$ *sono possibili questi due casi:* 1° $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_m$ *sono interi positivi zero incluso;* 2° $\eta_0-\frac{1}{2}, \eta_1-\frac{1}{2}, \dots, \eta_m-\frac{1}{2}$ *sono interi positivi zero incluso*) *per l'ipersuperficie* $a_{ik}=0$. *Si chiami poi* $\nabla^{(y;\zeta)}S$ *il determinante* $|\nabla^{(y;\zeta)}_{\eta_i+\eta_k} a_{ik}(\zeta)|$ $(i=0,1,\dots,m;$

---

[1] Nei seguenti teoremi di questo § sebbene si lasci sottinteso che d, dimensione dello spazio ambiente, debba essere sufficientemente grande, pure dal modo di enunciarli segue implicitamente quale sia nei varii casi il limite inferiore di d.

[2] *Le varietà rappresentate per mezzo di una matrice generica di forme e le varietà generate da sistemi lineari proiettivi di forme*, " Rend. R. Acc. dei Lincei ", (5), 14, 1905. In appresso col simbolo 𝔄 si designerà questo mio Lavoro.

[3] Il ragionamento analitico usato in 𝔄 per dedurne il teorema II, si estende facilmente al caso del determinante simmetrico generico; non enuncio questo nuovo teorema, perchè in una seguente pubblicazione se ne troverà un altro più generale, e per ora basti ricordare che la $S(m;c)_c$ è il luogo dei punti $(m-c+1)^{\text{pli}}$ dell'ipersuperficie $S(m;m)_m$.

$k = 0, 1, \ldots, m)$, *dove* $\nabla^{(y;\zeta)}_{\eta_i+\eta_k} a_{ik}(\zeta)$ *significa ciò che diventa* $\nabla^{(y;z)}_{\eta_i+\eta_k} a_{ik}$ *quando in luogo delle* $z_0, z_1, \ldots, z_d$ *si pongano le* $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_d$.

La varietà $S(m; \mu)_c$ *ammette in* Z^* *un punto di molteplicità* $(m; \mu; \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m)_c$ (¹), *tale che il luogo delle tangenti in* Z^* *ad essa è la varietà* $S^{(T)}(m; \mu)_c$ *di dimensione* $d - \frac{(m-c+1)(m-c+2)}{2} - c + \mu$ *e di ordine* $(m; \mu; \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m)_c$, *rappresentata analiticamente nelle coordinate correnti* $y_0, y_1, \ldots, y_d$ *coll'annullare tutti i minori di ordine* $c + 1$ *contenuti nel determinante simmetrico generico* $\nabla^{(y;\zeta)}S$, *supponendo inoltre nulla la matrice* $\| \nabla^{(y;\zeta)}_{\eta_i+\eta_k} a_{ik}(\zeta) \|$ $(i = 0, 1, \ldots, \mu;$ $k = 0, 1, \ldots, m)$ *costituita dalle prime* $\mu + 1$ *linee di* $\nabla^{(y;\zeta)}S$ *ed essendo di conseguenza nulla anche la matrice* $\| \nabla^{(y;\zeta)}_{\eta_i+\eta_k} a_{ik}(\zeta) \|$ $(i = 0, 1, \ldots, m;$ $k = 0, 1, \ldots, \mu)$ *costituita dalle prime* $\mu + 1$ *colonne di* $\nabla^{(y;\zeta)}S$. *Dunque in particolare si ha che la* $S^{(T)}(m; c)_c$ *varietà luogo delle tangenti in* Z^* *alla varietà dei punti* $(m - c + 1)^{\text{upli}}$ *dell'ipersuperficie* $S(m; m)_m$ *è la varietà dei punti* $(m - c + 1)^{\text{upli}}$ *dell'ipersuperficie luogo delle tangenti in* Z^* *all'ipersuperficie* $S(m; m)_m$. *Questa relazione di reciprocità si pone meglio in evidenza scrivendo simbolicamente:*

$$\Omega \Psi S(m; m)_m = \Psi \Omega S(m; m)_m,$$

ove si è posto:

$\Omega =$ varietà luogo delle tangenti in Z^* alla,

$\Psi =$ varietà dei punti $(m - c + 1)^{\text{upli}}$ della.

Osservazioni. — Non occorre estendere ulteriormente questa proprietà come si è fatto nel teorema III di 𝔑; si confronti piuttosto il teorema XII del seguente § 8. Non si è poi assegnato esplicitamente nei varii casi il massimo numero delle η_i nulle per le stesse ragioni, relative al massimo numero delle p_i nulle, esposte nelle osservazioni del § 5.

Applicando il precedente teorema alle varietà generate da più sistemi lineari proiettivi d'ipersuperficie si trae:

Teorema IX. — *Si considerino nello spazio fondamentale* $[d]$ *le ipersuperficie* F_{ik} $(i = 0, 1, \ldots, m;$ $k = 0, 1, \ldots, m)$ *dello stesso or-*

(¹) Rispetto al simbolo $(m; \mu; \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m)_c$ cfr. le osservazioni del § 5.

dine p, *tali che* F_{ik} *coincida con* F_{ki} *ed inoltre le* $F_{i0}, F_{i1}, \ldots, F_{im}$ $(i=0, 1, \ldots, m)$ *individuino un sistema lineare (d'ipersuperficie)* A_i *di dimensione* m, *in modo che risultino proiettivi questi sistemi lineari* $A_0, A_1, \ldots, A_m$, *essendo la proiettività individuata col porre omologhe le* $F_{0k}, F_{1k}, \ldots, F_{mk}$ $(k=0, 1, \ldots, m)$. *L'ipersuperficie* F_{ik} *sia poi dotata nel punto generico* Z^* *della molteplicità* $\eta_i+\eta_k$ *(ove rispetto ai numeri* $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m$ *sono possibili questi due casi:* 1° $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m$ *sono interi positivi zero incluso;* 2° $\eta_0-\frac{1}{2}$, $\eta_1-\frac{1}{2}, \ldots, \eta_m-\frac{1}{2}$, *sono interi positivi zero incluso* (1)), *e si chiami* $F_{ik}^{(T)}$ *il cono di ordine* $\eta_i+\eta_k$ *luogo delle tangenti in* Z^* *all'ipersuperficie* F_{ik}. *Quando è* $c=0, 1, \ldots, m$, *le varietà omologhe di dimensione* $d-m+c-1$ *(cioè le varietà sostegni dei sistemi lineari d'ipersuperficie di dimensione* $m-c$ *appartenenti ai sistemi lineari (più ampi)* $A_0, A_1, \ldots, A_m$ *e corrispondenti nella data proiettività) generano una varietà* Φ_c, *di dimensione* $d-\frac{1}{2}(m-c+1)(m-c+2)$ *e di ordine* $(m; c; p, p, \ldots, p)_c$, *varietà luogo dei punti* $(m-c+1)^{\text{upli}}$ *della* Φ_m. *La* Φ_c *ha* in generale *nel punto* Z^* *la molteplicità* $(m; c; \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m)_c$ *e la varietà* $\Phi_c^{(T)}$ *luogo delle tangenti in* Z^* *alla* Φ_c *è la varietà di dimensione* $d-\frac{1}{2}(m-c+1)(m-c+2)$ *e di ordine* $(m; c; \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m)_c$, *luogo dei punti* $(m-c+1)^{\text{upli}}$ *della* $\Phi_m^{(T)}$: *onde la relazione di reciprocità, per le notazioni del* § *precedente, si può scrivere simbolicamente così:*

$$\Omega\Psi\Phi_m = \Psi\Omega\Phi_m .$$

Se poi è $\eta_0=\eta_1=\ldots=\eta_m\neq 0$, *ed inoltre si ammette che le* $F_{i0}^{(T)}, F_{i1}^{(T)}, \ldots, F_{im}^{(T)}$ $(i=0, 1, \ldots, m)$ *individuino un sistema lineare (d'ipersuperficie)* $A_i^{(T)}$ *di dimensione* m, *in modo che risultino proiettivi questi sistemi lineari* $A_0^{(T)}, A_1^{(T)}, \ldots, A_m^{(T)}$, *essendo la proiettività individuata col porre omologhe le* $F_{0k}^{(T)}, F_{1k}^{(T)}, \ldots, F_{mk}^{(T)}$ $(k=0, 1, \ldots, m)$, *allora la* $\Phi_c^{(T)}$ *si può pensare come la varietà generata dalle va-*

---

(1) Rispetto al massimo numero delle $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m$ nulle, in modo conforme alle osservazioni del teorema precedente, si confrontino quelle fatte nel § 5.

rietà omologhe di dimensione d—m+c—1 *appartenenti ai sistemi lineari proiettivi* $A_0^{(T)}, A_1^{(T)}, \ldots, A_m^{(T)}$ (1).

Quando si considera un determinante emisimmetrico generico, non sussiste un teorema del tutto analogo al teorema II di 𝔄, ma per mezzo di semplici trasformazioni sopra i Pfaffiani si ricava:

TEOREMA X. — *Essendo* m *dispari, l'ipersuperficie* $E(m;m-1)_{m-1}$, *dove le* a_{ik} *sono forme nelle* $z_0, z_1, \ldots, z_d$, *coordinate omogenee di punto nello spazio fondamentale* [d], *ammette la* $E(m;m-2r-1)_{m-2r-1}$ $\left(r=0, 1, \ldots, \frac{m-1}{2}\right)$, *come varietà dei punti singolari* (r+1)$^{\text{upli}}$. *Si chiamino ora* $z_0, z_1, \ldots, z_d$ *le coordinate di un punto* Z *della* $E(m;m-2r-1)_{m-2r-1}$, *punto generico e quindi tale che nelle* $y_0, y_1, \ldots, y_d$ *non risulti una funzione identicamente nulla la*

$$\Sigma\left[\nabla^{(y;z)}(0, 1, \ldots, m)_{u_0 u_1 \ldots u_r}\right],$$

dove la sommatoria è estesa a tutti i valori delle $u_0, u_1, \ldots, u_r$ *costituenti una combinazione di* r+1 *numeri della serie* 0, 1, ..., m *e dove con* $[\nabla^{(y;z)}(0, 1, \ldots, m)_{u_0 u_1 \ldots u_r}]$ *si è designato il Pfaffiano, il cui quadrato è quel determinante emisimmetrico ottenuto da* E *ponendo* $\nabla_1^{(y;z)} a_{ik}$ *in luogo di quegli elementi* a_{ik} *la cui* i, *o la cui* k, *è uguale ad una delle* $u_0, u_1, \ldots, u_r$, *avvertendo inoltre che sia negli elementi del tipo* a_{ik}, *sia in quelli del tipo* $\nabla_1^{(y;z)} a_{ik}$, *si debbano sempre pensare le* $z_0, z_1, \ldots, z_d$ *come coordinate di* Z. *Il luogo delle tangenti all'ipersuperficie* $E(m;m-2r-1)_{m-2r-1}$ *nel punto mul-*

(1) Secondo il CREMONA (cfr. l' ultimo capitolo della classica Memoria, *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie,* " Mem. dell'Acc. delle scienze di Bologna ", (2), 7, 1867) i sistemi lineari proiettivi $A_0, A_1, \ldots, A_m$ considerati nel testo costituiscono un *complesso simmetrico.* Non vi è poi alcuna contraddizione col teorema IV del § 4 di 𝔄, perchè secondo che i sistemi lineari proiettivi $A_0, A_1, \ldots, A_m$ sono generici, oppure speciali (p. es. costituenti un complesso simmetrico), mutano la dimensione e l'ordine della Φ_c generata dalle varietà omologhe di data dimensione appartenenti ad essi sistemi lineari proiettivi. Oltre il caso dei sistemi lineari proiettivi costituenti un complesso simmetrico, ve ne sono molti altri casi speciali; finora però non sono stati affatto considerati. (Mi sembra poi utile notare che in parecchi di questi altri casi si ottiene la dimensione e l'ordine della varietà Φ_c corrispondente, applicando i teoremi dei § 2, 3 di 𝔐).

tiplo Z *è il cono di ordine* $r+1$ *rappresentato analiticamente nelle coordinate correnti omogenee di punto* $y_0, y_1, \ldots, y_d$ *coll'annullare la*

$$\Sigma \left[\nabla^{(y;z)}(0, 1, \ldots, m)_{u_0 u_1 \ldots u_r}\right].$$

Per il determinante emisimmetrico generico in luogo del teorema VIII si può enunciare:

TEOREMA XI. — *Gli elementi* a_{ik} $(i=0, 1, \ldots, m;\ k=0, 1, \ldots, m)$ *del determinante* E *siano forme nelle* $z_0, z_1, \ldots, z_d$, *coordinate omogenee di punto nello spazio fondamentale* $[d]$, *tali che il punto generico* Z^* *di coordinate* $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_d$ *sia per l'ipersuperficie* $a_{ik}=0$ $(\eta_i+\eta_k)^{\text{nplo}}$ *(dove pei numeri* $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m$ *sono possibili questi quattro casi:* 1° $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m$ *sono interi positivi zero incluso*; 2° $\eta_0-\frac{1}{2}, \eta_1-\frac{1}{2}, \ldots, \eta_m-\frac{1}{2}$ *sono interi positivi zero incluso;* 3° *uno qualunque dei numeri* η, *che s'indicherà con* $\eta_{i'}$, *è un intero negativo qualunque, e* $\eta_i+\eta_{i'}$ $(i=0, 1, \ldots, i'-1, i'+1, i'+2, \ldots, m)$ *sono numeri interi positivi zero incluso;* 4° *uno qualunque dei numeri* $\eta_0-\frac{1}{2}, \eta_1-\frac{1}{2}, \ldots, \eta_m-\frac{1}{2}$, *che s'indicherà con* $\eta_{i'}-\frac{1}{2}$ *è un intero negativo non nullo, è* $\eta_i+\eta_{i'}$ $(i=0, 1, \ldots, i'-1, i'+1, i'+2, \ldots, m)$ *sono numeri positivi zero incluso)* (¹). *Si chiami poi* $\nabla^{(y;\zeta)}E$ *il determinante* $|\nabla^{(y;\zeta)}_{\eta_i+\eta_k} a_{ik}(\zeta)|$ $(i=0, 1, \ldots, m;\ k=0, 1, \ldots, m)$, *dove* $\nabla^{(y;\zeta)}_{\eta_i+\eta_k} a_{ik}(\zeta)$ *significa quello che diventa* $\nabla^{(y;z)}_{\eta_i+\eta_k} a_{ik}$, *quando in luogo delle* $z_0, z_1, \ldots, z_d$ *si pongano le* $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_d$.

Essendo c *pari e inoltre* $0 \leq c < m$, *la varietà* $E(m;\mu)_c$, *ammette in* Z^* *un punto di molteplicità* $[m;\mu;\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m]_c$ (²), *tale che il luogo delle tangenti in* Z^* *ad essa è la varietà* $E^{(T)}(m;\mu)_c$ *di dimensione* $d-\frac{(m-c)(m-c+1)}{2}-c+\mu$ *e di ordine* $[m;\mu;\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m]_c$ *rappresentata analiticamente nelle coordinate correnti* $y_0, y_1, \ldots, y_d$ *coll'annullare tutti i minori di ordine* $c+1$ *contenuti nel determinante emisimmetrico generico* $\nabla^{(y;\zeta)}E$, *di più supponendo*

(¹) Non si assegnerà in modo esplicito nei varii casi seguenti il massimo numero delle somme $\eta_i+\eta_k$ uguali a zero, per ragioni analoghe a quelle accennate p. es. nelle osservazioni al teorema VII.

(²) Rispetto al simbolo $[m;\mu;\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m]_c$ si confronti l'osservazione relativa al teorema VII.

nulla la matrice $\| \nabla^{(y;\zeta)}_{y_i+y_l} a_{lk}(\zeta) \|$ $(i = 0, 1, ..., \mu; k = 0, 1, ..., m)$ *costituita dalle prime* $\mu + 1$ *linee di* $\nabla^{(y;\zeta)}E$ *ed essendo di conseguenza nulla anche la matrice* $\| \nabla^{(y;\zeta)}_{y_i+y_k} a_{ik}(\zeta) \|$ $(i=0,1,...,m; k=0,1,...,\mu)$ *costituita dalle prime* $\mu+1$ *colonne di* $\nabla^{(y;\zeta)}E$. *Se poi* m *è dispari, in particolare si ha che la* $E^{(T)}(m; c)_c$ *varietà luogo delle tangenti in* Z^* *alla varietà dei punti* $\left[\frac{1}{2}(m - c + 1)\right]^{\text{upli}}$ *dell'ipersuperficie* $E(m; m - 1)_{m-1}$ *è la varietà dei punti* $\left[\frac{1}{2}(m - c + 1)\right]^{\text{upli}}$ *dell'ipersuperficie luogo delle tangenti in* Z^* *all'ipersuperficie* $E(m; m-1)_{m-1}$. *(Si potrebbe poi scrivere questa relazione di reciprocità sotto forma simbolica).*

È utile osservare come risulti pienamente determinato il teorema (analogo al teorema IX) sui sistemi lineari proiettivi d'ipersuperficie, che si ricaverebbe da quello ora enunciato.

8. — **Osservazioni generali.**

I teoremi del § 2 si possono ottenere anche in altro modo per mezzo delle proprietà sull'annullamento di gruppi convenienti di determinanti minori contenuti in un determinante simmetrico generico o in un determinante emisimmetrico generico. Queste proprietà permettono anche di studiare ulteriormente le varietà $S(m; \mu)_c$, $E(m; \mu)_c$; p. es. si può enunciare:

Teorema XII. — *L'ipersuperficie* $S(\mu - 1; \mu - 1)_{\mu-1}$ *di equazione* $|a_{ik}| = 0$ $(i = 0, 1, ..., \mu - 1;\ k = 0, 1, ..., \mu - 1)$, *dove le forme* a_{ik} *sono elementi del determinante simmetrico generico* S, *tocca la varietà* $S(m; \mu)_c$ *lungo la varietà* $S(m, \mu - 1)_c$, cioè se $\mu < c$ *lungo solamente una parte della loro intersezione, se* $\mu = c$, *lungo tutta la varietà loro intersezione.*

D'altra parte se si suppongono μ, c *pari, allora l'ipersuperficie* $E(\mu - 1; \mu - 1)_{\mu-1}$ *di equazione* $\sqrt{|a_{ik}|} = 0$ $(i = 0, 1, ..., \mu - 1;\ k = 0, 1, ..., \mu - 1)$, *dove qui le forme* a_{ik} *sono elementi del determinante emisimmetrico generico* E, *non tocca la varietà* $E(m; \mu)_c$

lungo la varietà $E(m; \mu-1)_c$, *la quale se* $\mu < c$ *è solamente una parte della loro intersezione, se* $\mu = c$, *è tutta la varietà loro intersezione* (1).

---

(1) Non vi è alcuna difficoltà ad enunciare le proprietà analoghe, quando invece della $S(\mu-1; \mu-1)_{\mu-1}$ si considera una qualunque delle μ (dove è $\mu < c$) ipersuperficie di equazione $|a_{ik}|=0$ $(i=0,1,\ldots,r-1, r+1, r+2,\ldots,\mu;$ $k=0,1,\ldots,r-1, r+1, r+2,\ldots,\mu)$, essendo $r=0,1,\ldots,\mu-1$; oppure quando invece della $S(c-1; c-1)_{c-1}$ si considera una qualunque delle altre $\binom{m+1}{c}-1$ ipersuperficie di equazione $|a_{ik}|=0$, $(i=u_0, u_1,\ldots,u_c;$ $k=u_1, u_2,\ldots,u_c)$, indicando $u_1, u_2,\ldots,u_c$ una qualunque combinazione di c numeri della serie $0,1,\ldots,m$.

La parte di questo teorema XII, che si riferisce alla varietà $S(m; c)_c$, è l'estensione di una nota proprietà del Cremona sui complessi simmetrici (cfr. la 2ª delle note relative al teorema IX).

Il teorema XII permette poi di scrivere in modo più elegante le formole (VII), (X), quando $\mu = c-1$, ossia la (VII) diventa allora:

$$2^{m-c}.(p_0+p_1+\ldots+p_{c-1}).\{0, 1, \ldots, c-1, c+1, c+3, \ldots, 2m-c+1\}_m^{(p)},$$

e la (X) diventa:

$$(p_0+p_1+\ldots+p_{c-1}).\{0, 1, \ldots, c, c+2, c+4, \ldots, 2m-c\}_m^{(p)}.$$

Osservo poi che la (X) vale anche se $c=m$, purchè in essa si ponga l'*unità* in luogo di $\{0.1, \ldots, c, c+2, c+4, \ldots, 2m-c-2\}_{(m-1,i)}^{(p)}$.

L'Accademico Segretario
Lorenzo Camerano.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 26 Novembre 1905.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Boselli, Vice-Presidente, Ferrero, Direttore della Classe, Rossi, Carle, Brusa, Allievo, Carutti, Pizzi, Chironi, Savio, Ruffini e Renier Segretario.

Viene approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente, 2 luglio 1905.

Il Presidente, dopo aver salutato i colleghi ed augurato loro felici e proficui i lavori del nuovo anno accademico, annuncia il decesso del Socio prof. Domenico Pezzi, seguito in Torino il 24 ottobre 1905. Egli legge le seguenti parole da lui pronunciate al camposanto a ricordo del Socio defunto:

La morte del Professore Domenico Pezzi è grave lutto per la scienza e per la scuola. E specialmente è dolorosa per l'Accademia delle Scienze di Torino, che perde in lui un Socio dei più dotti, dei più utili, dei più stimati. E lo perde in un'età, che le lasciava invece presumere di potere per molti anni ancora ornarsi del preclaro suo nome e giovarsi dell'opera sua sapiente e coscienziosa, opera che le sarebbe stata tanto più utile oggidì, dopo la fondazione del gran premio Vallauri destinato agli studiosi della letteratura latina.

I cultori della filologia e della glottologia rimpiangono l'eruditissimo maestro, l'autore di memorie e libri, profondi per

dottrina, eleganti per dettato. I colleghi dell'Accademia e dell'Università vedono con vivo dolore sparire dalle loro file l'uomo dalla coscienza netta, dal giudizio severo, dalla parola tagliente, ma dai modi sempre urbani e signorili. Accanto all'austero scienziato essi ricordano lo scrittore forbito, l'innamorato della musica classica, il pregiatore d'ogni bella opera d'arte.

Da alcuni mesi il suo travagliato aspetto, l'incedere mal sicuro, rivelavano un nefasto perturbamento della sua salute, e durante la scorsa estate i sintomi si aggravarono in guisa da far temere una catastrofe; ma poscia si riebbe alquanto, e, non è ancora una settimana, io potei passare presso al suo letto un'ora di fidato colloquio, osservando con grande soddisfazione che, se il respiro era un po' affannoso, la parola fluiva sempre facile e la mente serbavasi lucidissima; ed io lo lasciai col proposito e colla fiducia di rivederlo presto. Invece oggi mi tocca di salutarne l'esanime spoglia, qui nella città dei morti, dov'egli ha raggiunto Bernardino Peyron, di cui ci aveva tessuto or non è molto una così bella commemorazione.

E il mio riverente e mesto saluto, interprete dell'animo di tutti i Soci dell'Accademia, suona vivissimo rimpianto per l'immatura dipartita dell'insigne dotto, dell'integerrimo cittadino, dell'onorato collega, rapito al nostro affetto ed alla nostra ammirazione.

Il Presidente, inoltre, dà notizia delle condoglianze pervenute da Corpi morali, Società scientifiche, Autorità e private persone, e prega il Socio Pizzi di voler scientificamente commemorare il defunto. Il Socio Pizzi accetta.

A questo proposito prende la parola il Direttore della Classe, Socio Ferrero, per rammentare che non fu mai commemorato il Socio Gaspare Gorresio, il quale fu già segretario perpetuo della Classe. Le persone incaricate di quella commemorazione, per diversi motivi, non giunsero a farla, ed è spiacevole che del benemerito personaggio non resti ricordo nelle pubblicazioni accademiche. Il Presidente trova assai giusta questa osservazione ed incarica della commemorazione del Gorresio il Socio Pizzi, che accetta.

Con affettuose parole il Presidente annuncia la morte del Socio nazionale non residente prof. G. B. GANDINO, avvenuta in Bologna il 15 novembre 1905, e rammenta pure quella del Socio corrispondente prof. Giulio OPPERT dell'Istituto di Francia.

Si passa al carteggio.

L'Accademia delle Scienze di Stoccolma, con lettera circolare, invita a fare proposte pel prossimo conferimento del premio Nobel per la letteratura. — Su proposta del Vice-Presidente BOSELLI, la Classe fa il nome di Giosue CARDUCCI.

L'Accademia è invitata a prender parte al Congresso internazionale di Antropologia criminale, che si terrà in Torino il 28 aprile 1906. — Il Presidente designa a rappresentarla il Socio BRUSA, che accetta.

La Società Messicana di Geografia e Statistica esprime, con lettera circolare, il suo desiderio di commemorare solennemente il quarto centenario della morte di Cristoforo Colombo, e chiede l'adesione delle Società scientifiche. — La Classe aderisce.

Poichè nel settembre scorso la R. Accademia Lucchese di scienze, lettere ed arti invitò l'Accademia nostra a prendere parte alle onoranze a Lazzaro PAPI, il Presidente notifica di avere incaricato della rappresentanza il march. Giacomo SARDINI, Vice-Presidente dell'Accademia Lucchese.

Sono presentate le seguenti opere pervenute all'ufficio durante le ferie accademiche:

1°, da S. E. il Ministro della Marina: *Monografia dei porti dell'antichità nella penisola italiana*, Roma, 1905;

2°, dal R. Istituto Veneto: Giuseppe GEROLA, *Monumenti veneti nell'isola di Creta*, vol. I, Venezia, 1905;

3°, dal Comitato torinese per la commemorazione bicentenaria dell'assedio: Pietro FEA, *Tre anni di guerra e l'assedio di Torino del 1706*, Roma, 1905;

4°, dal Socio corrispondente prof. Filippo PORENA, in qualità di Presidente del quinto congresso geografico italiano, i due volumi degli *Atti del V congresso geografico italiano tenuto in Napoli dal 6 all'11 aprile 1904*, Napoli, 1905, e dal medesimo due opuscoli: *Eliseo Reclus*, Napoli, 1905 e *Sul concetto di razza umana oggi possibile in geografia*, Napoli, 1905;

5°, dal Socio corrispondente Dr. Giuseppe BIÀDEGO tre opuscoli: 1°, *Cattedra dantesca a Verona nel Quattrocento*, Verona, 1905; 2°, *Un Cremonese maestro a Verona*, Verona, 1905; 3°, *Ingresso in Milano di Cristierna di Danimarca sposa del duca Francesco Maria Sforza*, Verona, 1905;

6°, dal Socio corrispondente prof. Giuseppe BOFFITO: *L'eresia degli antipodi*, Firenze, 1905;

7°, dal Socio corrispondente Raja Sir Sourindro Mohun Tagore: *Dhátumàlá or a Garland of Metals*, Calcutta, 1903, testo indiano e versione inglese;

8°, dall'ing. Vittorio SCLOPIS, *Della vita e delle opere del conte Federigo Sclopis di Salerano, con cenni storici sulla sua famiglia*, Torino, 1905.

A proposito di quest'ultimo dono, il Presidente comunica d'aver rappresentato l'Accademia nella cerimonia d'inaugurazione del monumento a Federigo SCLOPIS, tenuta il 15 agosto 1905.

Il Vice-Presidente BOSELLI fa omaggio d'un opuscolo del Dr. Giuseppe FROLA, *Gli statuti canavesani, studio di diritto piemontese antico*, Pinerolo, 1905. Di questo studio, che l'autore volle largamente distribuito fra i Soci, il Vice-Presidente discorre con lode, rilevando il buon metodo con che è condotto ed i vantaggi che se ne possono trarre. Il Socio RUFFINI si compiace dell'onore fatto ad un allievo della scuola giuridica torinese, ed aggiunge parole di elogio, mettendo specialmente in chiaro il valore di quell'ordine di investigazioni.

Il Presidente dà conto del ragguardevole lascito di libri che per suggerimento del Vice-Presidente BOSELLI, l'Accademia

acquistò di recente dal defunto Colonnello cav. Ottavio Fornaca. Sono varie centinaia di volumi ottimamente conservati, che trattano specialmente di materia filosofica. Il Presidente manda un saluto di riconoscenza alla memoria del Colonnello donatore e ringrazia il Vice-Presidente per la sua mediazione gentile. Il Segretario fa osservare che il fratello del Colonnello Fornaca, erede di lui, volle che fossero donate all'Accademia anche le quattro eleganti scansie a vetri, nelle quali quei libri erano racchiusi. Di questo dono l'erede sarà particolarmente ringraziato. Il Vice-Presidente Boselli aggiunge le seguenti parole di ricordo del defunto:

Nato nel 1819 in Chambéry dal Colonnello Stefano e da Adelaide Bonino, Ottavio Fornaca raccolse valorosamente e impersonò in sè con alto animo le tradizioni e i sentimenti militari di una famiglia tutta di soldati (1). A 17 anni prese la carriera delle armi come volontario nella brigata Casale. Ebbe presto grado d'ufficiale e, nel 1848, “ per il contegno e valore dimostrato nella fazione campale del 6 maggio, contegno e valore rilevato con sovrana compiacenza da S. M. il Re Carlo Alberto „ fu nominato Luogotenente. Capitano nel marzo del 1849 fu lodato con menzione onorevole “ per essersi distinto il 23 di quel mese alla battaglia di Novara „. Maggiore nel 1859, meritò la medaglia d'argento al valor militare “ per avere il 24 giugno tanto nella ricognizione del mattino quanto nel combattimento dell'intiera giornata incoraggiato costantemente i soldati alla battaglia di S. Martino, e mercè il suo esempio potè il 2° battaglione occupare le posizioni del nemico „. Il prode uomo, vissuti oltre sei lustri di gagliarda vita militare, volle, nel 1867, mentre da circa quattro anni era Colonnello, trovar riposo nell'intimità degli affetti e nella delizia degli studi. Diede tutto il suo tempo alle assidue letture e al conversare frequente con dotti amici. Tenne in ispecie consuetudine lunga e cordiale

---

(1) Due fratelli dell'Ottavio Fornaca morirono in Lombardia nelle guerre dell'Indipendenza. La famiglia Fornaca annovera diciotto medaglie al valor militare.

col nostro Perrero e con Giuseppe Saredo. Rivolse il suo pensiero alle modernità della critica scientifica, religiosa, sociale: e raccolse buona copia di libri fra i più chiari e collezioni di scienza e di coltura fra le più costose e riputate, informando le sue scelte al concetto delle indagini naturali e delle opinioni essenzialmente positive. Non trascurava la cultura storica, nè avea l'animo chiuso agli amori delle lettere squisite. Con franchezza, non intollerante, ma immutabile. testimoniò le proprie idee in ogni ora della sua vita e al cospetto di ogni evento.

Al pregio delle maniere aperte e cortesi, ad una certa bonarietà fina, e alla mente sagace, congiungeva amabili qualità di sentimento. E Lorenzo Canavero, che fu per lunghi anni famigliare suo, potè dire veracemente rivolgendogli l'estremo saluto: " che fu sempre buono verso tutti, e che a tutti quelli " che lo conobbero intimamente sarà di modello per la bellezza " e soavità del suo cuore d'oro ".

Desiderò che la biblioteca composta con liberale dispendio e con passione quotidiana non si disperdesse. E a tenerla per tutti i tempi riunita, vigilata e difesa, aderì pronto all'amichevole consiglio, quando io gli proposi di affidarla in proprietà a quest'Accademia.

Il fratello, Maggiore Baldassarre, valoroso egli pure nelle imprese della Crimea e della liberazione nazionale, ampliò il prezioso legato del fratello, accrescendo la ricchezza dei volumi anche con gran parte di quelli che la disposizione testamentaria del fratello non comprendeva, e dispensando l'Accademia dalle spese di collocamento, perchè donò, affinchè venissero qui nostre al pari dei libri, le vetrine entro cui sono essi posti decorosamente.

L'Accademia serberà, insieme colla pregevole Biblioteca di Ottavio Fornaca, sempre viva la memoria dell'esimio e studioso donatore.

Per gli *Atti* sono presentati i seguenti scritti:

1°, dal Socio Allievo una sua nota, *L'uomo e la natura*;

2°, dal Segretario, *Sei nuove notarelle dantesche* del prof. Pietro Gambèra.

Il Socio Renier presenta per le *Memorie* una estesa monografia del prof. Giulio Bertoni e del dott. Cesare Foligno, *La " Guerra d'Attila ", poema franco italiano di Nicola da Casola*. Il Presidente designa a riferirne in una prossima adunanza i Soci Cipolla e Renier.

Togliendo l'adunanza, il Presidente rivolge una parola di felicitazione e d'augurio al Socio Carutti, che compie ora 84 anni. La Classe si associa plaudendo. Il Socio Carutti ringrazia.

LETTURE

L'uomo e la natura.

Nota del Socio GIUSEPPE ALLIEVO.

L'uomo e la natura: in questi due termini si compendia e si sostanzia tutto quanto l'universo creato, tutto ciò che scorre nel tempo e si diffonde nello spazio, “ quanto per mente o per occhio si gira „ (1). Il mondo umano e il mondo della natura costituiscono l'immensa dualità universale, che ha il suo supremo centro di unità nell'essere divino. Il primo di questi due mondi costituisce l'oggetto di quello stupendo ordine di scienze, che si appellano antropologiche, o con un vocabolo comune Antropologia, perchè si travagliano intorno lo studio dell'uomo: dal secondo origina l'altro svariatissimo gruppo di scienze, che si denominano appunto naturali. Da secoli e secoli la mente umana va speculando intorno questi due mondi interminabili e si affatica nello scrutare e risolvere i problemi, più o meno ardui, che li riguardano; ma l'antropologia e le scienze naturali non sorsero insieme e non comparvero nel medesimo tempo nell'immensa cerchia dello scibile umano. L'uomo prima di leggere nel libro interiore dell'anima propria, si pose a leggere nel libro esteriore della natura; ha contemplato l'universo visibile, che lo circonda, prima di studiare se stesso. Infatti la storia della filosofia antica ci apprende, che i primi filosofi greci rivolsero le loro speculazioni intorno il mondo fisico ricercando quel supremo principio, da cui originano tutti i fenomeni ed i cangiamenti della natura esteriore. Nè ciò deve recar meraviglia. Poichè in quella guisa che nello sviluppo psicologico dell'infanzia il fanciullo da prima sentesi attratto dallo spettacolo delle cose esterne e solo più tardi riflette a se medesimo, non

(1) DANTE, canto X del *Paradiso*.

altrimenti nello sviluppo storico dell'umanità la ragione medita sul mondo fisico esterno, e quando specialissimi moventi psicologici la abbiano indotta a raccogliersi in se medesima (1), allora soltanto si ripiega e riflette intorno la natura umana. Nella filosofia greca questo trapasso venne compiuto da Socrate, il quale nella sentenza apollinea *Conosci te stesso*, ripose il sommo della sapienza.

Attinenze tra l'uomo e la natura.

Entrando più addentro nell'argomento, ci si presentano anzi tutto al pensiero le intime attinenze, che intercedono fra l'uomo e la natura, e quindi tra l'antropologia e le scienze naturali. L'uomo è siffattamente costituito, che non vi ha parte del suo essere, la quale non viva congiunta coll'universo corporeo esteriore. Sentire, pensare, volere, sono i tre supremi attributi costitutivi dell'umano soggetto; e tutti e tre si svolgono in intima ed operosa corrispondenza colla natura, fuor della quale rimarrebbero atrofizzati.

L'uomo sente la natura. In virtù del suo organismo egli prova una profonda simpatia per la natura, sente la vita, che circola diffusa per entro di essa, ne accoglie le impressioni e le conserva sotto forma d'immagini. L'aria, che egli respira, la luce colle svariate tinte de' suoi colori, il suono colle differenti sue gradazioni armoniche, le forme e le figure de' corpi, le incantevoli scene della natura, tutta questa folla di impressioni entrano per la via de' sensi nel corso della nostra esistenza e la atteggiano in mille guise, lasciandovi la loro impronta. Questo sentimento della natura fa quindi parte integrale del nostro essere; epperciò noi lo troviamo nella vita di tutti i popoli sotto forme diverse secondo la diversa positura geografica e la diversa plaga del cielo. Altro era il sentimento della natura presso gli antichi orientali, ed altro presso i greci; e nei tempi moderni essa è diversamente sentita da noi italiani, dai francesi, dagli inglesi, dagli americani e via via.

L'uomo non solo si risente delle impressioni della natura mediante il suo corporeo organismo, ma la contempla e la in-

(1) Vedi i miei *Studii psicofisiologici*, pag. 1.

tende colla virtù del suo pensiero. Egli non si arresta, come il bruto, alle percezioni sensibili del mondo corporeo, ma se ne rende ragione, le giudica, le raffronta, le classifica, ed astraendo e generalizzando risale dai fatti particolari alle forze ed alle leggi universali, dai corpi individuali alle specie ed ai generi, componendo così la conoscenza della natura e rifacendola entro la sua mente.

Infine l'uomo non solo sente la natura mercè del suo organismo e la comprende colla sua intelligenza, ma la lavora e la trasforma colla sua libera attività. Egli non conserva dentro di sè come inutil deposito le impressioni ricevute e le cognizioni acquistate, ma le traduce in atto. Tutte le invenzioni, le scoperte, i ritrovati industriali, le arti belle e meccaniche fanno palese questo potere umano, trasformatore della natura.

A conferma di queste intime corrispondenze tra l'uomo e la natura viene il fatto, che riguarda la formazione e l'uso del linguaggio. " Come il fanciullo, così l'umanità nella sua infanzia fu dapprima colpita dallo spettacolo della natura circostante; epperò gli oggetti materiali esterni furono i primi ad essere percepiti e conosciuti, e per conseguente i primi vocaboli formati dall'uomo esprimevano l'esistenza delle sostanze corporee, le loro qualità ed azioni, i loro fenomeni. Nel suo progressivo sviluppo lo spirito umano raccogliendosi in sè, passò a conoscere se medesimo, i suoi attributi, le sue potenze ed operazioni. Anche queste idee, relative non più al mondo materiale della natura, ma al mondo ideale dello spirito, era necessario significare con segni speciali, esprimere con vocaboli corrispondenti; ma a tale scopo l'uomo non creò nuovi vocaboli, bensì adoperò pressochè tutti que' medesimi, da lui già prima inventati per significare le idee del mondo materiale esterno, in ciò appunto guidato dall'analogia intima e profonda, che corre tra i due mondi. Così dappoichè vediamo che i corpi si muovono o rimangono in quiete, parliamo del movimento e del riposo dell'anima: dal mare in tempesta passiamo alla tempesta delle passioni, che sconvolgono l'anima: da un fiore, che si sviluppa dal suo germe e cresce a maturità, passiamo allo spirito del fanciullo, che sorretto dalla virtù educatrice si svolge e progredisce a perfezione. Il vocabolo *spirito* nel suo senso primitivo significava alito, ed anche un fluido sottilissimo aereo, impercettibile, e fu

poi adoperato a significare l'anima umana. I vocaboli stessi, che usiamo per esprimere i diversi stati e le diverse operazioni mentali affatto proprie dell'anima umana, quali sono immaginare, attendere, riflettere, discorrere, astrarre, pensare, apprendere, comprendere, intuire, vedere e via via, presi nel loro senso proprio ed originario, erano già adoperati per significare qualità ed azioni sensibili materiali „ (1). Così il vocabolo *sanità*, che è tutto proprio a denotare lo stato normale dell'organismo corporeo, viene applicato alla mente, che si trova in uno stato analogo: di qui il notissimo detto: *Mens sana in corpore sano.*

Fin qui abbiamo messo in chiaro l'intima colleganza, che intreccia insieme l'uomo e la natura, e quindi l'antropologia e le scienze naturali; ma sarebbe gravissimo errore il credere, che siffatta unione si converta in una identità, negando così ogni sostanziale distinzione fra l'uno e l'altra, e confondendoli in una comune essenza. La distinzione esiste e non distrugge l'unione. Poichè nel mondo esteriore le sostanze sono corporee, e quindi i fenomeni e le forze sono fisici; nel mondo interiore la sostanza è l'anima, i fenomeni sono psichici, le forze sono facoltà o potenze. Ma il punto più spiccato, che distingue questi due mondi, malgrado la loro cospicua armonia, sta in ciò, che l'anima ha la coscienza de' suoi fenomeni, il dominio delle sue potenze; e *questa coscienza di sè, questo dominio di sè manca alla natura.* Il sasso, che precipita dall'alto, non è consapevole della sua caduta, e cade non per libertà di volere, ma per forza irresistibile di gravitazione. La ghianda, che si schiude e si trasforma in spiga, non ha coscienza del suo sviluppo e non può arrestarlo, nè imprimergli un altro indirizzo, un'altra forma. L'anima invece è conscia di sè, avverte i cangiamenti, a cui soggiace, domina le sue potenze ed imprime a' suoi pensieri, a' suoi sentimenti, alle sue azioni un indirizzo da essa preconosciuto e prestabilito, anche contrario al suo naturale perfezionamento; cammina alla luce di un ideale, che la illumina, ed osserva e contempla la natura esteriore, mentre la natura ignora se stessa e la finalità del suo essere.

Confondere l'uomo colla natura, e quindi l'antropologia colle scienze naturali, è pretto e puro naturalismo materialistico. Ed

---

(1) Op. cit., pag. 11, 12.

al materialista io dimando: come mai l'uomo, che è lo studioso osservatore della natura, può essere tutt'uno colla natura osservata? Forsechè il pensiero, che colla sua virtù comprensiva domina ed abbraccia tutta quanta la natura, non le sovrasta? E poi se la mente umana non fosse un principio immateriale, governato da leggi logiche sue proprie, che la guidano alle verità e la salvano dall'errore, ma si confondesse colle forze fisiche o fisiologiche della natura, allora sarebbe dominata dalle leggi ferree ed inesorabili della stessa natura, e quindi cesserebbe ogni distinzione tra verità ed errore, perchè ogni atto della mente sarebbe sempre conforme alle sue leggi, nè potrebbe essere altro da quello che è. Così tornerebbe impossibile la scienza, la quale essenzialmente inchiude la verità ed esclude l'errore.

Noterò qui di passaggio, che mentre il naturalismo antropologico materializza l'uomo confondendolo colla natura, le religioni naturalistiche divinizzano la natura confondendola con Dio; sistemi diametralmente opposti, che trascendono entrambi agli estremi. Veramente la contemplazione della natura suscita in noi un arcano entusiasmo, e colle sue bellezze sempre vive, colle sue forze indestruttibili e sempre operose, co' suoi fenomeni sempre nuovi e sorprendenti ci fa sentire in lei alcunchè di immenso, di infinito, di eterno, di divino; ma essa non è che l'ombra di Dio; Dio la informa, la avviva, ma non è lei.

Che se, come abbiamo chiarito fin qui, l'uomo e la natura convivono insieme e stanno intimamente congiunti senza punto confondersi, con qual mezzo l'uno corrisponde coll'altra, qual è l'anello intermedio, che li congiunge? L'uomo accoppia nell'unità del suo essere una dualità di sostanze, anima e corpo; ma l'anima umana non può trovarsi in contatto immediato e diretto col mondo corporeo circostante: è il nostro organismo corporeo, che vive in seno della natura come in suo proprio ambiente, e comunica all'anima la vita, che gli vien dal di fuori; è desso l'anello di congiunzione tra l'uomo e la natura. Il corpo umano sovrasta per dignità ed eccellenza a tutti i corpi particolari della natura, perchè esso non è ciecamente diretto da mere forze vitali, istintive od animali, ma è informato da un principio ragionevole, da una mente, che gli conferisce il sacro carattere di persona. Nel nostro organismo corporeo la natura ha compendiato

come in un tipo vivente di perfezione tutte le bellezze, che risplendono qua e là sparse in tutte le sue svariatissime produzioni organiche. L'impronta della persona umana ha qualche cosa di sacro, di divino: ed ecco il perchè la morte ci inspira orrore e ci pare che compia un atto disumano, un attentato alla dignità propria della nostra specie, ogni qual volta si fa a scomporre e distruggere una figura umana così divinamente lavorata dalla natura.

A compiere questo breve studio intorno le attinenze tra l'uomo e la natura occorre considerarle in rapporto colle diverse età della vita umana. Nella prima fanciullezza l'uomo saluta la natura siccome la eletta compagna della sua vita. I sensi e la fantasia, il moto e l'istinto sono i primi vincoli, che lo collegano con essa. Il fanciullo si culla in seno della natura, come di una seconda madre, è sitibondo delle sue impressioni, è tutt'occhi nell'osservarne i sempre nuovi fenomeni, non riflette, ma sente, ed attribuisce alla natura sentimenti, che sono suoi proprii, è pago di accogliere in sè quelle fresche ridenti immagini delle cose, che forniscono i materiali al prossimo lavorìo della sua riflessione. Succede l'età giovanile, la quale non si sta contenta al puro sentimento della natura, ma la interroga, la osserva, la giudica, la assoggetta al suo potere riflessivo. Nella virilità si può dire che l'uomo tratta la natura come terreno di conquista: egli la domina col suo pensiero, scrutandone gli intimi penetrali, contemplando le forme infinite delle sue manifestazioni, ricercando le forze, che la signoreggiano e le leggi, che la governano; e non solo la domina col suo pensiero, ma la trasforma colla libera attività del suo volere, atteggiandola secondo gli ideali dell'arte e convertendola in potente strumento di civiltà, la quale sta tutta nel trionfo dello spirito sulla materia. Viene ultima la tarda, la grave vecchiaia: è il tempo del finale distacco, dell'estrema separazione. I sensi esterni vanno affievolendosi, e quindi i vincoli, che ci legano col mondo circostante, si rallentano: ogni giorno, che passa, cancella uno dei nostri punti di contatto coll'universo. La natura brilla sempre fuori di noi nella sua eterna giovinezza, ma per il vegliardo non brilla più. Egli sente fuggirgli la vita di un mondo, che gli ricorda le gioie ed i dolori del suo passato. Infelice lui, se non ha altri conforti ed altre speranze, se non quelle che gli

vengono dalla natura, la quale va ecclissandosi davanti a' suoi occhi! Egli guarda attorno, ed il suo sguardo si perde nella lontana visione di nuovi cieli, e nuove terre, che lo attendono.

Abbiamo fin qui ricercate le attinenze più prossime ed immediate, che stringono l'uomo e la natura; ma ad abbracciare con uno sguardo comprensivo il tema in tutta la sua ampiezza, farebbe mestieri determinare il rapporto di origine, di natura e di fine, che corre tra l'uno e l'altra. Ognuno comprende la gravità e l'ampiezza di questo problema, e la difficoltà somma, che lo avvolge, ed io non intendo discuterlo qui di proposito, standomi pago di quei pochi accenni, che mi sono consigliati dalla natura medesima dell'argomento, che ho preso a trattare.

Il problema, come ognuno vede, è triplice; ed occorre anzi tutto determinare l'ordine logico, che collega i tre punti speciali, che lo compongono, a fine di rilevare da quale di essi dobbiamo pigliare le mosse. Certo è, che le prime origini degli esseri sono velate da certa qual ombra di mistero, sicchè per quanto si rimonti col pensiero la serie indefinita de' secoli trascorsi, mai non si riesce a dissipare la caligine, che ci offusca lo sguardo; e non è men certo, che il punto finale e terminativo, in cui andrà a quietare lo sviluppo continuo dell'esistenza, si stende così lontano lontano attraverso i tempi, che ci torna impossibile precisarlo per se stesso, ma occorre argomentarlo da altri dati positivi e sicuri. Per lo contrario la natura costitutiva di un essere ci sta presente allo sguardo ferma e sicura, e può essere immediatamente osservata, contemplata, esaminata e determinata in tutta la moltiplicità de' suoi elementi e nell'unità del suo complessivo insieme. Quindi direttamente consegue, che il rapporto di natura tra l'uomo ed il mondo fisico esteriore va disaminato per primo, e che il suo esame contiene in sè la ragione spiegativa degli altri due rapporti.

L'uomo e la natura hanno essi una comune ed identica essenza costitutiva, oppure passa fra l'uno e l'altra un rapporto di diversità essenziale? È comune sentenza, che l'intima essenza costitutiva di un essere si rivela e si argomenta dalle sue manifestazioni esteriori: *operari sequitur esse*. Ora l'osservazione ci apprende, che la specie umana manifesta la sua intima essenza nella scienza, nell'arte, nella moralità, nella religiosità. Ciò posto, queste quattro manifestazioni non possono rampollare dalla sen-

sibilità animale quale si riscontra nella natura fisica esteriore, perchè essa essendo legata alle impressioni sensibili materiali, che la circoscrivono, non può innalzarsi alle verità universali ed assolute, proprie della scienza, non creare l'ideale dell'arte, non concepire il dovere, fondamento della moralità e liberamente volerlo, non riconoscere un Essere infinito, fondamento della religiosità. Torna quindi necessario ammettere nell'uomo un principio superiore ed essenzialmente distinto dalla natura animale, da cui rampollino esse manifestazioni umane; val quanto dire che l'uomo è un essere specificamente diverso da tutta la natura fisica esteriore (1).

Se tale è il rapporto di natura tra il mondo umano e quello degli esseri irragionevoli, possiamo noi ammettere che la specie umana abbia avuto origine dalla materia universale diffusa nello spazio per via di una lenta e progressiva trasformazione degli organismi viventi? Lo asseriscono i seguaci dell'evoluzionismo materialistico, ma non lo hanno mai dimostrato seriamente nè punto, nè poco; nè dimostrare lo possono, perchè *nemo dat, quod non habet*, e la materia bruta primitiva non racchiudeva certamente in sè il germe di quella sublime razionalità, che è il carattere costitutivo della specie umana. Carlo Vogt nelle sue *Lezioni sull'uomo* si sbraccia a dimostrare, che le diverse razze umane originarono dalle differenti famiglie di scimmie, ma ristrinse tutto il suo esame alla morfologia del cranio umano raffrontato con quello scimiesco, e non disse verbo delle facoltà mentali proprie dell'umanità: chè veramente avrebbe avuto un disperato partito per le mani, se avesse preteso che la mentalità dell'uomo è sbocciata dalla brutalità della scimmia. Ma con ciò il suo lavoro ha fallito allo scopo, essendochè il più volgare buon senso riconosce nell'unità dell'essere umano una dualità di mente e di corpo (*Mens sana in corpore sano*); e l'organismo corporeo non è esso solo tutto l'uomo, come il cranio non è nemmanco il corpo umano tutto quanto (2).

(1) È questa la conclusione sintetica, che ho svolto nel proemio della mia opera *L'uomo ed il Cosmo*, là dove ho fatto uno studio comparativo tra l'uomo ed il bruto.

(2) È singolare il processo seguìto dall'autore nel suo lavoro, il quale è niente più che una cranioscopia comparativa dell'uomo e della scimmia. A lui non piacque contemplare l'uomo nella sua astratta e generale es-

Postochè l'uomo non origina dalla natura, perchè possiede un'essenza specifica superiore, già per ciò stesso ha una ragion d'essere ed una finalità suprema tutta sua propria, a cui aspira con coscienza di sè e libertà di volere, mentre la natura ha un fine subordinato, a cui è sospinta da una ragione estrinseca superiore.

L'argomento, che ho preso a svolgere, formò oggetto speciale di studio per parecchi pensatori, i quali posero in fronte ai loro lavori il titolo *L'uomo e la natura*. Ma generalmente parlando, l'argomento fu discorso sotto un aspetto fallace ed esclusivo, perchè essi raffrontarono colla natura non già l'uomo tutto quanto e qual è, in tutta l'integrità del suo essere, ma o lasciarono da banda la parte mentale e razionale della natura umana, o segnarono soltanto alcune attinenze dell'uomo colla natura. Così, ad esempio, il Topinard, che fa dell'antropologia una storia naturale dell'uomo, nella sua opera *L'homme dans la nature*, contempla nell'uomo la sola animalità, e sotto questo esclusivo riguardo lo raffronta cogli altri esseri animati della natura. Lo stesso procedimento tenne press'a poco l'inglese Huxley, il quale nel suo libro *Prove di fatto intorno il posto*,

---

senza, ma si pose tutto ad osservare e descrivere nelle diverse loro forme cerebrali gli umani individui, quali vissero e vivono sparsi qua e là nelle diverse regioni della terra, congregati in famiglie e morfologicamente trasformati attraverso i secoli. Ma di tal modo il suo lavoro ha fallito l'intento. Poichè chi lo assicura che nel percorrere il campo sterminato delle sue ricerche, non sia sfuggita alle sue indagini qualche famiglia umana rintanata in oscura caverna, o segregata in qualche isolato lembo del globo? Basterebbe questo dubbio per mettere in forse la validità e saldezza delle sue conclusioni. E posto pure che le sue indagini fossero coronate da felice successo, questo solo si potrebbe per logica induzione conchiudere, che i cranii delle diverse famiglie umane si svolsero paralleli a quelli delle scimmie, e non già che il tipo umano si svolse dal tipo scimmiesco.

Il Vogt non volle saperne dell'uomo in astratto, eliminandolo come se fosse un *caput mortuum* immeritevole di ogni considerazione scientifica, e si pose ad osservare gli umani individui viventi sulla superficie della terra. Ma forsechè essi non posseggono tutti in comune l'essenza generale costitutiva dell'umanità, in grazia della quale si appellano *uomini*, ed appartengono tutti alla medesima specie umana? L'autore non si diede il menomo pensiero di questi elementi caratteristici dell'umanità, come se fossero un'astruseria metafisica; ma allora perchè mettere in fronte al suo volume il titolo: *Lezioni sull'uomo*?

che tiene l'uomo nella natura, si restringe ad uno studio comparato delle scimmie antropomorfe e dell'organismo umano. Eliseo Reclus (1) e Giorgio P. Marsh (2) presero in esame il potere umano trasformatore della natura, passando sotto silenzio le molte altre attinenze dell'uomo col mondo sensibile esteriore.

Assai più comprensivo ed in parecchi punti conforme al vero mi pare *L'homme et la nature* del Dott. Hugh Doherty, il quale concepisce l'uomo siccome " un composto di forze fisiche e vitali (mentali) associate in organica unità „, distinguendo in questa unità quattro forme di vita, la fisiologica ed industriale, la istintiva ed artistica, la razionale e scientifica, la passionale e morale. Concepito così l'umano soggetto, egli lo raffronta con tutti gli altri viventi della natura, tenendo sempre in esso essenzialmente distinta dalla materia del corpo l'anima, che lo governa.

Lo studio da noi intrapreso conduce a filo di logica a ricercare i rapporti dell'antropologia colle scienze naturali.

L'antropologia e le scienze naturali.

Non vi è amatore del vero sapere, che non riconosca e non ammiri i grandi progressi fatti dalle scienze naturali, e lo splendido avvenire, a cui sono chiamate, proseguendo per la retta via dell'osservazione sincera e compiuta dei fatti fisici, fecondata da una lenta e prudente induzione verificata mediante la prova e riprova di ben condotto esperimento. Questo successivo e sicuro progredire del pensiero nella scoperta delle leggi e delle forze della natura avvantaggia le sorti dell'umanità e conferisce potentemente alla civiltà ed al perfezionamento sociale, essendochè l'uomo la fa sua rivolgendola al compimento del suo ideale.

Se non che mentre per una parte il progresso delle scienze naturali conforta l'animo di liete speranze, per l'altra si nota con rincrescimento la tendenza di alcuni illustri ingegni contemporanei a trascendere i confini proprii di esse scienze e ri-

(1) *La Terra,* vol. 2°.

(2) *L'uomo e la natura.*

guardarle siccome la vera e sola scienza, a cui tutte le altre vanno sacrificate, come se in esse sole fosse incarnato lo spirito scientifico. Così mentre mezzo secolo or fa l'idealismo germanico tiranneggiava le menti e toglieva alle scienze sperimentali ogni libertà di moto, pretendendo di indovinare *a priori* le leggi della natura indipendentemente dall'esperienza e dall' osservazione dei fatti, oggi si proclama uno smodato empirismo, si vuole inchiodata ai fatti la scienza, si chiamano tutte le scienze fisiche e naturali a protestare contro l' antropologia filosofica, perchè ammette una realtà, che sovrasta e distinguesi dalla natura fisica, epperò non può apprendersi col mezzo dell'esperienza materiale e de' sensi esterni, vale a dire lo spirito umano. Non v'è che una sola via per giungere al Vero (essi van ripetendo), la via dell'esperienza e dell'osservazione sensibile; non v'ha che un unico ordine di cognizioni, quelle che riguardano i fenomeni fisici, epperò non si dà che una sola scienza, la scienza dei fatti naturali e delle loro leggi: forza e materia, materia e forza, ecco il supremo pronunciato dello scibile universale. Questo esagerato concetto delle scienze naturali riguardate siccome la vera scienza universale costituisce il naturalismo.

Gli è evidente, che il naturalismo e l'antropologia stanno fra di loro in perfetto antagonismo. Poichè la scienza antropologica ha per oggetto suo speciale il mondo morale ed umano essenzialmente distinto dal mondo fisico, e retto da leggi sue proprie, che non sono quelle, che dominano ineluttabilmente il corporeo universo. I fatti, che essa intende di spiegare, essenzialmente diversificano dai fatti fisici, chimici e fisiologici, quali sono l'intendere ed il volere, il sentimento estetico, morale e religioso, la coscienza di sè, la responsabilità, il merito ed il demerito, il dovere opposto al piacere fisico, il diritto essenzialmente diverso dalla forza bruta. Sono questi i fatti, in cui la natura umana si manifesta, svolgendo l'unità di sua essenza nella dualità dello spirito e del corpo, del pensiero e della materia, dualità, da cui sorge la lotta incessante e faticosissima della vita umana. Or bene il naturalismo contemporaneo, il quale altro mondo non riconosce se non l'universo materiale, altri fatti ed altre leggi non sa vedere se non i fatti e le leggi della natura fisica, toglie con ciò stesso di mezzo l'oggetto proprio della scienza antropologica, riducendola ad un capitolo

della fisiologia, ad un ramo della zoologia. Adunque antropologia e naturalismo sono talmente inconciliabili, che necessita scegliere o l'una o l'altro.

Qui si presenta spontanea una dimanda. Chi sta per la scienza antropologica contro il naturalismo, è desso forzato a ripudiare altresì le scienze naturali? Lo sarebbe di sicuro, se il naturalismo fosse, come esso si annuncia, la più pura e perfetta espressione della medesima. Ma così non è, e giova chiarire, come l'antropologia non solo non esclude, nè osteggia le scienze naturali, ma porge ad essa i principii supremi e fondamentali, su cui si reggono, mentre il naturalismo le travia e le rovescia dalla loro base.

Le scienze naturali, riguardate nel loro concetto universale, hanno per oggetto la natura fisica, e non si estendono al di là dell'universo sensibile. Esse intendono di spiegare l'ordine attuale del mondo corporeo riconducendo i fatti alle loro leggi: a tale intento adoperano l'esperienza e l'osservazione perfezionata dall'induzione. Esse presuppongono siccome condizione della loro esistenza l'osservatore, cioè il pensiero umano, ed importano la libertà del pensiero stesso siccome condizione necessaria del loro progresso, libertà riposta in ciò, che il pensiero nello studio della natura non ha da servire ad una teoria preconcetta o ideata *a priori*, ma deve anzi tutto attenersi alla schietta e verace osservazione dei fatti fisici, poi arguirne mercè l'induzione le leggi corrispondenti e verificarle col mezzo dell'esperimento. Da questo concetto delle scienze naturali consegue, che tutto ciò, che non cade sotto i sensi fisici o sotto l'osservazione esteriore, quali sarebbero le essenze ideali delle cose e le verità universali della pura ragione, sfugge al dominio delle medesime, perchè il metodo dell'esperienza e dell'osservazione, che è il solo loro proprio, fallirebbe all' intento. Or bene questo oggetto proprio delle scienze naturali, questo metodo tutto loro proprio, queste condizioni della loro esistenza e del loro progressivo sviluppo l'antropologia tutti li ammette e per di più li favoreggia e ne contiene la ragion d'essere.

E veramente l'antropologia riconosce l'ordine attuale della natura fisica e l'esistenza di leggi fisiche costanti, su cui esso riposa: riconosce che queste leggi non vanno indovinate *a priori*, e cercate nelle pieghe del nostro cervello, ma argomentate dai

fatti mercè l'esperienza e l'induzione: riconosce che al pensiero umano, il quale si solleva alla contemplazione della natura e alla scoperta delle leggi fisiche, non va fatta violenza di sorta, forzandolo ad ammettere principii, che contraddicono alle leggi della ragione ed all'ordine universale. Che anzi la nostra scienza medesima si giova dell'osservazione e dell' induzione interiore muovendo dallo studio dei fatti umani vuoi interni o psicologici, vuoi esterni o storici per sollevarsi a determinare le leggi, che li governano e le facoltà, da cui originano, e quindi l' intima natura dell' uomo. Aggiungo che l' antropologia filosofica non solo non impugna l'oggetto, il metodo e l'intendimento delle scienze della natura, ma loro ammannisce le condizioni, per cui sussistono e possono progredire. Infatti esse presuppongono la dualità del soggetto pensante che le costruisce e dell' oggetto pensato che imprendono a studiare, dell'uomo osservatore e della natura osservata. Questi due termini devono armonizzare fra di loro perchè ne sorgano le scienze naturali, ma rimangono essenzialmente distinti. L'uomo si pone di fronte alla natura fisica esteriore per comprenderla col proprio pensiero e scoprirne le leggi, ma egli non è la natura fisica da lui pensata. Egli vive nel seno della natura come essere fisico, ma le sovrasta come essere pensante. La natura materiale non intende, non pensa se medesima; per intendere là natura ci vuole qualche cosa di più che non la natura stessa, ci vuole il pensiero.

Or bene siccome le scienze naturali importano l'esistenza del soggetto pensante, il quale non va confuso colla natura, perchè le è superiore, così importano una scienza superiore da esse distinta, cioè l'antropologia filosofica, che ha appunto per oggetto suo proprio l'uomo, ossia l'osservatore della natura, talmente che negata l'antropologia, dovrebbero per logica necessità negarsi anche le scienze naturali. Poniamo che l'osservatore della natura, ossia l'uomo pensante, si confonda colla natura osservata, e ne conseguirà che la libertà del pensiero, senza di cui non è possibile nè la conquista della verità, nè il progresso del sapere, scomparirebbero, perchè la materia, con cui si vorrebbe identico il pensiero, non è libera nei suoi movimenti e nei suoi fenomeni, ma soggiogata da leggi ferree ed ineluttabili, sicchè l'intelligenza operante in ciascuno di noi produce indeclinabilmente questo o quell'altro pensiero. Così il fatto dell'errore sa-

rebbe impossibile, o, meglio, non vi sarebbe più distinzione tra verità ed errore, mentre la scienza in generale, e quindi anche la scienza della natura importa la verità ed esclude l'errore.

Inoltre, se il pensiero dell'osservatore fosse identico colla natura osservata, ossia colla materia, l'osservazione e lo studio della natura fisica tornerebbero impossibili, perchè mancherebbero tutte quelle idee universali e quei principii assiomatici di causa e di effetto, di sostanza e di modo ed altrettali, principii, che la nostra mente deve già possedere in se medesima per poter osservare la natura fisica esteriore e spiegarla. La scienza fisica si regge tutta quanta sul gran principio di causalità, per cui dato un fatto, si pone a rintracciarne la cagione e la legge, che lo determina, e su quell'altro principio, che le leggi della natura sono costanti ed universali, mercè del quale il fisico ha ragione di estendere a tutti i fatti possibili e congeneri quella legge, che da uno o pochi fatti percepiti aveva argomentato l'induzione e l'esperimento. Ma il principio universale di causalità è un principio ingenito della mente umana, e non già derivato dall'esperienza sensibile, perchè i sensi esterni ci porgono una successione di fenomeni, ma non la loro intima connessione, non l'intimo compenetrarsi delle sostanze naturali per modo che si abbia ragione di affermare, che il fenomeno o mutamento avvenuto nel corpo *A* è un effetto, che ha la ragion sua nella virtù efficiente del corpo *B*. Veggo a ragion d'esempio che il corpo *a* sottoposto all'azione calorifica del corpo *b* si dilata: la sola osservazione sensibile questo solo mi dice, che allo stato calorifico dell'uno succede il dilatamento dell'altro, non già che l'uno sia in intima congiunzione di causalità coll'altro; ciò è ufficio della ragione, e non del senso. Lo stesso va detto dell'altro principio, che esprime la sostanza e l'universalità delle leggi della natura. Veggo un corpo, che cade e riferisco la sua caduta alla legge universale della gravitazione. Or chi mi dà ragione di estendere siffatta legge a tutti quanti i corpi posti nell'immensità dello spazio, che non ho percepiti, nè osservati co' miei sensi, e che mai non cadranno sotto il dominio della mia od altrui esperienza? Il principio, che giustifica il passaggio del nostro pensiero dai fatti particolari alla legge universale, è questo: noi sappiamo che la natura fisica tutta quanta è governata da leggi costanti. Ma come lo sappiamo? Non certo

dall'esperienza sensibile, siccome quella, che per necessità è limitata a pochissimi fatti, nè mai giungerà ad abbracciare la natura tutta quanta, bensì dalla ragione pura, la quale possiede nel suo organismo mentale qualche cosa, che trascende la sfera dell'esperienza. Dacchè dunque l'antropologia studia l'uomo pensante, il quale sovrasta alla materia e possiede in sè i principii ideali necessarii alla costruzione del sapere, consegue che essa è lo spirito informatore delle discipline positive e naturali, e che il naturalismo, che la impugna, distrugge le stesse scienze della natura e contraddicendo a se medesimo fa della metafisica col proclamare che la materia è l'essenza universale di tutto, che è infinita, eterna, mentre tutto questo trascende i limiti dell'esperienza e dell'osservazione sensibile.

Sei nuove notarelle dantesche

del prof. PIETRO GAMBÈRA.

I.

. . . . vidi un foco
Ch'emisferio di tenebre vincìa.
(*Inf.*, IV, 68-69).

Se il fuoco, veduto dal Poeta, mentre si avviava verso il *nobile castello* degli *spiriti magni*, fosse stato sospeso a grande altezza dal suolo, avrebbe rischiarata una sfera di tenebre. Ma, siccome, egli dice poi: *andammo infine alla lumiera*, ne consegue che quel fuoco era al suolo, o poco alto: e però non poteva vincere che mezza sfera (*un emisfero*) di tenebre.

Dante e Virgilio, arrivati alla *lumiera*, proseguirono il viaggio verso il castello e vi entrarono dopo d'aver passato il fiume che lo circonda. Adunque la lumiera non era vicina alla porta delle *alte mura* esterne del castello. Se fosse stata accanto a quelle mura, essa avrebbe rischiarato, invece di *un emisfero*, soltanto mezzo emisfero di tenebre.

II.

Nuota e discende, ma non me n'accorgo,
Se non che al viso e di sotto mi venta.
(*Inf.*, XVII, 116-117).

Dante, sedutosi sulle spalle del mostro alato Gerione, vien fatto scendere in *un pozzo assai largo e profondo*, perchè possa

giungere a Malebolge. Gerione nel discendere descrive vasti giri elicoidali, risultanti dal proprio moto circolare e dalla sua discesa per causa della forza di gravità.

Pertanto Dante doveva sentire la resistenza dell'aria non solo di fronte (*al viso*), ma anche *di sotto*, ossia dal basso in alto.

III.

Quando noi fummo in su l'ultima chiostra
Di Malebolge, sì che i suoi conversi
Potean parere alla veduta nostra,
Lamenti saettaron me diversi.

(*Inf.*, XXIX, 40-43).

I commentatori dicono che il Poeta chiama *conversi* i falsari puniti nella decima bolgia, per aver chiamato la bolgia *chiostra*, che vale anche monastero. Ma questa interpretazione è strana per ogni riguardo.

I conversi della bolgia (valle circolare) sono i suoi due versanti, ossia le sue rive laterali.

Due tetti conversi, ossia disposti in modo che versino l'acqua piovana in una sola doccia, formano ciò che gli architetti chiamano conversa.

Adunque i versi sopra citati significano: *quando noi fummo sul ponte dell'ultima bolgia, cosicchè potevamo vederne ambedue i versanti, udimmo i diversi lamenti dei dannati.*

IV.

Gli occhi prima drizzai a' bassi lidi,
Poscia gli alzai al Sole ed ammirava
Che da sinistra n'eravam feriti.
Ben s'avvide il poeta ch'io stava
Stupido tutto al carro della luce
Ove tra noi ed Aquilone intrava.

(*Purg.*, IV, 55-60).

Durante l'anno, il Sole è sempre al dissopra della Zona torrida. Perciò noi lo vediamo attraversare il cielo passando a destra di chi guarda a Levante. E, invece, gli abitanti al di là

della Zona torrida lo vedono passare a sinistra di chi a Levante è rivolto.

Ora, siccome il monte del Purgatorio è immaginato da Dante antipodo a Gerusalemme, ne consegue che quel monte è tanto di là dalla Zona torrida di quanto Gerusalemme è di qua.

Ma Dante dice che si trovava sulla costa orientale del monte del Purgatorio e rivolto a Levante (IV, 53). Perciò egli, alzando gli occhi al Sole, doveva vederlo passare alla sua sinistra ossia entrare fra lui ed Aquilone (Nord), essendochè era quasi mezzodì, giacchè poco dopo Virgilio gli dice: *vedi ch'è tocco meridian dal' Sole.*

I commentatori dicono che Dante si meravigliò di veder spuntare il Sole a sinistra del punto Est dell'orizzonte, perchè gli abitanti, situati di qua del tropico del Cancro, lo vedono spuntare a destra.

Ma essi sbagliano, giacchè Dante sapeva benissimo che il Sole, durante la nostra primavera ed il nostro estate, sorge dovunque più o meno a sinistra del punto Est dell'orizzonte; e che dovunque sorge più o meno a destra di quel punto, durante il nostro autunno ed il nostro inverno.

Il Sole, da ogni luogo della Terra, si vede spuntare precisamente dal punto cardinale di Levante, quando esso si trova sul piano dell'Equatore, cioè in occasione degli equinozi.

V.

Poi si rivolse tutta desïante
A quella parte ove il mondo è più vivo.
(*Parad.*, V, 86-87).

Dopo questo atteggiamento di Beatrice, Dante con essa corsero subito, *come saetta, nel secondo regno*, cioè dalla Luna al pianeta Mercurio.

Ma Dante ben sapeva che Mercurio descrive la sua orbita mantenendosi vicino al Sole, perchè lo qualifica come la *spera che si vela ai mortal' con gli altrui raggi.*

Pertanto è chiaro che Beatrice *si rivolse* alla plaga del cielo più vivamente illuminata; cioè alla plaga dove si trovava il Sole e quindi anche Mercurio.

Adunque sbagliano i commentatori, dicendo che Beatrice si rivolse verso l'Oriente, o verso l'Equatore, o verso l'Empireo. Ed erra anche lo Scartazzini, affermando che Beatrice si rivolse all'insù per salire verticalmente, perchè allora la Luna non si trovava, rispetto alla Terra, nè sotto Mercurio, nè sotto il Sole. Infatti mancavano sei giorni per il novilunio, come si può dedurre dalla mia *Cronografia del mistico viaggio dantesco.*

Beatrice e Dante dovettero, rispetto alla Terra, salire obliquamente dalla Luna a Mercurio; ed è però ben detto che corsero *come saetta.*

VI.

Con voi nasceva e s'ascondeva vosco
Quegli ch'è padre d'ogni mortal vita,
Quand'io sentii da prima l'aer tosco.
(*Parad.*, XXII, 115-117).

Il nostro Poeta astronomo dicendo che, quando egli nacque, il Sole sorgeva e tramontava con le stelle della costellazione dei Gemelli, indica chiaramente che il Sole si trovava sotto quella costellazione.

Ai tempi di Dante, il Sole entrava in Gemini il 18 maggio e ne usciva il 17 giugno. Quindi il 18 maggio esso sorgeva e tramontava prima dei Gemelli; ed il 17 giugno sorgeva e tramontava dopo di essi.

Possiamo pertanto argomentare che l'Alighieri nacque alla fine di maggio od in principio di giugno, giacchè allora soltanto il Sole sorgeva e tramontava insieme con la costellazione dei Gemelli.

Il Boccaccio ci fa sapere che Dante, *essendo già al quinquagesimo sesto anno pervenuto, infermò; e del mese di settembre, correnti gli anni di Cristo MCCCXXI, il dì che la esaltazione della santa Croce si celebra* (14 settembre), *passò dalla presente vita.*

Dante visse adunque 56 anni e più, e morì il 14 settembre 1321 *a Nativitate*, data che corrisponde anche al 14 settembre 1321 dell'Era volgare.

La data della sua nascita si deduce da un'altra notizia che il Boccaccio dice d'avere avuta da Pietro Giardini, *il quale fu*

uno dei più intimi amici e servitori che Dante avesse in Ravenna, dove morì.

Questo Pietro Giardini, il quale era notaio, riferì al Boccaccio di aver saputo *da Dante, giacendo egli nella infermità della quale ei morì, lui avere di tanto in tanto trapassato il cinquantesimo sesto anno, quanto dal preterito maggio avera infino a quel dì.*

Questa dichiarazione significa precisamente, come feci già rilevare con altro mio scritto, che Dante aveva compiuti 56 anni di età il 31 maggio dell'anno della sua morte (1321), e che quindi nacque il 31 maggio 1265 (Domenica). Infatti chi dice d'aver superati i 56 anni di tanto tempo, quanto ne è passato dal *preterito* maggio, dichiara evidentemente d'aver compiuti 56 anni l'ultimo giorno dello scorso maggio.

Il 31 maggio 1265 (stile giuliano) corrisponde, secondo l'attuale Calendario gregoriano, al 7 giugno 1265, perchè se la riforma del Calendario fosse stata fatta nel XIII° secolo, anzichè nel XVI°, sarebbe occorso di anticipare la data di sette giorni, invece di dieci.

Adunque il giorno anniversario della nascita di Dante ricorre il 7 giugno. Ma, essendo egli nato di Domenica, sarebbe opportuno che tale ricorrenza venisse festeggiata nella prima Domenica di detto mese. Così la festa, per noi italiani, sarebbe bene accoppiata con quella dello Statuto, giacchè l'Alighieri, più di tutti, contribuì a mantenere vivo il concetto della libertà e unità della patria nostra.

L' Accademico Segretario
RODOLFO RENIER.

Torino, VINCENZO BONA, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi.

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 3 Dicembre 1905.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: SALVADORI, Direttore della Classe, GRASSI, JADANZA, NACCARI, SPEZIA, GUIDI, SOMIGLIANA, SEGRE, FOÀ, GUARESCHI, PARONA, MATTIROLO, MOSSO, FILETI e CAMERANO Segretario.

Si legge e si approva il verbale dell'adunanza precedente.

Il Presidente presenta il dono delle *Opere* del Dr. Giulio CERADINI, in due volumi, fatto all'Accademia dalla vedova signora Carlotta BOZZOLO.

Il Socio MATTIROLO presenta in dono cinque sue note di argomento botanico. Lo stesso Socio MATTIROLO presenta in dono una nota del Dott. Giuseppe GOLA, *Intorno ai rapporti tra i tegumenti seminali e le soluzioni saline.*

Il Presidente ringrazia gli egregi donatori.

Vengono presentati per l'inserzione negli *Atti* i lavori seguenti:

1° C. BURALI-FORTI, *Sulla curva delle probabilità*, dal Socio JADANZA;

2° *Contribuzioni sperimentali sulla cristallogenesi del quarzo*, del Socio Spezia;

3° *Sulla fauna e sull'età dei calcari a megalodontidi delle cave di Trevi (Spoleto)*, del Socio Parona.

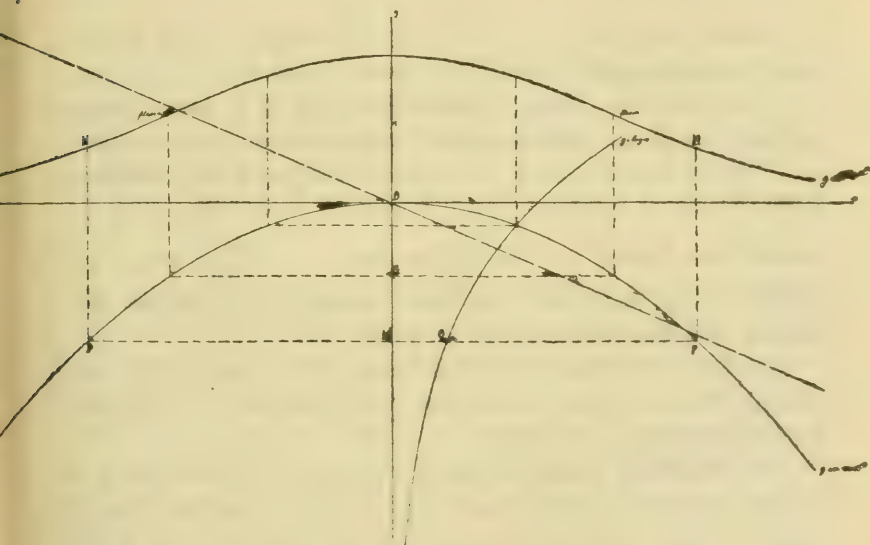
Il Socio Parona, a nome anche del Socio Camerano, legge la relazione intorno alla Memoria del Prof. F. Sacco, *Resti fossili di rinoceronte nell' Astigiano*. La relazione propone che il lavoro venga stampato nelle *Memorie*. La Classe all' unanimità approva la relazione. La Classe, in seguito, con votazione segreta, all'unanimità approva la stampa del lavoro del Prof. Sacco nelle *Memorie* accademiche.

LETTURE

Sulla curva delle probabilità.

Nota di C. BURALI-FORTI in Torino.

La costruzione grafica, molto semplice, della *curva delle probabilità*, che ora presento, non mi consta che sia ancora nota.

Costruzione. — Si fissi un sistema di assi cartesiani ortogonali.

Si costruisca la *curva logaritmica* di equazione cartesiana $y = \log x$, cioè $x = e^y$, e la *parabola conica* di equazione $y = -mx^2$, ove m è *numero* positivo e non nullo.

Da un punto qualunque M della parte negativa dell' asse delle y, si conduca la parallela all'asse x, e tale retta incontri la parabola nei due punti P e la curva logaritmica nel punto Q.

I due punti H che hanno egual ascissa dei due punti P e

per ordinata, positiva, la distanza di M da Q (cioè l'ascissa di Q) stanno sulla *curva delle probabilità*, di equazione cartesiana

$$y = e^{-mx^2},$$

che risulta così costruita per punti.

Dimostrazione. — Sia $-t$, con t positivo o nullo, la ordinata del punto M. Le ascisse dei punti P, sulla parabola, sono $\pm\sqrt{\frac{t}{m}}$; l'ascissa del punto Q, sulla logaritmica, è e^{-t}. Dunque; se x, y sono le coordinate del punto H, si ha

$$x = \pm\sqrt{\frac{t}{m}}, \quad y = e^{-t},$$

da cui eliminando t si ha l'equazione precedente.

Osservazioni. — 1ª Per M coincidente con O si ha il punto più alto, sull'asse delle x, della curva H.

Per uno dei punti P coincidente con Q si hanno i punti della curva H che stanno sulle bisettrici degli assi coordinati.

Per M distante da O della metà dell'unità del disegno, i punti H che si ottengono sono i *punti di flesso* della curva delle probabilità. Invero: per $t = 1/2$ si ha $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2m}}$, per il qual valore di x si annulla la derivata seconda di y rispetto ad x, mentre la terza derivata non è nulla.

2ª La costruzione delle due curve P, Q, mediante le quali abbiamo ottenuta per punti la curva H, può farsi con l'*Integrafo* di ABDANK-ABAKANOWICZ (*).

Si costruisce prima la curva logaritmica della quale si determina l'asintoto (nostro asse delle y) e il punto che dista dall'asintoto della unità del disegno, *base* dell'integrafo (per il quale passa il nostro asse delle x) (**). Poi si costruisce la parabola

---

(*) La figura che correda questa nota è stata appunto ottenuta con l'integrafo (nuovo *piccolo modello*, costruito dall' Ing. CORRADI di Zurigo) acquistato quest'anno dall'*Accademia Militare* e del quale mi servo nel corso di *Geometria Analitico-Proiettiva* che professo, da varî anni, in questo Istituto. L'originale della figura è stato disegnato dal sig. *Scalfaro*, tenente di Artiglieria, prof. aggiunto al corso di Analitico-Proiettiva.

(**) Cfr. la memoria originale di ABDANK per la costruzione della loga-

come curva integrale della retta di equazione $y = -2mx$, prendendo la costante di integrazione eguale a zero.

3ª Percorrendo con la punta differenziale dell'integrafo la curva delle probabilità

$$y = e^{-mx^2},$$

si ottiene una delle curve di equazione

$$y = \int e^{-mx^2} dx;$$

la parte di curva compresa tra i punti di ascisse $-h$, h è la *curva di scarto* che ha speciale importanza nelle applicazioni della curva delle probabilità.

4ª L'equazione differenziale della curva della probabilità è

$$\frac{dy}{dx} = -2mxy;$$

la costruzione grafica della curva H non è dunque altro che un metodo grafico di integrazione di tale equazione differenziale.

Con l'integrafo si possono integrare graficamente equazioni differenziali del tipo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{\varphi(y)}$$

il cui integrale generale è $\int f(x)dx = \int \varphi(y)dy$. — Si costruiscano le due curve di equazioni $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ e quindi le due curve integrali di queste, riferite al medesimo sistema di assi. Una parallela all'asse x taglia le due curve integrali nei punti P, Q; il punto H che ha per ascissa x l'ascissa di P e per ordinata y l'ascissa di Q descrive una curva che ha per equazione implicita $\int f(x)dx = \int \varphi(y)dy$ e dà quindi l'integrale dell'equazione differenziale proposta (*).

Torino, novembre 1905.

---

ritmica, collegando invariabilmente le due punte integrale e differenziale I due assi y, x si ottengono facilmente costruendo la tangente in un punto (con lo stesso integrafo, cfr. l. c.) e ricordando che la sotto-tangente-cartesiana vale l'unità del disegno.

(*) Nel caso particolare della curva delle probabilità una delle prime curve considerate è un'*iperbole equitativa*, l'altra una *retta*, le cui curve integrali sono appunto una *logaritmica* e una *parabola conica*.

Contribuzioni sperimentali alla cristallogenesi del quarzo.

Nota del Socio GIORGIO SPEZIA
Professore di Mineralogia nell'Univ. di Torino.

(Con una Tavola).

In precedenti lavori (1) avevo indicato alcune mie ricerche sull'accrescimento del quarzo; ma il metodo sperimentale adoperato allora per avere il deposito quarzoso era assai complicato, mentre ora il deposito riesce facilissimo coll'apparecchio da me descritto (2), ed impiegato per dimostrare che la pressione è chimicamente inattiva nella solubilità del quarzo; alla quale descrizione prego il lettore di riferirsi per meglio comprendere l'applicazione dell'apparecchio alla presente esperienza sulla cristallogenesi del quarzo.

L'apparecchio si fonda sul principio di avere un ambiente nel quale la pressione sia uniforme e la temperatura variabile decrescente dall'alto verso il basso. Perciò il quarzo nelle stesse condizioni di pressione si scioglie, per l'azione del silicato sodico, adoperato come solvente, nella parte più alta ossia di maggior temperatura, formando un polisilicato; quindi la soluzione, che acquista una densità maggiore, discende e si diffonde verso la parte di minore temperatura, dove cede l'eccesso di silice allo stato di quarzo, risalendo poi per la diminuzione di densità a sciogliere nuovo quarzo; ossia si forma un ciclo in modo che col tempo tutto il quarzo sottoposto a maggior temperatura si scioglie per ricostituirsi nel luogo di minor temperatura.

È evidente che tale apparecchio serve benissimo per osservare la cristallogenesi e rigenerazione dei cristalli di tutti quei

---

(1) " Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino ", vol. XXXIII, pag. 303.
(2) Id., vol. XL, pag. 254.

minerali i quali siano solubili per l'alta temperatura in qualche solvente per soluzione semplice o per processo chimico, e che ritornano a depositarsi per l'abbassamento di essa. E per minima che sia la solubilità, si otterrà sempre un effetto aumentando la temperatura e la durata dell'esperienza.

Ora ho intrapreso alcune ricerche sulla cristallogenesi del quarzo, le quali sono oggetto del presente lavoro, ed ho iniziato, possedendo due apparecchi, consimili studi sopra altri ossidi, i quali possono avere un comportamento analogo a quello del quarzo; perchè io ritengo che si debba ottenere lo stesso effetto mutando, s'intende, i fattori temperatura e tempo, con quegli ossidi i quali, considerandoli come anidridi, costituiscono dei sali sodici, come per es.: Al^2O^3, TiO^2, SnO^2.

In un prossimo lavoro spero di potere parlare della cristallogenesi del corindone, pel quale ho in corso l'esperienza.

Per l'esperienza sul quarzo posi in un canestro di fili d'argento situato nella parte superiore corrispondente alla temperatura maggiore, e che io chiamerò *ambiente di soluzione,* parecchie schegge di quarzo ialino, e al disotto, ad una distanza che prove precedenti m'indicarono corrispondesse, per la minore temperatura, all'*ambiente di deposito,* posi il materiale quarzoso che doveva subire l'accrescimento e che era legato e sostenuto da fili d'argento.

Tale materiale era costituito da tre prismetti di quarzo preparati segando dei cristalli normalmente al loro asse principale, e da un lungo cristallo, che staccai da un aggregato di quarzi del Delfinato.

Dei prismi, due, legati allo stesso filo, furono posti ad eguale livello, ed il terzo fu collocato due centimetri più sotto; le basi poi di tutti i prismi avevano disposizione orizzontale e l'area della base del terzo prisma eguagliava quasi la somma delle aree dei due prismi collegati.

Il lungo cristallo invece fu disposto verticalmente in modo che la parte di rottura trovavasi nell'ambiente di soluzione fra le schegge, e l'altra parte, avente le facce terminali, nell'ambiente di deposito, rimanendo un centimetro sopra i prismi, in posizione però che i relativi accrescimenti non s'incontrassero.

Il solvente era una soluzione acquosa di silicato sodico pre-

parata col sale cristallizzato della formola $Na^2SiO^3 + 8H^2O$, ed in quantità d'avere la soluzione con 2 % di Na^2SiO^3.

Si potrebbe chiedermi se non sia meglio usare l'idrato sodico invece del silicato; ma rispondo che per questa esperienza è necessario il silicato per evitare un grave inconveniente. L'idrato sodico col quarzo darebbe luogo anzitutto al silicato sodico normale non decomponibile per diminuzione di temperatura, il quale poi, col crescere della temperatura, sempre in presenza del quarzo, agirebbe come se si impiegasse direttamente il silicato normale: e l'inconveniente sta in ciò, che l'idrato sodico, sciogliendo il quarzo a temperatura minore che il silicato sodico, agirebbe come solvente, deteriorandolo, anche sul materiale posto per l'accrescimento, prima che avvenga la fase di deposito. D'altronde l'impiego di un silicato alcalino è più conforme ai fatti naturali, perchè nelle acque mineralizzate non si trova in soluzione un idrato alcalino.

Si potrebbe adoperare anche il silicato potassico; ma il silicato sodico, cristallizzando più facilmente, serve meglio per avere una soluzione titolata.

La durata dell'esperienza fu di 100 giorni, quantità di tempo che ricerche precedenti mi suggerirono come sufficiente per avere un buon risultato col grado di temperatura impiegato.

La temperatura segnata dai tre termometri dell'apparecchio fu per quello superiore da 326° a 337°, per quello medio da 225° a 237° e per quello inferiore da 165° a 178°; ossia si può ritenere che sopra i 326° vi era la temperatura dell'ambiente di soluzione, e al disotto di detta temperatura eravi l'ambiente di deposito.

Naturalmente mi fu impossibile di stabilire le varie temperature corrispondenti al posto dei singoli pezzi sottoposti all'accrescimento; perchè non è facile costruire apparecchi per simili esperienze, i quali abbiano in pari tempo i requisiti utili a tutte le osservazioni e quelli necessari alla sicurezza personale dell'osservatore.

Ecco ora il risultato dell'esperienza.

Il prisma a base maggiore situato più in basso crebbe trasformandosi nella forma rappresentata con ingrandimento doppio del vero dalla fig. 1ª. Da essa si scorge come il cristallo rimase incompleto, forse anche per causa del filo d'argento, ma

essenzialmente per causa che, al livello ove si trovava il prisma, il deposito doveva essere minore, avendo la soluzione già ceduto gran parte di silice all'altro materiale d'esperienza posto superiormente al prisma; e per le stesse ragioni rimasero anche incomplete le terminazioni delle bipiramidi, dando l'apparenza della formazione del pinacoide.

I due prismi che, legati collo stesso filo, si trovavano ad eguale livello, si trasformarono: uno in un cristallo completo unico, l'altro colla terminazione di due piramidi complete, come appare dalla fig. 2ª, che li rappresenta con grandezza parimenti doppia del vero.

Il cristallo di quarzo presenta eziandio un rilevante accrescimento dalla parte che aveva le facce terminali e che si trovava nell'ambiente di deposito. La fig. 3ª lo riproduce al doppio del vero.

Oltre tali fatti di rigenerazione e di accrescimento, si operò nel recipiente un deposito generale quarzoso aderente al canestro d'argento ed alle pareti, specialmente al livello dei due prismi. Tale deposito è costituito per la maggior parte da corti cristallini di quarzo, costituiti dal prisma e colla prevalenza delle facce di un solo romboedro, inoltre vi sono cristalli aciculari finissimi; ma questi ultimi, che si osservano anche nella fig. 2ª sulle facce dei prismi, risultano, dall'osservazione, di formazione posteriore agli altri, e ritengo sieno dovuti al rapido raffreddamento avvenuto quando posi termine all'esperienza. La fig. 4ª rappresenta con ingrandimento di 13 diametri uno di detti cristalli aciculari unito ad un corto cristallo del deposito generale.

Esaminando ora più minutamente il risultato dell'esperienza, appare innanzi tutto il fatto che nella rigenerazione dei tre prismi le facce formatesi predominanti sono quelle di un solo romboedro, essendo quelle dell'altro romboedro meno sviluppate; e tale differenza di sviluppo è maggiore nei cristalli formatisi coi due prismi, fig. 2ª, che si trovavano allo stesso livello e dove il deposito era maggiore; mentre la differenza è minore nell'accrescimento del prisma della fig. 1ª, che si trovava più al basso.

Parimenti lo sviluppo delle facce prismatiche e quindi l'allungamento del cristallo rigenerato dai prismi è di molto maggiore nei due cristalli che si formarono al livello superiore che non nell'altro. E ciò appare evidente confrontando tale aumento

nelle figg. 1ª e 2ª. In esse è indicato lo spessore, che avevano i prismi prima del deposito, dalla ripiegatura dei fili d'argento sulle loro superfici di taglio, e si scorge come nella fig. 1ª i romboedri si formarono quasi senza allungamento del prisma, mentre nella fig. 2ª l'allungamento è assai rilevante. E non si può supporre che tale differenza di sviluppo delle facce prismatiche sia dovuta al fatto che l'area del prisma posto inferiormente fosse maggiore dell'area di ciascuno dei prismi collegati; perchè la maggiore area, colla deficienza di accrescimento, poteva soltanto influire sulla più grande estensione della pseudofaccia pinacoidale, ma non impedire un prolungamento delle facce prismatiche.

Nel cristallo poi, la cui parte sottoposta all'accrescimento si trovava più in alto, ossia più vicina all'ambiente di soluzione, e quindi sotto l'influenza di una soluzione più ricca di silice, per cui l'accrescimento doveva essere più rapido, non si formarono, fatta astrazione di una sola piccolissima faccia striata apparentemente di emiscalenoedro, che le facce di un romboedro e l'allungamento di quelle prismatiche, come si vede nella fig. 3ª.

Ossia appare evidente dall'esperienza che la rapida cristallizzazione dà luogo alla predominanza od anche all'esistenza di un solo romboedro; mentre la lenta cristallizzazione favorisce di più lo sviluppo di entrambi i romboedri, ed inoltre si osserva che la rapida cristallizzazione porta uno sviluppo maggiore del cristallo a seconda l'asse principale, talchè è maggiore la lunghezza delle facce prismatiche.

E tale conseguenza della rapida cristallizzazione è anche confermata dall'esame dei cristalli aciculari, i quali si formarono durante il rapido raffreddamento dell'apparecchio al termine dell'esperienza. In essi si osserva al microscopio la terminazione di un romboedro solo ed una specie di rastremazione nel lungo prisma del cristallo, come si osserva nella fig. 4ª, che riproduce uno dei cristalli meno allungati.

Osservai anche se si fossero formate inclusioni e ne trovai nel lungo cristallo sottoposto all'accrescimento. Esse stanno nel sottile strato d'aumento delle facce del prisma; sono inclusioni liquide con bolla gasosa e grosse; un leggero riscaldamento prodotto con aria calda non fa muovere la bolla. Ora non volli produrre il movimento aumentando la temperatura per non gua-

stare il cristallo; ma quando avrò ottenuto altro materiale procurerò, facendo anche preparati più acconci per l'osservazione, di studiare meglio simili inclusioni nel quarzo prodotte artificialmente.

Un altro risultato dell'esperienza è la prova della facilità, come si osserva in natura, che ha il quarzo di cristallizzare con numerose inclusioni solide: infatti appare evidente che i fili d'argento non presentarono ostacolo al deposito quarzoso.

E l'inclusione dei fili d'argento che io dovetti adoperare ha il vantaggio, come dissemi un mineralogo che vide i prodotti quarzosi da me ottenuti, di essere l'unica prova che l'accrescimento quarzoso non sia naturale, ma sia artificiale.

Le facce dei cristalli ottenuti sono, pei loro caratteri fisici, poco adatte a misure col goniometro a riflessione e dovetti rimettermi alla misura fatta col goniometro d'applicazione per ritenere che i romboedri più sviluppati fossero i due principali del quarzo; ma non potei determinare un secondo romboedro che vi è associato nei cristalli formatisi dall'accrescimento dei tre prismi. Anche le facce della forma del prisma esagono si presentano con aspetto non ben regolare. Ad ogni modo, attendo altre esperienze per avere cristalli con facce più adatte a misura, se pure sarà possibile.

A riguardo poi delle facce con apparenza di pinacoidi che si osservano nella fig. 1ª, credo che l'esperienza dimostri che nel quarzo non esiste tale forma. Anzitutto esse si trovano soltanto sulle due bipiramidi del cristallo avuto con incompleto accrescimento del prisma sottoposto all'esperienza e sono convinto che, se questa fosse durata più a lungo, le pseudofacce sarebbero scomparse, completandosi il cristallo. Inoltre le superfici di tali pseudofacce hanno l'aspetto rappresentato con ingrandimento di 12 diametri dalla fig. 5ª, la quale ne riproduce una; ora tale aspetto è caratteristico di una faccia incompleta, come nella presente esperienza, ovvero può essere caratteristico di una faccia di corrosione, ma non mai di una faccia piana costituitasi normalmente.

Sull'esistenza del pinacoide nel quarzo, indicata per la prima volta dal Des Cloizeaux, sono diversi i pareri dei cristallografi e dei mineralogi; ma io ritengo che, più di coloro che o l'ammettono o sono dubbiosi, abbia ragione Tschermak di asserire

esplicitamente che le facce basali del quarzo sono di deformazione.

Dal complesso dell'esperienza descritta, volendo fare una deduzione, si avrebbe che i cristalli di quarzo che si trovano in natura coi due romboedri ben sviluppati, dando al cristallo abito esagonale, e nei quali è piccolo lo sviluppo nella direzione dell'asse principale, per cui le facce del prisma o mancano o sono poco sviluppate, si siano formati per lenta cristallizzazione; mentre i cristalli lunghi con gran sviluppo delle facce prismatiche, e nei quali vi ha la prevalenza di un romboedro, si sarebbero formati con cristallizzazione più rapida.

Tale deduzione, che ritengo provvisoria, perchè fondata finora sopra una sola esperienza, avrebbe qualche appoggio dalle osservazioni in natura.

P. es.: nei porfidi quarziferi, nella cui formazione è da ritenersi vi sia stato, per il lento processo di differenziazione nel magma, una lenta cristallizzazione, si hanno cristalli di quarzo bipiramidati e mancanti affatto o quasi delle facce prismatiche.

Nel calcare cristallino del Chaberton, citato dal Colomba (1), nel quale il processo metamorfico di cristallizzazione deve essere stato anche lentissimo, si trovano disseminati cristalli di quarzo bipiramidati con o senza traccia di prisma. Parimenti i cristalli di quarzo di molte geodi, non comunicanti con litoclasi, sono di consueto tozzi, ossia con le facce prismatiche poco estese secondo l'asse principale, come p. es. i quarzi ametista, che si trovano nelle geodi del melafiro nel Brasile, ed anche i quarzi delle geodi del calcare di Carrara.

È certo che la cristallogenesi del quarzo, minerale dei più interessanti dal lato cristallografico, mineralogico, petrografico e geologico, offre un campo di ricerche numerose e difficili quando si voglia trovare le relazioni fra le svariatissime forme cristalline che presenta e le diversissime giaciture in cui si trova; e tanto più difficile perchè la maggior parte degli studi fatti sul quarzo mancano dell'opportuno connesso di osservazioni atto ad aiutare il problema cristallogenico: gli studi cristallografici ra-

(1) " Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino ", vol. XXVI, pag. 811.

1
2
3
4
5

ramente sono accompagnati da diligenti osservazioni paragenetiche.

Ad ogni modo, spero che altre esperienze eseguite in condizioni diverse, specialmente riguardo l'ambiente chimico di cristallizzazione, potranno fornire maggiori schiarimenti sull'influenza della velocità di cristallizzazione nello sviluppo dei cristalli di quarzo. Inoltre sarà interessante, adoperando uno stesso solvente, fare un confronto fra i caratteri fisici delle facce dei cristalli rigenerati nell'ambiente di deposito e le figure di corrosione nell'ambiente di soluzione, ponendo in questo cristalli o preparati speciali invece di schegge.

E nutro fiducia che i risultati sperimentali di tali nuove ricerche sul quarzo saranno anche utili ai numerosi cultori delle speculazioni scientifiche sull'accrescimento dei cristalli.

Sulla fauna e sull'età dei calcari a megalodontidi delle cave di Trevi (Spoleto).

Nota del Socio CARLO FABRIZIO PARONA.

Alcuni anni or sono il Museo Geologico di Torino ricevette in dono dal prof. F. Sacco un grosso modello interno di megalodontide, portato da uno studente e proveniente da Trevi. Desiderando precisarne la provenienza, mi rivolsi per informazioni al prof. A. Silvestri, il quale, da Spoleto recatosi a Trevi per visitarne le cave, potè procurarmi altri modelli della stessa forma ed insieme, a varie riprese, numerosi modelli ed impronte di altri fossili, coadiuvato in queste ricerche dall'opera intelligente e volonterosa del sig. Aurelio Bonaca, studente di Trevi.

I fossili sono tutti allo stato di modello interno o di impronte poco nitide, ed ormai ho perduta la speranza di poter avere un materiale sufficientemente conservato, da permettermi di fare una illustrazione monografica di questa fauna, abbastanza ricca ed interessante. Di guisa che non ho più motivo per ritardare la pubblicazione del risultato di un esame sommario, che è abbastanza importante, perchè per esso resta chia-

rita l'età dei calcari nei quali sono aperte le cave. E questo è o scopo della presente nota, nella quale mi è caro di poter rinnovare i miei vivi ringraziamenti ai colleghi ed amici Sacco e Silvestri ed all'egregio sig. Bonaca.

I calcari, bianchi o ceroidi, compatti e subcristallini, qua e là oolitici delle cave di Trevi, non differiscono nei loro caratteri da quelli che nell'Appennino Centrale formano, generalmente, la base visibile della serie mesozoica, e che sono riferiti al Lias inferiore. A questo piano appartengono infatti gli strati fossiliferi di cui ci occupiamo, e che presumibilmente formano la prosecuzione e spettano alla stessa serie dei calcari bianchi a gasteropodi del Lias inferiore, considerati dall'ing. Lotti nella sua nota geologica sui dintorni di Spoleto (1).

Ma è da notare che le carte geologiche, anche quella recente internazionale d'Europa, non indicano la presenza del Lias inferiore nei dintorni di Trevi, dove esse segnano invece il limite fra il Cretaceo e l'Eocene, fatta eccezione per la carta geologica ora pubblicata dal prof. Sacco (*L'Appennino Settentr. e Centrale*, 1 a 500.000), che più esattamente nella regione stessa segna una zona di Giuraliassico attigua al Cretaceo. Sarebbe utile quindi segnalare questo affioramento di Lias inferiore, quand'anche non presentasse l'interesse paleontologico, che effettivamente presenta e che deriva dalla fauna ricca e varia che contiene (2).

La cava (Bovara), dalla quale provengono i fossili, trovasi alla base del Monte di Trevi, alla distanza di circa 350 m. dalla strada maestra Spoleto-Trevi-Foligno, ed i fossili si raccolgono negli ultimi strati, più profondi, raggiunti nello scavo. Già dissi che lo stato dei fossili nel maggior numero dei casi non permette una determinazione specifica sicura; tuttavia il loro esame dimostra evidenti ed incontestabili rapporti colla fauna del Lias inferiore del M. Pisano e di varie località dell'Appennino Cen-

(1) B. Lotti, *Di un caso di ricuoprimento presso Spoleto (Umbria)*, " Boll. R. Com. Geol. ", 1905.

(2) G. Ponzi nel suo *Quadro geol. dell' Italia centr.* (" Atti Acc. pontif. dei N. Lincei ", XIX, 1866), cita per i Monti di Trevi una serie di banchi di calcarie bianche, più o meno cristalline, tenaci e compatte, ma la riferisce alla Creta e non accenna a fossili.

trale, la quale offre, come già si conosce, notevoli corrispondenze col Lias inferiore di Sicilia. Ma un'impronta speciale viene data a questa fauna dalla presenza di grossi megalodontidi, ch'io credo di poter riferire al genere *Pachyerisma* e che, insieme a qualche altra forma, accennano a probabili relazioni colla fauna, o meglio con qualcuna delle faune, dei calcari grigi del Veneto.

In Umbria già fu rimarcata la presenza di sezioni di grosse bivalvi cordiformi, forse *Megalodon* (1), nei calcari grigio-cupi del M. Malbe, immediatamente sottostanti al calcare bianco con gasteropodi del Lias inferiore. Data la posizione stratigrafica, questi megalodonti potrebbero essere *Conchodon* e gli strati che li contengono rappresenterebbero in questo caso la zona hettangiana (2). Non è improbabile del resto, che nell'Appennino Centrale qualche altra serie di calcari, con traccie di megalodonti e ritenuta triassica, corrisponda invece per età a questa di Trevi.

Completeremo queste notizie con un cenno sommario sui fossili riconosciuti specificamente e, nel maggior numero dei casi, soltanto genericamente.

Montlivaultia (?), modelli, sp. ind.

Terebratula, Rhynchonella, frammenti e sezioni; sp. sp. ind.

Gervilleia *Deshayesi* Terquem (*Pal. d. l'ét. inf. d. l. format. lias. de l. prov. du Luxemb. et de Hettange*, Mém. Soc. géol. de France, V, 1854, pag. 315. Tav. XXI, fig. 13). Valva esattamente corrispondente alla figura. Questa specie, riscontrata già dal Capellini nell'Infralias della Spezia, fu trovata anche nei calcari ceroidi del Lias inferiore di Campiglia Marittima (Simonelli) e del M. Pisano (Fucini).

Gervilleia: modelli interni di una grande specie, bassa, rigonfia e trasversalmente assai allungata; ricorda la *G. inflata* Schaf. dell'Infralias.

Pecten: somiglia assai al *P. amphiarotus* Di Stef. var. *atropus* Greco (*Il Lias inf. nel circ. di Rossano Calabro*, Mem. Soc. Tosc. Sc. Nat., XIII, 1893, pag. 85, tav. V, figg. 15, 16),

---

(1) B. Lotti, *Rilevam. geolog. nei dintorni del Lago Trasimeno, di Perugia e d'Umbertide*, " Boll. R. Com. Geol. ,, 1900.

(2) C. F. Parona, *Tratt. di Geolog.*, 1901-03, pag. 458 e 485.

ma il cattivo stato di conservazione non permette un confronto decisivo.

Myoconcha: modello interno; per la sua forma breve ed alta, per la sua affinità colla *Myoc. lombardica* Hauer del Raibliano, potrebbe derivare da un grande esemplare della *M. etrusca* FUCINI (*Fauna dei calc. bianchi ceroidi con* Phyll. cylindricum *del M. Pisano*, Mem. Soc. Tosc. Sc. Nat., XIV, 1894, pag. 110, tav. VIII, fig. 6), che l'aut. confrontò appunto colla specie ricordata del Trias superiore lombardo.

Myoconcha: modello di piccolo esemplare di forma allungata; forse appartiene alla *M. scabra* Terq. et Piette, specie abbastanza comune nel Lias inferiore anche in Italia.

Macrodon *Spallanzanii* GEMMELLARO (*Sui foss. d. calc. crist. d. Mont. del Casale e di Bellampo n. prov. di Palermo*, Giorn. Sc. Nat. ed. Econ., Palermo, XIII, 1878, pag. 384, tavola XXIX, figg. 7, 8): il modello interno e parte dell'impronta dell'esterno del guscio permettono il riferimento con relativa sicurezza.

Cardinia: modello interno, che probabilmente appartiene alla *C. hybrida* Sow., già riscontrata nel Lias inferiore di Lombardia, M. Pisano, Calabria e Sicilia.

Opis: modello interno: non è paragonabile coll'*Opis* sp. n. FUCINI (*Lamellibr. di Lias inf. e med. dell'App. Centr.*, Mem. Soc. Tosc. Sc. Nat., XXI, 1905) ed è affine all'*O. Michelinea* BUVIGNIER (*Stat. dép. d. l. Meuse,* 1852, tav. XIV, fig. 18).

Pachyerisma (= *Pachymegalodon*): modelli di varie dimensioni e frammenti di modelli; il modello più grande misura mm. 115 in altezza, mm. 105 in larghezza e mm. 94 in spessore. Per queste notevoli dimensioni e per l'aspetto generale, a prima impressione, ricordano, sebbene meno globosi, il *Conchodon infraliasicus* Stopp.; se non che l'esame delle vestigia dell'apparato cardinale dimostra tosto che i modelli di Trevi non possono appartenere al gen. *Conchodon*, e per lo stesso motivo devo escludere che si tratti del gen. *Neomegalodon,* al quale il FUCINI (op. cit., 1894, pag. 116, tav. VIII, fig. 12) riferì una valva destra, trovata nel Lias inferiore del M. Pisano, distinguendola col nuovo nome specifico di *Neomeg. etruscus*. I caratteri dell'apparato cardinale, quali risultano dai modelli ben conservati, mi persuadono che questi fossili appartengono al gen. *Pachye-*

risma, sia per la posizione e traccia dei denti e delle fossette, come per l'impressione degli adduttori, posteriore ed anteriore; quest'ultima indicata da robusto ed alto rilievo, che ne attesta la profondità nello spessore del guscio. Aggiungasi a conferma il fatto della evidente somiglianza di questa forma di Trevi col *Pach. chamaeformis* (Schloth.), così ben rappresentato nella fauna dei *calcari grigi* del Veneto (L. Tausch, *Zur Kenntn. d. Fauna d. Grauen Kalke d. Süd-Alpen*, Abhandl. d. k. k. geol. R. A., XV, Wien, 1890, pag. 28, tav. IV) ed illustrato e discusso nel suo riferimento generico da G. Boehm (*Megalodon, Pachyerisma und Diceras,* Ber. d. Nat.-forsch. Gesell., Freiburg i. B., 1891). Non conosco modelli interni di questa specie, che mi permettano un confronto decisivo riguardo al riferimento specifico, poco giovando allo scopo le figure di modelli artificiali dati da Gümbel (*Die Dachsteinbivalve*, ecc. Sitzungsb. d. Akad. d. Wiss., Wien, 1862, pag. 376, tav. VII); d'altra parte le grandi dimensioni, che non mi risulta siano raggiunte dal *Pachyer. chamaeformis*, e certe impressioni di solchi e pieghe longitudinali, evidenti specialmente nella regione palleale dei modelli di Trevi, delle quali non vedo traccia sulla superficie interna delle valve dello stesso *Pachyer. chamaeformis* disegnate dagli autori, mi lasciano forti dubbi sulla identità delle specie di Gümbel colla nostra di Trevi. Se, come voglio ancora sperare, mi sarà dato di procurarmi qualche parte delle valve che mi permetta un riferimento specifico sicuro, descriverò più dettagliatamente e colle figure necessarie questo interessante megalodonte.

Lucina, o meglio *Lucinidae*: modelli interni di almeno tre forme.

Cardium: per quanto si può giudicare dal modello interno e dall'impronta di una valva, pare corrisponda al *C. italicum* Fucini (op. cit., 1894, pag. 118, tav. VIII, fig. 13).

Cypricardia: un modello interno esattamente corrispondente a quello figurato da Stoliczka (*Gastrop. u. Aceph. d. Hierlatzschicht.*, Sitzungsb. d. k. k. Akad., Wien, 1861, pag. 124, tav. V, fig. 5*e*) mi lascia ritenere probabile la presenza della *Cypr. Partschi* Stol.

Pleuromya: modello interno parzialmente ricoperto dal guscio; con riserva può essere riferito alla *Pleur. striatula* (Ag.)

(DUMORTIER, *Dép. jur. Bass. d. Rhône*, II, 1867, pag. 49, tav. X. figg. 1, 2, 3) del Lias inferiore.

Pleurotomaria: modello; forma appartenente al gruppo delle *Pleurot. anglica* (Sow.).

Discohelix: impronta; si direbbe forma intermedia fra il *Discoh. Lorioli* GEMMELLARO (op. cit., pag. 362, tav. XXVII, figg. 52-54), specie del Lias inferiore di Sicilia, del M. Pisano, e di Campiglia Marittima (FUCINI, op. cit., 1894, pag. 160) ed il *Discoh. spinicosta* STOLICZKA (op. cit., pag. 185. tav. IV, fig. 15), somigliando più al primo per la rapidità della spira, più al secondo per il maggior numero dei cercini.

Neritopsis: l'impronta lascia credere che sia il *N. Bosniaskii* FUCINI (op. cit., 1894, pag. 156, tav. X, fig. 4).

Climacina: pel distinto andamento scalariforme della spira corrisponde alla *Cl. Mariae* GEMMELLARO (op. cit., pag. 245, tav. XXII, figg. 30-35), specie trovata già da CANAVARI (*Foss. d. Lias inf. del Gran Sasso d'Italia*, Atti Soc. Tosc. Sc. Nat., VII, 1885, pag. 288) nell'Appennino.

Pseudomelania: modelli ed impronte; una forma allungata sembra debba corrispondere alle *Pseudomel. Falconeri* GEMMELLARO (op. cit., pag. 264, tav. XXI, figg. 22 e 23), specie del Lias inferiore, già da me riscontrato nell'Appennino Centrale (C. F. PARONA, *Contrib. allo stud. d. fauna liass. dell'App. Centr.*, Mem. d. Acc. Lincei, 1883, pag. 85); ed un'altra più tozza ricorda piuttosto le *Pseudom. Marii* Gemm. (ibid., pag. 265, tav. XXI, figg. 24 e 25).

Juliana: numerosi modelli interni di varia grandezza; l'ultimo giro di un modello incompleto ha la larghezza di mm. 80, il che dimostra che la specie raggiungeva dimensioni assai notevoli. La forma dei giri corrisponde esattamente a quella della *Juliana Sariana* FUCINI (op. cit., 1894, pag. 189, tav. XII, fig. 9); le pieghe trasverse sono appena accennate sul modello interno e di rado si notano traccie dei nodi al margine suturale, che tuttavia sono ben impressi sopra un'impronta.

Chemnitzia: numerosi modelli interni, di specie diverse, riferibili a questo genere (s. l.).

Nerinella: parecchi modelli interni appartenenti ad una forma affine alla *Nerinea (Aptyxiella) norigliensis* TAUSCH (op. cit., pag. 35, tav. I, fig. 5) ed alla *Nerinea atava* SCHMID (*Ueber*

d. Foss. d. Vinicaberges bei Karlstadt in Croatien, Jahrb. d. k. k. geol. R. A., 1880, Bd. XXX, pag. 723, tav. XI, fig. 1). La mancanza del guscio non permette di dire a quale delle due meglio corrisponda; a quanto pare dalle figure, differisce specificamente dall'una e dall'altra per la maggior altezza della piega interna del labbro.

Cerithium: certe impronte dànno un modello strettamente affine, se non esattamente corrispondente, al *C. cristallinum* Gemmellaro (op. cit., pag. 295, tav. XXIII, figg. 51, 52).

Cerithinella: l'andamento della spira e l'ornamentazione del guscio, rimasto per breve tratto impresso sulla roccia, lasciano ritenere che certi esemplari corrispondano alla *Cerithin. elegans* Gemmellaro (op. cit., pag. 285, tav. XXIII, figg. 34 e 37, tav. XXV, fig. 23). Altri modelli, che si ricavano da impronte, corrispondono esattamente alla *Cerithin. italica* Gemm. (ibid., pag. 284, tav. XXIII, figg. 30-33). Altri ancora sono con dubbio riferibili alla *Cerithin. cerithiformis* Gemm. (ibid., pag. 289, tav. XXIII, figg. 49-50). La seconda di queste specie, la *Cerithin. italica*, fu già citata per l'Appennino Centrale da Canavari (*Nuove corrispond. paleontol. tra il Lias inferiore di Sicilia e quello dell'Appenn. Centr.*, Proc. verb. Soc. Tosc. Sc. Nat., 1891, pag. 293).

Fibula (?): forme di grandi dimensioni, superando in altezza 100 mm.; nei caratteri specifici somiglia assai alla *Fib. Gastaldii* Gemm. (in Fucini, op. cit., 1894, pag. 201, tav. XIII, figg. 1, 2).

Alaria: modello incompleto ed impronta dell'ultimo giro, paragonabile alla *Al. Capellinii* Gemmellaro (op. cit., pag. 309, tav. XXV, figg. 48, 49).

Per merito del prof. I. Chelussi, che raccolse i fossili e che gentilmente me li inviò, posso aggiungere che questa stessa fauna, nelle identiche condizioni di fossilizzazione, si ritrova nel calcare bianco oolitico e pisolitico del Lias inferiore di Val del Canale, di fronte a Piobbico, sulle falde del M. Nerone. Sono modelli interni affatto simili di *Pleurotomaria, Chemnitzia, Lucina, Pecten*, con frammenti di megalodonti e di impronte di arietite e modelli di *Montlivaultia*.

Relazione sulla memoria del Prof. Federico Sacco, *Resti fossili di Rinoceronte dell'Astigiano.*

Il prof. Sacco pubblicò nel 1895 un accurato studio sullo scheletro del Rinoceronte fossile di Dusino, ed ora con questo nuovo lavoro descrive opportunamente gli altri resti di Rinoceronte finora rinvenuti nei terreni pliocenici marini e, specialmente, continentali dell'Astigiano, che si conservano nel Museo paleontologico di Torino.

Si tratta per la maggior parte di denti isolati e di mandibole colle relative serie dentali, appartenenti a numerosi individui, giovani e vecchi, che l'A. studia in confronto colle parti corrispondenti del *Rhinoceros etruscus* Falc.; pochi invece e meno importanti sono gli ossami descritti, cioè alcune ossa delle estremità. L'interesse del lavoro sta essenzialmente nel fatto della relativa rarità di questi fossili, chè da molti anni non se ne rinvennero altri nei nostri terreni, e nel costituire essi una serie abbastanza completa di parti dentali, appartenenti ad individui di diversa età e quindi di vario sviluppo, nonchè di varia logorazione della superficie triturante; ciò che permette di stabilire confronti con resti consimili di altre regioni, ed anche di meglio conoscere le modificazioni verificatesi negli apparati dentali dei Rinoceronti pliocenici. I lavori che aumentano le nostre cognizioni sugli avanzi dei mammiferi pliocenici, e segnatamente di quelli continentali, hanno importanza particolare non solo paleontologica, ma anche geologica, in considerazione dei dati utili ch'essi portano alle indagini relative alla fauna ed alle condizioni d'ambiente del periodo che precedette l'invasione glaciale. Però i sottoscritti propongono l'accettazione dello scritto del prof. Sacco per la stampa nelle Memorie.

L. Camerano,
C. F. Parona, *relatore.*

L'Accademico Segretario
Lorenzo Camerano.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 10 Dicembre 1905.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Ferrero, Direttore della Classe, Rossi, Manno, Carle, Cipolla, Brusa, Allievo, Carutti, Pizzi, De Sanctis, Ruffini e Renier Segretario. — Scusa l'assenza il Vice Presidente Boselli.

Si approva l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 26 novembre 1905.

Il Presidente presenta un volume dell'Avv. Pietro Manfredi: *Cesare Cantù, la biografia ed alcuni scritti inediti o meno noti*, Torino, Unione tip.-editrice, 1905.

Il Socio Cipolla fa omaggio, in nome dell'autore, del volume di Giacinto Romano, *Niccolò Spinelli da Giovinazzo diplomatico del sec. XIV*, Napoli, tip. Pierro, 1902. Il Prof. Romano, facendo dono di questa sua opera, novamente ringrazia pel premio Gautieri per le discipline storiche che gli fu conferito.

Il Direttore della Classe Socio Ferrero regala a nome del Dott. Giovanni Carbonelli un ritratto del Dr. Francesco Rossi, chirurgo insigne, il quale lasciò già all'Accademia i proprii manoscritti.

Il Socio Renier incaricato col Socio Cipolla di riferire intorno alla monografia dei Professori Giulio Bertoni e Cesare

Foligno, *La " Guerra d'Attila „ poema franco-italiano di Nicola da Casola*, legge la relazione, che è inserita negli *Atti*. La Classe approva la relazione con votazione palese e presa conoscenza della monografia, ne delibera con votazione segreta l'inserzione nelle *Memorie* accademiche.

Il Socio De Sanctis presenta per le *Memorie* uno scritto del Prof. Paolo Ubaldi, *Appunti sul " Dialogo storico „ di Palladio*. Il Presidente designa a riferirne in una prossima tornata il Socio proponente De Sanctis insieme col Socio Savio.

Per l'inserzione negli *Atti* il Socio Cipolla presenta una sua Nota su *Francesco Petrarca canonico di Pisa nel 1342*, esponendone in breve il contenuto.

Raccoltasi quindi la Classe in adunanza privata, procede alla nomina di un Socio nella 2ª Giunta del premio Bressa e di un altro nella Commissione pel premio Vallauri.

Nella 2ª Giunta pel premio Bressa riesce eletto il Socio Pizzi. Nella Commissione pel premio Vallauri riesce eletto il Socio Ruffini.

LETTURE

Francesco Petrarca canonico di Pisa nel 1342.

Nota del Socio CARLO CIPOLLA.

L'amicizia del Petrarca con Clemente VI fu non meno ferma, che viva ed affettuosa. Quel pontefice non tralasciò occasione per dimostrargli quanta stima egli avesse del suo sapere. Ciò è ben noto, e ne parlano ampiamente i biografi del poeta (1).

Il De Sade (2) pubblicò la parte più importante di una lettera che Clemente VI scrisse in favore del Petrarca, pure nel primo anno del suo pontificato, concedendogli il priorato di San Nicola di Migliarino (3), in quel di Pisa. Porta la data del 7 ottobre 1342 (4).

La notizia di questa concessione passò dal libro del De Sade ai posteriori biografi, dai quali fu collegata con alcuni avvenimenti, che si riferiscono alle relazioni fra Roma e il nuovo pontefice.

Clemente VI (Pietro Roger) era stato eletto pontefice il 7 maggio 1342; appena pochi giorni appresso, il 19 di quel mese, festa della Pentecoste, fu coronato (5). La solennità della coronazione fu compiuta coll'assistenza di molti illustri personaggi, parecchi dei quali sono stati ricordati in una antica vita

(1) G. Körting, *Petrarca.* Lipsia, 1878, p. 200.

(2) *Mémoires pour la vie de Fr. Pétrarque,* II, 47; III, *pièces justif.*, p. 54.

(3) Frazione di Vecchiano.

(4) La riproduco in fine a questa Nota sotto il n. II. Nel mio ultimo soggiorno a Roma, mancandomi il tempo di rivederla sul registro originale, gentilmente mi sovvenne la dotta amicizia di Mons. Marco Vattasso, al quale e per questa e per altre cortesie, esterno qui i miei ringraziamenti. L'edizione del De Sade lascia un po' a desiderare.

(5) Eubel, *Hierarchia,* I, 17.

del pontefice (1). In questa stessa biografia si parla dell'ambasciata che gli inviarono i Romani. Fu un'ambasciata solenne, composta di diciotto autorevoli personaggi, incaricati di chiedere al papa tre cose: che accettasse la dignità di senatore; che venisse a Roma; che concedesse il giubileo per l'anno 1350. Parlarono a Clemente VI Stefano Colonna, Francesco di Vico e Lello Cosecchi. Due mesi dopo il Papa rispose accettando, ma condizionatamente, gli offici, dichiarando di non poter recarsi a Roma, concedendo il giubileo. Secondo la *Vita* di Cola di Rienzo (2), l'ambasciata era composta soltanto di dodici personaggi, e le risposte del Papa furono in qualche parte diverse. Non è questo il luogo di esaminare più dappresso le vicende dell'ambasciata romana. Ma bene accennerò all'opinione secondo la quale il Petrarca era uno degli ambasciatori. Ciò è ammesso tanto dal De Sade (3), quanto dal Rinaldi (4). Il Körting (5) raccoglie la voce, ma non sa decidersi nè ad accettarla, nè a respingerla. Il Gaspary (6) prudentemente vi scivola sopra, e si accontenta di dire che il Petrarca si recò in Francia nella primavera del 1342. Tutti poi in questa occasione rammentano l'epistola poetica dal Petrarca indirizzata a Clemente VI per rinnovare a lui l'invito, già fatto a Benedetto XII, di ritornare a Roma. Anzi si avverte come la concessione del priorato di Migliarino sia da considerarsi quale un ricambio al carme (7).

Un nuovo documento in cui mi imbattei sfogliando i volumi delle *Communes* (*Reg. Avin.*) del I anno del pontificato di

(1) È la *Vita tertia* edita dal Baluzio. Cito l'ediz. del MURATORI, *R. I. S.*, III, 2, 571.

(2) Presso MURATORI, *Ant. Ital.*, III, 343. — VILLANI, XII, 11, parla del giubileo concesso da Clemente VI, ma nulla dice intorno all'ambascieria dei Romani.

(3) *Mémoires*, II, 46-7.

(4) *Annales Eccles.*, a. 1342, §§ 20-21.

(5) Op. cit., p. 201.

(6) *Storia della letter. ital.*, I, 354; trad. N. Zingarelli. Similmente aveva fatto GREGOROVIUS, *Storia di Roma*, trad. Manzato, VI, 362, senza neanche accennare al tempo al quale si debba ascrivere il ritorno del Poeta in Provenza. E a tutti questi in tale condotta guardinga era stato guida il MURATORI, *Annali*, a. 1342.

(7) DE SADE, II, 47; GREGOROVIUS, ed. venez., VI, 262-3; GASPARY, 1, 356.

Clemente VI (1), e che qui pubblico nelle sue parti essenziali, mi fa pensare che il Petrarca non partisse dall'eterna città insieme cogli oratori dei Romani, ma si trovasse invece prima in Avignone e che anzi fosse probabilmente presente alla coronazione del nuovo pontefice. Ben può ammettersi che, venuti gli oratori di Roma, egli si unisse ai medesimi, e in favor loro scrivesse il carme famoso. Ciò non è contraddetto da quanto mi sembra risultare dalle ragioni cronologiche. Chè anzi, mentre il nuovo documento conferma la ben conosciuta amicizia del Petrarca per il card. Giovanni Colonna, rende sempre più probabile che il Poeta si avvicinasse tosto a Stefano Colonna, padre del cardinale (2), ch'era, come dicemmo, fra i principali dell'ambascieria.

Scorrendo i Registri Avignonesi trovai adunque l'epistola, in data 22 maggio 1342, con cui il Papa, a preghiera di Giovanni Colonna, cardinal di S. Angelo, concesse a Francesco Petrarca un canonicato a Pisa (3). Che a Petrarca sia stata conferita tale dignità non si conosceva (4). Se tutto quanto riguarda il Poeta ha interesse, si potrà trovare non inutile anche tale notizia; ma il valore suo parmi dipenda sopra tutto dalla data. Clemente VI, dirigendo la sua epistola al Petrarca, sotto una data che quasi si identifica con quella della sua coronazione, fa veramente pensare ch'egli volesse dare al personaggio da lui tanto stimato un ricordo della propria elevazione al pontificato.

Nè si dimentichi che, se l'epistola è datata dal 21 maggio, si può credere facilmente ch'essa sia stata pensata e preparata alcuni giorni innanzi. Tutto quindi concorre a farci ritenere che sino dagli albori del suo papato, Clemente VI abbia amato e stimato il Petrarca, e a farci sospettare che questi siasi trovato

---

(1) Vedi il II dei Documenti, al fine.

(2) Litta, *Famiglia Colonna*, tav. V. Che Stefano Colonna tenesse nell'ambascieria posto principale risulta anche dalla *Vita* di Cola, loc. cit.

(3) Nello stesso giorno, pure coll'intervento del card. Giovanni Colonna, Clemente VI concesse una grazia anche ad un intimo amico del Petrarca, Luigi Sante de Beeringen, cfr. Berlière, *Un ami de Pétrarque*, Rome-Paris, 1905, pp. 11, 34-5.

(4) Il Gaspary, I. 355, ricorda soltanto ch'egli ebbe " un priorato nella diocesi di Pisa, una prebenda e poi un arcidiaconato in Parma ". Un più ampio elenco delle prebende godute dal Petrarca tesse il Berlière (p. 14), ma senza comprendere in esse il canonicato di Pisa.

in Avignone in quei momenti solenni, e che all'ambascieria dei Romani siasi quindi riunito solo in Provenza, alla Corte pontificia (1), senza avere viaggiato con essa.

Dell'amicizia del Petrarca verso il card. Giovanni Colonna rimangono testimonianze moltissime. Ricco fu il carteggio del Poeta col Cardinale. Nel presente documento il Petrarca viene anzi qualificato come suo cappellano. Non molto tempo appresso, sul cadere del 1343, Clemente VI inviò il Petrarca a Napoli, al fine di tutelare gli interessi e i diritti della Santa Sede, in occasione della morte di re Roberto e della successione della regina Giovanna. Questa bene accolse il Poeta e lo nominò cappellano di Corte (2). Il nostro documento c'insegna che il Petrarca portava già il titolo di cappellano, rivestendo tale officio presso uno dei suoi migliori protettori ed amici.

Documento I.

1342, maggio 22; Avignone. — Clemente VI, a preghiera del card. Giovanni (Colonna) del titolo di S. Angelo, conferisce a Francesco Petrarca, in vista dei suoi meriti letterarî e delle sue virtù, un canonicato a Pisa. — Incarica della immissione in possesso il vescovo di Teano e gli abati de' monasteri Pisani di S. Savino e di S. Zenone.

Dilecto filio Francisco Petraccho de Florentia canonico Pisan., salutem etc. Licterarum scientia, vita ac morum honestas aliaque tibi suffragantia merita probitatis, super quibus apud Nos fidedigno commendaris testimonio, promerentur ut personam tuam apostolice liberalitatis gratia prosequamur. Hinc est quod Nos volentes tibi, premissorum meritorum tuorum intuitu, nec non consideratione dilecti filij nostri Johannis Sancti Angeli diaconi cardinalis pro te, capellano suo, in hac parte humiliter supplicantis, gratiam facere specialem, canonicatum Ecclesie Pisane, cum plenitudine iuris canonici, apostolica tibi auctoritate conferimus et de illo etiam providemus. Prebendam vero, si qua in eadem Ecclesia vacat ad presens, vel cum vacaverit, quam tu

(1) Anche Luigi Sante di Beeringen, che Petrarca soprannominò Socrate, usava soggiornare in Avignone, nè alla deliziosa vita che colà si menava volle rinunciare, neanche per seguire il Petrarca, che lo invitava più tardi in Italia; cfr. Berlière, p. 15.

(2) De Sade, II, 147; Gaspary, I, 213.

per te, vel procuratorem tuum ad hoc legitime constitutum, infra unius mensis spacium postquam tibi, vel eidem procuratori vacatio illius innotuerit, duxeris acceptandam, conferendam tibi post acceptationem huiusmodi, cum omnibus iuribus et pertinentijs suis, donationi apostolice reservamus, inhibentes venerabili fratri nostro... Archiepiscopo et dilectis filijs Capitulo Pisan., ac illi vel illis ad quos in eadem Ecclesia prebendarum collatio, seu quevis alia dispositio comuniter vel divisim pertinet, ne de illa interim, etiam ante acceptationem predictam, nisi postquam eis constiterit, quod tu, vel procurator predictus illam nolueritis acceptare, disponere quoquo modo presumant, ac decernentes ex nunc irritum — Non obstantibus de certo canonicorum numero et quibuslibet aliis statutis et consuetudinibus ipsius Ecclesie contrarijs — Nulli ergo — Datum Avinione, xj kl. iunij, anno primo.

In eodem modo ven. fratri... episcopo Theanensi et dilectis filijs.. Sancti Savini Pisan. Diocesis, ac... Sancti Zenonis Pisan. monasteriorum abbatibus, salutem etc. Litterarum scientia — Quo circa mandamus — eundem Franciscum, vel procuratorem suum, eius nomine, ex nunc auctoritate nostra in dicta Ecclesia Pisan. recipi facientes in canonicum et in fratrem, stallo sibi in choro et loco in capitulo ipsius Ecclesie, cum plenitudine iuris canonici, assignatis; prebendam vero huiusmodi per Nos ut premittitur, in eadem Ecclesia reservatam, si tempore huiusmodi reservationis nostre vacabat ibidem et ex tunc vacavit, aut quam primum eam inibi vacare contingerit, eidem Francisco, post acceptationem huiusmodi, cum omnibus iuribus et pertinentijs suis, auctoritate Nostra conferre et assignare curetis, inducentes eum, vel procuratorem suum pro eo, in corporalem possessionem prebende — Contradictores autem — Datum ut supra (1).

Documento II.

1342, ottobre 7; Avignone. — Clemente VI ordina al vescovo di Teano, e agli abbati dei monasteri di S. Zeno di Pisa e di S. Porziano presso Lucca, di dare a Francesco Petrarca il possesso del priorato di s. Nicolò di Migliarino, diocesi di Pisa, ch'egli, di moto proprio, aveva al medesimo concesso in vista dei suoi meriti letterarî e delle sue virtù.

Venerabili fratri... episcopo Theanensi et dilectis filijs... Sancti Zenonis Pisan. ac Sancti Ponciani iuxta Lucam monasteriorum abba-

(1) Clemens VI a. I, pars XV, t. XV; *Reg. Avin.*, vol. 70, f. 206 *r* - 206 *v* (Litterae Communes).

tibus, salutem etc. Litterarum scientia, morum decor, vite mundicia, et alia multiplicia in dilecto filio Francisco Petraco, clerico fiorentino, ingentia dona virtutum, super quibus laudabilia sibi testimonia perhibentur, rationaliter Nos inducunt, ut sibi reddamur in exhibitione gratie liberales. Cum itaque, sicut acepimus, prioratus secularis ecclesie sancti Nicolai de Miliarino, Pisan. diocesis, sine cura, per obitum ultimi prioris eiusdem ecclesie, qui extra Romanam Curiam diem clausit extremum, tanto tempore vacaverit et adhuc vacare noscatur, quod eius collatio, iuxta Lateranensis concilii statutum, est ad Sedem apostolicam legittime devoluta, Nos volentes dicto Francisco, horum (1) suorum meritorum obtentu, gratiam facere specialem, discretioni vestre, motu proprio, non ad ipsius Francisci vel alterius pro eo nobis oblate petitionis instantiam, sed de mera nostra liberalitate, per apostolica scripta mandamus, quatenus vos, vel duo, aut unus vestrum, per vos, vel alium, seu alios, dictum prioratum, si premisso, vel alio quocumque modo vacet, et qualitercunque ipsius provisio vel dispositio ad Nos spectet, dummodo tempore datationis presentium non sit in eo alicui ius specialiter acquisitum, prefato Francisco, cum omnibus iuribus et pertinentijs suis, auctoritate Nostra, conferre et assignare curetis, inducentes eum, vel procuratorem suum eius nomine, in corporalem possessionem prioratus ac iurium et pertinenciarum predictarum — Datum Avinione, nonis octobris, anno primo (2).

(1) *Ms.* huius.

(2) Clemens VI, a. I, pars I, t. I, *Reg. Avinion.*, vol. 56, f. 285 *r.* (Littere communes).

Relazione intorno alla Memoria del prof. Giulio Bertoni e del dr. Cesare Foligno: *La " Guerra d'Attila ", poema franco-italiano di Nicola da Casola.*

È cosa risaputa che nella Biblioteca Estense di Modena si conserva, in due grossi tomi, l'unico manoscritto esistente del poema franco-italiano di Nicola da Casola sulla *Guerra d'Attila*. Di questo testo, notevole per vari rispetti, più d'uno studioso si è occupato, senza che peraltro finora nessuno ne discorresse in modo definitivo. I dottori Bertoni e Foligno, già noti, particolarmente il primo, per lavori filologici pregevoli, hanno condotto a termine uno studio laborioso su quel testo, scritto a mezzo del sec. XIV, ponendolo in relazione con le favole attilane, che prima correvano in Italia.

Nel primo capitolo, introduttivo, della loro monografia, gli autori cercarono di scoprire per entro alle opere degli storici, dei cronacisti e dei poeti, dal sec. V al XII, l'evolversi del racconto della guerra unnica, che a mano a mano andava ricoprendosi d'uno strato sempre più denso di favole. Ma ad esse favole non fu dato un carattere veramente nazionale, intorno a cui avrebbe potuto disporsi una schietta leggenda italica. Contro l'opinione dei più, sostengono gli autori che in Italia non s'ebbe intorno ad Attila una vera leggenda popolare costituita, sibbene spunti leggendarî qua e là risorgenti, raccolti in un organamento unico per opera d'un compilatore semidotto.

Nel cap. II diedero notizie sulla vita di Nicola da Casola, sin qui affatto sconosciuta. Ponendo a profitto le informazioni auto-biografiche ch'egli dà nel poema, gli autori fecero pure conoscere alcuni documenti da essi rintracciati negli archivi bolognesi, scarsi senza dubbio al desiderio nostro, ma pur sufficienti ad inquadrare entro certi limiti la vita del verseggiatore.

Ampia analisi del poema fu data nel cap. III e per mezzo di essa gli studiosi possono, per la prima volta, formarsi idea adeguata dell'intero componimento singolarissimo. Il poema conduce Attila dalla nascita canina sino alla presa e alla caduta di Altino; poi s'interrompe.

Nel cap. IV si ricercarono minutamente le relazioni fra il poema e un testo prosastico noto come *Liber Attilae*. Ritengono gli autori che secondo ogni probabilità la “ chronique major „ a cui Nicola si richiama spesso nel suo poema dovette concordare, se non proprio coincidere, con un testo, di cui si fanno conoscere nove manoscritti, in latino, in italiano, in francese, mostrandone i rapporti reciproci.

Da ultimo i nostri due studiosi presero a considerare le principali figure della leggenda, ricercandone le origini storiche e favolose; si soffermarono sullo strano linguaggio usato dal Casola e, in appendice, diedero per saggio qualche estratto del poema e brani della *Vita d'Attila*, nel testo francese ed in quello latino.

Il lavoro, che rende per la prima volta possibile la conoscenza precisa d'un testo amplissimo e malagevole, merita molta considerazione. Quel testo, di qualunque valore esso sia, ci rappresenta la più estesa compilazione d'un ciclo notevole di tradizioni italiane intorno ad Attila. Gli autori ne hanno discorso con buona preparazione storica e filologica, sicchè l'opera loro potrà essere in più d'una parte discussa, ma è incontestabilmente utile e pregevole. Convinti che la pubblicazione di essa ridonderebbe a vantaggio degli studi sulle nostre tradizioni medievali, i sottoscritti ne propongono la lettura alla Classe.

Carlo Cipolla
Rodolfo Renier, *relatore.*

L'Accademico Segretario
Rodolfo Renier.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 17 Dicembre 1905.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: SALVADORI, Direttore della Classe, NACCARI, JADANZA, FUSARI, GUIDI, SOMIGLIANA, GRASSI, MORERA, SEGRE, GUARESCHI, MOSSO, MATTIROLO, PARONA, SPEZIA e CAMERANO, Segretario.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente.

Il Presidente presenta tre opuscoli di argomento geologico inviati in dono dal Socio corrispondente A. ISSEL.

Il Socio GUARESCHI fa omaggio alla Classe del suo Discorso inaugurale dell'Università di Torino per l'anno accademico 1905-6, intitolato: *La chimica e le arti.*

Il Socio MOSSO fa omaggio del suo volume: *Vita moderna degli Italiani.*

Il Socio GUIDI fa omaggio delle sue *Lezioni sulla scienza delle costruzioni;* Appendice: *Le costruzioni in beton armato.*

Il Presidente ringrazia gli egregi donatori.

Viene presentata per l'inserzione negli *Atti* la nota seguente:

P. L. PREVER, *I terreni nummulitici di Gassino e di Biarritz*, dal Socio PARONA.

Il Socio Camerano, a nome anche del Socio Salvadori, legge la relazione intorno alla Memoria del Dr. Luigi Cognetti de Martiis, intitolata: *Gli Oligocheti della regione neotropicale;* Parte II. La relazione conchiude per l'accoglimento della memoria stessa. La Classe all'unanimità approva la relazione e pure all'unanimità con votazione segreta approva la stampa della memoria del Dr. Cognetti nei volumi delle *Memorie* accademiche.

Il Socio Fusari presenta per l'inserzione nelle *Memorie* il lavoro del Dott. B. Nicola, intitolato: *Sullo sviluppo, sui canali perforanti e sulle fessure della porzione laterale dell' " ala magna " dell' " os sphenoidale " nella specie umana.*

Il Presidente delega i Soci Fusari e Camerano per riferire in una prossima seduta intorno alla memoria del Dott. Nicola.

LETTURE

I terreni nummulitici di Gassino e di Biarritz.

Nota del Dr. PIETRO LODOVICO PREVER.

A circa due chilometri dal suo sbocco presso Gassino la Valle Maggiore mostra un rilievo collinoso erto; foggiato a cupole, coperto nella sua quasi totalità da boschi, e che pare debba sbarrarla. Effettivamente esso, più alto delle vicine colline, e con andamento pressochè normale a quello della valle, dalla quale è diviso in due porzioni ineguali, la restringe notevolmente, ove l'attraversa, a motivo della maggiore resistenza opposta dagli elementi suoi costitutivi all'azione erosiva delle acque. Salendo il suo erto declivio si nota come il rilievo sia compreso fra marne alternate con sottili straterelli di calcari arenacei a nord, e un complesso di strati calcareo-marnoso-sabbiosi a sud, sui quali si appoggia. Esso è formato da un insieme di numerosissimi strati di ghiaia cementata, talora minuta assai, talora grossa, alternanti con lenti, banchi e strati sabbiosi, più raramente marnosi, in modo da costituire un orizzonte di strati conglomeratici con una immersione sempre assai ragguardevole, talora fortissima. Costeggiando questi conglomerati ci accorgiamo che essi costituiscono una sorta di grande fascia, ellittica all'incirca, la quale circonda quell'insieme di strati calcareo-marnoso-sabbiosi, sopra ricordati, solamente interrotta sul lato nord per un tratto della lunghezza di circa due chilometri. Questa grande fascia circonda il più notevole affioramento del *Luteziano* che si conosca in tutto il Piemonte; importante per la sua ricchezza in fossili, *Molluschi*, *Echinodermi*, *Briozoi*, avanzi di *Pesci*, *Foraminiferi*, fra cui importanti assai le *Nummuliti* e le *Ortofragmine*. Eocenica essa pure (1), rappresenta il *Bartoniano*, ma, all'op-

(1) Durante la compilazione della presente nota ci giunge il *Compte-rendu sommaire de la réunion extraordinaire de la Société Géologique de France en Italie, à Turin et à Gênes* (5-12 settembre 1905) in cui leggiamo

posto degli strati luteziani che ricinge, è assai povera di fossili. Finora solo pochi frammenti di *Bivalvi*, qualche *Briozoo*, e piccoli e scarsi *Lithothamnium* furono rinvenuti nelle sabbie alternanti coi conglomerati; altri fossili non furono trovati fuorchè *Nummuliti* e *Ortofragmine*. Riescono però questi, le *Nummuliti* specialmente, assai interessanti e di validissimo aiuto nella determinazione dell'età della formazione, a motivo dei confronti veramente notevoli che si possono istituire fra di esse e quelle degli strati bartoniani di Biarritz e dell'isola di Wight.

Esse si incontrano a diverse altezze nella serie degli strati conglomeratico-sabbiosi, ma ove indiscutibilmente sono più abbondanti si è nella prima zona sabbiosa, che si trova alla base dei conglomerati stessi. In essa, sulla destra e sulla sinistra di Val Maggiore, cioè presso la regione Caviggione presso Villa Laurenti, lungo la cresta collinosa di Costa Battajna, nelle cave vicino a Tondenito, e lungo la provinciale La Ressa-Bardassano, e alla Trinità di Gassino si trovano frequenti e ben conservate. Il punto in cui vennero più cercate, e da più lungo tempo, è sulla cresta di Costa Battajna, presso la cascina omonima, sulla vecchia strada che da Gassino, per Tondenito e Bardassano, porta a Sciolze. Ivi, il cav. Di Rovasenda, ben noto per le sue ricche collezioni di fossili terziarii delle nostre colline torinesi, in numerosi anni di continue e pazienti ricerche, riuscì a ritrarne parecchie migliaia di esemplari, rappresentanti un discreto numero

con sorpresa (pag. 153) che Dollfus assimila la puddinga ad *elementi rimaneggiati* della Trinità, al disopra di Gassino, al *Burdigaliano* " *car, par discordance, on rencontre autour de Gassino une longue série de molasse sur les deux flancs de l'axe de la Superga avec intercalations des poudingues avec gros blocs erratiques* „. Abbiamo scritto " *con sorpresa* „ perchè noi stessi personalmente abbiamo menzionato all'eminente geologo francese che nei conglomerati, che circondano i calcari e le marne di Gassino, sono presenti delle *Nummuliti*, tra cui citammo la *Laharp. gassinensis*. Ora Dollfus sa benissimo che le *Nummuliti* non rimontano nella serie terziaria sino al *Burdigaliano*; da Tellini, parecchi anni sono, e più tardi dallo scrivente ne furono raccolte alla Trinità di Gassino nelle sabbie intercalate ai conglomerati in discorso, i quali non sono rimaneggiati, ma sibbene in posto: e sono la continuazione di quelli di Costa Battajna, per rispetto ai quali sono simmetrici, occupando la stessa posizione sull'altra ala dell'anticlinale, e nei quali raccogliemmo, oltre la citata *Laharpeia*, numerose altre forme, tra cui *Par. contorta, Par. Orbignyi, Par. miocontorta.*

di forme. Inoltre nel medesimo punto ne raccolsero pure il Professore Sacco e il Sig. Forma. Ivi ed altrove e in orizzonti più recenti, ne raccolsero ancora Di Rovasenda, Tellini, Dervieux e noi stessi.

I fossili della formazione luteziana sottostante (esclusivamente ed unicamente sino ad oggi riferita all'*Eocene*, attesochè i conglomerati soprastanti venivano riferiti all'*Oligocene*, il quale invece manca affatto) furono già illustrati; i resti di *Pesci* dal Prof. Bassani, i *Cefalopodi* dal Prof. Parona, gli altri *Molluschi* dal Prof. Sacco, gli *Echinidi* dal Dott. Airaghi, i *Lithothamnium* dal Dott. Capeder, le *Filliti* dal Dott. Peola, ed attualmente i *Foraminiferi* formano l'oggetto di uno studio particolareggiato da parte del Dott. Silvestri (1) e di noi. Cotesti depositi inferiori riferibili tutti al *Luteziano* si possono definire come calcari a *Lithothamnium*, a motivo della grandissima diffusione loro, e sono costituiti da un discreto numero di strati, più o meno potenti, di calcari compatti, semicristallini, o marnosi, arenacei, o di brecciole calcaree alternanti con altri strati marnosi bluastri, giallastri o grigiastri e con altri, meno frequenti, sabbiosi. Questi ultimi giallastri o verdastri contengono una fauna discretamente ricca, formata di *Foraminiferi* (*Nummuliti* e *Ortofragmine*), articoli di *Crinoidi*, radioli di *Cidaris*, *Brachiopodi* (*Terebratulina*, *Liothyrina*, *Hemitrys*, *Megathyris*, *Cistella*). Costituiti da una sabbia calcarifera, generalmente cementata, essi si ripetono parecchie volte nella serie tra gli strati calcarei e quelli marnosi, costituendo altrettanti orizzonti sabbiosi ben individuati, e dànno un indizio delle ripetute oscillazioni a cui andò soggetta questa porzione di bacino marino durante il periodo eocenico.

Dalla valle di Rio Maggiore, salendo a villa Defilippi, dopo aver costeggiato per un discreto tratto una parete ripida, arida, formata da marne bluastre con rari fossili, e di cui discorreremo fra poco, s'arriva in una prima cava (Defilippi) in cui attualmente pare abbandonato ogni lavoro. Sotto la piccola spianata, facimente soggetta a frane, su cui venne costrutta la villa, si scorgono delle marne rossastre prive di fossili, o nelle quali

(1) Nella presente nota i nomi di *Foraminiferi*, che non siano *Nummuliti* e *Orbitoidi*, li abbiamo tolti da un elenco gentilmente inviatoci dal Prof. Silvestri, che qui ci è grato ringraziare.

per lo meno sinora non ne furono trovati. Dietro la casa e sopra queste marne si apre la cava, in cui si mostrano allo scoperto diversi strati tutti ricchi assai in fossili. In essa passa l'asse dell'anticlinale, e vi è pure ben visibile la volta formata internamente da sottili strati marnosi, susseguiti da uno strato sabbioso potente un 50-70 cent., in cui si rinvengono dei *Brachiopodi*, e su cui si appoggia tutta un'alternanza di strati marnosi e calcarei più o meno potenti, nei quali si rinvengono *Molluschi* (*Aturia Rovasendiana*), *Echinidi*, *Ortofragmine*, *Nummuliti* (*Gümbelie* del tipo della *Gümb. spissa*, *Laharpeie* e *Paronee*). Salendo il sentieruolo che da cotesta cava conduce nella vigna Lard e Caviggione, a due riprese ci si affacciano delle cave appena iniziate, in cui si scorge sempre un'alternanza di marne e calcari, brecciole calcaree, il tutto assai più povero in fossili, tra i quali più non si rinvengono le *Gümbelie* e le *Laharpeie* accennate precedentemente, ma quasi esclusivamente delle *Paronee*.

Continuando la salita si cammina per un po' di tempo su marne alternanti con straterelli calcarei, e, dopo attraversato un orizzonte sabbioso, si arriva nel fosso in regione Caviggione, quasi sul principio del territorio della vigna Lard, ove affiorano altri strati calcarei, nei quali sono abbondantissime le *Ortofragmine* e le *Nummuliti*, tra cui *Par. complanata*, *Par. atacica*. Continuando il sentieruolo, per arrivare a villa Caviggione, si passa su delle marne bluastre, dure, assai potenti, scarse assai in fossili, le quali già abbiamo accennato essere visibili presso il sentiero che si prende per giungere alle cave Defilippi. A questo punto abbiamo raggiunto la vetta di una collina su cui scorre una stradetta che da villa Lard e Caviggione ci porta in basso presso la cappella di S. Martino sulla strada Gassino-Sciolze, e, se noi la discendiamo, cominciamo coll'osservare una serie di piccoli e grossi strati, rari questi, calcarei drizzati quasi alla verticale e alternanti con strati marnosi ed uno strato sabbioso. Questi straterelli calcarei non sono altro che la suddivisione, diremo così, e la continuazione di quelli più potenti assai coltivati una volta in basso nelle cave dei Bertot (1) e attualmente dall'altro lato della valle nella cava Chiesa.

(1) Di Rovasenda L., *I fossili di Gassino*, " Boll. Soc. Geol. Italiana ,, vol. XI, Roma, 1893.

Dopo vedremo apparire un ultimo orizzonte sabbioso a *Terebratutine*, *Cidariti* e *Nummuliti* di piccole dimensioni, rappresentanti specie presenti nei calcari sottostanti, a cui fa subito seguito un orizzonte marnoso discretamente potente (90 m. circa) a marne giallastre con fossili, tra cui grandi esemplari di *Aturia Rovasendiana*. Subito appresso si nota un orizzonte sabbioso nel quale si intercalano sin dal suo inizio sottili letti di ghiaia. Percorso un certo tratto cessa quest'orizzonte sabbioso, che contiene solamente *Nummuliti*, diverse da quelle degli orizzonti inferiori, qualche specie di *Ortofragmina* e rari frammenti di *Molluschi* con piccoli e scarsi *Lithothamnium* e qualche *Briozoo*, e nella strada, in ripida discesa e notevolmente incassata, si osservano bellissimi conglomerati ad elementi prevalentemente piccoli, raramente grossi, rarissimamente grossissimi, alternanti con strati marnosi e sabbiosi. In questi strati sabbiosi, come nel primo, non si rinvengono che frammenti di pochi *Molluschi*, fra cui frequente un'*Ostrea*, qualche *Briozoo*, dei piccoli *Lithothamnium*, *Nummuliti* e *Ortofragmine*; la fauna insomma incontrata nell'orizzonte alla base, solo che qui essa è più poveramente rappresentata. Le *Nummuliti* e le *Ortofragmine*, almeno per quanto ci risulta, pare cessino ai due terzi circa dell'altezza della serie dei conglomerati. Le *Nummuliti* presenti in detta serie sono numerose, citeremo la *Laharp. gassinensis*, *Par. Orbignyi-wemmelensis*, *Par. crispa-mamilla*, *Par. contorta-striata*, *Par. miocontorta* (= *veronensis* Opp.), *Tchihatcheffi* (1); complesso di forme indubbiamente bartoniane.

Finita la serie dei conglomerati, i cui strati, ripetiamo, sono innalzati quasi alla verticale ovunque, e in qualche luogo (lungo la strada La Ressa-Bardassano) alla verticale e perfino strapiombanti, vediamo venirsi appoggiare ad essi trasgressivamente, con una visibile discordanza, osservabile in molti punti

(1) La *Par. miocontorta*, come pure la *Par. contorta* e la *Par. striata*, si trovano in altri punti del nummulitico piemontese, in località sinora considerate appartenenti al *Sannoisiano* e allo *Stampiano*. *Par. miocontorta* tra Carrosio e Voltaggio, Case Mongiardino presso Belforte, Lerma, Carcare, Dego, Marmorito; *Par. contorta* a Carcare; *Par. striata* a Montalero (Cascinetta), lungo la strada tra Carrosio e Voltaggio. Nessun dubbio abbiamo sulla identificazione di dette specie, disgraziatamente non abbiamo ancora potuto visitare le località da cui provengono, ma riteniamo che in esse sia rappresentato non solo parte dell'Oligocene, ma altresì il Bartoniano.

dell'elissoide eocenico, degli strati marnosi langhiani, con una inclinazione dai 35° ai 45°.

Noi abbiamo perciò visto in questa gita al basso delle marne in cui non furono trovati sinora dei fossili, e a cui succede un complesso di strati marnoso-calcarei con *Gümbelie* del tipo della *G. spissa*, delle *Laharpeie* (*L. Molli*, *sub-Molli*), i quali si debbono perciò riferire con sicurezza al *Luteziano medio*. Le marne sottostanti quindi, secondo si considerano appartenenti ancora a questo complesso, oppure ad un piano un po' più vecchio, si dovrebbero riferire esse pure al *Luteziano medio*, oppure all'*inferiore*. Gli strati invece che vengono sopra, i quali son quasi sprovvisti di rappresentanti di *Nummuliti granulate* e contengono invece tra altre *Par. complanata*, *Par. distans*, *Par. variolaria*, *Par. atacica*, *Par. venosa*, *Par. crispa*, vanno riferiti al *Luteziano superiore*, ed infine le sabbie e le marne alternanti coi conglomerati soprastanti a *Laharp. gassinensis*, *Par. Orbignyi*, *Par. contorta*, *Par. miocontorta*, vanno attribuiti al *Bartoniano*.

Cosa degna di nota, in questo giacimento non si osservano *Assiline*, almeno per quanto sinora ci risulta; cosa assai strana, se si pon mente al numero veramente enorme di esse che si rinvengono nell'orizzonte cosidetto ad *Assiline*, al Capo La Mortola (Liguria), a contatto coll'orizzonte a *Gümb. spissa*. Questo ci fa pensare, anche per la distribuzione delle *Nummuliti* altrove, che, riguardo ai diversi orizzonti che esse caratterizzano, se ne possano ammettere non solo nel senso verticale, ma ben anco nel senso orizzontale, interpretandone cioè alcuni come orizzonti di egual età, caratteristici di uno stesso piano e che si possono sostituire fra di loro da bacino a bacino, da regione a regione.

Gli strati nummulitici di Gassino costituiscono quindi, a differenza di quelli del bacino dell'Adour, un insieme poco omogeneo, che raggiunge uno spessore massimo all' incirca di un seicento metri, formato da parecchi tipi di roccia; *marne*, *calcari*, *sabbie* e *conglomerati poligenici*. Vengono dapprima le marne ed i calcari (*Luteziano*), che a strati più o meno potenti si alterano fra di loro e con parecchi orizzonti sabbiosi. Questa serie è poi coperta da una potente pila (200-300 m.) di conglomerati in cui sono intercalati lenti e strati sabbiosi e marnosi (*Bartoniano*). Il giacimento si presenta assai bene per farvi delle osservazioni sia stratigrafiche che paleontologiche; i fossili, assai

abbondanti, si possono raccogliere anche assai facilmente, bene spesso nelle cave, e le *Nummuliti* e *Orbitoidi* quasi dappertutto, tolto nei conglomerati, ove sinora non furono rinvenuti che negli orizzonti sabbiosi.

La natura del giacimento ci indica poi che il fondo di questa porzione di bacino marino, durante il periodo eocenico, fu soggetto a ripetute oscillazioni, nel tempo stesso che era soggetto pure ad un lento movimento di emersione, il quale portò fuori del dominio marino, in questo punto, gli strati eocenici per un periodo di tempo assai lungo, che va dalla fine del *Bartoniano* all'inizio del *Langhiano*, movimento che ci risulta doveva essere generale e continuare durante l'*Oligocene* per tutta la collina di Torino. Attesochè se da questo affioramento eocenico noi ci riportiamo ad un altro ancora nei colli di Torino (Marmorito) osserviamo che ivi, sopra gli strati eocenici, si depose parte dell'*Oligocene* (1) fossilifero (il *Sannoisiano*), ma fra questo e il *Langhiano* manca ancor qui lo *Stampiano* e l'*Aquitaniano*.

---

(1) Il Prof. Sacco (*I terreni terziarii del bacino piemontese*, " Atti Soc. ital. di Scienze Nat. ", Milano, pag. 216) per Marmorito dà la seguente composizione della serie:

9. Marne argillose, grigio-bluastre spesso franose.	*Aquitaniano*
8. Banchi marnosi friabili.	*Stampiano*
7. Banchi arenaceo-ghiaiosi, ricchissimi in *Numm. intermedia-Fichteli*, *Antozoi Echinodermi*, *Bivalvi*, *Gasteropodi*, ecc.	*Tongriano*
6. Grossi banchi sabb.-arenacei giall. con *Numm. Fichteli*, ecc.	
5. Complesso di banchi sabbioso-arenacei, marnosi, grigiastri, fortemente sollevati.	
4. Potenti conglomerati con interstrati arenacei e marnosi fossiliferi.	
3. Strati sabbioso-arenacei con letti lignitici.	*Sestiano*
2. Marne grigie con straterelli calcarei a *Lithothamnium*, *Nummulites*, *Orbitoides*, *Heterostegina*.	*Bartoniano*
1. Argille scagliose brune con macigni, calcari alberesi e lenti ofiolitiche.	*Liguriano*

Secondo noi la serie andrebbe così interpretata:

N. 9, " 8 — *Langhiano (pars).*

LACUNA

" 7, " 6 — *Sannoisiano.*

" 5 — *Bartoniano superiore.*

" 4, " 3 — *Bartoniano inferiore.*

" 2, " 1 — *Luteziano.*

Se adesso noi paragoniamo la serie sopra descritta con quella che è presente nel giacimento di Biarritz, possiamo stabilire i seguenti sincronismi :

Gassino	*Biarritz*
LANGHIANO.	
	AQUITANIANO
	Lacuna e discordanza
Lacuna e discordanza.	TONGRIANO. Strati arenacei del porto di Biarritz (dalla Chambre d'Amour sino al Porto Vecchio e alla villa Belza) con straterelli, talvolta, di conglomerati, a *Brug. intermedia-Fichteli, Par. vasca-Boucheri, Par. Bouillei-Tournoueri, Operc. complanata, Cidaris Oosteri, Clypeaster biarritzensis, Euspatangus ornatus, Scutella subtetragona, Aturia sp., Pecten Boissyi, Pecten biarritzensis, Pycnodonta Brongniarti, Pholadomia Puschi.*
BARTONIANO. Conglomerati di Villa Laurenti, Villa Gasche, Costa Battaina, Bric Porassa, Bric Croce, Bric Carlvé, Bric Chenon, Tetti della Trinità, Cascina Perodi, Villa Bersanino, alternanti con sabbie e marne a *Laharp. gassinensis, Par. Tchihatcheffi, Par. latispira, Par. miocontorta* (= *veronensis* Oppenheim), *Par. contorta-striata, Par. eocenica, Par. Szaboi, Par. variolaria, Par. Orbignyi-wemmelensis, Par. crispa, Par. Guettardi, Par. Bassanii, Par. Tellinii, Orthophragmina scalaris, O. Chudeaui, O. nummulitica, O. n. sp.*	Lacuna (BART. SUP.).

BART. inf.

Marne bleu della Côte des Basques, parte superiore (strati di Cachaou e Falaise della perspective Miramar) a *Brug. Fabianii*, *Par.* cfr. *miocontorta*, *Par. contorta-striata*, *Par. venosa*, *Par. mamilla*, *Par. Orbignyi-wemmelensis*, *Par. Ramondi-sub Ramondi*, *Par. Heberti*, *Par. variolaria*, *Par. Guettardi; Assil sub-Formai*, var. *franca*, *Orth. sella*, *O. Pratti*, *O. discus* giov., *O. nummulitica*, *O. varians*, *O. scalaris*, *O. dispansa*, *Operc. ammonea*, *O. pyramydum*, *Lithothamnium*, *Tubulostium spiruleum*.

LUTEZIANO sup.

Marne bleu, grigie o giallognole alternanti con calcari semicristallini, arenacei, marnosi, brecciole calcaree e con sabbie di vigna Lard, regione Caviggione, vigna Mela, cave Giannone, Chiesa, Bertot, ecc. con *Gümb. sp. Par. Ramondi*, *Par. mamilla*, *Par. complanata*, *Par. distans*, *Par. variolaria*, *Par. venosa*, *Par. Guettardi*, *Par. Bassanii*, *Par. Rzehaki*, *Orth. Marthae*, *O. radians*, *O. nummulitica*, *O. varians*, *O. strophiolata*, *O. patellaris*, *O. priabonensis*, *O. stella*, *O. Taramellii*, *Chapmania gassinensis*, *Clavulina Szaboi*, *Baculogypsina Meneghinii* var. *tetraedra*, *Aturia Rovasendiana*, *Galeoda tuberculatissima*, *Cirsotrema gassinensis*, *Aequipecten eocrassus*, *Aequip.* cfr. *triangulatus*, *Flexopecten subdiscors* var., *Spondylus subspinosus*, *Acesta miocenica* var., *Ac. eocenica*, *Pinna subpectinata* var., *Anadara eogassinensis*, *Gigantostrea gigantica* var., *Exogyra eoparvula*, *Tubulostium spiruleum*, *Terebratulina caputserpentis*, *Liothyrina eoparvacuta*, *Hemithrys eocomplanata*, *H. eotrigona*, *Carcharodon auriculatum*, *Odontaspis*

Marne bleu della Côte des Basques, parte inferiore (marne a *Pentacrini* al di là dello stabilimento dei bagni sino al giacimento di Lady Bruce) a *Gümb. lenticularis*, var. *Par. contorta-striata* (?), *Par. miocontorta*, *Orth. Fortisi*, *O. Pratti*, *O. scalaris*, *O. strophiolata*, *O. Taramellii*, *O. priabonensis*, *O. lanceolata*, *O. stella*, *O. radians*, *Conocrinus Thorenti*, *Pentacrinus didactylus*, *Euspatangus* cfr. *ornatus*, *Cyclolites andianensis*, *Trochocyathus pyrenaicus*, *Lunulites glandulosus*, *Terebratulina tenuistriata*, *Corbula sp.*, *Cerithium sublamellosum*, *Serpula alata*, *Tubulostium spiruleum*.

elegans, *Od. Hopei*, *Od. verticalis*, *Oxyrhina Desori*, *Squatina prima*, *Notidanus primigenius*, *Coelorhynchus rectus*, *Pycnodus Koenigi*, *Prenaster alpinus*, *Psammechinus biarritzensis*, *Runa Desori*, *Echinantus Desmoulinsi*, *Ech. bufo*, *Ech. subrotundus*, *Ech. placenta*, *Echinolampas Beaumonti*, *Echin. blainviensis*, *Craterolampas Raulini*, *Cidaris subularis*, *Pentacrinus didactylus*, *Conocrinus Thorenti*.

Luteziano medio.

Calcari marnosi, arenacei, alternanti con marne e sabbie di cave Defilippi con *Gümb. spissa*, *Gümb. Roualti*, *Gümb. sub-Douvillei*, *Gümb. sub-Paronai*, *Gümb. lenticularis*, *Laharp. Molli*, *Laharp. sub-Defrancei*, *Laharp. sub-Benoisti*, *Par. atacica-Guettardi*, *Par. mamilla*, *Par. Ramondi*, *Par. deserti*, *Par. Heeri*, *Orth. Pratti*, *Orth. discus*, *O. sella*, *O. Rovasendai*, *O. Archiaci*, *O. Marthae*, *O. nummulitica*, *Chapmania gassinensis*, *Clavulina Szaboi*, *Baculogypsina Meneghinii*, *Aturia Rovasendiana*, *Aequipecten eocrassus* var., *Flexopecten*? *subdiscors* var., *Propeamussium eocenicum*, *Spondylus subspinosus*, *Exogyra eoparvula*, *Terebratulina caputserpentis*, *Megathyris decollata*, *Tubulostium spiruleum*, *Odontaspis Hopei*, *Oxyrhina Desori*, *Charcharodon auriculatum*.

Marne della Gourepe, calcari di Mouligna, di Handia, di Peyreblanque, e della Peyre qué bève a *Gümb. spissa*, *Gümb. lenticularis*, *Laharp. Brongniarti*, *Par. complanata*, *Par. atacica*, *Orth. Pratti*, *O. sella*, *O. discus*, *O. Archiaci*. *O. Chudeaui*, *O. Douvillei*, *O. stella*, *O. priabonensis*, *Cidaris semiaspera*, *Coptosoma Pellati*, *Pygorhynchus Delbosi*, *Echinolampus ellipsoidalis*, *Ditremaster nux*, *Guettardia Thiolati*, *Pycnodonta sp.*, *Vulsella falcata*, *Tubulostium spiruleum*.

Luteziano inf.

Marne rossastre sotto cave Defilippi e prive di fossili.

La nostra classificazione per quanto riguarda il nummulitico di Biarritz è un po' diversa da quella ultima recentissima di Douvillé (1) e potrebbe parere anche inutile; dopo i nume-

(1) Douvillé H., *Le terrain nummulitique du Bassin de l'Adour*, " Bull. Soc. géol. de France ,, 4e série, vol. V, Paris, 1905.

rosi studi che furono fatti su questa regione (Delbos, Koechlin-Schlumberger, Pellot, Jaquot, Bouillé, De La Harpe, Carez, Douvillé, ecc.); ma trova al contrario la sua giustificazione e la sua importanza nel fatto che avendo io ricevuti dei *Foraminiferi* di Biarritz dal Dott. Liebus di Praga, potei, studiandoli, aggiungere un certo numero di forme a quelle già conosciute per gli strati della Côte des Basques, fra le quali alcune (*Par. Orbignyi-wemmelensis*) per gli strati superiori, le quali assurgono ad una vera importanza stratigrafica dopo il lavoro di Lister (1) su Barton. Cotesto lavoro ci convinse della rispondenza degli strati conglomeratici di Gassino, considerati sinora come *Oligocenici*, con le marne della zona superiore di Biarritz, e con gli strati di Barton, e fissando in modo indiscutibile l'età bartoniana dei primi due giacimenti ci portò a collocare nel *Luteziano*, a Gassino, i calcari, le marne e le sabbie sottostanti ai conglomerati, a Biarritz, la parte inferiore delle marne della Côte des Basques, da Douvillé ancora collocate nel *Bartoniano inferiore*.

Nella stessa maniera, mentre Douvillé colloca attualmente nel *Luteziano superiore* gli strati marno-calcarei della Gourepe, di Mouligna, di Handia a *Gümb. spissa* (= *crassus* di Douvillé) *Laharp. Brongniarti*, *Par. complanata*, *Par. atacica*, e li tiene distinti da quelli di Peyreblanque e Peyre qué bève (che colloca nel *Luteziano medio*) a *Gümb. spissa* (= *crassus* di Douvillé), *Laharp. Brongniarti*, *Par. complanata*, *Par. atacica*, noi non vi abbiamo potuto trovare nessuna diversità, in modo che li riferiamo tutti al *Luteziano medio*.

Nella parte superiore delle marne della Côte des Basques erano conosciute, per quanto a noi risulta, *Brug. intermedia* (2), *Par. cf. contorta*, *Orth. Fortisi*, *O. radians*, *Operc. ammonea*.

---

(1) Lister J., *On the Dimorphism of the English Species of Nummulites, and the Size of the Megalosphere in Relation to that of the Microspheric and Megalospheric Tests in this Genus*, " Proceed. of the R. Society ", vol. 76-B.

(2) A proposito di questa forma di *Nummulite* di Cachaou, Boussac, che la segnalò, dice che è una forma vicina alla *Brug. intermedia* d'Arch. Io non l'ho potuta rinvenire nel materiale inviatomi, ma al suo posto ho rinvenuta una nuova forma di *Nummulite* (*Brug. Fabianii*). Tra le *Nummuliti* dei Berici, inviatemi dal Dott. Fabiani, ho riscontrato due forme, una vicina della *Brug. Fichteli* Mich., l'altra della *Brug. intermedia* d'Arch., corrispon-

Attualmente, in base alle determinazioni che ho potuto fare sui campioni inviatimi dal Dott. Liebus, che qui mi è gradevol cosa ringraziare, risulterebbe il seguente elenco:

Brugnierea Fabianii Prev.,
Paronaea contorta Desh.,
„ *striata* d'Orb.,
„ *Orbignyi* Gal. sp.,
„ *wemmelensis* De La Harpe et Van den Broeck,
„ *crispa* Ficht. et Moll.,
„ *mamilla* Ficht. et Moll.,
„ *Ramondi* d'Arch.,
„ *sub-Ramondi* De La Harpe,
„ *Heberti* d'Arch.,
„ *variolaria* Lmk.,
„ *Guettardi* d'Arch.,
„ *subpulchella* De La Harpe,
„ *venosa* Ficht. et Moll.,

denti perfettamente alle figure che il De La Harpe dà a tav. VI (fig. 15-28) della *Monographie der in Aegypten und der libyschen Wüste workommenden Nummuliten.* Siccome queste figure non corrispondono affatto alla *Brug. intermedia* d'Arch. e alla *Brug. Fichteli* Mich., a cui sono riferite, specialmente per numero e forma dei setti e comportamento del passo spirale, ho dato agli esemplari egiziani che esse rappresentano e raccolti nel *Bartoniano* di Siuah assieme alla *Par. contorta* Desh., rispettivamente il nome di *Brug. Fabianii* Prev. (fig. 11-22), *Brug. sub-Fabianii* Prev. (fig. 23-28), nomi che naturalmente ho esteso agli esemplari inviatimi dal Dott. Fabiani. Avevo però conservato un po' di dubbio sull'identità della *Brug. sub-Fabianii* con una forma *(Brug. reticulata)* che Tellini creò per esemplari del *Luteziano medio* di Gassino (cave Defilippi), e figurò in modo un po' incerto. Ho scoperto proprio ora centinaia di esemplari di una specie di Tellini, la quale è eguale alla *Brug. sub-Fabianii*, nelle sabbie gialle eoceniche a *Ortofragmine* del giacimento di S. Genesio (Chivasso), e il loro confronto colle forme vicentine e colla forma tipo di Tellini, che finalmente mi riuscì di trovare, mi convinse della loro perfetta identità. In tal modo bisogna abolire la denominazione *Brug. sub-Fabianii* Prev. (in litt.) e nel tempo stesso resta nettamente stabilito che questa coppia *Brug. Fabianii-reticulata* è eocenica. Effettivamente a Marmorito, a Cassinelle, fra migliaia di *Brug. intermedia-Fichteli*, non mi è ancor riuscito di rinvenire un esemplare della coppia *Brug. Fabianii-reticulata*, che, ripeto, si rinviene in Egitto assieme alla *Par. contorta*, a Gassino e a S. Genesio con centinaia di *Ortofragmine* e *Nummuliti* eoceniche.

Ortophragmina Pratti Mich.,
„ *sella* d'Arch.,
„ *nummulitica* Gümb.,
„ *varians* Kaufm.,
„ *scalaris* Schlumb.,
„ *dispansa* Sow.,
„ *Archiaci* Schlumb.,
„ *priabonensis* Gümb.,
Operculina ammonea Leym.,
„ *complanata.*

Tutte queste forme si presentano, tolta qualche insignificante variazione individuale per qualcuna, normali e caratteristiche, specialmente poi le *Ortofragmine*, le quali meno ancora delle *Nummuliti* offrono delle variazioni, e si presentano poi costantemente eguali nella forma e disposizione del reticolato superficiale; carattere cotesto troppo poco sinora apprezzato per la loro determinazione.

Osserviamo solo che mentre nel nostro lavoro sulle Nummuliti di Potenza (" Mém. Soc. Pal. Suisse „, vol. XXIX), riunivamo sotto il nome della coppia *Par. crispa-mamilla* parecchie forme, tra cui *Par. Orbignyi-wemmelensis*, ora, dopo il lavoro già citato dal Lister, siamo d'opinione che dalla prima coppia nominata vada staccata la seconda, la quale poi quasi sempre s'incontra colla *Par. crispa-mamilla* nei medesimi strati, con questo da notarsi però che questa sembra appaia prima.

Da quanto siamo venuti esponendo ci pare risulti assai chiaramente la perfetta rispondenza fra i diversi piani del giacimento nummulitico di Gassino e quelli del giacimento nummulitico di Biarritz; dalla comparazione della fauna dei quali, cosa abbastanza notevole, risulta pure una evidente identità di fauna; ciò che non fa che accrescere l'importanza di questi due giacimenti, così distanti fra di loro e così conosciuti come punti di riferimento ed anche per i molti lavori che da numerosi autori intorno vi furono compilati.

Nei due giacimenti manca l'*Eocene inferiore*; in quello di Biarritz è presente il *Luteziano medio*, il *superiore*, il *Bartoniano inferiore* e il *Sannoisiano*, risultandone una lacuna fra questo piano e il Bartoniano inferiore, per la mancanza del Bartoniano superiore.

Nei colli torinesi al contrario, ove si supponeva la serie dei piani del terziario fosse completa, mancherebbe invece l'*Aquitaniano* e lo *Stampiano* dappertutto, e a Gassino anche il *Sannoisiano*, risultandone anche qui, sopra al Bartoniano, una lacuna ed una discordanza.

A Gassino adunque non vi sarebbe nessuna formazione che si possa sincronizzare con gli strati arenacei del porto di Biarritz a *Brug-intermedia*, *Par. vasca*, *Par. Bouillei*, ecc.; al contrario il *Bartoniano* vi sarebbe rappresentato al completo. Abbiamo detto che ad una certa altezza nella serie dei conglomerati bartoniani le *Nummuliti* in parte vengono a mancare (*Par. Orbignyi-wemmelensis*, *Par. crispa*, *Par. Guettardi*, mentre qualcun'altra (*Par. miocontorta*) continua a vivere nei soprastanti strati.

Noi consideriamo per l'appunto gli strati inferiori a *Par. Orbignyi-wemmelensis*, *Laharp. gassinensis* come appartenenti al *Bartoniano inferiore* e sincroni con quelli di Biarritz (marne bleu della Côte des Blasques, parte superiore) e con quelli così conosciuti di Roncà, e quelli che seguono superiormente come appartenenti al *Bartoniano superiore*.

Inferiormente succede ai conglomerati un complesso di strati marno-calcareo-sabbiosi, divisibile in numerosi orizzonti; i quali si possono però riunire in tre piani, caratterizzati tutti da una grande abbondanza e varietà di fossili. Cotesto complesso di strati era stato da alcuni considerato, salvo gli strati superiori ascritti già all'*Oligocene*, come *Bartoniano*. Lo studio di molti dei fossili indusse alcuni autori a considerarlo come prevalentemente *Luteziano*. Le *Ortofragmine* vi sono abbondanti, ma se nell'insieme loro possono forse permettere il riconoscimento a grandi linee delle principali divisioni, sembra non permettano, nè qui, nè altrove, il riconoscimento dei piani e sottopiani; perciò l'attenzione va tutta rivolta alle *Nummuliti*, abbondantissime anch'esse e per fortuna molto caratteristiche. Abbiamo scritto che questi tre piani si possono, in base alla fauna nummulitica che contengono, riferirsi rispettivamente al

Luteziano superiore, *medio* ed *inferiore*. Il *Luteziano superiore* è molto sviluppato, in media raggiunge uno sviluppo eguale a quello che ha il *Bartoniano*; il *Luteziano medio* è assai meno sviluppato, e solo affiora in una località, e per breve tratto. L'*inferiore* poi è pochissimo sviluppato e per giunta, sinora nelle marne onde risulta costituito, non furono mai rinvenuti fossili, in modo che si è in base a criterî stratigrafici e litologici che noi le teniamo separate da quelle soprastanti, che alternano con calcari e sabbie del *Luteziano medio*.

Abbiamo perciò che a Biarritz il nummulitico è rappresentato da porzione del *Luteziano*, da parte del *Bartoniano* e dal *Sannoisiano*, sopra a cui con discordanza si depositano gli strati *langhiani* a *Lepidocyclina*. A Gassino il nummulitico è rappresentato da tutto il *Luteziano* e da tutto il *Bartoniano*, sopra al quale in discordanza si osservano gli strati *langhiani* a *Lepidocyclina* e *Miogypsina*.

Torino, R. Museo Geologico.

Relazione intorno alla memoria del Dott. Luigi Cognetti De Martiis, intitolata: *Gli Oligocheti della regione neotropicale;* Parte II.

La memoria del Dott. Cognetti affidata al nostro esame è la continuazione di altra che ebbe già l'onore di essere stampata nei volumi della nostra Accademia.

L'A. tratta della sottofamiglia *Glossoscolecinae* le cui forme sono predominanti nella parte centrale e settentrionale della regione neotropicale, mentre mancano quasi al tutto nelle altre regioni. Anche il numeroso materiale che servì a questa 2ª parte dello studio dell'A., appartiene al Museo Zoologico di Torino ed è in gran parte dovuto ai viaggi dei Dott.i Borelli e Festa. Le numerose specie nuove segnalate dall'A. concessero un miglior ordinamento dei generi e, in particolar modo, offrirono campo a numerose ricerche anatomiche, importanti, non solo per lo studio dei Glossocolecini; ma anche per tutto il gruppo degli Oligocheti. L'A. in questa seconda parte del suo studio ha dato opera precipua e diligente a chiarire varî punti tassonomici e relativi alla organizzazione delle forme esaminate.

Egli si è occupato pure di studiare la distribuzione geografica degli Oligocheti neotropicali mettendo in evidenza i loro rapporti con quelli delle altre regioni zoologiche.

Il lavoro del Dott. L. Cognetti de Martiis è importante pel numero notevole di fatti nuovi tassonomici e anatomici che fa conoscere e i vostri relatori ne propongono la stampa nei volumi delle *Memorie* della nostra Accademia.

T. Salvadori.
L. Camerano, *relatore.*

L'Accademico Segretario
Lorenzo Camerano.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 24 Dicembre 1905.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Ferrero, Direttore della Classe, Rossi, Manno, Carle, Cipolla, Brusa, Carutti, Chironi, Savio, Ruffini e Renier Segretario. — Scusa l'assenza il Socio Allievo.

Approvasi l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 10 dicembre 1905.

Da parte del Socio corrispondente Giuseppe Biàdego è offerto in dono l'opuscolo: *Marcantonio Flaminio ai servigi di Gianmatteo Giberti vescovo di Verona*, Venezia, 1905.

Il Socio Cipolla presenta una memoria del Dr. Dino Muratore: *L'imperatore Carlo IV nelle terre sabaude nel 1365 e il Vicariato imperiale del Conte Verde.*

Il Presidente invita a riferirne il Socio proponente Cipolla ed il Direttore della Classe Ferrero.

L'Accademico Segretario
Rodolfo Renier.

Torino — Vincenzo Bona Tipografo di S. M. e Reali Principi (54059).

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 31 Dicembre 1905.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: JADANZA, NACCARI, FUSARI, GUIDI, FILETI, MORERA, SEGRE, FOÀ, MATTIROLO e CAMERANO Segretario.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Vengono presentate per l'inserzione negli *Atti* le note seguenti:

1ª Prof. Francesco SEVERI: *Su alcune proprietà dei moduli di forme algebriche*, dal Socio SEGRE;

2ª Dott. Ruggiero TORELLI: *Sopra certe estensioni del teorema di Noether* $Af+B\varphi$, dal Socio SEGRE;

3ª G. Z. GIAMBELLI: *Alcune estensioni del "Fundamentalsatz" di Noether negli iperspazi*, dal Socio SEGRE;

4ª P. VOGLINO: *Sullo sviluppo e sul parassitismo del Clasterosporium carpophilum*, dal Socio MATTIROLO.

Il Socio FUSARI, a nome anche del Socio CAMERANO, legge la relazione intorno al lavoro del Dr. Beniamino NICOLA: *Sullo sviluppo, sui canali perforanti e sulle fessure della porzione dell'"ala magna" dell'"os sphenoidale" nella specie umana*. La Classe approva alla unanimità la relazione che conchiude favorevol-

mente per la stampa del lavoro del Dott. Nicola, e pure alla unanimità, con votazione segreta, ne approva l'inserzione nei volumi nelle *Memorie* accademiche.

Il Socio Camerano presenta per l'inserzione nelle *Memorie* il lavoro del Dr. Artom: *La variazione dell'" Artemia salina " (Linn.) di Cagliari sotto l'influsso della salsedine*. Il Presidente delega i Soci Salvadori e Camerano per riferire intorno a questa Memoria.

LETTURE

Su alcune proprietà dei moduli di forme algebriche.

Nota di FRANCESCO SEVERI, a Padova.

Nella bella Memoria del sig. LASKER, *Zur Theorie der Moduln und Ideale* (*), in cui trovasi esposta, insieme ad importanti risultati nuovi, quasi tutta la teoria aritmetica dei moduli di forme, nata coi lavori di KRONECKER, e accresciuta notevolmente dalle ricerche di DEDEKIND, WEBER, HILBERT, HENSEL, KÖNIG, ecc., appaiono come fondamentali le proprietà del risultante di m forme di altrettante variabili, da cui derivano i seguenti teoremi, che adempiono ad un ufficio essenziale nello sviluppo della teoria:

" Se le $r+1$ forme algebriche $F_0(x_0, x_1, ..., x_r)$, $F_1(x_0, x_1, ..., x_r)$,
" ..., $F_r(x_0, x_1, ..., x_r)$, di ordini $n_0, n_1, ..., n_r$, non hanno zeri co-
" muni, ogni forma d'ordine $\geq n_0 + n_1 + ... + n_r - r$ appartiene
" al modulo $(F_0, F_1, ..., F_r)$ (**).

" Se le $h+1$ forme algebriche $(h \leq r)$

" $$\Phi(x_0, x_1, ..., x_r),\ \ F_1(x_0, ..., x_r), ..., F_h(x_0, ..., x_r),$$

" hanno soltanto ∞^{r-h-1} zeri comuni, ed il prodotto della Φ per
" un'altra forma arbitraria F, appartiene al modulo $(F_1, ..., F_h)$,
" anche F appartiene a questo modulo „ (***).

L'ultimo teorema dà, in quella misura che è consentita dalla

(*) " Mathematische Annalen „, Bd. 60, pagg. 20-116, 1905.

(**) Dicendo che una forma H appartiene al modulo $(F_1, ..., F_h)$, s'intende che la H si possa esprimere per combinazione lineare (coi coefficienti forme delle x) delle $F_1, ..., F_h$. — Simbolicamente scriveremo, con KRONECKER, $H \equiv 0 \mod (F_1, ..., F_h)$.

(***) Il Satz I del sig. LASKER (loc. cit., pag. 24, n. 3) è una facile conseguenza del teorema enunciato nel testo, la quale si troverà rilevata in modo esplicito al n. 5 di questa Nota.

natura della questione, l'estensione del teorema di aritmetica che l'annullarsi del prodotto di due numeri implica l'annullarsi di uno almeno di essi.

In questa Nota dimostrerò i due teoremi suddetti, poggiandomi sui risultati del mio lavoro sopra la *Rappresentazione di una forma qualunque per combinazione lineare di più altre* (*), e sulle più elementari proprietà dei sistemi *lineari* di forme. Mi sembra che ciò possa offrire interesse, non soltanto per la semplicità delle dimostrazioni, ma sibbene perchè le considerazioni che avrò occasione di svolgere, possono costituire il nòcciolo di un'esposizione più sintetica della teoria dei moduli.

Il punto di partenza è l'estensione agli spazî non lineari di un teorema del sig. Bertini, circa l'impossibilità dell'esistenza di punti multipli, diversi dai punti base, in un'ipersuperficie generica di un sistema lineare (**); ed è anzi mio debito dichiarare che il prof. Bertini m'avea comunicato per lettera, qualche mese addietro, la dimostrazione di un caso particolare della seconda proposizione di Lasker, sopra enunciata (cioè il caso in cui $h = r - 1$ e Φ è una forma lineare); e che anche questa dimostrazione era fondata sul teorema che " sopra una superficie algebrica, la curva generica di un sistema lineare non può avere punti multipli diversi dai punti base o dai punti multipli della superficie „ (***).

Alla fine della Nota, come applicazione delle cose esposte, estendo il teorema $Af + B\varphi$ di Nöther, ad r forme di $r + 1$ variabili, che abbiano a comune un numero finito di zeri e che presentino in ciascuno di questi il " caso semplice „.

Questo teorema è dovuto al sig. König, il quale peraltro lo dimostra coll'uso delle serie di potenze di più variabili (****).

La dimostrazione ch'io dò in questa Nota è affatto elementare: tuttavia non deve credersi che si tratti di un'ovvia esten-

(*) " Rendiconti dei Lincei „, (5), t. XI, 1902.

(**) Cfr. Bertini, *Sui sistemi lineari* (" Rendiconti del R. Istituto lombardo „, (2), t. XV, 1882).

(***) Cfr. p. es. Enriques, *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche* (" Mem. della Società italiana delle Scienze „, (3), t. X, 1896), n. 5.

(****) *Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraisch. Grössen* (Leipzig, Teubner, 1903; pag. 389. — Il caso particolare in cui gli zeri comuni sieno addirittura semplici, trovavasi già considerato nella mia Nota lincea citata.

sione del ragionamento, ormai semplicissimo, che si può fare nel caso di due forme ternarie, seguendo la Nota della signorina Scott (*) e la mia Nota lincea citata, perchè qua *occorrono* argomentazioni nuove, ch'io ho cercato di ridurre alla loro espressione più semplice (**).

1. — Spenderemo poche parole per dimostrare il teorema seguente, il quale, se non trovasi altrove enunciato in modo esplicito per k qualunque, può tuttavia ritenersi noto.

Se sopra una varietà algebrica V_k si ha un sistema lineare ∞^t di V_{k-1}, la varietà generica di questo sistema non ha punti multipli diversi dai punti base o dai punti multipli di V_k.

Si può infatti supporre, senza restrizione, che la V_k data, F, sia immersa nello spazio S_{k+1} e che il sistema lineare di V_{k-1} sia segato, fuori eventualmente di V_{k-1} fisse, da un sistema lineare ∞^t di V_k. Allora, se P è un punto semplice per F e multiplo per una V_{k-1} generica del sistema, due casi posson presentarsi: o P è multiplo per la V_k, Φ, che segna su F la V_{k-1} considerata, oppure in P quella V_k tocca F.

Nel 1° caso, pel teorema di Bertini, il punto P appartiene alla varietà base del sistema ∞^t di V_k, e quindi alla varietà base del sistema ∞^t di V_{k-1}; nel 2° caso, poichè la V_{k-1} è generica, al variare di questa V_{k-1} varia la Φ, mantenendosi sempre tangente ad F in un punto che si muove con continuità a partire da P. Onde le ∞^{t-1} V_k del sistema ∞^t, infinitamente prossime alla Φ, toccano F in punti infinitamente prossimi a P.

Ciò posto, consideriamo la Φ ed una di queste V_k, che chiameremo Ψ; e negl'intorni dei rispettivi punti di contatto con F, sostituiamo a ciascuna di esse il rispettivo iperpiano tangente.

(*) " Mathematische Annalen „, Bd. 52, 1899; pag. 593.

(**) Nella Nota del Dr. Torelli, *Sopra certe estensioni del teorema di Nöther* $Af + B\varphi$, presentata insieme a questa mia alla R. Acc. delle scienze di Torino, si vedrà come le stesse argomentazioni addotte al n. 7 della mia Nota dei Lincei, coll'aggiunta del teorema dimostrato al n. 4 di questo lavoro, permettano di stabilire, nelle ipotesi più generali, le condizioni di rappresentabilità di una forma di $r + 1$ variabili come combinazione lineare di $h \leq r$ forme di altrettante variabili (che abbiano a comune ∞^{r-h} zeri), appena si conoscano le condizioni di rappresentabilità relative ad h forme di $h + 1$ variabili.

Poichè l'iperpiano tangente a Ψ passa per P (quest'affermazione è evidente sotto la forma duale), ne deriva che la Ψ passa per P.

Considerando il sistema dato ∞^t di V_{k-1}, come individuato dalla Φ, in unione a t V_{k-1} linearmente indipendenti, infinitamente prossime a Φ, si conclude che il punto P è base pel sistema, perchè sta su ciascuna delle $t+1$ V_{k-1} che lo individuano.

Osservazione. — Questo ragionamento non è che una forma sintetica di una dimostrazione dello stesso tipo di quella che il prof. Bertini espone nella sua Nota citata, *Sui sistemi lineari*, per stabilire il teorema negli spazî lineari.

2. — Passiamo ora a dimostrare il teorema seguente:

Sieno $F_1=0$, $F_2=0$, ..., $F_h=0$ $h(\leq r+1)$ *ipersuperficie dello* S_r, *di ordini* $n_1, n_2, \ldots, n_h (n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_h)$, *che si seghino secondo una* V_{r-h}, *anche dotata di parti multiple: allora è possibile scegliere* $h-1$ *ipersuperficie* $F_1'=0$, $F_2'=0$, ..., $F'_{h-1}=0$, *degli ordini rispettivi* $n_1, n_2, \ldots, n_{h-1}$, *che si seghino in una* V_{r-h+1} *priva di parti multiple, in guisa che i moduli* $(F_1, F_2, \ldots, F_{h-1}, F_h)$, $(F_1', F_2', \ldots, F'_{h-1}, F_h)$ *sieno identici.*

Il teorema è d'immediata dimostrazione per $h=2$. Supposto infatti che la F_1 sia dotata di parti multiple, consideriamo la forma di ordine n_1

$$F_1' = F_1 + X_2 F_2,$$

ove X_2 è un'arbitraria forma d'ordine $n_1 - n_2$. Poichè le forme fondamentali F_1', F_2 del modulo (F_1', F_2), appartengono al modulo (F_1, F_2), e le forme fondamentali di questo appartengono a quello, ogni forma del 1° modulo apparterrà al 2°, e viceversa; cioè i due moduli saranno identici. E quindi coincideranno le loro V_{r-2} base, che indicheremo coi simboli $\{F_1' F_2\}$, $\{F_1 F_2\}$.

Al variare dei coefficienti di X_2, l'ipersuperficie $F_1'=0$ descrive un sistema lineare, che ha per varietà base la $\{F_1 F_2\}$; e quindi un'ipersuperficie generica di questo sistema sarà priva di *parti* multiple, giacchè una parte multipla di una tale ipersuperficie, pel teorema di Bertini, apparterrebbe alla varietà base, la quale sarebbe dunque una V_{r-1} e non già una V_{r-2}.

Si conclude pertanto che, scelta genericamente la X_2, il modulo (F_1', F_2) soddisfa alle condizioni richieste dal teorema.

Procederemo ora per induzione, ammettendo il teorema per $h-1$ forme e dimostrandolo per h forme.

Poichè le ipersuperficie $F_2=0, \ldots, F_h=0$ si segano secondo una V_{r-h+1} (chè altrimenti le $F_1=0, F_2=0, \ldots, F_h=0$ si taglierebbero secondo una varietà di dimensione $> r-h$), in virtù del teorema ammesso per $h-1$ forme, potremo sempre scegliere $h-2$ forme $F_2', \ldots, F'_{h-1}$, di ordini $n_2, \ldots, n_{h-1}$, segantisi secondo una V_{r-h+2} priva di parti multiple, e tali che il modulo $(F_2', F_3', \ldots, F'_{h-1}, F_h)$ sia identico al modulo $(F_2, F_3, \ldots, F_{h-1}, F_h)$. Porremo allora

$$F_1' = F_1 + X_2 F_2' + \ldots + X_{h-1} F'_{h-1} + X_h F_h,$$

ove $X_2, \ldots, X_h$ son arbitrarie forme degli ordini rispettivi $n_1-n_2, \ldots, n_1-n_h$.

Il modulo $(F_1', F_2', \ldots, F'_{h-1}, F_h)$ è identico al modulo $(F_1, F_2', \ldots, F'_{h-1}, F_h)$, cioè al modulo $(F_1, F_2, \ldots, F_{h-1}, F_h)$, perchè le forme fondamentali del 1° appartengono al 2°, e viceversa. Di più, al variare dei coefficienti nelle $X_2, \ldots, X_h$, l'ipersuperficie $F_1'=0$ descrive un sistema lineare, che non ha punti base fuori della varietà ad $r-h$ dimensioni $\} F_1 F_2 \ldots F_h \{$, comune alle $F_1=0, \ldots, F_h=0$. Infatti, se un punto P sta sulla ipersuperficie $F_1'=0$ per *ogni scelta* delle X, particolarizzando opportunamente le X, si vede che P appartiene alle ipersuperficie $F_1=0, F_2'=0, \ldots, F'_{h-1}=0, F_h=0$, cioè che sta sulla V_{r-h}:

$$\} F_1 F_2' \ldots F'_{h-1} F_h \{ = \} F_1 F_2 \ldots F_{h-1} F_h \{.$$

Dunque il sistema descritto da $F_1'=0$ segna sulla V_{r-h+2} *priva di parti multiple*, che è rappresentata dal simbolo $\} F_2' \ldots F'_{h-1} \{$, un sistema di V_{r-h+1}, privo di varietà base ad $r-h+1$ dimensioni. Ne deriva che una V_{r-h+1} generica di questo sistema, non ha *parti* multiple.

Infatti, se una V_{r-h+1} generica avesse una parte multipla, questa, non appartenendo alla base del sistema (che ha dimensione $< r-h+1$), in forza del teorema dimostrato al n° 1, sarebbe luogo di punti multipli della varietà $\} F_2' \ldots F'_{h-1} \{$: e quindi, al variare della V_{r-h+1} considerata, descriverebbe una *parte* multipla di $\} F_2' \ldots F'_{h-1} \{$.

Si conclude che, scegliendo genericamente le X, le ipersuperficie $F_1' = 0$, $F_2' = 0$, ..., $F'_{h-1} = 0$, si segano secondo una V_{r-h+1} priva di parti multiple, c. d. d.

3. — Dalla proposizione precedente si deducono i due teoremi del LASKER, purchè si tenga presente il risultato fondamentale della mia Nota lincea già citata, il quale afferma la possibilità di rappresentare come combinazione lineare delle forme $F_1, ..., F_h (h \leq r)$, i cui zeri comuni costituiscano una V_{r-h} priva di parti multiple, ogni forma F che si annulli nei punti di questa V_{r-h}.

Cominciamo a provare che:

Se le $r+1$ *forme* $F_0(x_0...x_r)$, $F_1(x_0...x_r)$, ..., $F_r(x_0...x_r)$, *di ordini* $n_0, n_1, ..., n_r$, *son prive di zeri comuni (cioè se il loro risultante è diverso da zero), ogni forma* $F(x_0...x_r)$ *di ordine* $l > n_0 + n_1 ... + n_r - r$, *appartiene al modulo* $(F_0, F_1, ..., F_r)$.

Poichè le $F_0, ..., F_r$ soddisfano alle ipotesi del teorema dimostrato al n° precedente, si potranno scegliere r forme $F_0', ... F'_{r-1}$, di ordini $n_0, n_1, ..., n_{r-1}$, aventi a comune $n_0 n_1 ... n_{r-1}$ zeri *distinti*, per guisa che il modulo $(F_0', ..., F'_{r-1}, F_r)$ sia identico al modulo $(F_0, ..., F_{r-1}, F_r)$.

Per dimostrare il teorema enunciato, basterà provare che il sistema lineare d'ipersuperficie d'ordine l

$$A_0 F_0' + ... + A_{r-1} F'_{r-1} + A_r F_r = 0, \tag{1}$$

ha la dimensione $\binom{l+r}{r} - 1$.

Il sistema (1) *congiunge* i sistemi lineari

$$A_0 F_0' + ... + A_{r-1} F'_{r-1} = 0, \tag{2}$$

$$A_r F_r = 0, \tag{3}$$

il primo dei quali ha un gruppo base costituito da $n_0 ... n_{r-1}$ punti P tra loro distinti. Per valutare la dimensione di questo sistema, si può dunque profittare di una formola di postulazione, che ho già dato altrove (*) come applicazione immediata del teorema

(*) *Su alcune questioni di postulazione* (" Rendic. di Palermo ", t. XVII, 1903), § 1.

sopra richiamato, concernente la rappresentazione di una forma per combinazione lineare di altre.

Supposto $l \geq n_0 + n_1 + \ldots + n_{r-1} - r$ (il che è d'accordo coll'ipotesi $l \geq n_0 + n_1 + \ldots + n_{r-1} + n_r - r$), la dimensione di (2) viene espressa da

$$\sum_i \binom{l-n_i+r}{r} - \sum_{ik} \binom{l-n_i-n_k+r}{r} + \ldots$$

$$+ (-1)^{r-1} \binom{l-n_0-\ldots-n_{r-1}+r}{r} - 1 = \binom{l+r}{r} - 1 - n_0 n_1 \ldots n_{r-1}.$$

Quanto alla dimensione di (3), essa è evidentemente uguale ad $\binom{l-n_r+r}{r} - 1$.

Calcoliamo ora la dimensione del *sistema d'intersezione* di (2), (3), cioè del sistema di equazione $A_r F_r = 0$, ove sia

$$A_r F_r \equiv 0 \mod (F_0', \ldots, F'_{r-1}).$$

Poichè l'ipersuperficie $A_r F_r = 0$ di questo sistema passa pei P, e d'altronde la $F_r = 0$ non contiene nessuno di questi punti, la $A_r = 0$ dovrà passare per ognuno dei P, dal che segue (*):

$$A_r \equiv 0 \mod (F_0', \ldots, F'_{r-1}).$$

Sicchè la dimensione del sistema d'intersezione uguaglia la dimensione del sistema di tutte le ipersuperficie d'ordine $l' = l - n_r$, passanti pei P. Essendo $l' \geq n_0 + \ldots + n_{r-1} - r$, si può ancora applicare la formola di postulazione citata sopra, e si trova come dimensione del sistema d'intersezione:

$$\binom{l-n_r+r}{r} - 1 - n_0 n_1 \ldots n_{r-1}.$$

La dimensione di (1), essendo uguale alla somma delle dimensioni di (2), (3), diminuita della dimensione ultimamente calcolata, risulta espressa da $\binom{l+r}{r} - 1$, c. d. d.

(*) *Rappresentazione di una forma qualunque...*, n. 6.

4. — Dimostriamo infine che:

Se le forme $F_1(x_0 \ldots x_r), \ldots F_h(x_0 \ldots x_r) (h \leq r)$, *hanno a comune soltanto* ∞^{r-h} *zeri (di natura qualsiasi), e se* F, Φ *son due forme tali che il prodotto* ΦF *appartenga al modulo* $(F_1, \ldots, F_h)$, *e che inoltre* Φ *abbia soltanto* ∞^{r-h-1} *zeri comuni colle* $F_1, \ldots, F_h$, *allora anche la forma* F *appartiene al modulo* $(F_1, \ldots, F_h)$.

Il teorema è evidentemente vero per $r = 1$; sicchè lo potremo dimostrare per induzione, ammettendolo per forme di r variabili e deducendolo per forme di $r + 1$ variabili.

Sia dapprima $h \leq r - 1$, e denotiamo con $I' = 0$ un iperpiano *generico* dello S_r, cioè un iperpiano che seghi secondo una V_{r-h-2} la $V_{r-h-1} \{\Phi F_1 F_2 \ldots F_h\}$ e quindi secondo una V_{r-h-1} la $V_{r-h} \{F_1 F_2 \ldots F_h\}$.

Se $\bar{F}, \bar{\Phi}, \bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_h$ denotano le *sezioni* delle forme $F, \Phi, F_1, \ldots, F_h$ coll'iperpiano $I' = 0$, cioè le forme stesse in cui le variabili $x_0, x_1, \ldots, x_r$ si suppongano legate dall'equazione lineare omogenea $I' = 0$, dalla congruenza

$$\Phi F \equiv 0 \mod (F_1, \ldots, F_h), \tag{4}$$

segue

$$\bar{\Phi} \bar{F} \equiv 0 \mod (\bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_h); \tag{5}$$

ove è ben chiaro che per modulo $(\bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_h)$, *sezione* del modulo $(F_1, \ldots, F_h)$, si deve intendere l'insieme di tutte le forme che si ottengono *intersecando* con $I' = 0$ le forme del modulo $(F_1, \ldots, F_h)$.

Avendo supposto il teorema per forme di r variabili, dalla (5) segue

$$\bar{F} \equiv 0 \mod (\bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_h),$$

donde si trae immediatamente

$$F \equiv I' F' \mod (F_1, \ldots, F_h), \tag{6}$$

ove F' è una forma d'ordine $l - 1$, essendo l l'ordine di F.

La (6) dà

$$\Phi F \equiv \Phi I' F' \mod (F_1, \ldots, F_h),$$

e quindi, in forza della (4):

$$\Phi I' F' \equiv 0 \mod (F_1, \ldots, F_h). \tag{7}$$

Le forme F' e $\Phi I'$ si trovano dunque nelle stesse condizioni delle forme F, Φ di partenza. Applicando alla F' il procedimento già applicato ad F, si costruisce una forma F'', d'ordine $l-2$, soddisfacente alla congruenza

$$F' \equiv I''F'' \mod(F_1, \ldots, F_h), \tag{8}$$

ove I'' è un iperpiano generico (nel senso spiegato) rispetto alla V_{r-h-1} luogo degli zeri comuni alle forme $F_1, \ldots, F_h, \Phi I'$. Dalla (8), mediante la (7), si trae poi

$$\Phi I'I''F'' \equiv 0 \mod(F_1, \ldots, F_h).$$

Così proseguendo si ottengono le due successioni di congruenze rispetto al $\mod(F_1, \ldots, F_h)$:

$$\Phi F \equiv 0, \quad \Phi I'F' \equiv 0, \quad \Phi I'I''F'' \equiv 0, \ \ldots, \ \Phi I'I''\ldots I^{(q)}F^{(q)} \equiv 0, \ \ldots \tag{9}$$

$$F \equiv I'F', \quad F' \equiv I''F'', \quad F'' \equiv I'''F''', \ \ldots, \ F^{(q-1)} \equiv I^{(q)}F^{(q)}, \ \ldots\ldots \tag{10}$$

E quanto alle forme $F, F', F'', \ldots, F^{(q)}, \ldots$, di ordini $l, l-1, l-2, l-q, \ldots$, si deve tener presente che, pel teorema ammesso nello S_{r-1}, in forza delle (9), le loro sezioni con un iperpiano generico $I=0$, appartengono al modulo sezione di $(F_1, \ldots, F_h)$ con $I=0$.

Ora si osservi che, se n è il minimo ordine delle $F_1, \ldots, F_h$, al modulo $(F_1, \ldots, F_h)$ e al modulo sezione di questo con un iperpiano generico, non possono appartenere forme — non identicamente nulle — d'ordine $< n$; dunque, spingendo la successione (10) sino ad una forma $F^{(q)}$ tale che $l-q<n$, dovrà risultare $F^{(q)}$ identicamente nulla, e quindi

$$F^{(q-1)} \equiv 0 \mod(F_1, \ldots, F_h).$$

Risalendo alla forma F mediante le (10), si trova

$$F \equiv 0 \mod(F_1, \ldots, F_h);$$

e ciò dimostra il teorema per $h \leq r-1$ forme dello S_r.

Passiamo a dimostrare il teorema per r forme $F_1, \ldots, F_r$,

che abbiano a comune un numero finito di zeri, i cui punti immagine denoteremo con P.

Anzitutto ammettiamo che l'ipersuperficie $\Phi = 0$, non passante per alcuno dei P, sia un iperpiano. Per ipotesi abbiamo:

$$\Phi F \equiv A_1 F_1 \bmod (F_2, \ldots, F_r), \tag{11}$$

donde si trae

$$\bar{A}_1 \bar{F}_1 \equiv 0 \bmod (\bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_r), \tag{12}$$

ove $\bar{A}_1, \bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_r$ son le sezioni con $\Phi = 0$ delle forme A_1, $F_1, F_2, \ldots, F_r$. Ora, considerando entro all'iperpiano $\Phi = 0$ le ipersuperficie

$$\bar{F}_1 = 0, \quad \bar{F}_2 = 0, \quad \bar{F}_r = 0,$$

si vede che la prima di esse non passa pei punti — in numero finito — comuni alle restanti, perchè altrimenti Φ si annullerebbe in qualche P; onde, pel teorema ammesso nello S_{r-1}, dalla (12) segue

$$\bar{A}_1 \equiv 0 \bmod (\bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_r),$$

e quindi

$$A_1 \equiv \Phi A_1' \bmod (F_2, \ldots, F_r). \tag{13}$$

Le (11), (13) confrontate dànno:

$$\Phi(F - A_1' F_1) \equiv 0 \bmod (F_2, \ldots, F_r).$$

E poichè l'iperpiano $\Phi = 0$ sega in un numero finito di punti la *curva* comune alle $F_2 = 0, \ldots, F_r = 0$, in forza del teorema già dimostrato per $r-1$ forme di $r+1$ variabili, si ha:

$$F - A_1' F_1 \equiv 0 \bmod (F_2, \ldots, F_r),$$

cioè:

$$F \equiv 0 \bmod (F_1, F_2, \ldots, F_r).$$

Bisogna ora dimostrare il teorema quando l'ordine della forma Φ è qualunque (≥ 1).

Siccome le $\Phi, F_1, \ldots, F_r$ non hanno per ipotesi zeri comuni,

assunto un iperpiano arbitrario $I=0$, in virtù del teorema dimostrato al n° 3, si potrà determinare un intero n così elevato che risulti

$$I^n \equiv A\Phi \bmod (F_1, ..., F_r).$$

E poichè per ipotesi

$$\Phi F \equiv 0 \bmod (F_1, ..., F_r),$$

avremo:

$$I^n F \equiv 0 \bmod (F_1, ..., F_r).$$

Ora, se l'iperpiano $I=0$ fu assunto genericamente, in guisa cioè che non passi per nessuno dei P, applicando il teorema già dimostrato nel caso di una forma Φ lineare (attualmente si prenderà come Φ la forma I e come F la forma $I^{n-1}F$), avremo:

$$I^{n-1} F \equiv 0 \bmod (F_1, ..., F_r).$$

Così proseguendo si giunge alla

$$F \equiv 0 \bmod (F_1, ..., F_r),$$

la quale dimostra completamente il teorema.

5. — Dal teor. precedente segue che:

" Se le forme $F_1(x_0, ..., x_r), ..., F_h(x_0, ..., x_r)$ $(h \leq r+1)$ degli " ordini $n_1, n_2, ..., n_h$, hanno a comune soltanto ∞^{r-h} zeri, ogni " soluzione dell'equazione diofantea

$$X_1F_1 + X_2F_2 + ... + X_hF_h = 0, \tag{14}$$

" ove le X son forme incognite degli ordini $l-n_1, l-n_2, ..., l-n_h$, " è del tipo

$$X_i = p_{i1}F_1 + p_{i2}F_2 + ... + p_{ih}F_h \qquad (i=1, ..., h), \tag{15}$$

" nelle quali le p son forme arbitrarie (di convenienti ordini) " che soddisfano alle condizioni

$$p_{ii} = 0 \quad p_{ij} = -p_{ji} \text{ ''}.$$

Il teorema è vero per $h=2$. Infatti se

$$X_1F_1 + X_2F_2 = 0,$$

F_2 divide il prodotto $X_1 F_1$ e, poichè non divide F_1, si ha:

$$X_1 = p_{11} F_1 + p_{12} F_2 \qquad (p_{11} = 0).$$

Sostituendo nella precedente identità e dividendo per F_2, viene:

$$X_2 = p_{21} F_1 + p_{22} F_2 \quad (p_{21} = -p_{12}, p_{22} = 0).$$

Potremo dunque dimostrare il teorema per induzione, passando da $h-1$ ad h.

Poichè $F_1 = 0$ sega in una V_{r-h} la V_{r-h+1} comune ad $F_2 = 0, \ldots, F_h = 0$, ricordando il teorema del n° prec., dalla (14) si trae

$$(16) \qquad X_1 = p_{12} F_2 + \ldots + p_{1h} F_h;$$

e quindi la (14) si trasforma nella

$$(X_2 + p_{12} F_1) F_2 + (X_3 + p_{13} F_1) F_3 + \ldots + (X_h + p_{1h} F_1) F_h = 0.$$

Avendo ammesso il teorema da dimostrarsi per $h-1$ forme, avremo:

$$(17) \qquad X_i + p_{1i} F_1 = p_{i2} F_2 + \ldots + p_{ih} F_h \qquad (i = 2, \ldots, h),$$

ove

$$p_{ii} = 0, \quad p_{ik} = -p_{ki}.$$

Le (16), (17) considerate complessivamente, si riducono alle (15) ponendo

$$p_{11} = 0, \quad p_{i1} = -p_{1i} \qquad (i = 2, \ldots, h).$$

Il teorema è dunque dimostrato.

6. — Diremo che più ipersuperficie di S_r

$$F_1 = 0, \; F_2 = 0, \; \ldots, \; F_h = 0 \qquad (h \leq r),$$

presentano in un punto P ad esse comune il *caso semplice*, quando i coni ad esse tangenti in P, sono in posizione generica, cioè si segano secondo un cono ad $r-h$ dimensioni e non secondo un cono più ampio.

Sussiste allora il teorema:

Se le $h \leq r$ *ipersuperficie di* S_r $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, ..., $F_h = 0$, *passano pel punto* P *colle molteplicità rispettive* $s_1, s_2, \ldots, s_h$, *presentando ivi il caso semplice, ogni* F *del modulo* $(F_1, F_2, \ldots, F_h)$, *la quale sia di ordine* l *abbastanza elevato ed abbia in* P *uno zero s-plo (almeno), si può esprimere sotto la forma*

$$A_1F_1 + A_2F_2 + \ldots + A_hF_h,$$

ove le $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, ..., $A_h = 0$ *passano per* P *colle rispettive molteplicità* $s - s_1$, $s - s_2$, ..., $s - s_h$ *(almeno)* (*).

Per evitare digressioni inutili, avvertiamo subito che nel ragionamento successivo si supporrà l così grande che risultino positive o nulle tutte le varie funzioni di l che si dovranno considerare.

Poichè il teorema è evidentemente vero per le forme del modulo $(F_1, \ldots, F_h)$, che passano per P colla minima tra le molteplicità $s_1, s_2, \ldots, s_h$, lo potremo dimostrare in generale per induzione, passando da $s-1$ ad s.

Se F è una forma del modulo $(F_1, \ldots, F_h)$, la quale si annulli in P colla molteplicità s, avremo

$$F = A_1F_1 + A_2F_2 + \ldots + A_hF_h,$$

ove la $A_i = 0$ $(i = 1, \ldots, h)$, pel teorema ammesso, passa per P colla molteplicità $s - s_i - 1$ (almeno).

Ponendo in P l'origine delle coordinate ($x_0 = 1, x_1 = x_2 = \ldots = x_r = 0$) ed ordinando le F, F_i, A_i rispetto alle potenze discendenti di x_0, verrà:

$$F = \Phi x_0^{l-s} + \ldots.\quad F_i = \Phi_i x_0^{n_i - s_i} + \ldots,\quad A_i = a_i x_0^{l-n_i-s+s_i+1} + \ldots.$$

ove i coefficienti Φ, Φ_i, a_i son forme di $x_1, x_2, \ldots, x_r$ degli ordini rispettivi s, s_i, $s - s_i - 1$, ed i puntini stanno in luogo dei termini di grado inferiore in x_0.

Risulterà dunque

$$(18)\qquad \Phi x_0^{l-s} + \ldots = \sum_i (a_i x_0^{l-n_i-s+s_i+1} + \ldots)(\Phi_i x_0^{n_i - s_i} + \ldots).$$

(*) Il numero intero s è soggetto soltanto alla condizione di non esser minore di tutte le $s_1, s_2, \ldots, s_h$.

Poichè nel 1° membro di quest'identità manca il termine in x_0^{l-s+1}, e nel 2° membro x_0^{l-s+1} ha per coefficiente $\Sigma a_i \Phi_i$, avremo identicamente

$$\Sigma a_i \Phi_i = 0.$$

Ora, per l'ipotesi che in P le $F_1 = 0, \ldots, F_h = 0$ presentino il caso semplice, le $\Phi_i = 0$, considerate entro all'iperpiano $x_0 = 0$, si segano secondo una V_{r-h-1}, e quindi, pel teor. nel n° 5, verrà

$$a_i = p_{i1}\Phi_1 + p_{i2}\Phi_2 + \ldots + p_{ih}\Phi_h \quad (p_{ii} = 0, p_{ij} = -p_{ji}),$$

in cui le p *non dipendono da* x_0.

Ciò posto, osserviamo che la F si può pure rappresentare sotto la forma

$$F = \sum_{i=1}^{h} \left[A_i - \sum_{j=1}^{h} x_0^{t_{ij}} p_{ij} F_j \right] . F_i \tag{19}$$

ove:

$$t_{ij} = t_{ji} = l - n_i - n_j + s_i + s_j - s + 1.$$

Invero si ha:

$$\sum_i [A_i - \sum_j x_0^{t_{ij}} p_{ij} F_j] F_i = \sum_i A_i F_i - \sum_i \sum_j x_0^{t_{ij}} p_{ij} F_i F_j =$$

$$= \sum_i A_i F_i - \sum_{ij} x_0^{t_{ij}} (p_{ij} + p_{ji}) F_i F_j,$$

dove ij è una combinazione semplice degli indici 1, 2, ..., h.

In virtù delle relazioni

$$p_{ij} + p_{ji} = 0,$$

il sommatorio $\sum_{ij}$ risulta identicamente nullo, e quindi si ha la (19).

Ora nella forma

$$B_i = A_i - \sum_j x_0^{t_{ij}} p_{ij} F_j,$$

il coefficiente del termine in $x_0^{l-n_i-s+s_i+1}$ riducesi ad $a_i - \Sigma p_{ij} \Phi_j$, ed è perciò identicamente nullo: cioè la $B_i = 0$ passa per P colla molteplicità $s - s_i$ (almeno), c. d. d.

OSSERVAZIONE 1ª. — Tenendo conto della trasformazione eseguita sui coefficienti primitivi A_i, la (18) si muta nell'identità

$$\Phi x_0^{l-} + \ldots = \sum_i (b_i x_0^{l-n_i-s+s_i} + \ldots)(\Phi_i x_0^{n_i-s_i} + \ldots),$$

dalla quale, uguagliando i coefficienti di x_0^{l-s}, si ricava

$$\Phi = \sum_i b_i \Phi_i.$$

Ciò prova che *nella stella* (P) *il cono tangente alla* $\mathrm{F} = 0$ *appartiene al modulo individuato dai coni tangenti alle* $\mathrm{F}_1 = 0, \ldots, \mathrm{F}_h = 0$.

OSSERVAZIONE 2ª. — Le funzioni di l che si considerano nella dimostrazione del teorema precedente sono

$$l - s,\ l - n_i - s + s_i + 1,\ t_{ij} = l - n_i - n_j + s_i + s_j - s + 1.$$

Quanto alla differenza $l - s$ essa è di sua natura non negativa, pel significato dei numeri che la compongono. Le altre due funzioni risultano certamente positive o nulle, quando sia

$$l \geq n_1 + n_2 + \ldots + n_h - k, \quad s \leq s_1 + s_2 + \ldots + s_h - k + 1,$$

ove k è un intero positivo arbitrario.

Dunque *per* $\mathrm{s} \leq \mathrm{s}_1 + \mathrm{s}_2 + \ldots + \mathrm{s}_h - \mathrm{k} + 1$ *un limite inferiore di* l *dal quale è applicabile il teorema precedente è* $\mathrm{n}_1 + \mathrm{n}_2 + \ldots + \mathrm{n}_h - \mathrm{k}$.

OSSERVAZIONE 3ª. — Il ragionamento esposto per dimostrare il teorema del nº 6, nel caso particolare $h = 2$ dà il seguente risultato noto:

" Avendosi nello S_r due ipersuperficie $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, si " fissi l'attenzione sopra un numero finito o infinito di punti P " per cui esse passino colle molteplicità rispettive s_1, s_2, pre" sentando in ogni P il caso semplice: allora ogni F del mo" dulo (F_1, F_2) la quale abbia in P uno zero $(s_1 + s_2 - 1)$-plo " (almeno), si può esprimere mediante una combinazione lineare " $A_1F_1 + A_2F_2$, ove le $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ passano per ogni P colle " rispettive molteplicità $s_2 - 1$, $s_1 - 1$ ".

La cosa è vera infatti per un qualunque P fissato, poichè l'identità $a_1\Phi_1 + a_2\Phi_2 = 0$, che si trae dalla (18), porta di necessità $a_1 = a_2 = 0$, giacchè Φ_2, che è di grado s_2, deve dividere a_1, che è di grado $s_2 - 2$: e similmente Φ_1 deve dividere a_2.

7. — Il teorema del n° prec. permette di calcolare la dimensione del sistema Σ della ipersuperficie d'ordine l abbastanza alto

$$A_1F_1 + A_2F_2 + \ldots + A_hF_h = 0,$$

che passano colla molteplicità s pel punto P considerato nella ipotesi del teorema, quando però s'introduca l'ulteriore ipotesi che le $F_1, \ldots, F_h$ abbiano a comune soltanto ∞^{r-h} zeri.

Si dimostra precisamente che, ove si pongano uguali allo zero quei simboli combinatori in cui il numero superiore risulti minore dell'inferiore, la dimensione di Σ viene espressa, qualunque sia s, dalla formola

$$D_h(l; n_1, \ldots, n_h) - D_h(s-1; s_1, \ldots, s_h) - 1,$$

ove:

$$D_h(l; n_1, \ldots, n_h) = \sum_i \binom{l-n_i+r}{r} - \sum_{ik} \binom{l-n_i-n_k+r}{r} + \ldots$$

$$+ (-1)^{h-1} \binom{l-n_1-\ldots-n_h+r}{r}.$$

Poichè, colla convenzione posta, questa formola risulta vera per $h=1$, qualunque sia s, potremo dimostrarla per induzione argomentando da $h-1$ ad h.

Il sistema Σ di dimensione incognita d_1, in forza del teorema ultimamente dimostrato, congiunge il sistema Σ' delle ipersuperficie $A_1F_1 = 0$ (con $A_1 = 0$ passante $s - s_1$ volte per P), ed il sistema Σ'' delle ipersuperficie $A_2F_2 + \ldots + A_hF_h = 0$ (colle $A_2 = 0, \ldots, A_h = 0$ passanti risp. $s - s_2, \ldots, s - s_h$ volte per P).

Il sistema Σ''' intersezione di Σ' e Σ'', in virtù del n° 4, è costituito da ipersuperficie spezzate nella $F_1 = 0$ e in una $A_1 = 0$ del mod$(F_2, \ldots, F_h)$, la quale passi $s - s_1$ volte per P.

Essendo l abbastanza alto, potremo dunque supporre, secondo quanto afferma il teor. del n° prec., che sia

$$A_1 = B_1F_2 + \ldots + B_hF_h,$$

colle $B_i = 0$ passanti $s - s_1 - s_i$ volte per P. Ne segue, per la formola ammessa nel caso di $h-1$ forme, che la dimensione di Σ''' è espressa da

$$D_{h-1}(l-n_1; n_2, \ldots, n_h) - D_{h-1}(s-s_1-1; s_2, \ldots, s_h) - 1.$$

E poichè le dimensioni di Σ', Σ'' son date risp. da

$D_1(l; n_1) - D_1(s-1; s_1) - 1, D_{h-1}(l; n_2, ..., n_h) - D_{h-1}(s-1; s_2, ..., s_h) - 1,$

avremo

$$d_1 = D_1(l; n_1) - D_1(s-1; s_1) + D_{h-1}(l; n_2, ..., n_h) - D_{h-1}(s-1; s_2, ..., s_h)$$
$$- D_{h-1}(l - n_1; n_2, ..., n_h) + D_{h-1}(s - s_1 - 1; s_2, ..., s_h) - 1.$$

Tenendo presente che la $D_h(l; n_1, ..., n_h)$ soddisfa all'equazione

$$D_h(l; n_1, ..., n_h) + D_{h-1}(l - n_1; n_2, ..., n_h) = D_1(l; n_1) + D_{h-1}(l; n_2, ..., n_h),$$

si ha:

$$d_1 = D_h(l; n_1, ..., n_h) - D_h(s-1; s_1, ..., s_h) - 1,$$

c. d. d.

Osservazione. — Supponendasi $h = r$. Allora la funzione $D_r(l; n_1, ..., n_r)$, considerata indipendentemente dalla convenzione posta al principio del n°, riducesi ad $\binom{l+r}{r} - n_1 n_2 ... n_r$; e la funzione $D_r(s-1; s_1, ..., s_r)$ riducesi similmente ad

$$\binom{s+r-1}{r} - s_1 s_2 ... s_r.$$

Ma quando $l \geq n_1 + ... + n_r - r$, $s - 1 \geq s_1 + ... + s_r - r$ le espressioni formali delle $D_r(l; n_1, ..., n_r)$, $D_r(s-1; s_1, ..., s_r)$ coincidono colle corrispondenti espressioni convenzionali, perchè in tutti i simboli combinatori che in esse figurano il numero superiore non risulta negativo (*): dunque *per* $h = r$, l *abbastanza alto ed* $s \geq s_1 + ... + s_2 - r + 1$, *il sistema* Σ *ha la dimensione*

$$\binom{l+r}{r} - 1 - n_1 n_2 ... n_r - \binom{s+r-1}{r} + s_1 s_2 ... s_r.$$

Il limite inferiore di l a partire dal quale è applicabile

(*) Dalla definizione formale del simbolo combinatorio $\binom{u}{v}$, che è data dall'uguaglianza $\binom{u}{r} = \frac{u(u-1)...(u-r+1)}{r!}$, risulta infatti per $0 < u < r$ $\binom{u}{r} = 0$.

questa formola, è il maggiore tra i due numeri $n_1 + ... + n_2 - r$ ed N, ove N è il limite a partire dal quale si può applicare il teor. del n° prec.

8. — Se dopo aver imposto alle ipersuperficie $A_1F_1 + ... + A_hF_h = 0$ di passare s volte per P, imponiamo loro di passare $\bar{s}$ volte per un altro punto $\bar{P}$ per cui le $F_1 = 0, ..., F_h = 0$ passino colle molteplicità rispettive $\bar{s}_1, \bar{s}_2, ..., \bar{s}_h$, presentando il caso semplice, quale sarà la dimensione d_2 del sistema lineare che viene ad ottenersi?

Questo sistema costituirà l'intersezione dei sistemi $\Sigma, \bar{\Sigma}$ formati risp. dalle ipersuperficie $\Sigma A_iF_i = 0$ d'ordine abbastanza alto, che passano $s, \bar{s}$ volte per $P, \bar{P}$. Poichè i due sistemi $\Sigma, \bar{\Sigma}$ son contenuti nel sistema di dimensione $D_h(l; n_1, n_2, ..., n_h) - 1$, formato da tutte le ipersuperficie $\Sigma A_iF_i = 0$, avremo:

$$d_2 \geq D_h(l; n_1, ..., n_h) - D_h(s-1; s_1, ..., s_h) - 1 + D_h(l; n_1, ..., n_h) - \\ - D_h(\bar{s}-1; \bar{s}_1, ..., \bar{s}_h) - 1 - [D_h(l; n_1, ..., n_h) - 1];$$

cioè:

$$d_2 \geq D_h(l; n_1, ..., n_h) - D_h(s-1; s_1, ..., s_h) - D_h(\bar{s}-1; \bar{s}_1, ..., \bar{s}_h) - 1.$$

Se poi vi sono t punti P in cui le $F_1 = 0, ..., F_h = 0$ presentino il caso semplice colle rispettive molteplicità $s_1, ..., s_h$ seguitando ad applicare il procedimento esposto, si ottiene il seguente limite inferiore della dimensione d_t del sistema di tutte le ipersuperficie $\Sigma A_iF_i = 0$ d'ordine abbastanza alto, che passano s volte per ogni P:

$$d_t \geq D_h(l; n_1, ..., n_h) - \sum_P D_h(s-1; s_1, ..., s_h) - 1.$$

In particolare per $h = r$, $s \geq s_1 + ... + s_r - r + 1$, il sistema delle ipersuperficie d'ordine abbastanza elevato, passanti s volte per ogni P comune alle $F_1 = 0, ..., F_r = 0$, ha la dimensione

$$d_t \geq \binom{l+r}{r} - 1 - n_1n_2...n_r - \sum_P \binom{s+r-1}{r} + \sum_P s_1s_2...s_r.$$

Ma per l'ipotesi che in ogni P le F presentino il caso semplice, si ha $\sum_P s_1s_2...s_r = n_1n_2...n_r$, e quindi

$$d_t \geq \binom{l+r}{r} - 1 - \sum_P \binom{s+r-1}{r}. \tag{20}$$

9. — Per l abbastanza grande, il sistema T di *tutte* le ipersuperficie passanti colla molteplicità $s = s_1 + s_2 + \ldots + s_r - r + 1$ per ogni P, in cui le $F_1 = 0, \ldots, F_r = 0$ presentino il caso semplice colle rispettive molteplicità $s_1, s_2, \ldots, s_r$, ha la dimensione

$$\delta_l = \binom{l + r}{r} - 1 - \sum_P \binom{s + r - 1}{r},$$

perchè le condizioni imposte dai singoli P risultano indipendenti tra loro.

Questa relazione, confrontata colla (20), dà

$$d_l \geq \delta_l.$$

D'altra parte il sistema delle ipersuperficie $\Sigma A_i F_i = 0$ che passano s volte per ogni P, è contenuto nel sistema T, dunque risulterà

$$d_l = \delta_l$$

e il primo sistema *coinciderà* col secondo.

Ciò è vero quando l'ordine delle ipersuperficie $\Sigma A_i F_i = 0$ sia abbastanza alto ($\geq M$); ma è facile discendere a valori inferiori dell'ordine mediante il teor. del n° 4. Infatti se un'ipersuperficie $F = 0$ d'ordine $l < M$ passa per ogni P colla molteplicità s, aggregando ad essa una $\Phi = 0$ d'ordine $M - l$, non passante per alcuno dei P, avremo una ipersuperficie $\Phi F = 0$ tale che

$$\Phi F \equiv 0 \bmod (F_1, \ldots, F_r),$$

donde, in virtù del teorema richiamato, segue

$$F \equiv 0 \bmod (F_1, \ldots, F_r).$$

Arriviamo così al teorema:

Se nello S_r *si hanno* r *ipersuperficie* $F_1 = 0, \ldots, F_r = 0$, *che si seghino in un numero finito di punti* P, *presentando in ciascuno di essi il caso semplice, ed* $s_1, \ldots, s_r$ *sono le molteplicità di* $F_1 = 0, \ldots, F_r = 0$ *in uno generico di questi punti, una forma* F *che si annulli* $s_1 + \ldots + s_r - r + 1$ *volte in ciascuno dei* P, *appartiene al modulo* $(F_1, \ldots, F_r)$.

Parma, 19 dicembre 1905.

Sopra certe estensioni del teorema di Noether $Af + B\varphi$.

Nota di RUGGIERO TORELLI, a Parma.

È ben noto come il sig. NOETHER sia pervenuto, mediante gli sviluppi in serie di potenze, ad una condizione necessaria e sufficiente per l'esprimibilità di una forma come combinazione lineare di due altre (*); e come ne abbia dedotto, nel *caso semplice* (cfr. n. 1), il noto *teorema fondamentale* $Af + B\varphi$, il quale dà, sotto forma geometrica, una condizione sufficiente per la detta esprimibilità (**).

Il sig. SEVERI ha dato di quest'ultimo teorema una estensione relativa al caso di un numero $h \leqq r$ di forme in $r+1$ variabili, i cui zeri comuni formino una varietà ad $r-h$ dimensioni, *priva di parti multiple* (***); e ne ha dedotto la postulazione che una tal varietà offre alle ipersuperficie di dato ordine che debbano contenerla (****).

Il sig. KŒNIG poi, riprendendo le considerazioni, di natura trascendente, del NOETHER, ha trovato una condizione necessaria e sufficiente per l'esprimibilità di una forma in $r+1$ variabili come combinazione lineare di r altre aventi a comune un numero finito di zeri, e ne ha dedotto la seguente estensione del teorema $Af + B\varphi$:

Le r *ipersuperficie* $F_1 = 0, \ldots, F_r = 0$ *di* S_r *si seghino in un numero finito di punti* P, *presentando in ciascuno di essi il caso*

(*) Veggansi i lavori nei volumi II (1869) e VI (1872) dei " Math. Ann. ".

(**) Per una dimostrazione algebrica di tal teorema, veggansi specialmente i lavori di Voss (" Math. Ann. ", vol. 27, 1886), NOETHER (" Math. Ann. ", vol. 29, 1886), BERTINI (" Math. Ann. ", vol. 34, 1889 e 35, 1890; " Rend. Ist. Lomb. ", vol. 24, 1891).

(***) *Rappresentazione di una forma qualunque per combinazione lineare di più altre* (" Rend. Lincei ", (5), t. XI, 1902).

(****) Ibidem, e *Su alcune questioni di postulazione* (" Rend. di Palermo ", t. XVII, 1903).

semplice. Se $s_1, \ldots, s_r$ *sono le multiplicità di* $F_1 = 0, \ldots, F_r = 0$ *in un generico* P, *l'equazione di una ipersuperficie che passi* $s_1 + \ldots + s_r - r + 1$ *volte per ogni* P *si può porre sotto la forma* $A_1F_1 + \ldots + A_rF_r = 0$, *le* A *essendo forme* (*).

In questo lavoro io generalizzo, per via algebrica, in due modi diversi, i risultati del sig. SEVERI. Precisamente nel § 1 estendo il teorema $Af + B\varphi$ al caso di un numero $h < r$ di forme in $r+1$ variabili, i cui zeri comuni costituiscano una V_{r-h}, *dotata o no di parti multiple.* L'estensione risulta facilmente dall'ultimo teorema enunciato, applicando il lemma del n. 3: lemma il quale, note le condizioni di rappresentabilità di una forma in r variabili come combinazione lineare di altre $h \leqq r - 1$ aventi a comune ∞^{r-h-1} zeri, fornisce le condizioni di rappresentabilità di una forma in $r + 1$ variabili come combinazione lineare di altre h aventi a comune ∞^{r-h} zeri.

Nel § 2 poi considero $h \leqq r$ forme $F_1, \ldots, F_h$ di $r+1$ variabili, i cui zeri comuni costituiscano una V_{r-h} priva di parti multiple, e trovo una condizione necessaria e sufficiente perchè una forma di quelle variabili si possa esprimere come forma di dato grado s negli argomenti $F_1, \ldots, F_h$. Da ciò deduco la postulazione che la nominata V_{r-h} offre alle ipersuperficie di dato ordine che debbano contenerla come s-pla. Questa seconda estensione era nota nel caso $h = 2$, $r = 3$ (cfr. NOETHER, *Sulle curve multiple di superficie algebriche* (**)): però la dimostrazione del sig. NOETHER è diversa dalla mia nel concetto ed è anche meno semplice.

§ 1.

1. — Consideriamo in S_r un certo numero $h \leqq r$ di ipersuperficie:

$$(1) \qquad V^{n_1}_{r-1}, \; V^{n_2}_{r-1}, \ldots, \; V^{n_h}_{r-1},$$

degli ordini $n_1, n_2, \ldots, n_h$, e passanti per un medesimo punto P.

(*) *Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Grössen* (Leipzig, Teubner, 1903), p. 389. Una dimostrazione algebrica di questo teorema trovasi nella Nota del sig. SEVERI: *Su alcune proprietà dei moduli di forme algebriche*, pubblicata in questo stesso fascicolo.

(**) " Ann. di Mat. ", serie II, tomo V (1871).

Esse ammetteranno in P rispettivamente h coni tangenti a $r-1$ dimensioni:

(2) $$T^{(1)}_{r-1},\ T^{(2)}_{r-1}, \ldots, T^{(h)}_{r-1}.$$

Ora $h \leqq r$ ipersuperficie di S_r, formate di rette per un medesimo punto, generalmente, se $h < r$, si segano in un cono ad $r-h$ dimensioni, avente per vertice quel punto; e, se $h = r$, hanno a comune quel punto solo. Se per le (2) ciò si verifica, diremo che le (1) presentano in P il *caso semplice*: si vede allora immediatamente che le forme (2) sono linearmente indipendenti, e che, scelte comunque fra le (1) alcune di esse, queste presentano pure in P il caso semplice.

Sia $h = r$, e le (1) si seghino in una V_0, cioè in un gruppo di punti: sia P uno di questi, e abbia le multiplicità $s_1, s_2, \ldots, s_h$, rispettivamente per $V^{n_1}_{r-1}, V^{n_2}_{r-1}, \ldots, V^{n_h}_{r-1}$. *Se in* P *le* (1) *presentano il caso semplice, quel punto assorbe* $s_1 \times s_2 \times \ldots \times s_h$ *delle intersezioni delle* (1); *altrimenti ne assorbe di più* (*).

Sia $h < r$, e le (1) si seghino in una V_{r-h}, di cui Φ sia una parte irriducibile, avente la multiplicità s_λ per $V^{n_\lambda}_{r-1}$ $(\lambda = 1, \ldots, h)$. Un S_h *generico* per un punto *generico* P di Φ, sega le (1) in varietà ad $h-1$ dimensioni, aventi a comune un gruppo di punti: saranno $s_1, \ldots, s_h$ le multiplicità di P per tali varietà, e queste presenteranno in P il caso semplice se, e solo se lo presentano in esso le (1). Adunque: *Nella varietà intersezione delle* (1) *la* Φ *entra come componente multipla secondo* $s_1 \times s_2 \times \ldots \times s_h$, *se nel suo punto generico le* (1) *presentano il caso semplice; altrimenti entra con multiplicità maggiore.*

2. — Rappresenteremo d'ora innanzi i punti di un S_r con coordinate omogenee $x_0\, x_1 \ldots x_r$; l'equazione di una ipersuperficie si otterrà allora annullando una forma nelle $x_0 \ldots x_r$, forma determinata a meno di un fattor costante dalla ipersuperficie stessa.

Considеriamo un certo numero h di forme $F_1, \ldots, F_h$ nelle $x_0 \ldots x_r$: la totalità delle forme ottenute combinando linearmente

(*) Cfr., per es., Berzolari, *Sulle intersezioni di tre superficie algebriche* („Ann. di Mat.„, serie II, tomo 24, 1896).

e omogeneamente le $F_1, \dots, F_h$, con coefficienti forme nelle $x_0 \dots x_r$, costituisce un *modulo*, che indicheremo con $(F_1 F_2 \dots F_h)$.

Prenderemo le mosse dal seguente teorema, contenuto in una recente Memoria del sig. LASKER (*), e che ora è stato dimostrato per via semplicissima dal sig. SEVERI (**):

A) *Le* $h \leqq r$ *ipersuperficie* $F_1 = 0, \dots, F_h = 0$ *di* S_r *si seghino in una* V_{r-h}, *e l'ipersuperficie* $\Phi = 0$ *seghi questa* V_{r-h} *in una* V_{r-h-1}. *Se la forma* $F \cdot \Phi$ *appartiene al modulo* $(F_1 \dots F_h)$, *vi apparterrà la forma* F.

Questo teorema, nel caso che V_{r-h} nominata sia priva di parti multiple, è contenuto in sostanza nella citata Nota Lincea del sig. SEVERI, perchè se la forma $F \cdot \Phi$ soddisfa alla condizione enunciata, si deduce che la $F = 0$ passa per la V_{r-h}, e quindi che F appartiene al modulo $(F_1 \dots F_h)$. Anzi da questa osservazione il sig. SEVERI deduce il numero delle condizioni che si impongono a una forma di ordine l, abbastanza elevato, obbligandola ad appartenere al modulo suddetto (***). Indicando con $x_h(l)$ questo numero, e con n_i l'ordine di F_i, si ha la formula ricorrente:

$$(3) \qquad x_h(l) = x_{h-1}(l) - x_{h-1}(l - n_h),$$

donde segue:

$$(4) \qquad x_h(l) = \binom{l+r}{r} - \sum_i \binom{l-n_i+r}{r} + \sum_{ik} \binom{l-n_i-n_k+r}{r} - \dots +$$
$$+ (-1)^h \binom{l-n_1-\dots-n_h+r}{r},$$

dove le somme sono estese alle combinazioni semplici di 1ª, 2ª, ..., $(h-1)$ª classe degli indici $1, 2, \dots, h$.

Ora lo stesso ragionamento, tenendo presente il teorema più generale A), prova che la (4) è applicabile anche nel caso che la V_{r-h}, comune alle $F_i = 0$, sia dotata di parti multiple. È in sostanza in tal modo che il sig. LASKER, nella Memoria

---

(*) *Zur Theorie der Moduln und Ideale* („Math. Ann.", vol. 60, 1905, n. 3, Satz I).

(**) Vedasi la Nota citata: *Su alcune proprietà dei moduli di forme algebriche.*

(***) *Rappresentazione ecc.* (citata), n. 5.

citata, dimostra la (4) (*): osserviamo anzi col sig. SEVERI che le (3), (4) sono valevoli per *qualsiasi* valore di l, purchè si dia il valor zero a quelle espressioni $\binom{l-n-\ldots-n_k+r}{r}$, dove è $l-n_1-\ldots-n_k<0$; e si convenga di accettare come valore della postulazione $x_h(l)$ il numero $\binom{l+r}{r}$, allorquando, per essere l minore di tutte le n, non esistano forme di ordine l appartenenti al modulo $(F_1 \ldots F_h)$ (**).

3. — Adesso, per estendere il teorema del KŒNIG, enunciato nella prefazione, al caso di $h<r$ forme, dimostriamo il seguente lemma:

Se nello S_r *si hanno* $h<r$ *ipersuperficie* $F_1=0, \ldots, F_h=0$, *segantisi in una* V_{r-h}, *dotata o no di parti multiple, ogni forma* F, *la quale stacchi sopra un iperpiano variabile entro un fascio generico una forma appartenente al modulo sezione di* $(F_1 \ldots F_h)$, *appartiene a quest'ultimo modulo.*

Sia Σ un S_{r-2} generico, nel senso che seghi la V_{r-h}, Φ, comune alle $F_i=0$, in una V_{r-h-2}; sicchè ogni iperpiano del fascio (Σ) tagli Φ in una V_{r-h-1}. Senza ledere la generalità, possiamo supporre di aver scelto l'iperpiano $x_0=0$ passante per Σ.

Per l'ipotesi che la F dia come sezione con un iperpiano generico di (Σ) una forma del modulo sezione di $(F_1 \ldots F_h)$, si ha:

$$F(0x_1 \ldots x_r) \equiv \Sigma A_i(x_1 \ldots x_r) F_i(0x_1 \ldots x_r),$$

dalla quale segue:

$$F(x_0 \ldots x_r) \equiv \Sigma A_i(x_1 \ldots x_r) F_i(x_0 \ldots x_r) + x_0 F'(x_0 \ldots x_r), \tag{5}$$

dove F' è una forma di ordine $l-1$, se l è l'ordine di F.

Per l'identità (5) la sezione della forma x_0F' coll'iperpiano generico del fascio (Σ) appartiene al modulo sezione di $(F_1 \ldots F_h)$, dal che segue, pel teorema A), che lo stesso avviene per F'; e quindi che, se F' non è identicamente nulla, il suo ordine

(*) Loc. cit., n. 5, Satz II.

(**) SEVERI, *Su alcune questioni di postulazione* (citata).

non può essere inferiore al minimo μ degli ordini $n_1, \ldots, n_h$. In altri termini, quando sia $l = \mu$, risulterà F' identicamente nulla, e quindi, per la (5), F apparterrà al modulo $(F_1 \ldots F_h)$, e il lemma resterà dunque dimostrato per le forme F di ordine $l = \mu$. Si potrà ora procedere per induzione, dimostrando la sua verità per $l = N$, quando lo si ammetta per $l = N - 1 \, (\geqq \mu)$. Infatti, se F ha l'ordine N, sussiste sempre la (5), dove F' ha l'ordine $N - 1$, e soddisfa all'ipotesi dell'enunciato; ma dunque F' appartiene al modulo $(F_1 \ldots F_h)$, dal che segue che vi appartiene anche F (*).

4. — Il lemma precedente ci permette facilmente di estendere il teorema $Af + B\varphi$ nel seguente modo:

Le $h \leqq r$ *ipersuperficie* $F_1 = 0, \ldots, F_h = 0$ *di* S_r *si seghino in una* V_{r-h}, *presentando il caso semplice nel punto generico di questa varietà. Se* Φ *è una parte irriducibile di* V_{r-h}, *multipla secondo* $s_1, s_2, \ldots, s_h$ *per* $F_1 = 0$, $F_2 = 0, \ldots, F_h = 0$, *l'equazione di una ipersuperficie* W *che passi* $s_1 + \ldots + s_h - h + 1$ *volte per ogni* Φ *si può scrivere sotto la forma* $A_1F_1 + \ldots + A_hF_h = 0$, *le* A *essendo forme.*

Poichè il teorema è vero per $h = r$ (vedi introduzione), supporremo $h < r$, e ammetteremo il teorema nello S_{r-1}. Si consideri allora un S_{r-2} generico, Σ; esso segherà la V_{r-h}, comune alle $F_i = 0$, in una V_{r-h-2}; e l'iperpiano generico del fascio (Σ) segherà Φ in una V_{r-h-1}, avente la multiplicità s_k per la sezione di $F_k = 0$, e la multiplicità $s_1 + \ldots + s_h - h + 1$ per la sezione di W; e nel cui punto generico le sezioni delle $F_k = 0$ presenteranno il caso semplice. Pel teorema ammesso nello S_{r-1}, la forma F, corrispondente a W, stacca sull'iperpiano generico del fascio (Σ) una forma del modulo sezione di $(F_1 \ldots F_h)$; onde, pel lemma precedente, F appartiene al modulo $(F_1 \ldots F_h)$.

Il teorema resta così dimostrato.

(*) In questa dimostrazione giuocano gli stessi concetti, già esposti nel n. 7 della Nota Lincea del sig. Severi. Io, poggiandomi pure sopra questi concetti, avevo composto una dimostrazione un po' più complicata: la semplificazione mi è stata suggerita dal prof. Severi, il quale nelle ultime righe della sua Nota Lincea osserva che il ragionamento del detto n. 7 si può estendere, quando $h = 2$, al caso che la V_{r-2} comune alle $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ sia dotata di parti multiple.

§ 2.

5. — Passiamo ora alla seconda estensione accennata nella prefazione, e cioè dimostriamo il seguente teorema:

Le $h \leqq r$ *ipersuperficie* $F_1 = 0, \ldots, F_h = 0$ *di* S_r, *degli ordini* $n_1, n_2, \ldots, n_h$, *si seghino in una* V_{r-h}, *priva di parti multiple. Se una ipersuperficie* $F = 0$ *passa* s *(o più) volte per la* V_{r-h}, *si potrà rappresentare* F *come forma di grado* s *nelle* $F_1, \ldots, F_h$; *sarà cioè:*

$$F \equiv \Sigma A_{i_1 \ldots i_h} F_1^{i_1} \ldots F_h^{i_h}, \quad i_1 + \ldots + i_h = s,$$

le A *essendo forme nelle* $x_0 \ldots x_r$.

Il teorema è vero, come si sa, quando è $s = 1$: mostreremo che ammessolo quando è $s = \sigma - 1$, vale pure per $s = \sigma$.

Supponiamo infatti che l'ipersuperficie $F = 0$, di ordine l, passi σ volte per la detta V_{r-h}, che indicheremo con Φ; si potrà, per l'ipotesi fatta, rappresentare F come forma di grado $\sigma - 1$ nelle $F_1, \ldots, F_h$:

$$F \equiv \Sigma A_{i_1 \ldots i_h} F_1^{i_1} \ldots F_h^{i_h}, \quad i_1 + \ldots + i_h = \sigma - 1, \tag{6}$$

e ci basterà far vedere che le ipersuperficie $A = 0$ passano per Φ.

Prendiamo all'uopo un punto generico di Φ, che potremo supporre essere il vertice $1\, 0 \ldots 0$ della piramide fondamentale: in esso le ipersuperficie $F_1 = 0, \ldots, F_h = 0$ ammettono certi iperpiani tangenti che son certo linearmente indipendenti, e perciò potremo supporre siano gli iperpiani $x_1 = 0, \ldots, x_h = 0$: quindi, ordinando in x_0 la F_i, possiam supporre che sia $x_i x_0^{n_i - 1}$ il termine di grado più alto in x_0. La $A_{i_1 \ldots i_h}$ è una forma di grado $l - (n_1 i_1 + \ldots + n_h i_h)$; ne indicheremo con $\alpha_{i_1 \ldots i_h}$ il coefficiente di $x_0^{l - (n_1 i_1 + \ldots + n_h i_h)}$; cosicchè nel secondo membro della (6), ordinato in x_0, il termine di grado più alto in x_0 sarà:

$$\Sigma \alpha_{i_1 \ldots i_h} x_1^{i_1} \ldots x_h^{i_h} x_0^{l - \sigma + 1}, \quad i_1 + \ldots i_h = \sigma - 1.$$

Ma il coefficiente di $x_0^{l - \sigma + 1}$ deve essere identicamente nullo (perchè il punto $1\, 0 \ldots 0$ è σ-plo per $F = 0$); saranno perciò nulle le $\alpha_{i_1 \ldots i_h}$, epperò le ipersuperficie $A = 0$ passeranno pel punto $1\, 0 \ldots 0$. Il teorema è con ciò dimostrato.

6. — Dal precedente teorema dedurremo ora la postulazione $x_h^s(l)$ che Φ offre alle ipersuperficie di dato ordine l che debbano contenerla come s-pla. Indichiamo perciò con $(F_1 \ldots F_h)^s$ il modulo determinato dalle forme:

$$F_1^{i_1} \times F_2^{i_2} \times \ldots \times F_h^{i_h}, \quad i_1 + i_2 + \ldots + i_h = s,$$

e con $F_h(F_1 \ldots F_h)^{s-1}$, quello costituito dalle forme del modulo $(F_1 \ldots F_h)^{s-1}$, moltiplicate ciascuna per F_h. Facciamo poi le seguenti convenzioni:

a) prendiamo come valore della postulazione $x_h^s(l)$ il numero $\binom{l+r}{r}$, allorquando, per essere l minore dell's-plo della più piccola fra le n_i, non esistano ipersuperficie di ordine l passanti s volte per Φ;

b) al simbolo $\binom{\alpha}{\beta}$, dove $\alpha(\gtreqless 0)$, $\beta(\geqq 0)$ sono intieri, diamo il valor 1 se $\beta = 0$, e il valor zero se $\alpha < \beta$;

c) col simbolo $\overset{h}{\underset{m}{\Sigma}}{}^{p}$, dove $m \geqq p$, e $p \leqq h$, indichiamo la somma:

$$\sum \binom{l - n_{i_1} - \ldots - n_{i_m} + r}{r},$$

estesa a quelle combinazioni $i_1 \ldots i_m$ degli indici $1, \ldots, h$, ove sono p gli indici distinti; e se poi non sono soddisfatte entrambe le limitazioni $p \leqq m$, $p \leqq h$ (cosicchè non esistano di quelle combinazioni), intendiamo col simbolo $\overset{h}{\underset{m}{\Sigma}}{}^{p}$ lo zero.

Allora si ha la formula:

$$(7) \quad x_h^s(l) = \binom{l+r}{r} - \left\{ \binom{s-1}{0} \sum_s^{h}{}^{s} + \binom{s-2}{0} \sum_s^{h}{}^{s-1} + \ldots + \binom{0}{0} \sum_s^{h}{}^{1} \right\}$$
$$+ \left\{ \binom{s}{1} \sum_{s+1}^{h}{}^{s+1} + \binom{s-1}{1} \sum_{s+1}^{h}{}^{s} + \ldots + \binom{1}{1} \sum_{s+1}^{h}{}^{2} \right\}$$
$$- \left\{ \binom{s+1}{2} \sum_{s+2}^{h}{}^{s+2} + \binom{s}{2} \sum_{s+2}^{h}{}^{s+1} + \ldots + \binom{2}{2} \sum_{s+2}^{h}{}^{3} \right\}$$
$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$+(-1)^{i+1}\left\{\binom{s+i-1}{i}\sum_{i+1}^{h}{}^{s}+\binom{s+i-2}{i}\sum_{i}^{h}{}^{s+i-1}+\dots+\binom{i}{i}\sum_{s+1}^{h}{}^{i+1}\right\}$$

$$+\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.$$

$$+(-1)^{h}\left\{\binom{s+h-2}{h-1}\sum_{s+h-1}^{h}{}^{s+h-1}+\binom{s+h-3}{h-1}\sum_{s+h-1}^{h}{}^{s+h-2}+\dots+\binom{h-1}{h-1}\sum_{s+h-1}^{h}{}^{h}\right\}.$$

La formula è vera per $s=1$ (cfr. n. 2), e per $h=1$; noi la dimostreremo, ammettendola per le ipersuperficie costrette a passare s volte per la V_{r-h+1}, Ψ (priva di parti multiple), comune alle $F_1=0, \dots, F_{h-1}=0$; ovvero $s-1$ volte per Φ.

Supponiamo perciò $n_1 \geqq n_2 \geqq \dots \geqq n_h$, e consideriamo i due moduli:

$$M \equiv (F_1 \dots F_{h-1})^s, \quad N \equiv F_h (F_1 \dots F_h)^{s-1}.$$

Alle forme di ordine l appartenenti ad M corrispondono tutte le ipersuperficie di ordine l, passanti s volte per Ψ: queste ipersuperficie formano un sistema lineare Σ_M, di dimensione:

$$\binom{l+r}{r}-1-x_{h-1}^{s}(l).$$

Alle forme di ordine l appartenenti a N corrispondono tutte le ipersuperficie di ordine l composte della $F_h=0$ e di una ipersuperficie di ordine $l-n_h$, passante $s-1$ volte per Φ; queste ipersuperficie formano un sistema lineare Σ_N di dimensione:

$$\binom{l-n_h+r}{r}-1-x_h^{s-1}(l-n_h).$$

Il sistema di appartenenza di Σ_M e Σ_N è dato (*) dalle ipersuperficie, corrispondenti alle forme di grado l del modulo $(F_1 \dots F_h)^s$; epperò ha la dimensione:

$$\binom{l+r}{r}-1-x_h^{s}(l).$$

(*) Ciò perchè il sistema congiungente di due sistemi lineari $c_0\varphi_0+\dots+c_r\varphi_r=0$, $\lambda_0\psi_0+\dots+\lambda_\rho\psi_\rho=0$ è il sistema $c_0\varphi_0+\dots+c_r\varphi_r+\lambda_0\psi_0+\dots+\lambda_\rho\psi_\rho=0$.

Sia ora $l - n_h \geqq s n_{h-1}$. Una ipersuperficie che appartenga a Σ_M e Σ_N si decompone, com'è facile vedere, in $F_h = 0$ e in una ipersuperficie d'ordine $l - n_h$, passante s volte per Ψ; viceversa una ipersuperficie così formata appartiene a Σ_M e Σ_N: dunque il sistema Σ', intersezione di Σ_M e Σ_N, ha la dimensione:

$$(8) \qquad \binom{l-n_h+r}{r} - 1 - x^s_{h-1}(l - n_h).$$

Si ha perciò la relazione ricorrente:

$$(9) \qquad x^s_h(l) = x^s_{h-1}(l) - x^s_{h-1}(l - n_h) + x^{s-1}_h(l - n_h),$$

dalla quale, con semplici considerazioni di analisi combinatoria, si deduce appunto, mercè le espressioni ammesse per $x^s_{h-1}(l)$, $x^{s-1}_h(l)$, la (7).

Supponiamo ora $s n_h < l < n_h + s n_{h-1}$. Allora non esiste Σ'; e nella formula di geometria iperspaziale che abbiamo applicata per ottener la (9) si deve porre per la dimensione di Σ' il numero -1; ma appunto a -1 si riduce la dimensione di Σ', calcolata colla (8); perchè nel caso presente si deve porre, in virtù delle nostre convenzioni:

$$x^s_{h-1}(l - n_h) = \binom{l-n_h+r}{r}.$$

Perciò risulta ancora la (7).

Sia poi $l = s n_h$ *e* $n_h = n_{h-1} = \ldots = n_{h-\lambda} < n_{h-\lambda-1}$. Imponendo a una forma F del grado l di appartenere al modulo $(F_1 \ldots F_h)^s$, le imponiamo di potersi rappresentare come combinazione lineare, a coefficienti costanti, delle forme:

$$F_h^{i_0} \times F_{h-1}^{i_1} \times \ldots \times F_{h-\lambda}^{i_\lambda}, \quad i_0 + \ldots + i_\lambda = s.$$

Queste forme sono certo linearmente indipendenti: basta osservare che, supposto scelto il sistema coordinato come al n. 5, i coni tangenti nel punto $10\ldots0$ alle ipersuperficie $F_h^{i_0} . F_{h-1}^{i_1} \ldots F_{h-\lambda}^{i_\lambda} = 0$ sono i sistemi d'iperpiani:

$$x_h^{i_0} . x_{h-1}^{i_1} \ldots x_{h-\lambda}^{i_\lambda} = 0,$$

e questi sono linearmente indipendenti. Dunque F deve appartenere a un sistema lineare $\infty^{\binom{\lambda+s}{s}-1}$ di forme d'ordine l: essa deve quindi soddisfare a $\binom{l+r}{r}-\binom{\lambda+s}{s}$ condizioni. Ma appunto nel caso presente la (7), in virtù delle convenzioni fatte, ci dà:

$$x_h^s(l)=\binom{l+r}{r}-\binom{\lambda+s}{e}.$$

Infine, se $l < sn_h$, la (7) è valida per convenzione. Essa resta così completamente dimostrata.

È facile, nel caso $h=2$, $r=3$, ritrovare la formula del sig. NOETHER, cui si è accennato nella prefazione.

Parma, 19 dicembre 1905.

Alcune estensioni del "Fundamentalsatz" di Nöther negli iperspazî.

Nota di GIOVANNI Z. GIAMBELLI.

La questione delle condizioni, affinchè una forma si possa esprimere come combinazione lineare (avente per coefficienti forme) di più altre, ossia il così detto *Fundamentalsatz* di Nöther, è stata finora trattata nel caso *particolarissimo* della varietà completa intersezione di ipersuperficie [1], ossia rappresentata coll'annullare tutti gli elementi di una matrice (generica) ad una sola linea. Dal teorema I della presente Nota risulterà come sia possibile estendere questo *Fundamentalsatz* al caso delle varietà rappresentate coll' annullare tutti i determinanti di 2° ordine contenuti in una data matrice generica a due linee; col teorema III si ottiene un risultato ancor più esteso, perchè si considera il caso dell'intersezione di una varietà di questo tipo con una varietà del 1° tipo, cioè completa intersezione d'ipersuperficie. Nel § 2 è dimostrato un teorema (ausiliario), analogo ad una formola di Wirtinger [2], per l'intersezione di una varietà algebrica (*priva* di parti multiple), soddisfacente a condizioni convenienti, con più ipersuperficie generiche. Nel § 4 infine si comincia a considerare la questione del passaggio multiplo per una data varietà; la mancanza di spazio permette solo di esaurire il caso più semplice (varietà completa intersezione d'ipersuperficie).

---

(1) Siccome qui occorre distinguere la concezione della forma F (polinomio omogeneo) dalla concezione della totalità dei suoi zeri, si adopera la parola *ipersuperficie* invece di *forma*.

(2) *Untersuchungen über Thetafunctionen*, Leipzig, Teubner, 1895, pag. 20.

1. Definizioni.

Col simbolo $\binom{h}{k}$ si designerà il coefficiente binomiale $\frac{h!}{k!\,(h-k)!}$, il quale diventa nullo, se $h<k$.

Una forma sarà detta *combinazione di grado* s *di più altre forme*, che, per fissare le idee, si rappresentano con $F_0, F_1, \ldots, F_h$, quando essa è identicamente uguale ad un polinomio omogeneo di grado s nelle $F_0, F_1, \ldots, F_h$, polinomio avente per coefficienti delle forme; cioè quando questa forma appartiene al modulo $\left(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{\binom{h+s}{s}}\right)$, ove qui con $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{\binom{h+s}{s}}$ si sono indicate le $\binom{h+s}{s}$ forme, che sono prodotti delle $F_0, F_1, \ldots, F_h$ prese ad s ad s con ripetizione.

Per rendere più elegante l'esposizione del seguente § 4 si farà uso del simbolo $\nabla_r^{(y;z)}$ definito mediante la relazione:

$$\nabla_r^{(y;z)} = \frac{1}{r!}\,[\Delta_{(y;z)}]^r, \qquad (r=0, 1, 2, \ldots),$$

avendo indicato con $\Delta_{(y;z)}$ l'espressione simbolica (operazione di polare)

$$\sum_{i=0}^{i=d} y_i \frac{\partial}{\partial z_i}.$$

Questo simbolo $\nabla_r^{(y;z)}$ si è già definito in un altro mio Lavoro ([1]) e nella presente Nota si farà l'ipotesi di ricordare le tre proprietà fondamentali enunciate nel § 1 di quel mio Lavoro.

Per brevità colla locuzione:

postulazione s$^{\text{sima}}$ *di una superficie* P *rispetto ad una varietà* W

s'intenderà il numero delle condizioni lineari, che si debbano imporre all'ipersuperficie P, affinchè essa passi s volte per la varietà (algebrica) W.

([1]) *Le varietà rappresentate per mezzo di una matrice generica di forme e le varietà generate da sistemi lineari projettivi di forme*, "Rend. R. Acc. dei Lincei", (5), 14, 1905.

2. Il teorema di Wirtinger.

Nella citata Memoria del Wirtinger a pag. 20 si enuncia una formola, che esprime la funzione caratteristica (*die charakteristiche Function* di Hilbert (1)) dell'intersezione di una varietà algebrica, di data funzione caratteristica, con un certo numero d'ipersuperficie generiche. Siccome il seguente teorema presenta alcune analogie con questa formola, ho creduto opportuno chiamarlo *teorema di* Wirtinger.

Teorema di Wirtinger. — *Interpretando le* $x_0, x_1, ..., x_d$ *come coordinate omogenee di punto in uno spazio* S_d, *si designi con* S_i *lo spazio di dimensione* i *comune agli iperpiani di equazione* $x_{i+1}=0$, $x_{i+2}=0, ..., x_d=0$, *ed inoltre, essendo* r *un intero minore di* d, *si designi con* $F_{i1}, F_{i2}, ..., F_{ih} (h \geq r)$ *un sistema di forme nelle* $x_0, x_1, ..., x_i$ *soddisfacente a queste condizioni*:

1° *Quando è* $x_i = 0$, *risulti*:

$$F_{i-1,u} \equiv F_{i,u} \quad (i=r+1, r+2, ..., d; u=1, 2, ..., h).$$

2° *Il luogo dei punti comuni alle ipersuperficie di equazione* $F_{d1}=0, F_{d2}=0, ..., F_{dh}=0$ *è una varietà* W_{d-r} *di dimensione* $d-r$ *priva di parti multiple.*

3° *La* W_{d-r} *è segata dallo spazio* $S_i (i=r, r+1, ..., d-1)$ *in una varietà* W_{i-r} *di dimensione* $i-r$ *priva di parti multiple.*

4° *Affinchè un'ipersuperficie* M_{i-1} *appartenente allo spazio* S_i *passi per la* W_{i-r} *è necessario e sufficiente che ad essa corrisponda una forma* F_i *nelle* $x_0, x_1, ..., x_i$ *(le quali si pensano ora come coordinate omogenee di punto nello spazio* S_i*) appartenente al modulo* $(F_{i1}, F_{i2}, ..., F_{ih})$. *Si designi poi con* $\chi(l; i)$ *la funzione, che dà la postulazione prima per la* M_{i-1} *(di ordine l) rispetto alla* W_{i-r} (2).

Essendo $\Phi_d = 0$ *un'ipersuperficie di* S_d *di ordine* m_1, *la quale*

---

(1) Cfr. l'importante Memoria *Ueber die Theorie der algebraischen Formen*, " Math. Ann. ", 36, 1890, pag. 517. È utile pure aver presente l'altra importante Memoria di Hilbert, *Ueber die vollen Invariantensysteme*, " Math. Ann. ", 42, 1892.

(2) Se non esistono M_{i-1} passanti per W_{i-r}, perchè l è troppo basso, si conviene di porre $\chi(l; i) = \binom{i+l}{i}$.

taglia W_{i-r} $(i>r)$ *in una* W'_{i-r-1} *di dimensione* $i-r-1$ *priva di parti multiple, detto* m *l'ordine delle* W_{d-r}, W_{i-r-1}, ecc. *e indicando con* Φ_i *la forma nelle* $x_0, x_1, \ldots, x_i$, *che si ottiene dalla* Φ_d *ponendo in questa* $x_{i+1}=x_{i+2}=\ldots=x_d=0$, *se vale la relazione*

$$\chi(l; r+1)-\chi(l-m_1; r+1)=m\,m_1, \text{ quando sia } l\geq m\,m_1-1,$$

allora:

Affinchè un'ipersuperficie M_{i-1} $(i>r)$ *appartenente allo spazio* S_i *passi per la* W'_{i-r-1}, *è necessario e sufficiente che ad essa corrisponda nello spazio* S_i *una forma* F_i *nelle* $x_0, x_1, \ldots, x_i$ *(le quali si pensano ora come coordinate omogenee di punto nello spazio* S_i*), appartenente al modulo* $(\Phi_i, F_{i1}, F_{i2}, \ldots, F_{ih})$. *La postulazione prima* $\chi_1(l; i)$ *per l'ipersuperficie* M_{i-1} *di ordine* l *rispetto alla* W'_{i-r-1} *è definita dalla relazione funzionale:*

$$\chi_1(l;i)=\chi(l;i)-\chi(l-m_1;i).$$

Questo enunciato si può ampliare aggiungendo:

Essendo $\Phi_d^{(1)}=0, \Phi_d^{(2)}=0, \ldots, \Phi_d^{(t)}=0$ *un gruppo di* t *(dove* $t\leq d-r$*) ipersuperficie di* S_d *dei rispettivi ordini* $m_1, m_2, \ldots, m_t$, *tali che il luogo dei punti comuni ad esse ed alla* W_{i-r} $(i>r+t)$ *sia una varietà* $W^{(t)}_{i-r-t}$ *di dimensione* $i-r-t$ *priva di parti multiple, se valgono le relazioni:*

$$\chi(l;r+1)-\chi(l-m_1;r+1)=m\,m_1, \quad \text{quando} \quad l\geq m\,m_1-1,$$

$$\chi(l;\ r+2)-\chi(l-m_1;\ r+2)-\chi(l-m_2;\ r+2)+$$
$$+\chi(l-m_1-m_2;\ r+2)=m\,m_1m_2, \quad \text{quando} \quad l\geq m\,m_1m_2-1,$$

. . . .

(1)

$$\sum_{u=0}^{u=t}(-1)^u\Sigma^{(t)}_{j_1j_2\ldots j_u}\chi(l-m_{j_1}-m_{j_2}-\ldots-m_{j_u};\ r+t)=m\,m_1m_2\ldots m_t,$$
$$\text{quando} \qquad l\geq m\,m_1\,m_2\,\ldots\,m_t-1,$$

dove qui la sommatoria $\Sigma^{(t)}_{j_1j_2\ldots j_u}$ *è estesa a tutte le possibili combinazioni senza ripetizione* $j_1 j_2 \ldots j_u$ *di* u *numeri della serie* 1, 2, ..., t, allora:

Affinchè un'ipersuperficie M_{i-1} $(i\geq r+t)$ *appartenente allo spazio* S_i *passi per la* $W^{(t)}_{i-r-t}$, *è necessario e sufficiente che ad essa*

corrisponda una forma F_i *nelle* $x_0, x_1, \ldots, x_i$ *(coordinate omogenee di punto nello spazio* S_i*) appartenente al modulo* $(\Phi_i^{(1)}, \Phi_i^{(2)}, \ldots, \Phi_i^{(t)}, F_{i1}, F_{i2}, \ldots, F_{ih})$, *dove con* $\Phi_i^{(u)}$ $(u = 1, 2, \ldots, t)$ *si designa la forma nelle* $x_0, x_1, \ldots, x_i$ *ottenuta dalla* $\Phi_d^{(u)}$, *ponendo in questa* $x_{i+1} = x_{i+2} = \ldots = x_d = 0$. *La postulazione prima* $\chi_t(l; i)$ *per l'ipersuperficie* M_{i-1} *di ordine* l *rispetto alla* W'_{i-r-1} *è definita dalla relazione funzionale:*

$$\text{(I)} \qquad \chi_t(l; i) = \sum_{u=0}^{u=t} (-1)^u \, \Sigma^{(t)}_{j_1 j_2 \ldots j_u} \, \chi(l - m_{j_1} - m_{j_2} - \ldots - m_{j_u}; i), \qquad (d \geq i \geq r + t)$$

dove qui la sommatoria $\Sigma^{(t)}_{j_1 j_2 \ldots j_u}$ *è estesa a tutte le possibili combinazioni senza ripetizione* $j_1\, j_2 \ldots j_u$ *di* u *numeri della serie* $1, 2, \ldots, t$.

(La (I) si trova nella citata Memoria del Wirtinger).

Poichè nel teorema ora enunciato la parte che si riferisce alle forme $\Phi_d^{(1)}, \Phi_d^{(2)}, \ldots, \Phi_d^{(t)}$ è conseguenza immediata della prima parte relativa alla varietà W'_{i-r-1} intersezione di W_{i-r} coll'ipersuperficie Φ_d, basterà dimostrare solo questa prima parte. La dimostrazione relativa è analoga, per non dire uguale, alla dimostrazione del *Fundamentalsatz* di Nöther per le varietà complete intersezioni d'ipersuperficie, fatta dal Severi [1]. Quindi si potrà procedere rapidamente.

Anzitutto vale:

Lemma I. — *Se un' ipersuperficie* M_{i-1} *appartenente allo spazio* S_i $(i = r + 1, r + 2, \ldots, d)$ *passante per* W'_{i-r-1} *è costituita dall'iperpiano* $x_i = 0$ *di* S_i *e da un'altra ipersuperficie* $M_{i-1}^{(0)}$ *di* S_i *e se la* $M_{i-1}^{(0)}$ *corrisponde ad una forma* F_i *nelle* $x_0, x_1, \ldots, x_i$, *tale che* $x_i F_i$ *appartiene al modulo* $(\Phi_i, F_{i1}, F_{i2}, \ldots, F_{ih})$, *allora anche la* F_i *appartiene a questo modulo. (Qui le* $x_0, x_1, \ldots, x_i$ *si pensano come coordinate omogenee di punto in* S_i*).*

Si omette la dimostrazione di questo lemma, perchè non è altro che una mera estensione della dimostrazione fatta nel n° 1 (pag. 109) della prima delle due citate Note del Severi.

Per la nota relazione tra le dimensioni di due sistemi li-

---

[1] *Rappresentazione di una forma qualunque per combinazione lineare di più altre,* " Rend. della R. Acc. dei Lincei ", (5), 11, 1902. — *Su alcune questioni di postulazione,* " Rendic. del Circolo Mat. di Palermo ", 17, 1903.

neari e quelle dei sistemi lineari intersezione e congiungente (¹) segue che la funzione caratteristica del modulo $(\Phi_i, F_{i1}, F_{i2}, ..., F_{ih})$ $(i = r+1, r+2, ..., d)$ è uguale a

$$\binom{l+i}{i} - \left[\binom{l-m_i+i}{i} - 1 + \binom{l+i}{i} - \chi(l;i) - \lambda\right],$$

dove qui con λ si è indicata la dimensione del sistema lineare di tutte le ipersuperficie di ordine l dello spazio S_i, alle quali corrispondono forme appartenenti al modulo $(\Phi_i F_{i1}, \Phi_i F_{i2}, ..., \Phi_i F_{ih})$.

Essendo $\lambda = \binom{l-m_1+i}{i} - \chi(l-m_1; i) - 1$, sostituendo si trae che la funzione caratteristica del modulo $(\Phi_i, F_{i1}, F_{i2}, ..., F_{ih})$ è uguale a $\chi(l; i) - \chi(l-m_1; i)$.

Questa relazione vale qualunque sia l, purchè si faccia la convenzione che la funzione caratteristica di un dato modulo, costituito da forme di $i+1$ variabili omogenee, quando l è troppo basso (ossia quando l sia tale che non esistano forme di ordine l appartenenti a questo modulo) sia uguale a $\binom{l+i}{i}$.

Calcolata questa funzione caratteristica si può subito dimostrare il teorema di Wirtinger, cioè la prima parte di questo teorema, per quello che si riferisce alla W_0'.

Per l'ipotesi fatta la W_0' è costituita da $m m_1$ punti distinti di S_{r+1}: questi punti impongono $m m_1$ condizioni semplici alle ipersuperficie, appartenenti allo spazio S_{r+1}, di ordine l maggiore di $m m_1 - 2$. Quindi le ipersuperficie appartenenti allo spazio S_{r+1} di ordine l, maggiore di $m m_1 - 2$, passanti per W_0' costituiscono un sistema lineare di dimensione $\binom{l+r+1}{r+1} - 1 - m m_1$, cioè un sistema così esteso come il sistema delle ipersuperficie dello spazio S_{r+1}, pure passanti per W_0', le quali corrispondono a forme di ordine l, abbastanza alto, appartenenti al modulo $(\Phi_{r+1}, F_{r+1,1}, F_{r+1,2}, ..., F_{r+1,h})$, perchè per ipotesi, se l è abbastanza alto, $\chi(l; r+1) - \chi(l-m_1; r+1) = m m_1$. Quindi ad ogni ipersuperficie, appartenente allo spazio S_{r+1}, di ordine l maggiore

(¹) Come ha osservato il Severi nella citata Nota dei "Rend. del Circolo Matem. di Palermo", si può sostituire questa considerazione geometrica alla relazione fondamentale di Hilbert (Memoria citata dei "Math. Annalen", 36, 1890, pag. 519).

di $N-1$ (ove qui con N si designa un conveniente limite) passante per W_0', corrisponde una forma delle $x_0, x_1, \dots, x_{r+1}$ appartenente al modulo $(\Phi_{r+1}, F_{r+1,1}, F_{r+1,2}, \dots, F_{r+1,h})$.

Se F_{r+1} è una forma delle $x_0, x_1, \dots, x_{r+1}$ di ordine $N-1$, passante per gli zeri di W_0', considerandola insieme ad una forma lineare generica nelle $x_0, x_1, \dots, x_{r+1}$ si otterrà una forma di ordine N passante per gli zeri di W_0' e quindi appartenente al modulo $(\Phi_{r+1}, F_{r+1,1}, F_{r+1,2}, \dots, F_{r+1,h})$. Per il lemma I segue che anche F_{r+1} appartiene a questo modulo. In modo analogo dalle forme di ordine $N-1$ si passa a quelle di ordine $N-2$, ecc.; così è dimostrata la prima parte del teorema di WIRTINGER, quando $i=r+1$; e sarà quindi lecito dimostrare questa prima parte, quando $i \geq r+2$, ammettendola vera per $i-1$.

Pensando le $x_0, x_1, \dots, x_i$ come coordinate omogenee di punto in S_i, se $F_i(x_0, x_1, \dots, x_i)=0$ è un' ipersuperficie di questo spazio di ordine l passante per W'_{i-r-1}, per l'ipotesi fatta si potrà scrivere:

$$F_i(x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, 0) \equiv A_0(x_0, x_1, \dots, x_{i-1})\,\Phi_i(x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, 0) + \\ + A_1(x_0, x_1, \dots, x_{i-1})\,F_{i1}(x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, 0) + \dots + \\ + A_h(x_0, x_1, \dots, x_{i-1})\,F_{ih}(x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, 0),$$

da cui:

$$F_i(x_0, x_1, \dots, x_i) \equiv A_0(x_0, x_1, \dots, x_{i-1})\,\Phi_i(x_0, x_1, \dots, x_i) + \\ + A_1(x_0, x_1, \dots, x_{i-1})\,F_{i1} + \dots + A_h(x_0, x_1, \dots, x_{i-1})\,F_{ih} + x_0 F_i'(x_0, x_1, \dots, x_i),$$

essendo $F_i'(x_0, x_1, \dots, x_i)=0$ un' ipersuperficie appartenente ad S_i di ordine $l-1$ passante per W'_{i-r-1}, se esistono ipersuperficie di ordine $l-1$ passanti per W'_{i-r-1}, altrimenti $F_i'(x_0, x_1, \dots, x_i)$ è una forma nelle $x_0, x_1, \dots, x_i$ identicamente nulla. Se si dà questo 2° caso si conclude subito che $F_i(x_0, x_1, \dots, x_i)$ appartiene al modulo $(\Phi_i, F_{i1}, F_{i2}, \dots, F_{ih})$; se invece si dà il 1° caso, ragionando su $F_i'(x_0, x_1, \dots, x_i)$ come su $F_i(x_0, x_1, \dots, x_i)$ e così di seguito, si otterrà una successione di forme $F_i(x_0, x_1, \dots, x_i)$, $F_i'(x_0, x_1, \dots, x_i)$, $F_i''(x_0, x_1, \dots, x_i)$, ecc. corrispondenti ad altrettante ipersuperficie passanti per W'_{i-r-1} e di ordini decrescenti di una unità alla volta. Essendo *limitata* questa successione, si conclude che F_i appartiene al modulo $(\Phi_i, F_{i1}, F_{i2}, \dots, F_{ih})$ c. v. d.

3. Estensione del "Fundamentalsatz" alle varietà rappresentate coll'annullare tutti i determinanti di 2° ordine contenuti in una matrice generica di forme a due linee.

Nelle seguenti considerazioni si farà uso del simbolo $[u, v]$ (essendo $u = 0, 1, \ldots, n-1$; $v = u+1, u+2, \ldots, n$) per indicare il determinante $\begin{vmatrix} a_u & a_v \\ b_u & b_v \end{vmatrix}$.

Occorre dimostrare due proposizioni ausiliarie:

Lemma II. — *Siano* a_i, b_i $(i=0, 1, \ldots, n)$ *forme nelle* $x_0, x_1, \ldots, x_d$ $(d > n)$, *tali che, pensando le* $x_0, x_1, \ldots, x_d$ *come coordinate omogenee di punto nello spazio* S_d, *le ipersuperficie corrispondenti alle forme* $b_0, b_1, \ldots, b_n$, *abbiano in comune una varietà di dimensione* $d-n-1$. *Se valgono le relazioni:*

$$F \equiv \sum_{i=0}^{i=n} A_i a_i, \qquad \sum_{i=0}^{i=n} A_i b_i \equiv 0,$$

si deduce che F *appartiene al modulo*

$$([0, 1], [0, 2], \ldots, [0, n], [1, 2], \ldots, [1, n], \quad . \quad . \quad ., \quad [n-1, n]).$$

Questo lemma è evidente. — Quando $n = 1$, essendo $A_0 b_0 + A_1 b_1 = 0$, per l'ipotesi fatta sulle $b_0, b_1, \ldots, b_n$ dal teor. I del n° 3 dell' importante Memoria di E. Lasker, *Zur Theorie der Moduln und Ideale* [Math. Ann. 60, 1905] segue $A_0 \equiv B_0 b_1$, $A_1 \equiv -B_0 b_0$ e di conseguenza $F \equiv B_0 [0, 1]$. Tuttavia si dimostrerà il lemma II per induzione ed in un altro Lavoro dirò, perchè convenga applicare *solo in parte* questo teor. del Lasker.

Pensando le $x_0, x_1, \ldots, x_d$ come coordinate omogenee di punto nello spazio S_d, dalla relazione $\sum_{i=0}^{i=n} A_i b_i \equiv 0$ risulta che l'ipersuperficie corrispondente alla forma $A_i b_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ deve passare per la varietà, che qui si chiamerà W_i, comune alle ipersuperficie corrispondenti alle forme $b_0, b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, b_{i+2}, \ldots, b_n$. Siccome b_i non passa per la W_i, nè per una sua parte, qualora la W_i si spezzasse, passare per il citato teorema del Lasker

dovrà A_i appartenere al modulo $(b_0, b_1, ..., b_{i-1}, b_{i+1}, b_{i+2}, ..., b_n)$, ossia si potrà porre

$$A_i \equiv \sum_{u=0}^{u=i-1} B_{ui} b_u - \sum_{u=i+1}^{u=n} (B_{iu} - B'_{iu}) b_u,$$

dove qui B_{uv}, B'_{uv} $(u=0, 1, ..., n-1;\ v=u+1, u+2, ..., n)$ indicano forme nelle $x_0, x_1, ..., x_d$.

Posto

$$A_i' \equiv B'_{i,i+1} b_{i+1} + ... + B'_{in} b_n \qquad (i=0, 1, ..., n-1),$$

sostituendo segue:

$$F + \sum_{u=0}^{u=n-1} \sum_{i=u+1}^{i=n} B_{ui} [u, i] \equiv \sum_{i=0}^{i=n-1} A_i' a_i,$$

dove

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} A_i' b_i \equiv 0.$$

Facendo uso dell'ipotesi che il teorema I è vero per $n-1$, si trae che la forma $\sum_{i=0}^{i=n-1} A_i' a_i$ appartiene al modulo

$$([0, 1], [0, 2], ..., [0, n-1], [1, 2], ..., [1, n-1], \ . \ . \ ., \ [n-2, n-1]),$$

e di conseguenza F appartiene al modulo

$$([0, 1], [0, 2], ..., [0, n], [1, 2], ..., [1, n], \ . \ . \ ., \ [n-1, n]),$$

c. v. d.

Lemma III. — *Si designi con* $\chi \left\{ {n; i \atop l} \right\}$ *l'espressione*

$$\binom{l+i}{i} - \sum_{u=2}^{u=n+1} (-1)^u \sum_{v=1}^{v=u-1} \sum_{j_1 j_2 \cdots j_u}^{(n)} \binom{l - v p_0 - (u-v) p_1 - q_{j_1} - q_{j_2} - ... - q_{j_u} + i}{i},$$

dove qui la sommatoria $\Sigma_{j_1 j_2 \cdots j_u}^{(n)}$ *è estesa a tutti i valori* $j_1, j_2, ..., j_u$, *che costituiscono una combinazione senza ripetizione di* u *numeri della serie* $0, 1, ..., n$; *inoltre si designi con* $V_u^{(p)} (u=0, 1, 2, ...)$ *la funzione* $\frac{p_0^{u+1} - p_1^{u+1}}{p_0 - p_1}$ *e con* $S_{u,n}^{(q)}$ $(u=1, 2, ..., n+1)$ *la somma dei pro-*

dotti delle $q_0, q_1, \ldots, q_n$ *prese* u *per volta senza ripetizione; per convenzione poi* $S^{(q)}_{0,n} = 1$. *Posto*

$$m = \sum_{u=0}^{u=n} V^{(p)}_{n-u}\, S^{(q)}_{u,n},$$

se si ammette di aver dimostrato che si abbia:

$$\chi \left\{ \begin{matrix} n;\, n \\ l \end{matrix} \right\} = m, \quad \textit{quando sia} \quad l \geq m - 1,$$

allora vale di conseguenza:

$$\text{(II)} \quad \sum_{s=0}^{s=t} (-1)^s \sum\nolimits^{(t)}_{j_1 j_2 \ldots j_s} \chi \left\{ \begin{matrix} n;\, n+t \\ l - m_{j_1} - m_{j_2} - \ldots - m_{j_s} \end{matrix} \right\} = m\, m_1\, m_2 \ldots m_t,$$

quando sia $l \geq m m_1 m_2 \ldots m_t - 1$; *dove qui la sommatoria* $\Sigma^{(t)}_{j_1 j_2 \ldots j_s}$ *è estesa a tutti i valori* $j_1, j_2, \ldots, j_s$, *che costituiscono una combinazione senza ripetizione di* s *numeri della serie* $1, 2, \ldots, t$.

Per una notissima relazione sopra i coefficienti binomiali si può scrivere:

$$\chi \left\{ \begin{matrix} n;\, n+1 \\ l' \end{matrix} \right\} = \chi \left\{ \begin{matrix} n;\, n \\ l' \end{matrix} \right\} + \chi \left\{ \begin{matrix} n;\, n+1 \\ l'-1 \end{matrix} \right\},$$

ossia, se $l' \geq (m-1)m_1$ e di conseguenza $l' \geq m - 1$, segue:

$$\chi \left\{ \begin{matrix} n;\, n+1 \\ l' \end{matrix} \right\} = m + \chi \left\{ \begin{matrix} n;\, n+1 \\ l'-1 \end{matrix} \right\},$$

da cui:

$$\chi \left\{ \begin{matrix} n;\, n+1 \\ l \end{matrix} \right\} = m\, m_1 + \chi \left\{ \begin{matrix} n;\, n+1 \\ l - m_1 \end{matrix} \right\}.$$

Dunque la formola (1) è vera per $t = 1$.

Quindi per dimostrare il lemma III basta provarlo vero per t (essendo $t \geq 2$) coll'ipotesi che sia vero per $t - 1$.

Pensando bene al significato di $\Sigma^{(t)}_{j_1 j_2 \ldots j_s}$, si può scrivere:

$$\sum_{s=0}^{s=t}(-1)^s \sum^{(t)}_{j_1 j_2 \ldots j_s} \chi \left\{ \begin{matrix} n;\, n+t \\ l-m_{j_1}-m_{j_2}-\ldots-m_{j_s} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \sum_{s=0}^{s=t-1}(-1)^s \sum^{(t-1)}_{j_1 j_2 \ldots j_s} \chi \left\{ \begin{matrix} n;\, n+t \\ l-m_{j_1}-m_{j_2}-\ldots-m_{j_s} \end{matrix} \right\} -$$

$$- \sum_{s=0}^{s=t-1}(-1)^s \sum^{(t-1)}_{j_1 j_2 \ldots j_s} \chi \left\{ \begin{matrix} n;\, n+t \\ l-m_{j_1}-m_{j_2}-\ldots-m_{j_s}-m_t \end{matrix} \right\},$$

dove qui la sommatoria $\Sigma^{(t-1)}_{j_1 j_2 \ldots j_s}$ è estesa a tutti i valori $j_1 . j_2, \ldots, j_s$ che costituiscono una combinazione senza ripetizione di s numeri della serie $1, 2, \ldots, t-1$. Per una notissima relazione sopra i coefficienti binomiali si può poi scrivere:

$$\chi \left\{ \begin{matrix} n;\, n+t \\ l' \end{matrix} \right\} = \chi \left\{ \begin{matrix} n;\, n+t-1 \\ l' \end{matrix} \right\} + \chi \left\{ \begin{matrix} n;\, n+t \\ l'-1 \end{matrix} \right\},$$

e quindi segue:

$$\sum_{s=0}^{s=t-1}(-1)^s \sum^{(t-1)}_{j_1 j_2 \ldots j_s} \chi \left\{ \begin{matrix} n;\, n+t \\ l'-m_{j_1}-m_{j_2}-\ldots-m_{j_s} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \sum_{s=0}^{s=t-1}(-1)^s \sum^{(t-1)}_{j_1 j_2 \ldots j_s} \chi \left\{ \begin{matrix} n;\, n+t-1 \\ l'-m_{j_1}-m_{j_2}-\ldots-m_{j_s} \end{matrix} \right\} +$$

$$+ \sum_{s=0}^{s=t-1}(-1)^s \sum^{(t-1)}_{j_1 j_2 \ldots j_s} \chi \left\{ \begin{matrix} n;\, n+t \\ l'-m_{j_1}-m_{j_2}-\ldots-m_{j_s}-1 \end{matrix} \right\},$$

da cui, se $l' \geq m_t(m\, m_1 \ldots m_{t-1}-1)$ e di conseguenza $l' \geq m\, m_1 \ldots m_{t-1}-1$, per l'ipotesi fatta che il lemma III sia vero per $t-1$:

$$\sum_{s=0}^{s=t-1}(-1)^s \sum^{(t-1)}_{j_1 j_2 \ldots j_s} \chi \left\{ \begin{matrix} n;\, n+t \\ l'-m_{j_1}-m_{j_2}-\ldots-m_{j_s} \end{matrix} \right\} = m\, m_1 \ldots m_{t-1} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{s=t-1}(-1)^s \sum^{(t-1)}_{j_1 j_2 \ldots j_s} \chi \left\{ \begin{matrix} n;\, n+t \\ l'-m_{j_1}-m_{j_2}-\ldots-m_{j_s}-1 \end{matrix} \right\}.$$

Applicando m_t volte questa relazione si deduce:

$$\sum_{s=0}^{s=t}(-1)^s \sum\nolimits_{j_1 j_2 \dots j_s}^{(t-1)} \chi \left\{ \begin{matrix} n; n+t \\ l - m j_1 - m j_2 - \dots - m j_s \end{matrix} \right\} = m\, m_1\, m_2 \dots m_t,$$

quando è $l \geq m\, m_1\, m_2 \dots m_t - 1$, c. v. d.

Per mezzo di questi due lemmi si può dimostrare la seguente estensione del *Fundamentalsatz*:

Teorema I. — *Con* $\left\| \begin{matrix} a_0\, a_1 \dots a_n \\ b_0\, b_1 \dots b_n \end{matrix} \right\|$ *si designi una matrice di forme nelle* $x_0, x_1, \dots, x_d$, *coordinate omogenee di punto in* S_d (*dove* $d > n$), *generica, ossia tale che le* a_i, b_i ($i = 0, 1, \dots, n$) *soddisfano alle seguenti condizioni restrittive:*

1ª *la varietà rappresentata coll'annullare tutti gli elementi* $b_0, b_1, \dots, b_n$ *ha la dimensione* $d - n - 1$.

2ª *posto* $i = 1, 2, \dots, n-1$, *la varietà rappresentata coll'annullare tutti i determinanti di 2° ordine contenuti nella matrice* $\left\| \begin{matrix} a_i\, a_{i+1} \dots a_n \\ b_i\, b_{i+1} \dots b_n \end{matrix} \right\|$, *supponendo in più nulli gli elementi* a_i, b_i, *ha la dimensione* $d - n + i - 1$ *ed è priva di parti multiple.*

3ª *la varietà* $\mathfrak{M}$ *rappresentata coll'annullare tutti i determinanti di 2° ordine contenuti nella matrice* $\left\| \begin{matrix} a_0\, a_1 \dots a_n \\ b_0\, b_1 \dots b_n \end{matrix} \right\|$ *ha la dimensione* $d - n$ *ed è priva di parti multiple.*

4ª *la varietà rappresentata coll'annullare tutti i determinanti di 2° ordine contenuti nella matrice* $\left\| \begin{matrix} a_1\, a_2 \dots a_n \\ b_1\, b_2 \dots b_n \end{matrix} \right\|$ *ha in comune sia coll'ipersuperficie* $a_0 = 0$, *sia colla* $b_0 = 0$, *una varietà di dimensione* $d - n$ *priva di parti multiple e tali che l'intersezione di queste due varietà risulti una varietà di dimensione* $d - n - 1$.

Quando è $d \geq n + 1$ [1] *oppure* $d \geq n + 2$, *ecc., allora queste restrizioni sugli elementi* a_i, b_i *si possono semplificare* [2]; *così p. es. si potrà osservare che, se* $d \geq 2n + 2$, *le 4 precedenti condizioni restrittive sulle* a_i, b_i *sono soddisfatte, quando la varietà rappre-*

---

(1) Quando è $d \geq n + 1$ la 4ª condizione si può includere nella 2ª, estendendo in questa il campo di validità di i, ponendo $i = 0, 1, \dots, n$ invece di $i = 1, 2, \dots, n$.

(2) Sarebbero ridotte queste restrizioni (e quelle del teorema di Wirtinger del § 2) per mezzo di una conveniente estensione del citato teorema del Lasker.

sentata coll'annullare tutte le a_i *e tutte le* b_i $(i = 0, 1, ..., n)$ *ha la dimensione* $d - 2n - 2$ *ed inoltre è priva di parti multiple.*

Affinchè un'ipersuperficie di S_d *passi per la varietà* $\mathfrak{M}$ *rappresentata coll'annullare tutti i determinanti di 2° ordine contenuti nella matrice* $\left\| \begin{matrix} a_0 \, a_1 \dots a_n \\ b_0 \, b_1 \dots b_n \end{matrix} \right\|$, *è necessario e sufficiente che la forma* F *corrispondente a questa ipersuperficie di* S_d *appartenga al modulo*

$$([0,1],\ [0,2],\ ...,\ [0,n],\ [1,2],\ ...,\ [1,n],\ \ .\ \ .\ \ .\ ,\ \ [n-1,n]),$$

dove col simbolo $[u, v]$ (*essendo* $u = 0, 1, ..., n-1$; $v = u+1, u+2, ..., n$) *si è indicato il determinante*

$$\left| \begin{matrix} a_u & a_v \\ b_u & b_v \end{matrix} \right| .$$

La postulazione 1ª di un' ipersuperficie $F = 0$ *appartenente allo spazio* S_d *di ordine* l *rispetto alla varietà* $\mathfrak{M}$ *è uguale a* $\chi \left\{ \begin{matrix} n; d \\ l \end{matrix} \right\}$, *ossia* (cfr. lemma III) *uguale a*

$$\text{(III)} \binom{l+d}{d} - \sum_{u=2}^{u=n+1} (-1)^u \sum_{v=1}^{v=u-1} \sum_{j_1 j_2 \dots j_u}^{(n)} \binom{l - vp_0 - (u-v)p_1 - q_{j_1} - q_{j_2} - \dots - q_{j_u} + d}{d},$$

dove qui la sommatoria $\Sigma_{j_1 j_2 \dots j_u}^{(n)}$ *è estesa a tutti i valori* $j_1, j_2, ..., j_u$, *che costituiscono una combinazione senza ripetizione di* u *numeri della serie* $0, 1, ..., n$.

È opportuno dimostrare il teorema I insieme a questi altri due:

Teorema II. — *La funzione* $\chi \left\{ \begin{matrix} n; d \\ l \end{matrix} \right\}$, *quando* $d = n$, *se* $l \geq m-1$, *non è altro che l'espressione* $m = \sum_{u=0}^{u=n} V_{n-u}^{(p)} S_{u,n}^{(q)}$ *considerata nel lemma* III.

Teorema III. — *Siano* $\Phi^{(1)} = 0, \Phi^{(2)} = 0, ..., \Phi^{(t)} = 0$ *un gruppo di* t (essendo $t \leq d - n$) *ipersuperficie di* S_d *dei rispettivi ordini* $m_1, m_2, ..., m_t$, *tali che il luogo dei punti comuni ad essa ed alla* $\mathfrak{M}$, *definita nel teorema* I, *risulti una varietà* $\mathfrak{M}^{(t)}$ *di dimensione* $d - n - t$ *priva di parti multiple. Affinchè un' ipersuperficie, appartenente allo spazio* S_d, *passi per la* $\mathfrak{M}^{(t)}$, *è necessario e sufficiente che ad*

essa corrisponda una forma F *nelle* $x_0, x_1, \ldots, x_d$, *coordinate omogenee di punto nello spazio* S_d, *appartenente al modulo*

$$(\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \ldots, \Phi^{(t)}, [0,1], [0,2], \ldots, [0,n], [1,2], \ldots, [1,n], \ldots, [n-1,n]),$$

dove il simbolo $[u, v]$ *è già stato definito, per es. nel teorema* I.

La postulazione prima per un'ipersuperficie appartenente allo spazio S_d *di ordine* l *rispetto alla varietà* $\mathfrak{M}^{(t)}$ *è uguale a*

$$\text{(IV)} \qquad \sum_{s=0}^{s=t} (-1)^s \sum\nolimits^{(t)}_{j_1 j_2 \ldots j_s} \chi \left\{ \begin{matrix} n;\, d \\ l - m_{j_1} - m_{j_2} - \ldots - m_{j_s} \end{matrix} \right\},$$

dove qui la sommatoria $\Sigma^{(t)}_{j_1 j_2 \ldots j_s}$ *è estesa a tutti i valori* $j_1, j_2, \ldots j_s$, *che costituiscono una combinazione senza ripetizione di* s *numeri della serie* $1, 2, \ldots, t$, *ed essendo* $\chi \left\{ \begin{matrix} n;\, d \\ l' \end{matrix} \right\}$ *uguale alla* (III) *quando in questa si ponga* l' *in luogo di* l.

Tenendo conto dei risultati già noti sul *Fundamentalsatz* di Nöther relativo ad una varietà completa intersezione di ipersuperficie, segue subito che i teoremi I, II, III sono veri per $n=1$; onde si potrà farne la dimostrazione per n (essendo $n \geq 2$) giovandosi dell'ipotesi che siano veri per $n-1$, $n-2$, ecc.

Non occorrerà dimostrare il teorema III, perchè è conseguenza immediata dell'applicazione del teorema di Wirtinger al teorema I; il teorema di Wirtinger è *applicabile*, perchè valgono le rispettive relazioni (1), se si applica il lemma III al teorema II. Quindi basta solo dimostrare i teoremi I, II.

Ma il teorema II è conseguenza del teorema I. Infatti, quando $d=n$, la varietà $\mathfrak{M}$ sopra considerata è un insieme di m punti distinti, dove è $m = \sum_{u=0}^{u=n} V^{(p)}_{n-u} S^{(q)}_{u,n}$ (per la definizione delle $V^{(p)}_u, S^{(q)}_{u,n}$ cfr. il lemma III), perchè per un noto risultato [1] $m =$ ordine di $\mathfrak{M}$. Il sistema lineare di tutte le ipersuperficie (appartenenti allo spazio $S_d \equiv S_n$) passanti per l'insieme di punti

---

[1] Cfr. p. es. la mia Memoria: *Ordine di una varietà più ampia di quella rappresentata coll'annullare tutti i minori di dato ordine estratti da una data matrice generica di forme*, " Mem. R. Ist. Lomb. ", (3), 11, 1904.

costituenti la varietà $\mathfrak{M}$ ha la dimensione $\binom{l+n}{n}-m-1$, quando sia $l \geq m-1$. D' altra parte siccome per il teorema I $\chi \left\{ \begin{matrix} n; n \\ l \end{matrix} \right\}$ esprime la postulazione prima per le ipersuperficie di ordine l, appartenenti allo spazio S_n, rispetto alla varietà $\mathfrak{M}$, si trae che il sistema lineare di tutte le ipersuperficie passanti per $\mathfrak{M}$ ha la dimensione $\binom{l+n}{n} - \chi \left\{ \begin{matrix} n; n \\ l \end{matrix} \right\} - 1$. Paragonando questi due risultati si ricava:

$$m = \chi \left\{ \begin{matrix} n; n \\ l \end{matrix} \right\} \qquad \text{c. v. d.}$$

Perciò *è lecito* dimostrare solo il teorema I.

Essendo $F=0$ un'ipersuperficie passante per $\mathfrak{M}$, si comincierà a dimostrare che F appartiene al modulo

$$([0,1],[0,2],\ldots,[0,n],[1,2],\ldots,[1,n],\ .\ .\ .,\ [n-1,n]).$$

Infatti l'ipersuperficie di equazione $Fb_1=0$ passa (cfr. per esempio i teoremi del § 2 della mia citata Memoria, oppure A. Brill, *Ueber Elimination aus einem gewissen System von Gleichungen*, " Mathem. Annalen ", 5, 1872) per la varietà completa intersezione dell'ipersuperficie di equazione $[0,1]=0$ colla varietà $\mathfrak{M}_{(0)}$ rappresentata coll' annullare tutti i determinanti di 2° ordine appartenenti alla matrice $\left\| \begin{matrix} a_1\, a_2 \ldots a_n \\ b_1\, b_2 \ldots b_n \end{matrix} \right\|$. Applicando il teorema III per $n-1$, si potrà scrivere:

$$Fb_1 \equiv b_1(A_{01}a_0 + \sum_{i=2}^{i=n} A_{1i}a_i) - a_1(A_{01}b_0 + \sum_{i=2}^{i=n} A_{1i}b_i) + \Phi,$$

avendo qui posto

$$\Phi \equiv \sum_{i=2}^{i=n-1} \sum_{k=i+1}^{k=n} A_{ik}[i,k],$$

essendo $A_{01}\, A_{ik}$ ($i=1, 2, \ldots, n-1$; $k=i+1, i+2, \ldots, n$) delle forme nelle $x_0, x_1, \ldots, x_d$. Per la 1ª delle relazioni ora scritte Φ deve appartenere al modulo (a_1, b_1), ossia si potrà scrivere:

$$\sum_{i=2}^{i=n-1} \sum_{k=i+1}^{k=n} A_{ik}[i,k] \equiv Ha_1 + Kb_1,$$

dove con H e K si designano delle forme nelle $x_0, x_1, \ldots, x_d$.

Da quest'ultima relazione, siccome per l'ipotesi fatta nel teorema I l'ipersuperficie $a_1=0$ non passa per alcuna parte dell'intersezione di $\mathfrak{M}_1$ (chiamando $\mathfrak{M}_{(1)}$ la $\mathfrak{M}_1$, quando si pensi *lo zero* in luogo di a_1, b_1) colla $b_1=0$, deriva che H è uguale alla somma di Bb_1 e di una forma nelle $x_0, x_1, \ldots, x_d$ appartenente al modulo

$$([2,3], [2,4], \ldots, [2,n], [3,4], \ldots, [3,n], \;.\;\;.\;\;., [n-1, n]),$$

essendo B una forma nelle $x_0, x_1, \ldots, x_d$. In modo analogo segue che K è uguale alla somma di $(B'-B)a_1$ e di una forma nelle $x_0, x_1, \ldots, x_d$ appartenente al modulo

$$([2,3], [2,4], \ldots, [2,n], [3,4], \ldots, [3,n], \;.\;\;.\;\;., [n-2, n]),$$

onde con rapidità si potrà scrivere:

$$\Phi \equiv b_1 \sum_{i=2}^{i=n-1} \sum_{k=i+1}^{k=n} B_{ik}[i,k] - a_1 \sum_{i=2}^{i=n-1} \sum_{k=i+1}^{k=n} B'_{ik}[i,k],$$

essendo B_{ik}, B'_{ik} $(i=2, 3, \ldots, n-1;\; k=i+1, i+2, \ldots, n)$ delle forme nelle $x_0, x_1, \ldots, x_d$.

Per quest'ultima relazione si potrà porre:

$$Fb_1 \equiv b_1\Big(A_{01}a_0 + \sum_{i=2}^{i=n} A_{1i}a_i + \sum_{i=2}^{i=n-1} \sum_{k=i+1}^{k=n} B_{ik}[i,k]\Big) + \Phi',$$

essendo

$$\Phi' + a_1\Big(A_{01}b_0 + \sum_{i=2}^{i=n} A_{1i}b_i + \sum_{i=2}^{i=n-1} \sum_{k=i+1}^{k=n} B'_{ik}[i,k]\Big) \equiv 0,$$

da cui si deduce che Φ' appartiene al modulo $(a_1 b_1)$, ossia che si può scrivere $\Phi' \equiv A_{11}a_1b_1$, essendo A_{11} una forma nelle $x_0, x_1, \ldots, x_d$. Perciò, posto $A_{10} \equiv A_{01}$, si avrà:

$$F \equiv \sum_{i=0}^{i=n} A_{1i}a_i + \sum_{i=2}^{i=n-1} \sum_{k=i+1}^{k=n} B_{ik}[i,k],$$

essendo

$$\sum_{i=0}^{i=n} A_{1i}b_i + \sum_{i=2}^{i=n-1} \sum_{k=i+1}^{k=n} B'_{ik}[i,k] \equiv 0;$$

ossia:

$$F \equiv \sum_{i=0}^{i=n} \Big[A_{1i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} (B_{ik}b_k - B'_{ik}a_k) - \sum_{k=0}^{k=i-1} (B_{ki}b_k - B'_{ki}a_k)\Big] a_i,$$

essendo

$$\sum_{i=0}^{i=n}[A_{1i}+\sum_{k=i+1}^{k=n}(B_{ik}b_k-B'_{ik}a_k)-\sum_{k=0}^{k=i-1}(B_{ki}b_k-B'_{ki}a_k)]b_i\equiv 0,$$

convenendo che siano forme identicamente nulle le B_{ik}, B'_{ik}, per cui non è $i=2, 3, ..., n-1$, $k=i+1, i+2, ..., n$. In virtù del lemma II si conclude che F appartiene al modulo

$([0,1], [0,2], ..., [0,n], [1,2], ..., [1,n], \;. \;\;. \;\;., [n-1,n])$ c. v. d.

Per dimostrare interamente il teorema I basta provare che la funzione caratteristica del modulo

$$([0,1], [0,2], ..., [0,n], [1,2], ..., [1,n], \;\;. \;\;. \;\;., \;\;[n-1,n])$$

per le forme di ordine l è uguale a $\chi\left\{\begin{matrix} n; d \\ l \end{matrix}\right\}$.

Per brevità si designi con $M(i, i+1, ..., n)$, essendo $i=0, 1$, il modulo

$$([i, i+1], [i, i+2], ..., [i,n], [i+1, i+2], ..., [i+1,n], . \;. \;., [n-1,n]);$$

con $M(H; 1, 2, ..., n)$ il modulo

$$([1,2], [1,3], ..., [1,n], [2,3], ..., [2,n], \;. \;\;. \;\;. \;\;. \;\;., [n-1,n], H),$$

essendo H una forma nelle $x_0, x_1, ..., x_d$; con $M\begin{pmatrix} a_0, b_0 \\ 1, 2, ..., n \end{pmatrix}$ il modulo

$$([1,2]a_0, [1,3]a_0, ..., [1,n]a_0, [2,3]a_0, ..., [2,n]a_0, \;. \;\;. \;\;., [n-1,n]a_0,$$
$$[1,2]b_0, [1,3]b_0, ..., [1,n]b_0, [2,3]b_0, ..., [2,n]b_0, \;. \;\;. \;\;., [n-1,n]b_0);$$

inoltre con

$$\chi(i, i+1, ..., n)_l$$

si designerà la funzione caratteristica del corrispondente modulo

$$M(i, i+1, ..., n)$$

per le forme di ordine l.

È opportuno dimostrare questa proposizione ausiliaria:

La funzione caratteristica del modulo ([0, 1], [0, 2], ..., [0, n]) *per le forme di ordine* l *è eguale a*

$$\binom{l+d}{d} - \sum_{i=1}^{i=n} \binom{l-p_0-p_1-q_0-g_i+d}{d} +$$

$$+ \sum_{u=2}^{u=n} (-1)^u \sum_{v=2}^{v=u} \left\{ \sum'_{j_1 \dots j_u} \binom{l-rp_0-(u-r+2)p_1-2q_0-q_{j_1}-\dots-q_{j_u}+d}{d} + \right.$$

$$\left. + \sum'_{j_0 j_1 \dots j_u} \binom{l-rp_0-(u-r+2)p_1-q_0-q_{j_0}-q_{j_1}-\dots-q_{j_u}+d}{d} \right\},$$

dove qui la sommatoria $\Sigma'_{j_1 \dots j_u}$ *è estesa a tutti i valori* $j_1, \dots, j_u$ *che costituiscono una combinazione senza ripetizione di* u *numeri della serie* 1, 2, ..., n; *la sommatoria* $\Sigma'_{j_0 j_1 \dots j_u}$ *si estende analogamente a tutte le combinazioni senza ripetizione di* u + 1 *numeri della medesima serie* 1, 2, ..., n.

Questa proposizione si dimostra subito quando $n = 1, 2, 3$: dunque per dimostrarla nel caso di n qualunque si potrà fare l'ipotesi che sia vera per $n - 1$. Per brevità di locuzione invece di fare considerazioni sui sistemi lineari, si applicherà la relazione fondamentale di Hilbert (cfr. la Memoria relativa già citata).

Il *grösste gemeinsame Modul* dei due moduli ([0,1], [0,2], ..., [0,$n-1$]), ([0,n]) è ([0,1], [0,2], ..., [0,n]); il *kleinste enthaltende Modul* dei medesimi due moduli è il modulo

$$([0,1][0,n], [0,2][0,n], \dots, [0,n-1][0,n], [1,2][0,n], \dots, [1,n-1][0,n],$$
$$\dots, [n-2, n-1][0,n]),$$

perchè pei teoremi del § 2 della mia citata Memoria (oppure cfr. la citata Memoria del Prof. A. Brill) i punti comuni alle ipersuperficie di equazione $[0,1] = 0$, $[0,2] = 0, \dots, [0,n-1] = 0$ appartengono o alla varietà di equazioni $a_0 = b_0 = 0$, oppure alla varietà rappresentata coll'anullare tutti i minori di 2° ordine contenuti nella matrice $\begin{Vmatrix} a_0 a_1 \dots a_{n-1} \\ b_0 b_1 \dots b_{n-1} \end{Vmatrix}$.

Per la relazione fondamentale di Hilbert si avrà:

$$\chi([0,1], [0,2], \dots, [0,n])_l = \chi([0,1], [0,2], \dots, [0,n-1])_l -$$
$$- \chi(0,1, \dots, n-1)_{l-p_0-p_1-q_0-q_n},$$

dove con $\chi([0,1], [0,2], \ldots, [0,n])_l$ si designa la funzione caratteristica del modulo $([0,1], [0,2], \ldots, [0,n])$ per le forme di ordine l. Dalla formola scritta segue subito la proposizione enunciata ultimamente, quando in luogo di $\chi([0,1], [0,2], \ldots, [0,n-1])_l$ si ponga l'espressione equivalente fornita da questa proposizione e quando in luogo di $\chi(0, 1, \ldots, n-1)_{l-p_0-p_1-q_0-q_n}$ si ponga l'espressione equivalente data dal teorema I (il che è lecito, perchè si può ammettere questo teorema I, se si pensa $n-1$ in luogo di n).

Dimostriamo ora quest'altra proposizione ausiliaria:

Se una forma F *nelle* $x_0, x_1, \ldots, x_d$, *appartiene simultaneamente ai due moduli* $M(1, 2, \ldots, n)$, (a_0, b_0), *appartiene di conseguenza al modulo* $M\begin{pmatrix} a_0, b_0 \\ 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$.

Infatti per ipotesi si può scrivere:

$$F \equiv \sum_{i=1}^{i=n-1} \sum_{k=i+1}^{k=n} A_{ik}[i, k] \equiv B_0 a_0 + B_1 b_0 ,$$

essendo le A_{ik}, B_0, B_1 forme nelle $x_0, x_1, \ldots, x_d$. Da questa relazione si ricava che $B_0 a_0$ appartiene al modulo $M(b_0; 1, 2, \ldots, n)$ e quindi *per le ipotesi restrittive fatte sulle* a_i, b_i dovrà anche B_0 appartenere a questo modulo; similmente si trova che B_1 appartiene al modulo $M(a_0; 1, 2, \ldots, n)$. Quindi $F \equiv F' + \Phi a_0 b_0$, dove F' appartiene al modulo $M\begin{pmatrix} a_0, b_0 \\ 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$, ed essendo poi Φ una forma nelle $x_0, x_1, \ldots, x_d$; siccome per quest'ultima relazione segue che $\Phi a_0 b_0$ appartiene al modulo $M(1, 2, \ldots, n)$, *per le dette ipotesi restrittive sulle* a_i, b_i si deduce che dovrà appartenere a questo modulo anche la Φ, per cui si conclude che F appartiene al modulo $M\begin{pmatrix} a_0, b_0 \\ 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$, c. v. d.

Si considerino ora i due moduli $M(1, 2, \ldots, n)$, $([0, 1], [0, 2], \ldots, [0, n])$, il cui *grösste gemeinsame Modul* è $M(0, 1, \ldots, n)$ ed il cui *kleinste enthaltende Modul* è il modulo $M\begin{pmatrix} a_0, b_0 \\ 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$, come si vede facilmente tenendo conto dei teoremi del § 2 della mia citata Memoria (oppure da quelli della citata Memoria del Prof. A. Brill) ed applicando poi la 2ª delle proposizioni au-

siliarie sopra dimostrate. Ma $M\binom{a_0, b_0}{1, 2, \ldots, n}$ è il *grösste gemeinsame Modul* dei due moduli:

$$([1,2]a_0, [1,3]a_0, \ldots, [1,n]a_0, [2,3]a_0, \ldots, [2,n]a_0, \ \ldots, \ [n-1, n]a_0),$$
$$([1,2]b_0, [1,3]b_0, \ldots, [1,n]b_0, [2,3]b_0, \ldots, [2,n]b_0, \ \ldots, \ [n-1, n]b_0),$$

i quali ammettono (*in virtù delle dette restrizioni sulle* a_i, b_i):

$$([1,2]a_0b_0, [1,3]a_0b_0, \ldots, [1,n]a_0b_0, [2,3]a_0b_0, \ldots, [2,n]a_0b_0, \ \ldots, \ [n-1, n]a_0b_0)$$

quale *kleinste enthaltende Modul.*

Applicando due volte la relazione fondamentale di HILBERT, si trae facilmente:

$$(\mathrm{V}) \quad \chi(0, 1, \ldots, n)_l = \chi(1, \ldots, n)_l + \chi([0, 1], [0, 2], \ldots, [0, n])_l - \chi(1, \ldots, n)_{l-p_0-q_0} - \chi(1, \ldots, n)_{l-p_1-q_0} - \binom{l+d}{d} + \binom{l-p_0-q_0+d}{d} + \binom{l+p_1-q_0+d}{d} + \chi(1, \ldots, n)_{l-p_0-p_1-2q_0} - \binom{l-p_0-p_1-2q_0+d}{d}.$$

Sostituendo nel 2° membro di questa formola al posto di $\chi(1, \ldots, n)_l$, $\chi(1, \ldots, n)_{l-p_0-q_0}$, $\chi(1, \ldots, n)_{l-p_1-q_0}$, $\chi(1, \ldots, n)_{l-p_0-p_1-2q_0}$, le corrispondenti espressioni fornite dal teorema I (il che è lecito, perchè il teorema I si può applicare quando si pensa $n-1$ in luogo di n) e tenendo conto della 1ª delle due ultime proposizioni ausiliarie, si ricava:

$$\chi(0, 1, \ldots, n) = \chi\left\{\begin{matrix} n-1; d \\ l \end{matrix}\right\}' - \chi\left\{\begin{matrix} n-1; d \\ l-p_0-q_0 \end{matrix}\right\}' - \chi\left\{\begin{matrix} n-1; d \\ l-p_1-q_0 \end{matrix}\right\}' + \chi\left\{\begin{matrix} n-1; d \\ l-p_0-p_1-2q_0 \end{matrix}\right\}' - \sum_{i=1}^{i=n}\binom{l-p_0-p_1-q_0-q_i+d}{d} + \sum_{u=2}^{u=n}(-1)^u \sum_{v=2}^{v=u}\left\{\sum\nolimits'_{j_1\ldots j_u}\binom{l-vp_0-(u-v+2)p_1-2q_0-q_{j_1}-\ldots-q_{j_u}+d}{d} + \sum\nolimits'_{j_0j_1\ldots j_u}\binom{l-vp_0-(u-v+2)p_1-q_0-q_{j_0}-q_{j_1}-\ldots-q_{j_u}+d}{d}\right\} + \binom{l-p_0-q_0+d}{d} + \binom{l-p_1-q_0+d}{d} - \binom{l-p_0-p_1-2q_0+d}{d}.$$

dove rispetto alle sommatorie scritte vale quanto si è detto nella

1ª delle due ultime proposizioni ausiliarie e dove $\chi\left\{ {n-1;\, d \atop l'} \right\}'$ significa quello che diventa $\chi\left\{ {n-1;\, d \atop l'} \right\}$, quando in luogo di $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$ si pongano $q_1, q_2, \ldots, q_n$ rispettivamente. Eseguendo e riducendo, l'ultima espressione scritta si trasforma in

$$\chi(0, 1, \ldots, n) = \chi\left\{ {n;\, d \atop l} \right\} \qquad \text{c. v. d.}$$

Così è interamente dimostrato il teorema I; quindi sono pur veri i teoremi II, III.

4. — Estensione del "Fundamentalsatz" al passaggio multiplo di un'ipersuperficie per una varietà completa intersezione di ipersuperficie.

Rispetto al passaggio multiplo di un'ipersuperficie per una data varietà algebrica vale:

TEOREMA IV. — *Essendo* $F_1, F_2, \ldots, F_r$ $(r \leq d)$ *forme nelle* $z_0, z_1, \ldots, z_d$, *coordinate omogenee di punto nello spazio* S_d, *tali che le ipersuperficie corrispondenti si taglino in una varietà* W *di dimensione* $d-r$ *priva di parti multiple, affinchè un'ipersuperficie* $F=0$ *passi* s *volte per la varietà* W *è necessario e sufficiente che* F *risulti una combinazione di grado* s (cfr. la definizione relativa del § 1) *delle* $F_1, F_2, \ldots, F_r$.

Detto m_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ *l'ordine della forma* F_i, *la postulazione* s^{sima} *di un'ipersuperficie (appartenente allo spazio* S_d*) di ordine* l *rispetto alla varietà* W *è uguale a*

$$\text{(VI)} \qquad \binom{l+d}{d} + \sum_{i=1}^{i=r} (-1)^i (l+d;\, s, i;\, m_1, m_2, \ldots, m_r),$$

essendo

$$(l'+d;\, s, i;\, m_1, m_2, \ldots, m_t) =$$

$$= \sum_{u=0}^{u=\min(s-1,\,t-i)} \Sigma_{jj'} (-1)^u \binom{l'-m_{j_1}-m_{j_2}-\ldots-m_{j_{i+u}}-m_{j'_1}-m_{j'_2}-\ldots-m_{j'_{s-u-1}}+d}{d},$$

dove $j_1, j_2, \ldots, j_{i+u}$ *è una combinazione senza ripetizioni di* $i+u$ *numeri della serie* $1, 2, \ldots, t$, *e dove* $j_1', j_2', \ldots, j'_{s-u-1}$ *è una combinazione con ripetizioni di* $s-u-1$ *numeri della serie* $1, 2, \ldots, t$ *(avendo poi indicato con* t *un intero non maggiore di* r*).*

Per mezzo delle funzioni simmetriche caratteristiche (¹), *il simbolo* $(l'+d; s, i; m_1, m_2, \ldots, m_r)$ *si può definire in modo più elegante, osservando come* $(l'+d; s, i; m_1, m_2, \ldots, m_r)$ *non sia altro che la funzione simmetrica caratteristica*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{r-i-1} & x_2^{r-i-1} & \ldots & x_r^{r-i-1} \\ x_1^{r-i+1} & x_2^{r-i+1} & \ldots & x_r^{r-i+1} \\ x_1^{r-i+2} & x_2^{r-i+2} & \ldots & x_r^{r-i+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{r-1} & x_2^{r-1} & \ldots & x_r^{r-1} \\ x_1^{s+r-1} & x_2^{s+r-1} & \ldots & x_r^{s+r-1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{r-1} & x_2^{r-1} & \ldots & x_r^{r-1} \end{vmatrix}$$

delle $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_r$, *quando in luogo di ogni termine* $\mathrm{x}_1^{k_1}\mathrm{x}_2^{k_2}\ldots\mathrm{x}_r^{k_r}$ *(dove evidentemente si ha* $\mathrm{k}_1+\mathrm{k}_2+\ldots\mathrm{k}_r=\mathrm{s}+\mathrm{i}-1$*)* si ponga *il coefficiente binomiale* $\binom{l'-k_1m_1-k_2m_2-\ldots-k_rm_r+d}{d}$. *Si osservi poi* (specialmente per la pag. 26) *che, detta* $\mathrm{V}_{s-1}^{(x)}$ *la funzione* aleph *di* Wronski (¹) *di grado* $\mathrm{s}-1$ *delle* $\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_r$, *la* (VI) *è uguale al polinomio* $(\mathrm{x}_0-\mathrm{x}_1)(\mathrm{x}_0-\mathrm{x}_2)\ldots(\mathrm{x}_0-\mathrm{x}_r)\,.\,\mathrm{V}_{s-1}^{(x)}$, *quando in luogo di ogni termine* $\mathrm{x}_0^{k_0}\mathrm{x}_1^{k_1}\mathrm{x}_2^{k_2}\ldots\mathrm{x}_r^{k_r}$ *si ponga il coefficiente binomiale* $\binom{l-k_1m_1-k_2m_2-\ldots-k_rm_r+d}{d}$.

Siccome questo teorema per $s=1$ costituisce un risultato già noto (cfr. le citate Note del Severi), sarà lecito nella dimostrazione supporre vero questo teorema per $s-1$ quando $s>1$. Anzitutto se F è una forma nelle $z_0, z_1, \ldots, z$ corrispondente ad un'ipersuperficie passante s volte per la W, dovrà essere F una combinazione di grado $s-1$ delle $F_1, F_2, \ldots, F_r$: perchè detta F' un'altra forma nelle $z_0, z_1, \ldots, z_d$ del medesimo ordine di F cor-

(¹) Cfr. la mia Nota: *Alcune proprietà delle funzioni simmetriche caratteristiche*, " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", 38, 1903.

rispondente ad un' ipersuperficie passante solo $s-1$ volte per la W, segue che una combinazione di grado $s-1$ delle $F_1, F_2, \dots, F_r$ sarà la $F+F'$ e di conseguenza anche la F. Perciò si potrà scrivere $F \equiv \Sigma A_{i_1 i_2 \dots i_r} F_1^{i_1} F_2^{i_2} \dots F_r^{i_r}$, essendo la sommatoria estesa a tutti i valori interi positivi o nulli delle $i_1, i_2, \dots, i_r$, la cui somma è $s-1$ e dove $A_{i_1 i_2 \dots i_r}$ sono forme nelle $z_0, z_1, \dots, z_d$.

Se Z è un punto non singolare della varietà W, si dimostrerà che appartiene a tutte le ipersuperficie corrispondenti alle forme $A_{i_1 i_2 \dots i_r}$. Infatti pensando ora le $z_0, z_1, \dots, z_d$ come le coordinate di questo punto Z, dovrà essere *identicamente nulla* la $\nabla_{s-1}^{(y:z)} F$, *pensata come forma nelle* $y_0, y_1, \dots, y_d$, ossia la $\Sigma A_{i_1 i_2 \dots i_r} (\nabla_1^{(y:z)} F_1)^{i_1} (\nabla_1^{(y:z)} F_2)^{i_2} \dots (\nabla_1^{(y:z)} F_r)^{i_r}$. Pensando le $y_0, y_1, \dots, y_d$ come coordinate correnti omogenee di punto in S_d, gli iperpiani $\nabla_1^{(y:z)} F_1 = 0$, $\nabla_1^{(y:z)} F_2 = 0, \dots, \nabla_1^{(y:z)} F_r = 0$, i quali toccano in Z le corrispondenti ipersuperficie $F_1 = 0$, $F_2 = 0, \dots, F_r = 0$, dovranno appartenere al sistema algebrico

$$\Sigma A_{i_1 i_2 \dots i_r} (\nabla_1^{(y:z)} F_1)^{i_1} (\nabla_1^{(y:z)} F_2)^{i_2} \dots (\nabla_1^{(y:z)} F_r)^{i_r} = 0,$$

quindi avranno in comune almeno uno spazio $[d-r+1]$; il che è assurdo, essendo Z non singolare. Perciò saranno nulle tutte le forme $A_{i_1 i_2 \dots i_r}$ e passeranno per Z tutte le ipersuperficie, corrispondenti a queste forme, come si è sopra asserito [1].

Per le ipotesi fatte sulla W si conclude che tutte le $A_{i_1 i_2 \dots i_r}$ sono combinazioni di primo grado delle $F_1, F_2, \dots, F_r$ e quindi che la F è una combinazione di grado s delle $F_1, F_2, \dots, F_r$.

Indicando con $\Phi_{1,k}^{(t)}, \Phi_{2,k}^{(t)}, \dots, \Phi_{\binom{k+t-1}{k},k}^{(t)}$ le $\binom{k+t-1}{k}$ forme del tipo $F_1^{i_1} F_2^{i_2} \dots F_t^{i_t}$ (disposte secondo un certo ordine), dove $i_1, i_2, \dots, i_t$ sono interi positivi anche nulli, la cui somma è uguale a k, si trae che il teorema IV sarà interamente dimostrato, quando si provi che la funzione caratteristica del modulo $(\Phi_{1,s}^{(r)}, \Phi_{2,s}^{(r)}, \dots, \Phi_{\binom{s+r-1}{s},s}^{(r)})$ per le forme di ordine l nelle $z_0, z_1, \dots, z_d$ è uguale a

$$\binom{l+d}{d} + \sum_{i=1}^{i=r} (-1)^i (l+d; s, i; m_1, m_2, \dots, m_r).$$

[1] Se si suppone Z l'origine e si sceglie in modo opportuno la piramide fondamentale, il ragionamento precedente diventa più semplice, ma perde quel carattere di generalità, che occorre per questioni più complicate, p. es. per le varietà rappresentate coll'annullare tutti i determinanti di 2° ordine di una matrice generica a due linee.

Siccome questa asserzione costituisce un risultato già noto, quando sia $r=1$, oppure $s=1$, nella dimostrazione sarà lecito supporla vera, quando si pensi $r-1$ in luogo di r, oppure quando si pensi $s-1$ in luogo di s. Osservando che $(\Phi^{(r)}_{1,s}, \Phi^{(r)}_{2,s}, \ldots, \Phi^{(r)}_{\binom{s+r-1}{s},s})$ è il *grösste gemeinsame Modul* dei due moduli

$$(\Phi^{(r-1)}_{1,s}, \Phi^{(r-1)}_{2,s}, \ldots, \Phi^{(r-1)}_{\binom{s+r-2}{s},s}), (\Phi^{(r)}_{1,s-1} F_r, \Phi^{(r)}_{2,s-1} F_r, \ldots, \Phi^{(r)}_{\binom{s+r-2}{s-1},s-1} F_r),$$

i quali ammettono

$$(\Phi^{(r-1)}_{1,s} F_r, \Phi^{(r-1)}_{2,s} F_r, \ldots, \Phi^{(r-1)}_{\binom{s+r-2}{s},s} F_r)$$

quale *kleinste enthaltende Modul*, si conclude per la relazione fondamentale di Hilbert che la funzione caratteristica richiesta è uguale a

$$\binom{l+d}{d} + \sum_{i=1}^{i=r-1} (-1)^i (l+d; s, i; m_1, m_2, \ldots, m_{r-1}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=r} (-1)^i (l+d-m_r; s-1, i; m_1, m_2, \ldots, m_r) -$$

$$- \sum_{i=1}^{i=r-1} (-1)^i (l+d-m_r; s, i; m_1, m_2, \ldots, m_{r-1}),$$

ossia uguale a

$$\binom{l+d}{d} + \sum_{i=1}^{i=r} (-1)^i (l+d; s, i; m_1, m_2, \ldots, m_r) \qquad \text{c. v. d.}$$

Osservazioni. — Il precedente teorema IV, generalizzazione d'un notissimo risultato del Prof. Nöther [Ann. di Mat. (2), 5, 1871, pag. 167] sul passaggio multiplo per una varietà completa intersezione d'ipersuperficie si può estendere al caso di una varietà rappresentata coll'annullare tutti i determinanti d'una matrice generica a due linee? La risposta è certamente affermativa, quando si tratti del caso particolare d'una matrice a due linee e tre colonne; per mancanza di spazio non posso qui esporre questa dimostrazione, che già posseggo. Nel caso di una matrice a due linee ed $n+1$ colonne, essendo $n>2$, non posseggo ancora dimostrazioni complete; certamente in questo caso più generale si dovrà tener conto delle relazioni tra i determinanti contenuti in quella matrice (cfr. p. es. E. Pascal, *I determinanti*, Manuali Hoepli, 1897).

Sullo sviluppo e sul parassitismo del " Clasterosporium carpophilum „ (Lév.) Ad.

Nota di PIERO VOGLINO.

Il nuovo indirizzo dato alle ricerche micologiche colla coltura artificiale delle forme fungine, va gradatamente apportando dei notevoli beneficii col mettere in evidenza le eguaglianze fra specie e generi tenuti sinora distinti per caratteri troppo lievi e fugaci.

Uno studio comparativo sulla biologia di alcune forme, specialmente delle così dette *Hyphomyceteae*, *Melanconieae* e *Sphaeropsideae*, è ormai indispensabile per poter stabilire dei gruppi naturali e togliere quella continua confusione nella esatta indicazione di generi e specie troppo simili tra loro, anche al semplice esame microscopico.

Una prova di tale confusione si ha nei diversi nomi dati a quella forma fungina che determina una malattia sugli alberi da frutta a nocciolo, e che notata per la prima volta, nell'Italia settentrionale, dal Passerini (4), si è, da qualche anno, diffusa talmente da non lasciare immune, si può dire, una sola pianta di ciliegio.

Con abbondante materiale fresco che mi venne, dal 1898 sino ad oggi, fornito da diverse regioni italiane, dalla Savoia, dal Delfinato, dai dintorni di Ginevra, da Coburg (Germania), dal Trentino e Tirolo, dall'Inghilterra, ho potuto seguire in tutto il suo sviluppo il parassita.

È quindi un nuovo contributo che, unito alle accurate ricerche dell'Aderhold (19), potrà servire a fissare bene i diversi caratteri biologici di un fungo tanto diffuso e dannoso.

Nel 1845 il Léveillé (1) (*) descriveva l'*Helminthosporium carpophilum* come parassita sui frutti maturi di *pesco*, nei din-

(*) Vedi la Bibliografia in fine.

torni di Parigi; nel 1864, Berkeley (3), col nome di *Macrosporium* e quindi *Helminthosporium rhabdiferum*, indicava un fungo parassita dei *peschi*, in Inghilterra; nel 1876 Passerini (4) richiamava l'attenzione sullo *Sporodesmium*, ridotto da Saccardo (5) a *Clasterosporium amygdalearum*, dannoso alle foglie di *Armeniaca vulgaris*, *Persica vulgaris*, *Prunus avium*, *P. domestica* ed *Amygdalus communis*. Nel 1883 Oudemans (7), sopra fusti e rami di Amigdalee raccolte da Beyerinck (6) e colpite da gommosi, descriveva, per la presenza di una massa stromatica, il *Coryneum Beyerincki*. Nel 1884, infine, il Thümen (8) indicava come causa della morte dei frutti del *Cerasus dulcis*, in Gorizia, il *Septosporium*, ridotto da me e Berlese (10) ad *Helminthosporium cerasorum*.

L'Aderhold (19), tenendo giustamente calcolo della somiglianza nei caratteri in queste diverse forme, le riunisce tutte in una specie del genere *Clasterosporium*, mantenendo però, non il nome specifico dato dal Passerini, ma bensì quello di *carpophilum* indicato per la prima volta dal Léveillé. Ed i risultati delle colture artificiali fatte dall'Aderhold (19) con materiale tipico di *Coryneum*, misero in evidenza la identità delle forme *Clasterosporium* e *Coryneum*. Confermando pienamente le conclusioni dell'Aderhold ho però potuto, collo studio comparativo di esemplari e di descrizioni, convincermi che altre forme ancora devono essere unite al *Clasterosporium carpophilum* (Lév.) Aderh.

Dall'esame di un esemplare, con corpi fruttiferi, dell'*Helminthosporium Pruni*, nel *Prunus serotina*, che mi fu possibile avere dalla Carolina, per mezzo dei Missionari, sempre veri apostoli di fede e civiltà, e pubblicato da Berkeley e Curtis (2), ho constatato la identità delle spore con quelle del *Clasterosporium*. La descrizione un po' imperfetta, indica conidii apicali, subclavati, 4-settati, subtorulosi. Essi sono invece anche 3-settati, di color fuligginoso e variano in lunghezza da 30 a 40 μ, in larghezza da 14 a 16 μ, come nelle forme del *Clasterosporium carpophilum*, al quale si deve riferire l'*Helminthosporium Pruni* Berk. et C.

La forma descritta (24) sotto il nome di *Stigmina Briosiana* e ritenuta come un nuovo fungo vivente sui frutti maturi o quasi di albicocco, presso Pavia, non si può tener distinta perchè è indicata coi medesimi caratteri del *Clasterosporium*.

Nella descrizione, infatti, si accenna ad un micelio breve, parcamente settato, di color bruno a l'esterno e allungato, quasi jalino nell'interno della polpa, come nel *Clasterosporium*. I conidii sono indicati come fuligginosi, con 1 a 3 setti (28-42 ∪ 13-16), qualche volta allungati, plurisettati ed un poco muriformi. Nel *Clasterosporium* si hanno spore ellissoidali o fusoidali, fuligginose, 1-2, sino a 5-settate, più comunemente 3-4-settate, rar. muriformi, lunghe da 28-32 a 55 μ, larghe da 12 a 16 μ, invecchiando ristrette ai setti ed anche toruloidi.

Prillieux e Delacroix (15) segnalano sul *Prunus Lauro-Cerasus*, in Francia, un *Coryneum Lauro-Cerasi*, che dicono di *habitus* simile al *C. Beyerincki*, ma ben diverso per gli altri caratteri. Pur riconoscendo una differenza nella lunghezza dei conidiofori e delle spore, si deve, anzitutto, riferire, un tale *Coryneum*, al genere *Clasterosporium* perchè presenta i caratteri di un Ifomicete e si potrebbe, tutt'al più distinguere nel *Cl. carpophilum* una varietas *Lauro-Cerasi* Prill. et Delac. a spore più grandi. Il Weiss (13) del resto indicava l'infezione del *Clasterosporium* sul *Prunus Lauro-Cerasus*.

Tralasciando di fare una minuta descrizione del fungo e del suo modo di presentarsi, perchè in parte indicate da numerosi autori (*); credo però indispensabile il riferire:

I. Sopra quali matrici e con quali caratteri, il parassita si rese manifesto in questi ultimi anni (1900-1905); II. Come si comporta nelle colture; III. Nelle infezioni artificiali; IV. Che relazione può esso avere colla gommosi; V. Se si accentua, in esso, una specializzazione alle diverse matrici.

In nessuna parte delle piante malate ho mai trovato nè la *Phyllosticta Beyerincki*, nè la *Asterula Beyerincki* Sacc. che il Vuillemin (11) dice collegate, nello sviluppo, al *Clasterosporium* e su di esse non posso quindi pronunciarmi in alcun modo.

(*) Particolarmente da Passerini (4), Oudemans (7), Beyerinck (6), Thümen (8), Crawford (9), Cavara (12), Vuillemin (11), Kirchner e Boltshauser (14), Comes (16), Frank (18), Sorauer (23), Briosi e Cavara (22), Prillieux (20), Baldrati (21), Stewart, Rolfs e Hall (25), Farneti (24), Boucher (27), Mc. Alpine (28), Iwanoff (29), Marchal (30), Aderhold (19), Trabut (31), ecc.

I.

Il *Clasterosporium carpophilum* colpisce le foglie ed i rami nonchè i frutti maturi od in via di maturazione, del *Prunus cerasus*, α *Caproniana* e γ *Marasca P. avium* colle forme β *duracina* e γ *Claudiana*, *P. Máhaleb*, *P. Padus*, *P. domestica* colle forme β *Claudiana* e γ *Insititia*, *P. spinosa*, *P. Armeniaca*, *P. Persica*, *P. Amygdalus;* e le foglie del *P. Lauro-Cerasus*, del *P. serotina* e del *P. Virginiana*.

Trovato in Francia nel 1843, si estese successivamente nell'Inghilterra, Italia, nei Paesi Bassi, nella Germania, Austria, America settentrionale, nel Caucaso, nella Nuova Zelanda, Australia ed oggidì si può dire diffuso ormai in tutta l'Europa.

Su tutte le foglie dei *Prunus* ricordati, ma specialmente su quelle del *P. cerasus* α *Caproniana* e γ *Marasca*, del *P. avium* e dei *P. Persica* ed *Armeniaca*, il fungo produce punticini, poi macchie vinoso-cremisi, tondeggianti, ellittiche od irregolari, larghe 2-4-6 mm., molto marcate nella pagina superiore. I tessuti in 2 o 3 giorni essiccano dal centro verso il margine, mantenendo sempre un orlo cremisi o bruno vinoso e qualche volta un punto nero centrale, e si staccano tutt'attorno, nettamente, lasciando la lamina bucherellata, come nelle infezioni determinate dalle *Phyllosticta*.

Il numero delle macchie per ogni foglia era, quest'anno (1905), di 20, 30, 40. Nelle lamine più sviluppate apparivano anche 80 macchie di varie dimensioni, che, riunendosi, rendevano molte foglie in gran parte essiccate e bucherellate. Le macchie brune si estendono alle nervature mediana e laterali, inducendo l'essiccazione ed il distacco dei tessuti legnosi colla porzione cellulare, lungo la nervatura principale o le secondarie: le foglie restano pertanto contorte, raggrinzate o ridotte in piccoli brandelli informi con grumi di gomma uscenti dalle nervature. Sui piccioli e sui peduncoli, come nelle nervature, appaiono punticini di color cremisi, quindi macchie ellittiche o placche depresse, brune, allungate, sopratutto dal lato esterno e quasi sempre con grumi di gomma. Sui sepali, le macchie cremisi sono per lo più in numero limitato e piccole; raramente i tessuti essiccati si staccano dalla parte sana. Solo in un numero limitatissimo di giovani petali ho notato piccole macchie, o meglio punticini di color

cremisi. Sui frutti ancora verdi od in via di maturazione, del *Prunus cerasus*, nonchè del *P. Persica* e *P. Armeniaca*, i puntini di color cremisi si allargano in placche incavate, brune, con forma circolare od ellittica, del diam. di 2, 4, 6 mm., ridotte a 2 o 3 mm. od estese su tutto il frutto, tanto da renderlo quasi completamente butterato e colla polpa (*P. cerasus*) bruna o raggrinzata.

Sui frutti maturi del *ciliegio*, le placche sono brune o si riducono in croste rugginose sotto alle quali la polpa s'indurisce, su quelli invece del *pesco* e specialmente dell'*albicocco*, le croste fuligginose o grigiastre possono staccarsi per lo più in porzioni circolari, lasciando delle zone leggermente incavate o piane, rosso-fuligginose.

I frutti del *susino* e del *mandorlo* sono meno colpiti dalle macchie o dai punti cremisi.

Nelle drupe del *ciliegio* si può avere la necrosi quasi totale della polpa, in quelle dell'*albicocco* larghe screpolature lungo il solco od in vicinanza del calice. Sulle croste si depositano anche grumi di gomma.

Verso l'apice dei giovani rami di *Prunus Armeniaca*, *P. domestica*, *P. Amygdalus*, ma specialmente di *P. cerasus* e *P. Persica*, in vicinanza delle nuove foglie o poco più in basso, una piccola macchia cremisi, circolare, in 4 o 5 giorni si distende in una larga placca brunastra, tutt'attorno al ramo, tanto da determinare la morte, colla secrezione di grumi gommosi.

Lungo i rami, già più sviluppati, appaiono delle macchie ellittiche o circolari a superficie liscia, dapprima cremisi poi castanee nel centro, con un labbro ben marcato al margine, lunghe 2-3-6-8-10 mm., larghe 2-3-4 mm., che fondendosi assieme possono uccidere buona parte della zona corticale ed indurre la secrezione gommosa.

Sui rami di un anno di *P. cerasus*, *P. Persica*, *P. Armeniaca*, meno frequentemente di *P. domestica* e *P. Amygdalus*, il fungo produce macchie ellittiche, castaneo-porporine, lunghe 3-5-8 mm., circondate da una zona sporgente porporina, non ben definita e colla parte centrale liscia, bruna. Tanto nelle macchie sui frutti come in quelle sui rami, possono sporgere 1-2, raramente 3-4, minute protuberanze nere.

Nelle macchie cremisi delle lamine, le cellule del paren-

chima a palizzata sono staccate, un po' appiattite, colla clorofilla già in gran parte decomposta e fra esse serpeggiano poche ife incolore, ramificate, larghe 2,5-3-4 μ, divise da setti in loculi numerosi. Anche nell'aerenchima si estendono le ife, ma sempre in numero molto ridotto. Nelle porzioni secche, le cellule a palizzata sono appiattite e morte, quelle dell'aerenchima avvicinate tanto da formare un tessuto compatto con qualche residuo delle ife miceliari brune, che riunite in gruppi di 2-3 o più, si portano verso l' esterno, rompono l' epifillo e sporificano. Le ife miceliari, dopo aver ucciso i parenchimi, possono morire senza sporificare.

Nelle foglie dei *Prunus*, come in quelle di altri generi, ma in particolar modo dei *P. cerasus*, *P. Persica* e *P. Armeniaca*, si ebbe quest'anno una riduzione nel parenchima a palizzata, uno sviluppo maggiore dell'aerenchima ed un minor spessore delle lamine e ciò per l'ambiente molto umido nel quale crescevano gli individui. In queste foglie, le ife distendendosi senza difficoltà produssero un numero maggiore di macchie che non in altre annate. Le ife hanno, nelle lamine, una vita molto breve, di 2 rar. 3 giorni, per cui i tessuti rimasti sani attorno ai parenchimi già morti, esercitando una pressione, determinano la rottura ed il distacco della parte essiccata. Addossandosi alle nervature principali ed alle secondarie possono distendersi fra le cellule del parenchima liberiano, ucciderle e nel medesimo tempo disgregare non solo la porzione liberiana ma anche i parenchimi legnosi e facilitare la secrezione gommosa.

Il picciolo delle foglie di *ciliegio*, costituito da un'epidermide quindi da un parenchima verde e dai fasci libero-legnosi riuniti ad arco, è specialmente infettato nella porzione clorofilliana verso l'arco interno ove le cellule lasciano numerose lacune tanto da formare un vero aerenchima. Ivi si trovano intrecci di ife che distendendosi fra le cellule del parenchima compatto, le staccano, ne trasformano la clorofilla e l'amido, uccidendole lentamente. Le ife possono portarsi anche verso l'arco dei fasci, e passando fra le cellule del parenchima liberiano, fanno ernia contro le fibre liberiane, disturbano il regolare funzionamento dei parenchimi e determinano, come nei rami, un notevole ispessimento nelle membrane delle cellule liberiane in via di accrescimento e quindi la gommosi in modo che tale regione si trasforma, in

breve, in un deposito di gomma che trovando i tessuti distrutti dalle ife, si spinge contro l'epidermide, la rompe e si deposita a l'esterno a guisa di grumi, nei quali si vedono ancora le ife del fungo. E che le ife esercitino una tale azione si può verificare nelle infezioni artificiali, poichè facendo sviluppare delle ife in contatto coi meristemi dei fasci, le cellule si colorano colle soluzioni idroalcooliche di rosso di Rutenio, come tutti i derivati dei composti pectici.

Nei rami verdi del *ciliegio* e *pesco*, le ife si dispongono nel parenchima corticale ma possono anche, attraversando i fasci di fibre pericicliche, penetrare nella zona parenchimatica liberiana. In contatto coi meristemi le ife inducono, nelle cellule, la gommificazione delle membrane, disgregano tutta la porzione delle fibre pericicliche, lasciando intatta l'epidermide che resta solo in

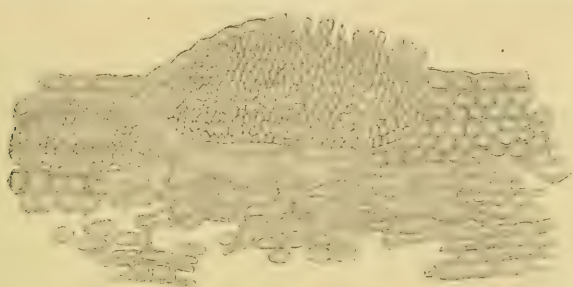



Fig. 1. — Sez. longitudinale in un ramo di pesco, con ife e cheimatostromi. Ingrandim. 150 diam. circa.

seguito sollevata o rotta per gli efflussi di gomma con ife. Nei rami di un anno, il micelio si distende nella zona corticale esterna ed interna, scioglie la membrana intermedia, stacca ed uccide le cellule in zone longitudinali. Passa anche nella porzione liberiana, stacca le fibre, circonda a spirale i tubi cribrosi ed induce gomma nei meristemi. Pur arrestandosi, le ife, ai parenchimi legnosi, si nota sempre un imbrunimento nel legno. Le ife tendono a portarsi nella zona corticale ed a riunirsi nelle masse stromatiche: queste possono mantenersi dapprima coperte dall'epidermide; accrescendosi, la sollevano e la rompono (fig. 1). Nelle parti scoperte si protendono subito le spore sino all'avvicinarsi dell'inverno, nel qual tempo tutti gli stromi passano allo stato di riposo (*cheimatostromi*).

Nei sepali del ciliegio resta distrutto l'aerenchima, però le

ife si trovano anche alla base, in contatto del peduncolo, ove avviene la divisione dei fasci nei raggi che si prolungano nelle diverse parti del fiore. Il parenchima liberiano è per lo più attraversato dalle ife che si ingrossano, si ripiegano, si contorcono e determinano la gommosi nei meristemi. Le ife sporificano frequentemente verso il lato esterno, basilare, del calice.

Nei petali, le ife serpeggiano fra le cellule in contatto coll'epidermide interna, ma si diffondono pochissimo e non sporificano.

Nei frutti del *ciliegio*, l'epidermide consta di piccole cellule tabulari di grandezza non uniforme, con una cuticola non molto sviluppata, anche nella varietà duracina, e che può essere forata dai tubetti germinativi delle spore. Nell'ipoderma vi sono da 3 a 4 strati di collenchima a cellule con membrane non molto spesse, pressochè tabulari sotto l'epidermide, quindi più ampie e con forma tendente alla ovoidale o sferoidale. Nelle varietà duracine è più sviluppato il collenchima, quindi la più marcata resistenza del frutto all'azione deleteria delle ife. La parte carnosa dell'esocarpo consta di cellule sferiche od ellissoidali, con materie coloranti, disposte, in continuazione del collenchima, in 3 o 4 strati pressochè concentrici, quindi in diverse zone radiali verso i fasci vascolari, che si ramificano in vario modo dalla base verso l'apice del frutto. Il parenchima interno risulta da cellule di due diverse forme e grandezze; ve ne sono cioè di quelle sferoidali e con diam. fra 100 e 130 μ, ed altre sferoidali od ellissoidali molto più grosse, con diam. da 150 a 300 μ, disposte in serie longitudinali, sempre però a membrana molto esile, trasparentissima. Le ife fungine si trovano specialmente fra le cellule più piccole, addossate ai fasci più esterni, ma possono invadere anche tutta la massa carnosa dell'esocarpo, lasciando il frutto essiccato. L'esocarpo è in tale caso ridotto a cellule morte, compresse ed attraversate da qualche ifa fungina. Il collenchima e l'epidermide sono per lo più distrutti dalle ife, resiste la cuticola, sebbene forata in diversi punti. Questa si rompe solo per lasciar sporgere le spore del parassita. Nella porzione collenchimatica e dell'epidermide si formano le masse stromatiche che si mantengono in quiescenza nell'inverno e si prolungano in spore nella primavera. La gommosi che si nota nelle pustole dei frutti già maturi proviene da ife che si addossano alle porzioni meristematiche dei fasci. Nelle varietà *Marasche* l'eso-

carpo risulta formato da larghe cellule pressochè uniformi ed in queste serpeggiano poche ife. I succhi acidi sempre in preponderanza oppongono una forte resistenza allo estendersi delle ife. Queste si svolgono per lo più nella zona sottocollenchimatica e rarissimamente toccando i fasci, inducono la gommosi.

Nei frutti del *pesco* e dell'*albicocco*, le cellule epidermiche si protendono per lo più in peli semplici ; il collenchima di 3-4-5 strati di cellule sferiche, ovoidali, appiattite, con sostanze coloranti, si continua in 3-4 strati sottocollenchimatici di cellule sferoidali od ellissoidali, larghe 60-70 μ, concentricamente disposte. La massa carnosa risulta da parenchima a cellule della medesima forma e grandezza delle sottocollenchimatiche, frammiste a larghe serie radiali di cellule ovoidali, ellissoidali, raramente sferoidali, molto grandi, lunghe 300 sino a circa 500 μ e larghe da 150 a 250 μ. I fasci vascolari si ramificano da l'endocarpo duro verso la periferia della polpa. Nelle pustole o larghe zone imbrunite, la porzione collenchimatica è, quasi sempre, aumentata sino a 20 e più strati di cellule depresse, brune, in contatto con l'epidermide, incolore verso l'esocarpo carnoso. Le cellule più piccole dell'esocarpo sono distaccate l'una da l'altra e distrutte, quelle più grosse resistono per un tempo più lungo, ma si vedono in breve o isolate o riunite in gruppi di 2 o 3. Staccandosi le cellule, si formano larghi canali circolari od ellittici che dai fasci serpeggiano tra le diverse parti del frutto e portano la gomma verso l'epidermide, sempre insieme ad ife fungine identiche per forma a quella delle foglie. Nelle infezioni incipienti è facile notare come le ife, dopo aver staccate le cellule attorno ai fasci, avvolgano la porzione liberiana, inducendo la gommosi nei parenchimi. Nelle pustole, l'epidermide si rompe, qua e là si solleva in larghe porzioni con alcuni strati imbruniti di collenchima, lasciando così libero passaggio a molte ife di funghi specialmente del gen. *Alternaria*, i quali in poco tempo inducono la suberizzazione dei tessuti o li corrodono lasciando così larghe cavità e profonde spaccature.

Questo fatto si verifica, più che in quello del pesco, nel frutto dell'albicocco, ove la porzione corticale resta staccata in moltissimi punti a guisa di placche e si forma, come ricorda Farneti (24), un'escara che ben presto dissecca e si stacca. Per le numerose screpolature, le ife possono penetrare in tutte le parti

del frutto d'albicocco, distruggendo le cellule piccole e grandi dell'esocarpo o inducendone la suberizzazione per lunghi tratti.

Nel frutto del *susino*, le cellule tabulari dell'epidermide con rivestimento di cera granulosa più o meno marcato a seconda delle varietà, possono presentare una certa resistenza a l'infezione, specialmente nei frutti in via di sviluppo. In quelli, invece, maturi, i granuli di cera si uniscono e si staccano in placche: fermandosi ivi l'acqua le spore possono più facilmente germogliare e penetrano nell'esocarpo carnoso a cellule lunghe sino a 400 e più μ, larghe da 80 a 100-250 μ. Le ife si addossano anche alla zona avvolgente dei fasci, ne staccano le cellule e possono indurre la gommosi nei meristemi. Nell'ipoderma aumenta il numero delle zone collenchimatiche, ma si staccano solo in minime porzioni con grumi di gomma. Nel frutto del *mandorlo* il fitto rivestimento di peli serve come organo protettore e quindi sono più rare le infezioni. Però le ife possono corrodere le cellule epidermiche o staccare nettamente l'epidermide, lasciando allo scoperto delle placche brune, nell'ipoderma. Disgregato il collenchima, le ife si addentrano fra le serie radiali di cellule grosse, ellissoidali o sferoidali, sino all'endocarpo che attraversano, nei giovani frutti, uccidendone le cellule. In questo frutto più che in altri, per il facile distacco dell'epidermide, si formano profonde spaccature secondo le serie radiali delle cellule. Si producono in minor numero i grumi di gomma.

Micelio. — Tanto nelle foglie come nei rami e frutti, il *micelio* è formato da ife sinuose. È però nella polpa de l'esocarpo, ove raggiunge il massimo sviluppo, che si può meglio studiare. Quando la macchia fogliare di color cremisi è appena visibile, il micelio si può trovare in forma di ife pressochè cilindriche, irradianti dal centro della macchia verso gli orli. Le ife non si addossano l'una a l'altra, nè formano il fitto intrecccio che si nota invece nelle parti carnose dei frutti. Esse scorrono dapprima fra i meati del tessuto a palizzata quindi si riversano nell'aerenchima dove non sono più in forma di fili semplici, ma si sdoppiano a l'estremità od emettono ramuscoli laterali per lo più ad angolo retto. Le ife divise in loculi da setti trasversali avvicinati, non superano i 5-6-7 μ di larghezza, nelle porzioni vecchie, mentre nelle giovani misurano appena 3-4 μ. Una ifa si allunga sino a 500 μ, ed anche più, ma la sua vita è

breve. I nuovi rami si distendono in poco tempo tanto da formare macchie più larghe, ma esaurendosi in 2 o 3 giorni la vitalità, ne avviene che non possono più far ernia contro i tessuti sani e facilitano il distacco delle porzioni morte, in una zona circolare, corrispondente alle ife irradiate dalla infezione iniziale. Questa morte precoce delle ife fa sì che esse non arrivano quasi mai a sporificare. Nell'esocarpo e nei giovani rami le ife formano un intreccio ben visibile. Esse decorrono sinuose, si addossano e si attaccano per contatto delle pareti o per anastomosi, si accavallano e contorcono, emettono rami laterali e si dividono dicotomicamente. Nelle parti interne dell'esocarpo o dei rami le membrane sono incolore, verso la luce invece si tingono in fuligginoso. Lungo il loro decorso hanno o ingrossamenti o leggeri restringimenti. Le ramificazioni laterali ad angolo retto od acuto sono, come i setti trasversali, molto vicine e per le frequenti anastomosi non seguono mai una direzione determinata, ma formano, come già ricordai, un irregolare aggrovigliamento fra le cellule che non tardano ad uccidere o distruggere. Le estremità delle ife si riconoscono per la loro minor larghezza, per il contenuto molto denso, con pochissimi vacuoli, che abbondano invece nelle parti più vecchie. Sono le giovani ed esili ramificazioni che distruggono la membrana intermedia, staccano le cellule e circondandole a guisa dei pseudopodii di un polipo ne distruggono la membrana, se questa presenta minima resistenza come nella polpa dei frutti, o ne assorbono, senza speciali austorii, il contenuto. Esili ramificazioni penetrano anche nelle cellule, ma senza formare quel fitto intreccio che Istwanffi (26) descrive per il *Coniothyrium diplodiella*. Le cellule delle foglie resistono maggiormente a l'azione distruggitrice delle ife. Queste non penetrano nel legno vecchio, si diffondono però nel legno giovane vivendo anche a spese del parenchima legnoso, tantochè il legno dei rami colpiti assume una colorazione castanea più o meno intensa. Non attraversano il legno nè si diffondono nella regione midollare. Le screpolature che descrive e figura Aderhold, si formano solo dopo l'infezione, non mai in contatto delle ife che attraversano il legno od i raggi midollari. Le ife serpeggiano sulla superficie dei frutti, vi si attaccano ed o ingrossandosi a l'estremità o producendo nuovi rami forano la cutina, penetrano nelle cellule epidermiche distendendosi nella parte

carnosa, ove possono trovare abbondante nutrimento ed è perciò che l'infezione sembra provenire da l'interno. La sporificazione però non avviene se le ife non sono libere od in ambiente aerato.

Le ife che si addossano alle parti liberiane dei fasci possono anche disgregarle, ma di solito esercitano un'azione irritante nei meristemi vicini, la quale induce la gommificazione delle membrane. La larghezza massima delle ife è di 7 μ, la media di 5 μ, nelle porzioni giovani di 3 a 3.5 μ. Portandosi verso l'esterno si addensano, assumono l'aspetto varicoso, i setti diventano frequentissimi, tanto da ridurle in porzioni lunghe 8-12-16 μ, ristrette ai setti, diritte, sinuose, arcuate o stellate. Si producono così gli stromi bruni che sporificano immediatamente o si riducono nei *cheimatostromi*, che restano per poco attaccati alle ife miceliari. Hanno forma emisferica colla parte piana inferiormente e colla convessa verso l'esterno. Sezionati, mostrano un pseudo-parenchima a loculi sferoidali, ellissoidali, ovoidali o cilindroidi, a membrane incolore nel mezzo, fuligginose verso la superficie convessa, di dove sporificano. Non c'è quindi nei *Clasterosporium* come anche nei *Fusicladium* un vero sclerozio (17) circondato da uno strato tegumentale, cutinizzato, coriaceo, inerte. Questi funghi hanno invece delle masse stromatiche le quali continuano a sporificare finchè si trovano in ambiente propizio, tanto da esaurire lentamente tutte le ife. L'abbassamento della temperatura arresta la sporificazione che può continuare nella primavera successiva. Credo quindi si debbano dette produzioni indicare col nome di stromi invernali o *cheimatostromi* per distinguerli dai veri sclerozii, tipici nei generi *Sclerotium*, *Sclerotinia*, *Claviceps*, ove la massa midollare è circondata da un distinto tegumento coriaceo inerte.

I *Clasterosporium*, come i *Fusicladium*, formano un gruppo notevole di funghi stromatici che segnano il passaggio dalle forme che si mantengono normalmente senza picnidio (*Hyphomyceteae*) a quelle con pseudo-picnidio (*Melanconieae*). È la massa stromatica che indusse in errore l'Oudemans ed alcuni osservatori francesi facendo riferire il *Clasterosporium* ad un *Coryneum*. Del resto Aderhold ha già ben dimostrato, anche colle colture fatte con materiale autentico, l'inesistenza del picnidio nel così detto *Coryneum Beyerincki*.

Spore. — Le *spore* o *conidii* sono prodotte da ife verticali od inclinate, semplici, lunghe sino a 60-70 μ, larghe 4-6 quando si formano dal micelio, brevi e larghe quando si protendono dagli stromi (15-20-25-30 ᴗ 5-6-8).

Le giovani spore appaiono a l'estremità del filamento in forma di una piccola sporgenza conica che in breve si allunga in un corpo ellissoide. La membrana dapprima incolora e poco resistente si tinge in fuligginoso più o meno intenso ed acquista sempre maggiore consistenza mano mano che le spore giungono a completa maturazione. L'acido solforico concentrato mentre discioglie rapidamente le membrane incolore agisce con lentezza su quelle colorate, rompendole o decolorandole. Col processo di Wisselingh (*) si può mettere in evidenza la chitinizzazione di tali membrane.

La spora, in origine unicellulare, resta divisa da un setto mediano in 2 loculi e, da altri 2 setti, in 4 parti e da 2 setti ancora, in 6 porzioni, oppure da 4 setti in 5 loculi. Il numero maggiore di spore ha 3 o 4 setti. Mano mano che la spora invecchia si chitinizza ed imbrunisce la membrana, ed i loculi sono sempre meglio segnati, cioè ristretti ai setti. I loculi sono anzi tanto distinti, che la spora può diventare toruloide. In rari casi qualche setto è leggermente inclinato, come aveva già nonato Aderhold (tav. XI, fig. 12*a*) in modo da dare alla spora un aspetto muriforme.

La forma è ellissoidale o fusoidale ed il numero delle spore, per ogni gruppo, può variare da 6 a 12 sino a 20. Negli stromi dei rami si hanno sino a 30-40 spore ben formate.

Le dimensioni delle spore variano da 30-32 a 45-55 μ di lunghezza per 12-14-16 μ di larghezza. L'Aderhold riporta varie lunghezze da 27,6 a 39,1 per 12 a 15 μ; ed anche 32,2 fino a 62,1 per 12,1 a 13,8 e 23-62 per 12-18, con una media di 40 per 14 μ.

(*) Si riscaldino in bagno-maria, con olio, a 150°-160° c., le sezioni con spore, immerse in una soluzione concentrata di potassa, quindi si passino in alcool a 90° ed in acqua. Trattandole in seguito con ioduro potassico ed acido solforico diluito, le spore assumono la colorazione violaceo-rossa; violaceo-azzurra invece col cloruro di zinco iodato.

II.

Per uniformarmi alle condizioni normali, cioè ai substrati nei quali si può trovare naturalmente immersa la spora non seguii sempre i mezzi indicati da Aderhold, adoperai invece acqua di rugiada, acqua piovana, succo ottenuto da frutti verdi di ciliegio, pesco, albicocco, susino, da frutti maturi, e da porzioni di foglia e giovani rami. Feci inoltre colture in acqua comune sterilizzata e decotto di foglie e rami giovani di ciliegio e pesco che collocai, allo stato liquido, in gocce su vetrini portaoggetti o in gocce pendenti o in provini o camere di coltura e ridussi allo stato gelatinoso o con agar-agar ed usai in gocce o versai in provini o placche di coltura. Ottenni i medesimi risultati adoperando tanto le spore prese dai rami, come quelle provenienti dalle foglie o dai frutti.

Le spore, colla membrana bruno-fuligginosa, conservano per 3-4 sino a 6 mesi la facoltà germinativa. Potei far germinare, dopo 12 mesi, spore prese da frutti secchi di ciliegio, tenuti in recipienti ben chiusi.

Influisce molto, sullo sviluppo, il grado di temperatura dell'ambiente, così esso cessa a temperature sotto zero sino a 2° C, si inizia a 4° C e cresce molto lentamente a 6°-8°-10°, aumenta a 18° C e raggiunge un *maximum* a 24-25-30° C nell'acqua, a 35-40° C. nei decotti e va cessando oltre i 50° C. La spora, nei liquidi, si gonfia dopo un'ora al più, segnatamente nei loculi terminali, quindi anche in quelli mediani, tanto da assumere la forma toruloide. È per lo più in quelli terminali che s'inizia la germinazione, con un certo ritardo si ha anche nei mediani. Si riconosce di dove uscirà la protuberanza germinativa, perchè i loculi acquistano una tinta più chiara. In un caso solo verificai la formazione diretta di un nuovo conidio come indica Aderhold (tav. XI, fig. 12). Nell'acqua di pioggia o di rugiada dopo 1 o 2 ore si rompe, all'apice od ai lati, l'episporio, nei loculi terminali e si protende un bitorzolo incoloro. Nell'acqua sterilizzata, nel succo di frutti maturi e nei decotti si ha la germinazione dopo 3-4 ore.

Un maggior ritardo di qualche ora si verifica nei succhi acidi, nelle gelatine e nell'agar-agar. La rottura dell'episporio

avviene irregolarmente e la spora può ridursi, come già accennò Aderhold, in clamidospora.

Il bitorzolo si allunga, dopo 1 o 2 ore, in un filamento che di solito si ripiega ad uncino e cresce rapidamente, mentre escono nuove protuberanze dagli altri loculi. Non ho mai notata la disposizione a catena indicata da Aderhold (19).

Dopo una ventina di ore sono già ben visibili ife incolore riunite in un vero micelio. Nell'acqua, le ife si distendono in poche ore, ma raggiungono una lunghezza molto limitata e vivono pochissimo, 1-2-3 giorni al più, spazio di tempo più che sufficiente per produrre numerose infezioni. Togliendo l'acqua le ife vivono 1-2-3 ore.

Nei liquidi nutritizî invece, nelle gelatine, nell'agar e nei succhi zuccherini dei frutti, lo sviluppo è più lento, ma continuo. Nei succhi acidi l'accrescimento è lento e limitato.

Dopo 3 giorni, in media, nel succo zuccherino dei frutti anche dopo 2 giorni, la spora appare coi loculi ingrossati, ben distinti, in forma toruloide e membrana a tinta sbiadita con 4 a 6 ife principali irradianti a l'intorno, prolungate in numerose ramificazioni divise, da frequenti setti, in porzioni di lunghezza varia, irregolarmente ingrossate verso i setti, unite da anastomosi, con divisioni dicotome o verticillate ed estese tanto da occupare una zona circolare, del diam. di 300-400 sino a 600 μ. Quattro spore, poste a breve distanza l'una da l'altra, formarono, in 3 giorni, una placca larga 3 mm. Nei decotti e nel succo dei frutti, ogni spora, può produrre, in 60 e 70 ore, tante ife da costituire una placca larga 1 o 2 mm.

In vicinanza della spora le ife misurano una larghezza di 6-7-8 μ, quindi si restringono a 3-4, allargandosi in vicinanza dei setti sino a 5-6 μ. Dopo 60 o 70 ore (3 giorni al più) da alcune ife, ad una certa distanza dalla spora, si protendono rami ingrossati, larghi 5-7-8 μ, divisi da numerosi setti a forma di conidiofori, terminati da un loculo ellissoidale, incoloro, il quale, di ora in ora, si allunga e si ingrossa, assumendo in breve la forma di una spora. Al quinto giorno le spore hanno già forma normale e color gialliccio. Al sesto giorno i conidii si staccano. Dopo la formazione dei primi conidii le ife continuano a distendersi tanto da occupare una superficie larga 2-3 mm., e nel medesimo tempo si protendono verso la superficie libera i conidio-

fori, la sporificazione aumenta enormemente e le gocce di liquido, di gelatina e di agar appaiono ricoperte da un gran numero di spore. I rami producono 2-3 ed anche 5-6 spore e sono frequenti le disposizioni a verticillo. Dopo 5 o 6 giorni in tutte le colture su gocce libere, la sporificazione raggiunge il *maximum*, tantochè esse diventano brune alla superficie libera per i numerosi conidii che si staccano di mano in mano dai conidiofori. Al decimo giorno, in media, cessa la produzione di spore. La maturità completa delle spore si ha dopo venti giorni. Solo dopo tale periodo di tempo possono emettere i tubetti germinativi. Gli ultimi conidiofori sono sempre a diametro maggiore di 7 ad 8 μ, hanno i setti molto ravvicinati, portano un solo conidio a l'apice che non sempre raggiunge un normale sviluppo e numerose ramificazioni dai loculi inferiori che si svolgono ad uncino nell'uno o nell'altro senso. Tali ife segnano l'ultima fase della sporificazione. Le ife allora muoiono in gran parte e le spore si mantengono in uno stato di riposo. Alcuni rami però si ingrossano come gli ultimi conidiofori (fig. 2), si allungano in senso verticale, ma nello stesso tempo si segmentano in numerose porzioni pressochè sferoidali o poliedriche. Le divisioni dicotome o verticillate tendono ad avvicinare le ife tanto da toccarsi, anastomizzarsi, e conglobarsi in una massa o cuscinetto che ricorda la struttura degli stromi nei rami o nei frutti. Le ife assumono verso l'esterno una tinta gialla od anche fuliginosa.

Fig. 2. — Ife miceliari che si protendono fuori del substrato. Ingr. 200 diam. c.

Al quindicesimo giorno, nelle colture in liquidi, i cuscinetti sono ben distinti ed in questi, dopo pochi giorni, le ife periferiche tendono a sporificare.

Nelle colture in placche o nei tubi, quindi in ambienti pochissimo aerati e tanto nei decotti gelatinosi o tenuti liquidi, come nei succhi dei frutti o rami e foglie di ciliegio e pesco, le spore germinano con un maggior ritardo, però in 4 o 5 giorni

formano delle placche circolari dalle quali si vedono sporgere filamenti bianchicci (fig. 2). Le ife hanno le medesime forme e dimensioni di quelle ottenute nelle gocce su vetrini, però quelle che tendono ad uscire dai substrati di coltura pur ingrossandosi all'apice, non accennano a sporificare. Le ife si distendono e si allungano per quindici o venti giorni e formano, in gruppi di 2 o 3, delle placche larghe 4-6 mm. Solo in rarissimi casi avviene la sporificazione. Normalmente le ife che sporgono o dai liquidi o dalle gelatine si ramificano ed uniscono in modo da formare gli stromi. Nelle gelatine e specialmente nell'agar, il micelio si distende alla superficie, ma in modo da formare delle masse spesse 1 o 2 mm., nei liquidi invece produce ammassi sferici. Gli stromi prolificano per alcuni mesi, sopratutto nell'agar. Il fungo si mantiene nello stato di micelio per lungo spazio di tempo senza sporificare, se però si scoprono le placche od i tubi e si collocano in camere umide aerate si ha in pochi giorni la sporificazione. In colture in agar, ben chiuse, ho potuto conservare il fungo vivo per 6-8 mesi allo stato miceliare o con stromi non ben formati.

Nelle vecchie colture si trovano frequentemente dei rami con loculi ingrossati e ridotti a vere clamidospore, come ebbe già a ricordare l'Aderhold.

III.

Il parassitismo del fungo si può facilmente dimostrare introducendo un ramo ben lavato con soluzione di solfato di ferro al 10 $^0/_0$ e 5 $^0/_0$ di calce, fuorchè nella porzione laminare, in modo da uccidere i germi di funghi estranei, in un tubo piuttosto largo e chiuso alle due estremità con batuffoli di cotone. Se sulle foglie si mettono, in gocce d'acqua, delle spore mature, in pochi giorni appaiono le macchie cremisi circolari e, nelle sezioni, le ife del fungo come nelle foglie naturalmente infette.

Seguendo su foglie e frutti maturi di *ciliegio*, che staccavo di volta in volta da una pianta tenuta in vaso, ed il più che fosse possibile fuori dalle infezioni; od anche da porzioni di ramo che collocavo, in parte immersi nell'acqua, sotto a campane di camere umide, ho potuto constatare che, contrariamente a quanto avviene per altri parassiti, il tubetto germinativo

uscendo dalla spora aderisce bensì alla cutina, ma di rado penetra nell'ostiolo degli stomi. Esso invece, finchè la spora è immersa nell'acqua ed in ambiente con temperatura di 16°-18°-20° C, si allunga, si ramifica e solo dopo qualche ora (10-12-18 ore) lungo le ife *epipolee* (*) che strisciano ne l'acqua, si protendono rami (secondo Aderhold *appressori*) ingrossati che fanno ernia sulle cellule stomatiche e tentano di passare per gli ostioli o si attaccano alla cutina, la rompono, passano nelle cellule epidermiche e si allungano in ife nella porzione a palizzata o nella polpa dei frutti (fig. 3). Aderhold accenna ad ingrossamenti od *Appressorien*, ma non specifica il fatto da me messo in evidenza. Sulle drupe del ciliegio una sola spora diede in 18 ore, da 3 rami principali, 8 ramificazioni secondarie e su queste 10 vescichette, che in breve perforata la cutina, e penetrate nell'interno, si suddivisero in numerose ife. Questo modo speciale d'infezione, spiega il disastroso estendersi del fungo nei periodi di piogge prolungate. Colla sola acqua di rugiada o di traspirazione si potranno verificare limitate infezioni sulle foglie per gli ostioli che possono lasciar passare il primo tubo germinativo, rarissime invece sui frutti. Le gocce evaporando rapidamente, mettono le ife, nelle ore del giorno più propizie, per elevata temperatura, allo sviluppo del parassita, in condizioni di non poter vivere, poichè dopo 3 ore al più le giovani ife *epipolee* muoiono fuori dell'acqua. Mantenendosi invece le gocce di pioggia resta facilitata la formazione delle ife *diaditiche* (**), ognuna delle quali agisce come un centro d'infezione: le ife diaditiche si protendono solo dopo 10 ore almeno d'immersione della spora nell'acqua.

Fig. 3. — Ife epipolee, sull'epidermide di un frutto di ciliegio, con ife diaditiche. Ingrandim. 200 diam. circa.

Sui frutti del *ciliegio*, tenuti sui rami nelle camere umide, le infezioni avvenivano solo nei punti ove potevano fermarsi le goccioline di acqua e cioè verso la parte superiore. Però le spore

(*) Da ἐπιπολή (superficie).

(**) Da διαδύομαι (penetro).

durante lo sviluppo delle ife epipolee possono essere trasportate colle goccioline verso il basso e restare attaccate anche in altri punti, sopratutto lungo il solco longitudinale.

Per prove ripetute in 4 anni consecutivi mi sono convinto che le spore prodotte dai cheimatostromi scorrono, coll'acqua, lungo i rami e foglie, infettando così lamine, piccioli, peduncoli e frutti. Per l'azione del vento, o per il movimento delle masse stromatiche determinato dal rompersi dell'epidermide, vengono, colle gocce d'acqua spruzzate le spore. La gomma trasporta delle spore, ma in numero troppo limitato e solo in certe parti della pianta, quindi non può servire che in parte minima a diffondere il parassita.

E che le infezioni provengano in gran parte dalle spore che si staccano dai cheimatostromi e sono trasportate dall'acqua, se ne ebbe una prova in quest'anno 1905. Le porzioni più colpite erano le inferiori, dove l'acqua si fermava più facilmente.

Sopra i rami della metà di una pianta isolata di ciliegio, già molto colpita nel 1903, feci passare ripetutamente, nell'autunno del 1904, pennellature con una soluzione al 10 $^0/_0$ di solfato di ferro e calce 5 $^0/_0$. Nell'estate del 1905 potei verificare che sopratutto nei rami estremi, non tanto in quelli del mezzo e quindi più in contatto coi malati, l'infezione sulle foglie era ridotta ad un terzo almeno per numero di lamine malate e di macchie, in confronto della porzione non curata.

Possono le spore essere trasportate dal vento, ma non a distanza tale da diffondere il parassita da una regione all'altra. Sono i rami, i frutti coi cheimatostromi che diffondono il malanno e solo quando vi sono gocce di acqua persistenti e quindi nei periodi di pioggie prolungate.

La penetrazione del parassita nelle giovani pianticelle, nei rami, piccioli e peduncoli, avviene per mezzo delle ife diaditiche, in nessun caso potei ottenere lo sviluppo delle ife nelle porzioni radicali.

Feci anche prove d'infezione sul pesco, albicocco e susino, ottenendo i medesimi risultati che non sul ciliegio. Sui frutti del pesco la difficoltà dell'infezione sta nel fatto che le ife devono corrodere i peli per poter penetrare, più facilmente resta intaccato l'albicocco. I granuli di cera del *susino* possono essere allontanati dalle ife, sopratutto nei frutti maturi.

IV.

Che le ife inducano gommosi se ne ha una prova nelle infezioni artificiali, tantochè su rami sani infestati con spore di *Clasterosporium*, oltre alle macchie cremisi si ebbe anche secrezione di gomma. L'ifa però deve portarsi in contatto colle porzioni meristematiche. L'azione che le ife esercitano è semplicemente meccanica: disturbano, per il contatto, il funzionamento dei meristemi e facilitano la gommificazione nelle membrane delle giovani cellule. Ma una tale azione può essere prodotta anche da una ferita qualunque, da una puntura.

Se il fungo fosse la causa prima della gommosi dovrebbe determinare una tale alterazione anche negli altri parenchimi, ma questo avviene solo nei giovani ed esili parenchimi dei frutti circostanti ai fasci.

L'Aderhold, in seguito a sezioni fatte in diversi punti ed a prove di inoculazione, ritiene si possa supporre che dalle ife del fungo si separi un fermento il quale espandendosi nel *cambium*, indurrebbe la degenerazione gommosa.

Si sa specialmente dagli studi del Mangin che la gommosi della vite e di alcune rosacee ed altre piante si manifesta nelle cellule annesse ai vasi, mentre nelle Acacie si estende dal cambio ad altre porzioni cellulari. Nel ciliegio, pesco, ecc., la gommosi si avrebbe nei meristemi in seguito ad un urto anche con semplici ife fungine. Che non sia un fermento speciale emesso dalla ifa del *Clasterosporium* capace di indurre la gommosi nei meristemi, ne ho avuta una prova in numerose colture fatte su giovani rami di ciliegio con spore di *Phyllosticta circumcissa* e *Ph. prunicola* (Opiz.) Sacc., le quali avevano emesse ife che si portavano in contatto col *cambium*. Nei punti così infettati si era sviluppata la gomma come nel caso di leggerissime punture fatte, con un sottile ago sterilizzato, nella regione del *cambium*.

La degenerazione gommosa nei fruttiferi a nocciolo credo non si debba riferire ad alcuna azione di parassitismo o di fermentazione, ma bensì ad un improvviso arresto nello sviluppo dei meristemi del *cambium*; e ciò perchè si può avere gommosi tanto da una semplice ferita come dalla penetrazione delle ife fungine e quindi anche da quelle del *Clasterosporium*, nel *cambium*.

Siccome le ife si distendono molto facilmente nei meristemi cambiali, così possono estendere di molto la degenerazione gommosa e sopratutto nei rami.

Nelle lamine, si ha gommosi solo sulle nervature principali con fasci libero-legnosi ben formati, mai nelle vene o fasci di trachee.

Nei frutti ricchi di zuccheri le ife, come le ferite, possono determinare gommosi nei fasci od anche nelle giovani cellule ad esile membrana attorno ai fasci.

Ho creduto opportuno di ricordare le esperienze da me fatte per le conseguenze che da esse se ne possono dedurre e perchè in parte coincidono colle supposizioni di Frank e Sorauer. Occorreranno certamente nuove prove e nuove inoculazioni sul pesco, albicocco, mandorlo e sugli altri *Prunus* per generalizzare la causa della gommosi.

V.

Le moderne ricerche tendendo a dimostrare nelle specie fungine che vivono sopra diverse matrici un adattamento ad ogni singola pianta ospite, mi parve opportuno chiarire un tal fatto per il *Clasterosporium*. In varii tubi chiusi con batuffoli di cotone feci entrare un rametto di *ciliegio*, *pesco*, *albicocco*, *susino*; nel medesimo tempo collocai un certo numero di rami delle medesime piante sotto campane di camere umide. Feci dette prove nell'estate, stagione propizia allo sviluppo del fungo e collocai numerose spore ben mature in gocce d'acqua, su tutta la superficie delle foglie ed in eguale quantità e procedei nell'esperienza, come appare dal quadro alla pagina seguente.

Nei numeri 1, 5, 9, 13, cioè sulle foglie delle medesime matrici, si verificò sempre una marcatissima infezione, il che dimostra che l'ambiente era adatto allo sviluppo del parassita: dal resto risulterebbe che, fatta eccezione dell'infezione dal ciliegio al pesco (2) e viceversa (6), le spore formate su diverse matrici, come albicocco e susino e viceversa si adattano difficilmente alla infezione sul pesco e ciliegio. Vi è quindi anche nel *Clasterosporium carpophilum* una tendenza alla specializzazione, cioè ad acquistare speciali proprietà, a seconda delle matrici su cui vive, pur appartenendo queste al medesimo genere.

I. Infezione con spore prese da rami, frutti o foglie di ciliegio.	Risultato de l'infezione	II. Infezione con spore prese da rami, frutti e foglie di pesco.	Risultato de l'infezione
su foglie (1) di ciliegio	marcata	su foglie (5) di pesco	marcata
Id. (2) di pesco	leggera	Id. (6) di ciliegio	leggera
Id. (3) di albicocco	quasi nulla	Id. (7) di albicocco	quasi nulla
Id. (4) di susino	id.	Id. (8) di susino	id.

III. Infezione con spore prese da rami, foglie o frutti di albicocco.	Risultato de l'infezione	IV. Infezione con spore prese da rami, foglie o frutti di susino.	Risultato de l'infezione
su foglie (9) di albicocco	marcata	su foglie (13) di susino	marcata
Id. (10) di ciliegio	quasi nulla	Id. (14) di ciliegio	quasi nulla
Id. (11) di pesco	id.	Id. (15) di pesco	id.
Id. (12) di susino	id.	Id. (16) di albicocco	id.

CONCLUSIONI

1. Al *Clasterosporium carpophilum* (Lév.) Ad., oltre le specie già indicate da Aderhold, sono sinonimi l'*Helminthosporium Pruni* Berk. et Curt., la *Stigmina Briosiana* Farneti ed il *Coryneum Lauro-Cerasi* Prill. et Delac.

2. Il *Clasterosporium carpophilum* (Lév.) Ad., favorito da eccessiva umidità, invade tutti i membri di alcuni *Prunus*, fuorchè le radici; nei tessuti fogliari e dei frutti verdi le ife si distendono limitatamente e sporificano solo in rari casi, inducono il distacco della parte malata dalla sana in zone circolari corrispondenti all'espandersi delle ife; nei frutti maturi o quasi e nei rami ove trovano adatto nutrimento, dopo essersi sparse di molto, sporificano e confluiscono in stromi che possono o subito sporificare o trasformarsi in *cheimatostromi*.

3. Le ultime ramificazioni delle ife miceliari distruggono la membrana intermedia e circondano le cellule ed emettono nuovi rami nell'interno; mentre disgregano la porzione liberiana si arrestano al legno nel quale inducono l'imbrunimento, distendendosi tutt'al più nel parenchima legnoso.

4. Le ife portandosi in contatto coi meristemi del *cambium*, determinano la gommosi delle membrane per un semplice disturbo funzionale, come lo possono provocare le ife delle *Phyllosticta* od una semplice puntura.

5. Le spore hanno l'episporio chitinizzato, germinano solo dopo una ventina di giorni e resistono, purchè conservate in ambiente ben riparato, sino a 12 mesi. La germinazione avviene in poche ore. Nell'acqua, le ife vivono pochi giorni e muoiono in 1 a 3 ore quando si toglie l'acqua. Le nuove ife sopra una superficie libera aerata sporificano abbondantemente in 2-3 giorni, in ambiente chiuso, poco aerato, si mantengono allo stato di vita vegetativa o confluiscono in stromi o producono clamidospore.

6. La penetrazione del parassita può avvenire per mezzo del primo tubetto germinativo che passa nell'ostiolo, oppure le ife possono, per qualche ora, mantenersi *epipolee* e produrre un certo numero di ife *diaditiche* che forano la cuticola ed inducono numerose infezioni.

7. La resistenza all'azione deleteria delle ife, nei frutti, si ha nello sviluppo maggiore del collenchima.

8. Alla diffusione del fungo concorrono non già le spore difficilmente trasportate a distanza dal vento, ma bensì i *cheimatostromi*.

9. Il *Clasterosporium carpophilum* (Lév.) Ad. rappresenta, come i *Fusicladium*, un gruppo naturale di *Hyphomyceteae* stromatiche che segnano il passaggio alle *Melanconieae*.

10. Il *Clasterosporium carpophilum* (Lév.) Ad. addimostra una tendenza alla specializzazione, cioè ad acquistare speciali proprietà, a seconda delle matrici nelle quali vive.

INDICE BIBLIOGRAFICO

(1) 1843. Léveillé G. H., *Observations sur quelques champignons de la flore des environs de Paris* (" Annal. Sc. Nat. ", XIX, tab. VII, fig. 5).

(2) 1859. Berkeley et Curtis, *North American Fungi*, n. 635.

(3) 1864. Berkeley, *Notiz in Gardeners Chronicle.*

(4) 1876. Passerini, *La nebbia delle Amigdalee, ossia dei frutti a nocciolo* (" Bull. Com. Agr. Parm. "), Parma. — *Mycotheca Universalis*, n. 474.

(5) 1880-82-86. Saccardo P. A., *Michelia II — Sylloge fungorum*, vol. IV.

(6) 1883. Beyerinck, *Onderzoekingen over de besmettelijkheid der gomziekte bij Planten*. Amsterdam.

(7) 1883. Oudemans C. A. d. A., *Zwei neue schädliche Pilze:* Coryneum Beyerinckii *n. sp. und* Discella Ulmi *n. sp.* (" Hedwigia "). — Id., *Contributions à la flore des Pays-Bas*, XVII.

(8) 1884. Thümen, *Im Oesterreichischen Landwirthschaftlichen Wochenblatt*. — Id. *Fungi pomicoli*. Wien, 1897.

(9) 1885. Crawford F. S., *The Apricot disease* (From the " Transactions of the R. Soc. of Sout Australia ").

(10) 1886. Berlese e Voglino, *Additamenta ad vol. I-IV. Sylloge fung.* Padova.

(11) 1887. Vuillemin P., *Sur une maladie des cerisiers et des pruniers en Lorraine* (" Journ. Botan. "). — Id., *L'*Ascospora Beyerincki *et la maladie des cerisiers* (" Journ. Botan. ", 1888).

(12) 1888. Cavara F., *Matériaux de Mycologie lombarde* (" Revue mycol. ").

(13) 1889. Weiss, Clasterosporium amygdalearum *Sacc. der Blattlöcherpilz des Steinobstes* (" Praktische Blät. für Pfl. "). — Id., *Der Blattlöch.* (Clast. amyg.) *auf dem Kirschlorber* (Prunus Lauro-Cerasus). Ebenda II. — Id., *Gegen die Schrotsch. oder Blatt. des Steinob.* Ebenda III, 1900. — Id., Clasterosporium amyg. *auf Süss- und Sauerkirscher* (Ebenda III).

(14) 1890. Kirchner, *Die Krankheiten und Beschadigungen unserer landwirthschaftlichen Kulturplanzen*. — Kirchner und Boltshauser, *Atlas der Krankheiten und Beschödig. unserer land. Kult.*

(15) 1890. Prillieux et Delacroix, " Bull. Soc. Mycolog. de France ".

(16) 1891. Comes O., *Crittogamia agraria*. Napoli.

(17) 1891. Cuboni G., " Boll. Soc. Bot. Ital. " (*Sulla forma ibernante del* Fusicladium dendriticum). — Peglion V., *La ticchiolatura del pero, malattia causata dal* Fusicladium pirinum. Avellino.

(18) 1896. Frank A. B., *Mittheilungen über das* Clasterosporium amyg. (" Arbeit der Biolog. Abteil. für Land- und Forstwissen. am Kais. Gesundheit "). — Id., *Die Krankheiten der Pflanzen*.

(19) 1897. Aderhold R., *Die Süsskirschenkrankheit* (" Prosk. Obstbau. Zeit. "). — Id., *Ueber die Sprüh- und Dürrfleckenkrank. (syn. Schusslöcherkrank) des Steinobstes* (" Landwirth. Jarhbüc. ", 1901). — Id., *Arbeiten der botan. Abtheilung der Versuchsstation am Königlich. Pomol. Inst. zu Proskau* (" Centralbl. für Bakt. und Parassit. ", 1899). — Id., *Unserer Obstbäume Hausarzt* (" Sond. aus der Prosk. Obst. Zeitung "). 1899, Proskau. — Id., *Ueber* Clasterosp. carpophilum *(Lév.) Ad. und Beziehungen desselben zum Gummiflusse des Steinb.* (" Berlin. Arbeit. aus der Biol. Abtheil. "). 1902.

(20) 1897. Prillieux E., *Maladies des plantes agricoles*. Paris. — Id., " Bull. des séances de la Société d'Agriculture ", Nancy, 1887.

(21) 1898. Baldrati I., *Intorno ai danni che può arrecare il* Clasterosporium amygdal. *alle piante di pesco* (" Agricol. ferrarese ").

(22) 1898. Briosi e Cavara, *I funghi parassiti delle piante coltivate ecc.*

(23) 1900. Sorauer P., *Handbuch der Pflanzenkrank.* Berlin. — Id., *Schutz der Obstbäume gegen Krankh.* Stuttgart.

(24) 1900. Farneti R., *Intorno ad una nuova malattia delle albicocche.* Pavia.
(25) 1900. Stewart, Rolfs und Hall, *A fruit disease survey of western New-York in 1900* (" New-York Agric. Exper. Station Geneva Bull. ").
(26) 1902. Gy. de Istvanffi, *Études sur le rot livide de la vigne* (" Annales de l'Instit. central ampelolog. Royal Hongrois "). Budapest.
(27) 1902. Boucher W. A., *The peach; its diseases and suggested remedies,* " Dep. Agr. Rep. New Zealand ".
(28) 1902. Mc. Alpine D., *Fungus Diseases of stone-fruit trees in Australia and their Treatment.* Melbourne-Victoria.
(29) 1903. Iwanoff K. S.. *Phytopathologisches aus Transkaukasien.*
(30) 1904. Marchal E., *Les maladies cryptogamiques des arbres fruitiers* (" Bull. Fédérat. Soc. Hort. Belg. ").
(31) 1904. Trabut L., *Le* Coryneum, *maladie des arbres à noyaux* (" Rev. Hort. Algér. ", vol. VIII).

Relazione sul lavoro del Dott. Beniamino Nicola, col titolo: *Sullo sviluppo, sui canali perforanti e sulle fessure della porzione laterale dell' " ala magna " dell' " os sphenoidale " nella specie umana.*

Le ricerche del Dr. B. Nicola, eseguite nell'Istituto anatomico di Torino, riguardano lo sviluppo, i canali perforanti e le fessure della grande ala dello sfenoide nell'uomo. L'A. ha diviso il suo lavoro in tre parti. Nella prima parte egli espone i risultati delle sue osservazioni fatte su sezioni microscopiche seriate di cranî fetali e su altre pure fatte in cranî fetali, ma preparati a secco o col metodo di Schultze. Con queste ricerche egli dimostra che esiste normalmente un nucleo ossificativo di origine membranosa per la porzione supero-laterale della grande ala. Nella seconda parte l'A. si occupa dei canali perforanti la porzione laterale della stessa grande ala, dopo averli studiati su un ragguardevole numero di cranî di bambino e di adulto. Dà un' accurata descrizione di questi canali, notandone la varia situazione, il modo di decorrere, i rapporti coi solchi dell'arteria meningea media e si sofferma sul loro significato morfologico, interpretandoli come arresti di sviluppo. Nella terza parte, infine, l'A., dopo aver descritto un caso di divisione longitudinale e totale della grande ala dello sfenoide e sei casi di fessure late-

rali della stessa porzione di quell'osso (particolarità che per la prima volta vengono ricordate in crani europei), ne cerca la spiegazione fondandosi specialmente sui fatti della ontogenesi.

Il lavoro nel suo insieme porta un notevole contributo allo studio dell'osteogenesi e della morfologia del cranio umano; contiene una quantità notevole di particolari anatomici, che sono minutamente e chiaramente descritti e nei punti più importanti illustrati con fotografie o con disegni. In esso è raccolta con grande diligenza la bibliografia sui diversi argomenti trattati e vi si discutono con competenza diverse questioni di morfologia. Oltre a ciò la monografia è estesa con ordine ed appare informata ad un rigido indirizzo scientifico. Per queste considerazioni la Commissione non esita dal proporre all'Accademia la stampa del lavoro fra le Memorie.

L. Camerano,
R. Fusari, *relatore.*

L'Accademico Segretario
Lorenzo Camerano.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 7 Gennaio 1906.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Boselli, Vice Presidente dell'Accademia, Rossi, Manno, Brusa, De Sanctis, Ruffini e Renier, Segretario. — Scusa l'assenza il Direttore della Classe Ferrero.

Si approva l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 24 dicembre 1905.

Il Socio Brusa offre a nome dell'autore un volumetto del Prof. Augusto Bosco, *Le correnti migratorie agricole fra i varii Stati e il collocamento degli emigranti*, Roma, Tip. Bertero, 1905, esponendone il contenuto e facendone vivo elogio. Il Socio Brusa rileva l'interesse speciale che ha il lavoro per l'Italia, la cui emigrazione notoriamente diventa sempre più notevole e degna di particolare studio.

L'Accademico Segretario
Rodolfo Renier.

PREMII DI FONDAZIONE GAUTIERI

L'Accademia Reale delle Scienze conferirà nel 1906 un premio di fondazione Gautieri all'opera di Filosofia, inclusa la Storia della Filosofia, che sarà giudicata migliore fra quelle pubblicate negli anni 1903-1905. Il premio sarà di L. 2500, e sarà assegnato ad autore italiano (esclusi i membri nazionali residenti e non residenti dell'Accademia) e per opere scritte in italiano.

Gli autori, che desiderano richiamare sulle loro pubblicazioni l'attenzione dell'Accademia, possono inviarle a questa. Essa però non farà restituzione delle opere ricevute.

Torino — Vincenzo Bona Tipografo di S. M. e Reali Principi.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 14 Gennaio 1906.

PRESIDENZA DEL PROF. CAV. ANDREA NACCARI
SOCIO ANZIANO DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: JADANZA, GUIDI, FUSARI, SPEZIA, MORERA, SEGRE, SOMIGLIANA, GUARESCHI, PARONA, FOÀ, PEANO e CAMERANO Segretario.

Il Presidente D'OVIDIO ed il Socio SALVADORI scusano la loro assenza.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Il Socio FUSARI presenta in omaggio alla Classe la sua commemorazione di Alberto VON KOELLIKER e quattro note di argomento anatomico state eseguite nel suo laboratorio da Assistenti e Settori.

Vengono presentati per l'inserzione negli *Atti* i lavori seguenti:

Ing. Ottavio ZANOTTI BIANCO, *I concetti moderni sulla figura matematica della Terra*, Nota IV; dal Socio JADANZA;

Dott. Rodolfo TORRESE, *Sul potere d'inversione di alcuni pseudoacidi a funzione complessa,* dal Socio GUARESCHI;

Prof. Alessandro AMERIO, *L'emissione del carbone in alcune fiamme,* dal Socio NACCARI;

Prof. Mario PIERI, *Breve aggiunta alla Memoria " Nuovi principii di Geometria projettiva complessa ",* dal Socio PEANO.

LETTURE

I concetti moderni sulla figura matematica della Terra. Appunti per la storia della Geodesia.

Nota Quarta — *La gravità nelle isole e l'ipotesi di Pratt*

dell'Ing. OTTAVIO ZANOTTI BIANCO
Libero Docente di Geodesia nell'Univers. di Torino.

I.

Nella presente nota ci proponiamo di considerare gli sviluppi matematici ed i ragionamenti esposti da Pratt intorno alla sua ipotesi. Noi li esamineremo quali egli li stese nella quarta edizione della sua *Figure of the Earth*, che essendo l'ultimo suo lavoro, si può a buon diritto ritenere come l'espressione e l'esposizione definitiva delle sue idee.

Il primo problema che Pratt si propone si riferisce al caso di un' isola circolare di raggio a insistente ad una base cilindrica, situata in mezzo ad un esteso mare di profondità h. Si supponga che il terreno che costituisce il fondo del mare, intorno al cilindro detto, abbia lungo una profondità t, una densità superante quella della roccia che costituisce il cilindro e l'isola di tanto, quanto la densità dell' acqua marina è inferiore a quella della roccia. Sotto l'isola invece e per una profondità t si abbia materia di densità eguale a quella della roccia onde è costituita l'isola circolare cilindrica. Così tanto entro il perimetro dell'isola, quanto nel mare intorno ad essa, ogni colonna di egual base e di altezza $h+t$, conterrà la stessa quantità di materia. Si tratta di trovare di quanto l'attrazione verticale al centro dell'isola, in quella supposta distribuzione della materia differisca da quella che si verificherebbe se lo spazio occupato dall'acqua del mare fosse occupato dalla roccia, ed il letto del mare avesse la densità di questa. Sia c il raggio terrestre, e la terra si supponga omogenea e di densità doppia ovunque di quella della

roccia. Si suppone poi t, tale in confronto di c, da poter negli sviluppi trascurare $\frac{t^2}{c^2}$, ed ancora che h generalmente non superi un miglio inglese (1609 metri). Per risolvere questo problema egli applica una formola che si è procurata prima (*). La formola generale è la seguente:

$$(1) \qquad \frac{3g}{4c}\left(a + s - \sqrt{a^2 + s^2} + \frac{as}{2c}\right)$$

che ci dà l'attrazione verticale sul punto medio esterno di una calotta sferica di materia di uniforme spessore s. Egli dimostra poi che per un raggio di 76 miglia inglesi (122308 m.) la calotta sferica può considerarsi come un disco piatto: è quindi legittima l'applicazione che di quella formola Pratt fa all'isola cilindrica sopra descritta. Se non vi fosse isola e se il mare fosse ovunque di uniforme profondità, e la densità del suo letto fosse ovunque quella che fu sopra descritta, l'attrazione verticale nel punto occupante la posizione del centro dell'isola, sarebbe il valore della gravità corrispondente alla sua latitudine. Ma siccome in mezzo al mare vi è l'isola circolare sostenuta da un cilindro, così si deve riscontrare un' alterazione nel valore di quell'attrazione. Per avere questa alterazione bisogna prima calcolare l'attrazione verticale di un cilindro di roccia e di altezza $t+h$, sul centro della superficie dell'isola, e da questa attrazione sottrarre: 1° l'attrazione sul punto medesimo di un cilindro di acqua di mare, eguale a 0,363 volte quella della roccia, che si prende per unità e di altezza h; 2° quella di un cilindro di altezza t, la cui superficie limite superiore sia ad una profondità h sotto la stazione e la cui densità sia $1 + \frac{0,637}{t} h$. L'attrazione di quest'ultimo cilindro si ottiene calcolando l'attrazione di un cilindro di altezza $t+h$ e da essa togliendo l'attrazione di un cilindro di altezza h. Nella formola (1), ad s bisogna sostituire l'altezza di

---

(*) Per la dimostrazione di questa formola, vedi Zanotti Bianco Ottavio: *Il Problema Meccanico della Figura della Terra* (Parte Prima, Torino, Bocca, 1880), Capo VIII, § 2. — Non credo che queste trattazioni si trovino in alcun altro libro italiano. Nella quarta edizione della *Figure of the Earth*, i calcoli per questo problema sono inquinati da molti errori di stampa, che furono corretti nel libro sopra citato.

questi varii cilindri. Eseguendo questi calcoli si ha per l'eccesso dell'attrazione verticale effettiva su quella normale; prendendo per unità di misura il miglio inglese, e per il raggio terrestre 3956 miglia:

$$(2) \qquad \frac{g}{8280}\left\{\left(a+h-\sqrt{a^2+h^2}\right)\frac{h+t}{t}-\left\{a-\frac{a^2}{2(t+h)}\right\}\frac{h}{t}\right\}.$$

Se si fa $a=5$ miglia $=8046{,}55$ metri; $h=1$ miglio $=1609{,}31$ metri; $t=80$ miglia $=128745$ metri, si ha per quell'eccesso di gravità $0{,}0001028\,g$, se l'unità è il miglio inglese, e trascurando le quarte potenze di $a|t$ e di $a|(t+h)$. La espressione (2) ci dà l'eccesso dell'attrazione verticale al centro dell'isola, su quella che si avrebbe se la superficie e la crosta fossero intieramente di roccia, in conseguenza della differente distribuzione di materia. La ragione di ciò, nell'ipotesi introdotta nel problema è ovvia. La materia attorno all'isola, che per supposizione fu trasportata dal mare al suolo sottostante, così da lasciare intorno solo acqua marina, è in una nuova posizione, nella quale l'azione sua nel produrre attrazione verticale è maggiore di prima.

Dopo questa soluzione, Pratt scrive quanto segue: " Questo esempio fu trattato al fine di chiarire come una teoria concernente la costituzione della crosta terrestre, che si esporrà in altra parte di questo libro, renda ragione del fatto che sulla piccola isola Minicoy, a 250 miglia (402,33 km.) ad Ovest del capo Comorin, la gravità sia maggiore, benchè in alto mare, che al capo Comorin stesso nel rapporto di 1,0000894. L'isola di Minicoy varia in diametro da 4 a 6 miglia (6437 m. — 9656 m.). Al di là di 3 miglia (4828 m.) dalla sponda la profondità supera $^1/_3$ di miglia (536 m.), e poi il fondo del mare s'inclina notevolmente di più. Se noi teniamo conto di ciò, ed arrotondiamo gli spigoli vivi in cima ed al basso della nostra isola cilindrica, noi possiamo ritenere che le misure addotte rappresentino abbastanza bene Minicoy ".

L'isola di Minicoy si trova a 8°17'1'' di latitudine Nord, e a 73°2' di longitudine E. da Greenwich, la gravità vi fu determinata con due pendoli dal capitano Basevi nel 1869 (Volume *Pendulum* del *Trigonometrical Survey of India*, Synopsis of pendulum observations from 1672 to 1874, p. 80).

La stazione denominata Capo Comorin è situata a circa 850 metri dal villaggio di Punnæ, ed a 637 m. dal mare ed a circa 12,87 km. a N. E. dal Capo Comorin: le sue coordinate geografiche sono latitudine Nord 8°9′28″, long. E. da Greenwich 77°40′3″ (vedi luogo or ora citato). Nel volume or ora citato del pendolo, la gravità è data a mezzo delle vibrazioni compiute da un pendolo invariabile in un giorno, noi qui seguendo l'uso moderno, daremo in metri l'accelerazione della gravità. Trascriviamo i dati dal grande rapporto di Helmert sulla gravità (1901). Le longitudini date da Helmert a pag. 328 di quel suo rapporto, differiscono da quelle sopra riferite di —2′24″. giacchè le nuove determinazioni delle longitudini di *Madras* e *Colaba* dimostrarono necessaria una simile correzione per tutto il sistema indiano (Vedi il citato rapporto, p. 319). I simboli hanno il significato loro attribuito da Helmert e da noi riprodotto:

Minicoy $B = 8°17',0,\ \lambda = 73°0',0,\ H = 2^m;\ g = 978^{cm},191,$

$$g_0 = g\left(1 + \frac{2H}{R}\right) = 978^{cm},192$$

$$g_0'' = 978^{cm},191,\quad \gamma_0 = 978^{cm},108,\quad g_0'' - \gamma_0 = +0,083,$$

$$g_0 - \gamma_0 = +0,084$$

Punnæ, Capo Comorin $B = 8°9',5 \quad \lambda = 77°37',7, \quad H = 15^m;$

$$g = 978^{cm},095;\ g_0 = 978^{cm},100$$

$$g_0'' = 978^{cm},098,\ \gamma_0 = 978,105,\ g_0'' - \gamma_0 = -0,007;\ g_0 - \gamma_0 = -0,005.$$

(Rapporto di Helmert, p. 328). Le γ_0 sono state calcolate colla formola:

$$\gamma_0 = 978^{cm},000\,(1 + 0,005310\,\mathrm{sen}^2 B)\ (*).$$

(*) È curioso il notare come la verità scientifica vada anche fra gli scienziati diffondendosi lentamente. E valga il vero la formola

$$\gamma_0 = 978^{cm},000(1 + 0,005310\,\mathrm{sen}^2\varphi), \quad \text{ossia} \quad \gamma_0 = 980^{cm},597(1 - 0,002648\cos 2\varphi)$$

fu data da Helmert nel 1884, è, salvo le osservazioni fatte nel testo, ritenuta dai geodeti, specie tedeschi, inglesi ed italiani, come la più esatta; orbene nell'edizione tedesca (la terza) dell'astronomia popolare di Newcomb, curata nientemeno che da Vogel, è data la formola $\gamma_0 = 9^m,78100 + 0^m,0503\,\mathrm{sen}^2\varphi$, mentre da quella di Helmert si ricava $\gamma_0 = 9,78 + 0,05193\,\mathrm{sen}^2\varphi$. Ed ancora, per restare sempre fra gli scrittori in lingua tedesca, nelle *Sechstellige lo-*

Correggendo le γ_0 di $+ 0^{cm},020$, secondo si avvertì in principio della Nota Terza, si ha:

---

garitmisch-trigonometrische Tafeln di Stampfer-Bolezal. Vienna, 1904, a p. 312 è data la formola $\gamma_0 = 9,806(1 - 0,0025935 \cos 2\varphi)$. Non parliamo poi dei trattati di fisica, in tutte le lingue, dove quel povero γ_0 subisce modificazioni d'ogni maniera. Sarebbe pur cosa eccellente che l'Associazione Geodetica Internazionale e l'Ufficio Centrale di Pesi e Misure potessero e volessero occuparsi ad apportare un po' di accordo, o meglio l'unificazione intorno a questa importantissima costante fisica. A p. 15 del *Trattato di Geodesia Teoretica* del Prof. Paolo Pizzetti (Bologna, Zanichelli, 1905) sono per errore di stampa date come formole di Helmert le seguenti (φ è la latitudine astronomica):

$$g = 980,632 \{1 + 0,005302 \,\text{sen}^2\varphi\} \qquad \text{pag. 15 e}$$
$$g = 980,632 \{1 + 0,005302 \,\text{sen}^2\varphi - 0,000007 \,\text{sen}^4\varphi\} \quad \text{pag. 16}$$

che devono essere corrette come segue:

$$g = 978,046 \{1 + 0,005302 \,\text{sen}^2\varphi\},$$
$$g = 978,046 \{1 + 0,005302 \,\text{sen}^2\varphi - 0,000007 \,\text{sen}^2 2\varphi\}.$$

Quest'ultima formola è scritta da Helmert anche così:

$$g = 980,632 \{1 - 0,002644 \cos 2\varphi + 0,000007 \cos^2 2\varphi\},$$

e trascurando il $\cos^2 2\varphi$:

$$g = 980,632 \{1 - 0,002644 \cos 2\varphi\} = 980,632 - 2,593 \cos 2\varphi.$$

Gray, a p. 510 del Vol. I del suo *A Treatise on Physics* (Londra, Churchill, 1901) ha:

$$g = 980,6056 - 2,572 \cos 2\varphi.$$

Egli avverte che Everett dà per il coefficiente del secondo termine 2,5028, ma che fu dedotto usando un valore *più basso*, 1/282, dello schiacciamento. Non ho sott'occhio l'edizione del libro di Everett, *Physical Constanst*, che Gray citava, ma mi pare difficile che Everett abbia usato un valore dello schiacciamento così alto come 1/282, e ritengo che Gray, invece di *più basso*, volesse scrivere più alto.

Everett a pag. 79 dell'edizione 1902 del suo libro *Illustrations of the C. G. S. System of Units with Tables of Physical Constants* (Londra, Macmillan, 1902), scrive la formola (1901) di Helmert così (coi simboli di Helmert):

$$\gamma_0 = 980,617(1 - 0,002644 \cos 2\varphi + 0,000007 \cos^2 2\varphi).$$

Egli ha così per gravità a 45° 980,617 = 980,632 − 0,015, cioè quella di Helmert, colla correzione indicata da Helmert stesso, che però non fu più apportata alle determinazioni posteriori. Vedi la *Nota terza*. Everett designa la formola (1901) come la migliore proposta fino ad oggi, e noi crediamo di poter aggiungere che rimarrà tale per molto tempo. Sarebbe cosa veramente utile che tutte le osservazioni fossero ricalcolate con essa, ad evitare confusioni e malintesi.

Minicoy $\gamma_0 = 978^{cm},108 + 0,020 = 978,128;$

$g_0'' - \gamma_0 = 978,191 - 978,128 = + 0,063$

$g_0 - \gamma_0 = 978,192 - 978,128 = + 0,064$

Punnæ $\gamma_0 = 978,105 + 0,020 = 978,125;$

$g_0'' - \gamma_0 = 978,098 - 978,125 = - 0,027$

$g_0 - \gamma_0 = 978,100 - 978,125 = - 0,025.$

Ora, come già si avvertì nella Nota Terza, diminuiremo ancora di $0^{cm},015$ le deviazioni della gravità, ed avremo così, applicando cioè le γ_0 che si ottengono dalle (2^{bis}) della Nota Terza:

Minicoy $g_0'' - \gamma_0 = + 0,048$ $g_0 - \gamma_0 = + 0,049$ $\gamma_0 = 978^{cm},143$
Punnæ $g_0'' - \gamma_0 = - 0,042$ $g_0 - \gamma_0 = - 0,040$ $\gamma_0 = 978^{cm},140.$

Calcolando poi colle tabelle date da Helmert e Borass a pag. 134-35 delle *Verhandlungen* di Kopenhagen, si ha:

Minicoy $\gamma_0 = 978,153$ $g_0'' - \gamma_0 = + 0,038$ $g_0 - \gamma_0 = + 0,039$
Punnæ $\gamma_0 = 978,150$ $g_0'' - \gamma_0 = - 0,052$ $g_0 - \gamma_0 = - 0,050.$

La differenza fra le γ_0 ottenute aumentando di 0,035 quelle calcolate colla formola del 1884, e le γ_0 computate colla formola del 1901 è, come si vede, di 1 decimo di millimetro, quantità così piccola, come avverte Helmert, che rientra nei limiti degli errori accidentali. Si avverta che la formola del 1884 aumentata di 0,035, per il polo da 983, 228 e quella del 1901 983, 2316, ossia si hanno due valori coincidenti, mentre per l'equatore si ha 978,035 e 978,046 rispettivamente.

Ora calcoliamo γ_0 colla formola di Iwanow, che è:

$$\gamma_0 = 978,075 (1 + 0,005287 \operatorname{sen}^2 B - 0,000018 \operatorname{sen}^2 2B),$$

avremo:

Minicoy $\gamma_0 = 978,181$ $g_0'' - \gamma_0 = 978,191 - 978,181 = + 0,010$

$g_0 - \gamma_0 = 978,192 - 978,181 = + 0,011$

Comorin (Punnæ) $\gamma_0 = 978,173$ $g_0'' - \gamma_0 = 978,098 - 978,173 = - 0,075$

$g_0 - \gamma_0 = 978,100 - 978,173 = - 0,073.$

Rammentando che Iwanow nel suo computo tenne conto anche delle isole oceaniche (scartate invece da Helmert), si vede che ciò ha per effetto di diminuire l'anomalia nelle isole, e di accrescerla sulle coste, come Helmert ha ripetutamente notato. Helmert spiega la differenza fra la sua formola e quella di Iwanow, come già riferimmo a pag. 16 della nota seconda, e scrive ancora, nel luogo citato, quanto segue:

" Un calcolo approssimativo ci fece vedere che all'avere scartato le isole, corrisponde un aumento del coefficiente di $\text{sen}^2\varphi$ sul valore 0,005300, ed una pure approssimata diminuzione del termine principale a 978,060.

" Le differenze dalla formola ((7) = 1901) che ancora sussistono, possono in parte ripetere la loro origine da ciò che i valori costieri g condensati, mostrano ancora sempre un eccesso sistematico sui valori continentali. Inoltre nel mio calcolo io potei disporre di materiale di recente raccolto e di notevole influsso „.

II.

A p. 184 del volume sul pendolo dell'India, si ha il paragrafo 3 intitolato: *Attraction in defect at an Island Station on Account of the Sea* (Attrazione in difetto sopra una stazione isolare a cagione del mare). Questo titolo sembra contraddire ai fatti; ma il testo del paragrafo chiarisce l'equivoco. Eccone la traduzione dei primi tre alinea.

" Scopo di questa sezione è di trovare il massimo *difetto* che le circostanze di terra e mare, quali le conosciamo, si possono ritenere capaci di produrre.

" La configurazione che corrisponderà meglio a questo desiderato sarà un guscio di acqua marina di profondità massima, con un' isola conica di minimo angolo verticale, insistente sul fondo del mare, col vertice alla superficie.

" Il difetto d'attrazione sarà quindi la differenza fra l'attrazione di un guscio completo, avente la densità media della Terra da una parte, e quella di un egual guscio di acqua marina più il cono, avente questo per densità la differenza fra la densità media della Terra e quella dell'acqua marina, dall'altra;

o più brevemente di un guscio meno un cono, entrambi di densità, terra-*meno*-acqua „.

Questo problema non ha alcuna importanza pratica, e di più suppone la crosta terrestre e l'isola aventi una densità eguale a quella media della Terra, il che è affatto contrario ai fatti: quindi sono senza alcun interesse le applicazioni numeriche che se ne fanno, benchè la lettera σ, adoperata a designare la densità, sia quella che serve nel volume a designare la densità della roccia, che poi come tale si traduce in numeri: e si assume per densità dell'acqua marina l'unità. Questo problema serve in sostanza a confrontare l' attrazione dell' isola circondata dal mare, con quella che si avrebbe se il mare fosse intieramente di roccia, e naturalmente si trova un difetto, che dal punto di vista geofisico non ha importanza alcuna.

Clarke a p. 350 della sua *Geodesy*, accenna al fatto che a Minicoy vi è un eccesso di gravità e chiude il suo classico libro col seguente paragrafo:

“ Sembrerebbe quindi che queste osservazioni pendolari hanno posto fuori di questione il fatto — già previamente indicato dalle osservazioni astronomiche di latitudine in India, che cioè esiste qualche causa sconosciuta, o distribuzione di materia, che contrasta l'attrazione delle masse montagnose visibili. Se si riguardasse come troppo ardito l'opinare che sotto le grandi masse montuose esistano vaste cavità, allora la spiegazione più probabile deve essere cercata nell'ipotesi dell'arcidiacono Pratt; — questo modo di vedere l'argomento è appoggiato dal generale Walker, nella sua prefazione al volume sul pendolo „. Vedasi la nostra Nota Terza.

Helmert a p. 311 del volume II del suo grande trattato, considera l'attrazione in un'isola, quale realmente si presenta, costituita di roccia, conica, circondata dal mare, senza fare alcuna ipotesi sulla costituzione della crosta terrestre; e scrive: “ La presenza dell'isola eleva alquanto (però non molto) il livello del mare nei suoi dintorni. Più ragguardevole è l'aumento che l'attrazione dell'isola produce sull'accelerazione della gravità „. Credo utile ai presenti appunti storici il riprodurre la trattazione data da Helmert di questo problema, la quale mi pare esauriente. L'isola sia un cono circolare insistente ad un fondo orizzontale di mare, e col vertice alla superficie libera dell'acqua.

Siano a, h_0, ν, il raggio della base, h_0 l'altezza del cono insulare, ν l'angolo delle sue generatrici coll'orizzontale passante per il vertice, θ la densità della roccia che forma l'isola. Si avverta che ciò che perturba la figura del mare e la gravità quali sarebbero se l'isola non esistesse, è l'attrazione dell'eccesso di materia della roccia rispetto all'acqua marina. Helmert suppone eguale all'unità la densità dell'acqua marina, e chiamando θ_m la densità media terrestre, pone $\theta = \frac{1}{2}\theta_m = (2,8)$. Il potenziale dell'attrazione della massa isolare sul suo vertice P è:

$$(a) \qquad \pi k^2(\theta - 1)h_0 \left\{ \sqrt{a^2 + h_0^2} - h_0 \right\}$$

nella quale k^2 è la costante dell'attrazione: l'attrazione verticale è:

$$(b) \qquad 2\pi k^2(\theta - 1)h_0(1 - \operatorname{sen}\nu).$$

All'espressione (a) corrisponde un elevamento della superficie del mare di

$$(b') \qquad \frac{3}{4}\,\frac{(\theta-1)h_0}{R}\left\{ \sqrt{a^2 + h_0^2} - h_0 \right\}$$

che si ottiene dividendo la (a) per la gravità normale G, per la quale, supponendo la terra sferica e di raggio R, si ha il valore $\frac{4}{3}\pi k^2\theta_m R$. Poichè per grandi profondità generalmente $a = h_0 \cot\nu$ e notevolmente maggiore di h_0, così si ha, con approssimazione sufficiente nella massima parte dei casi per l'elevazione della superficie del mare in P:

$$(c) \qquad \frac{ah_0}{4R}, \quad \text{ovvero} \quad \frac{h_0^2 \cot\nu}{4R}.$$

Se si fa $h_0 = 3500^m$ e $\cot\nu = 30$, l'elevamento della superficie del mare in P è 14^m. Questo è così insignificante, che l'azione secondaria derivante dall'innalzamento del corrispondente strato di massa, può venir lasciato fuori di considerazione.

La formola (*b*) ci dà per la perturbazione della gravità:

$$(d) \qquad + G \, . \, 3 \frac{(\theta - 1)}{2\theta_m} \frac{h_0}{R} (1 - \operatorname{sen} \nu)$$

che nelle ipotesi fatte e con un debole pendio sui fianchi dell'isola dà:

$$(d') \qquad + G \, . \, \frac{2h_0}{R} .$$

In conseguenca dell'elevazione della superficie del mare, si verifica per il livello della superficie perturbata, ancora una piccola diminuzione a questo aumento, che si calcola secondo la regola per la variazione della gravità normale per elevazioni fuori della crosta terrestre. Dopo ciò dalla (*b'*) e (*d*), quando nella (*b'*) in luogo di a si scriva $h_0 \cot \nu$, si ha per l'alterazione della gravità alla superficie del mare:

$$(e) \qquad + G \, . \, \frac{3}{2} \frac{\theta - 1}{\theta_m} \frac{h_0}{R} \left(1 - \frac{h_0 \cos \nu}{R}\right) (1 - \operatorname{sen} \nu) ;$$

od approssimativamente, nel caso di fianchi dell'isola poco ripidi e ponendo $\theta = \frac{1}{2} \theta_m = 2{,}8$:

$$(f) \qquad + G \, . \, \frac{h_0}{2R} \left(1 - \frac{h_0 \cot \nu}{R}\right).$$

D'altronde la diminuzione della perturbazione della gravità a cagione dell'innalzamento della superficie del mare, per piccole isole, sarà sempre debole; poichè, come mostrano le carte delle profondità degli oceani, il raggio della superficie di base $a = h_0 \cot \nu$, in confronto ad R è sempre insignificante: così che per l'estimo dell'influenza dell'isola sulla gravità basta l'espressione (*d'*).

Helmert calcola poi il seguente esempio numerico: $h_0 = 3500^m$; $\cot \nu = 30$ ed ottiene per la perturbazione della gravità, colla formola (*d'*) 0,000275 C, colla (*f*) 0,000270 C; e più esattamente colla (*e*) 0,000251 C.

Nel 1881 l'inglese Rev. Osmond Fisher pubblicava un volume intitolato *Physics of the Earth's Crust*, che ebbe una se-

conda edizione nel 1889 (Macmillan and Co., London, 1889). Questo libro è un trattato si può dire di geologia matematica: esso è quasi sconosciuto in Italia: in esso come di ragione vi sono discusse le ipotesi di Airy e Pratt sulla costituzione della crosta terrestre, e di questa discussione discorreremo a suo tempo. Qui è necessario fermarci al cap. XVIII (p. 249 della 2ª edizione), ove si discorre della gravità sulle isole e della trattazione di Pratt più sopra riferita. Traduciamo qui quanto Fisher scrive, chioseremo poi:

" È noto da molto tempo che la gravità nelle stazioni insulari del mare aperto è in eccesso sul suo valore normale. Nel precedente capitolo si è insegnato che se la Terra fosse sferica, il valore della gravità al livello del mare sarebbe ovunque il medesimo (*). E se teniamo conto dello schiacciamento che è

(*) Enunciata così questa proposizione suona un po' male, poichè se la Terra fosse sferica, ferma, omogenea o composta di strati omogenei, la proposizione è vecchia ed elementare e non sarebbe stato necessario che l'autore si fermasse a provarla. Ma giova rifarci al capitolo citato ed allora la cosa apparirà più chiara. A p. 234, Fisher definisce la Terra come segue:

" S'immagini che la Terra sia una sfera (vale a dire lasciamo da banda gli effetti della rotazione), e che la sua superficie sia costituita di terra ed acqua, tutto al livello medio.

" Se si considera la Terra come sferica, allora alla sua superficie la gravità sarà la stessa ovunque, comunque sia distribuita la materia che la compone, poichè il Prof. Stokes ha dimostrato che se la Terra è uno sferoide d'equilibrio, di piccolo schiacciamento, allora comunque possa essere distribuita la materia, vale il teorema di Clairaut, e cioè:

$$g = \frac{E}{a^2}\left(1 + \left(\frac{5}{2}m - \epsilon\right)\operatorname{sen}^2 l\right) ".$$

(Nella quale i simboli hanno il significato loro attribuito nella Nota Prima).

" Ma se si considera la Terra come una sfera, non vi è forza centrifuga nè schiacciamento, ed allora la precedente espressione ci dà $g = \frac{E}{a^2}$; ossia la gravità è costante sopra tutta la superficie ".

Sarebbe stato più chiaro se Fisher avesse detto di supporre la Terra sferica e ferma, e la sua densità distribuita in modo che i centri di gravità della massa e del volume coincidessero, condizione questa risultante dalla dimostrazione di Stokes (*Mathematical Papers*, vol. II, p. 146). Se non si dichiarano queste condizioni, l'espressione di Fisher può dar luogo a grossolani equivoci. È poi molto discutibile l'applicazione che Fisher fa della invocata dimostrazione di Stokes, giacchè questa richiede che " si

dovuto alla rotazione, basterà applicare a questo valore costante la correzione per la latitudine, secondo la legge di Clairaut, per

---

ammetta, come dato di osservazione, che la superficie della Terra sia superficie di equilibrio e possa, con sufficiente precisione, ritenersi ellissoidica di rivoluzione, coll'asse coincidente con quello della rotazione diurna „ (vedasi Pizzetti: *Sulla espressione della gravità alla superficie del geoide supposto ellissoidico*, " Rendiconti dell'Accademia dei Lincei „, 1894). Ma su questa proposizione di Fisher speriamo di ritornare con maggior agio altra volta. A pag. 24 del suo libro Fisher si serve di un'espressione che può dar luogo ad equivoco scrivendo quanto segue: " Benchè grossolanamente parlando la Terra possa chiamarsi sferica, le misure di archi e di meridiano in varie parti del mondo hanno condotto alla scoperta che la figura geometrica, che più esattamente la rappresenta, è uno sferoide di rivoluzione schiacciato, il cui *asse equatoriale* è $a = 20926202$ piedi, l'*asse polare* $c = 20854895$ piedi (Clarke, *Geodesy*, p. 319, Oxford, 1880). La loro differenza è quindi $a - c = 71307$ piedi. Il rapporto $\frac{2(a-c)}{a+c}$ è chiamato schiacciamento *(ellipticity)* ed il suo valore può assumersi di $\frac{1}{292}$ „. Fisher scrive *asse*, invece di *semiasse*, due volte. Inoltre definisce, come fanno talvolta gl'Inglesi (Vedi Everett, *Illustration of the C. G. S. System of Units*, London, 1902) l'*ellipticity* come $\left(2\frac{a-c}{a+c}\right)$, mentre essa è $\epsilon = \frac{a-c}{a}$, e come tale figura nel teorema di Clairaut. La quantità $\frac{2(a-c)}{a+c}$ è quella che oggi, dopo Bessel, si denota con $2n$. Ma forse Fisher è stato indotto a servirsi di quelle espressioni dalle seguenti linee che si leggono alla pagina della *Geodesy* di Clarke da lui citata: " Moreover for the number representing what is called the ellipticity, since it involves 8.44 v., $\frac{2(a-c)}{a+c} = \frac{1}{292,96 \pm 1,07}$ „. È noto che si ha:

$$2n = \frac{2\epsilon}{2 -} = \frac{2(a-c)}{a+c}.$$

Helmert nel capitolo IV del volume secondo del suo grande trattato, studia le deformazioni prodotte nelle superficie di livello esterne da un eccesso od un difetto di massa di figura sferica, sottostante al terreno. Ivi egli scrive: " Noi sostituiamo la terra con una sfera di raggio R e densità media θ_m, la cui attrazione agisce così come se la sua massa $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \theta_m$ forse raccolta nel centro c, centro di gravità „. Fisher sarebbe stato più chiaro e corretto se nella sua trattazione avesse tenuto un linguaggio analogo a quello di Helmert: ma è a notarsi che il libro di Helmert è rimasto completamente sconosciuto al Rev. Fisher, giacchè nella seconda edizione (1889) del suo libro, cioè cinque anni dopo la pubblicazione di esso, non lo menziona neppure!

ottenere il vero valore in ogni luogo (*). E non havvi alcun dubbio se fosse possibile l'eseguire delle osservazioni pendolari a bordo delle navi, si constaterebbe che ciò appunto avviene (**). Ma poichè ciò non è fattibile, le osservazioni pendolari per stazioni oceaniche furono istituite sopra isole, ed accadde di trovare quasi invariabilmente, che la gravità alle stazioni isolari è maggiore di quanto si credeva. L'arcidiacono Pratt come questo eccesso sia necessariamente prodotto dall'attrazione della roccia, onde è composta l'isola stessa: poichè se l'isola non esistesse il suo luogo sarebbe occupato dall'acqua, e la gravità avrebbe quindi l'esatto valore della latitudine del luogo. Ma l'eccesso della densità della roccia sopra quello dell'acqua, e la vicinanza al pendolo, accrescono sensibilmente la gravità alla superficie dell'isola „. Qui il nostro autore si scorda di accennare all'ipotesi proposta da Pratt sulla costituzione della crosta terrestre sotto l'isola ed intorno ad essa, e che è quella che oggi dicesi *isostatica*, e da noi esposta in quanto precede, a seconda dei paragrafi di Pratt pure citati da Fisher, e che serve di base ai calcoli istituiti in quei paragrafi. Nella trattazione di Helmert.

(*) Qui pure Fisher avrebbe dovuto essere più completo, avvertendo che se il luogo d'osservazione non era al livello del mare bisognava prima ridurvelo.

(**) Osservazioni pendolari a bordo delle navi non si possono eseguire neppure oggi; ma, come già avvertimmo in nota a pag. 8 della nostra *Nota Prima* (*Atti*, p. 694) si hanno processi fisici per misurare la gravità a bordo di una nave. Le determinazioni eseguite fino ad oggi dal D[r] Hecker, dimostrano ampiamente che in alto mare la gravità è press'a poco normale, e s'accorda assai da vicino coi valori forniti dalla formola data da Helmert nel 1901, per il calcolo della gravità normale γ_0 corrispondente ad ogni latitudine: ben s'apponeva quindi il Rev. Fisher nella sua congettura (Vedasi Hecker: *Bestimmung der Schwerkraft auf dem Atlantischen Ozean*, Berlino, 1903, nonchè Pizzetti: *Note riassuntive intorno ai Rendiconti della XIV*[a] *Conferenza dell'Associazione Geodetica Internazionale*, " Rivista di Topografia e Catasto „, vol. XVII, Torino, 1905). La gravità nelle isole oceaniche essendo maggiore della normale, mentre quella dell'Atlantico aperto è press'a poco normale, ne risulta che non si può più oggi accettare la seguente proposizione del D[r] De Marchi: " che la misura della gravità nelle isole rappresenti con sufficiente approssimazione la gravità in aperto oceano, che sui continenti vi ha in generale *difetto*, sugli oceani *eccesso* di gravità „ (*Trattato di Geografia Fisica*, Milano, Vallardi, 1901, p. 45), perchè contraria ai risultati delle più accurate e moderne osservazioni.

svolta poc' anzi, Fisher avrebbe trovato la risoluzione del problema dell'isola quale egli lo intende ed enuncia.

L'ordine cronologico avrebbe richiesto che prima di occuparci dei lavori dell' inglese Osmond Fisher, avessimo tenuto discorso di quelli del tedesco Filippo Fischer, che pure si occupò nel 1868 della gravità sulle isole e delle ipotesi di Airy e Pratt: ma la concatenazione delle idee avendoci condotto prima ad Osmond Fisher, crediamo utile il finire di dire, quanto occorre, intorno ai lavori di esso, riserbando al seguito di questi studii, l'esame di quelli di Filippo Fischer. Le critiche di Osmond Fisher circa l'ipotesi di Pratt, si riferiscono al complesso delle sue idee, e per averlo qui pure, dobbiamo tradurre altri brani della sua opera e continuare l'esame delle questioni da lui trattate a preparazione e sostegno della sua teoria.

III.

Nelle *Philosophical Transactions* per il 1855 (p. 85) e 1859 (p. 770) Pratt svolse un procedimento " per trovare „, come egli scrive, " l'effetto sul filo a piombo di qualsiasi regione montagnosa o cava (come nel caso dell'oceano), finchè l'angolo sotteso alla stazione da una verticale qualunque è tale da permettere di trascurare il suo quadrato „. Questo metodo fu da noi esposto nel nostro *Trattato sulla Figura della Terra* (vol. I, ultime pagine). Quindi egli scrive (*Figure of the Earth*, p. 82):

" Nelle *Philosophical Transactions* pel 1855 (p. 85) e 1859 (p. 770) l'autore applicò questi principii a calcolare l'effetto degli Himalayas e della regione montuosa al di là di essi sul filo a piombo nell'India, ed ha trovato che la deviazione meridiana prodotta sulla stazione Nord del grande arco di meridiano (lat. 29°30′48″, e long. 77°42′) è circa 28″, per quanto si son potuti accertare i dati concernenti il contorno della massa; e che l'ampiezza astronomica fra quella e la successiva stazione principale (lat. 24°7′11″) e fra quella e la terza (lat. 18°3′15″) sono diminuite delle quantità 15″,9 e 5″,3. Egli mostrò anche che la deviazione meridiana in punti fra la prima e la terza stazione varia circa inversamente come la distanza da un punto di latitudine 33°30′. Egli poi calcola anche l'effetto della defi-

cienza di materia nell'oceano al sud dell'Hindostan. Ora ecco il paragrafo riassuntivo delle precedenti sue considerazioni.

" § 93. Al § 89 si fece vedere che l'attrazione orizzontale cagionata dai monti Himalaya è relativamente grande. Può darsi che la materia eccedente nelle regioni montuose, essendo stata innalzata dal di sotto, o ad ogni modo, essendo stata lasciata sospesa, quando la terra diminuì di volume, sotto la montagna esista un difetto di materia che in certe circostanze avrebbe la tendenza a contrastare alla loro azione sul filo a piombo. Questa idea fu suggerita dal sig. Airy, in uno scritto nelle *Philosophical Transactions* pel 1855, sull'ipotesi che la deficienza sia immediatamente sottostante alle montagne vicino alla loro massa. Nella supposizione che le montagne possano aver tratto la loro massa dalle regioni sottostanti, per una grande profondità, per un'estesa e piccola espansione della materia in quelle regioni inferiori, oppure che quella provenga da ciò che quelle regioni non si sono contratte tanto quanto le circostanti, l'autore (Pratt) ha calcolato l'effetto sul filo a piombo nelle *Philosophical Transactions* per il 1858-9. Ciò ha messo in luce il fatto che una debole deviazione nella densità da quella richiesta per l'equilibrio dei fluidi (*), se prevalente per tratti estesi, può avere un sensibile effetto sul filo di piombo. Ciò fu di recente verificato, come già si avvertì (art. 63) dalle osservazioni e dai calcoli del prof. Schweizer, il quale ha dimostrato che presso Mosca, ed entro un àmbito di 16 miglia (km. 25,8) il filo a piombo varia di 16″ senza una causa apparente, ed in guisa tale da rivelare una deficienza sottostante di materia. Vedasi *Monthly Notices of Ast. Soc.* Ap. 1862 (**). La proposizione seguente mostra, in modo generale, quanto tenue debba essere un tale eccesso o difetto, ove però sia molto esteso per produrre sul filo a piombo un effetto sensibile „. Nei suoi calcoli Pratt considera eccessi o difetti di densità di $^1/_{100}$ e ne calcola l'effetto considerando un volume semicubico. Quest'effetto è riassunto nella tavola seguente:

(*) Oggi detto *isostatico*. O. Z. B.

(**) Zanotti Bianco Ottavio, *Il Problema Meccanico della Figura della Terra*, vol. I, p. 249.

Deviazioni cagionate da un difetto od un eccesso di materia dominante in un volume semicubico di 200 miglia in ogni lato orizzontale e profondo 100 miglia, la densità dell'eccesso o del difetto essendo 1/100mo della densità della Terra al centro dello spazio semicubico, quando questo centro è profondo:	Distanza del punto medio dello spazio semicubico dalla stazione, misurata lungo la corda in miglia			
	400	600	800	1000
50 miglia	1",77	0",81	0",46	0",29
150 „	1 ,56	0 ,76	0 ,45	0 ,30
250 „	1 ,28	0 ,73	0 ,43	0 ,30
950 „	0 ,10	0 ,43	0 ,14	0 ,43

A questa dopo brevi considerazioni sulla possibilità di adottare un eccesso o difetto di materia diverso da $^1/_{100}$ tien dietro il brano che abbiamo tradotto nella Nota Terza, onde dare un' idea generale dei lavori di Pratt, che veniamo ora particolarmente esaminando per la parte di essi che concerne la costituzione della crosta terrestre.

Nel capitolo III della *Figure of the Earth*, che costituisce la parte seconda del trattato che stiamo studiando, Pratt si occupa a determinare i semiassi dell'ellisse meridiana, che più da vicino corrisponde e rappresenta le osservazioni e le misure, con un metodo che differisce da quello di Bessel, per dirla coll'autore, " nelle differenti posizioni che i metodi assegnano agli archi geodetici riferiti all'ellisse media „. Ma di ciò non è scopo nostro il discorrere ora. Indi egli insegna altri metodi per i calcoli dei semiassi. Quindi adottando per ellisse meridiana quella data dall'*Ordnance Survey*, che egli riguarda come coincidente colla sua, calcola le deviazioni locali del filo a piombo per l'arco anglo-gallico, per quello russo e per quello indiano, che registra in una tavola, alla quale fa seguire questo periodo: " Tutte queste (deviazioni del filo a piombo) risultano ragguardevolmente piccole, nessuna di esse è paragonabile colle larghe deviazioni prodotte dagli Himalaya e dall'Oceano nell'India „.

Indi viene una serie di paragrafi nei quali Pratt riassume le sue idee sulla costituzione della crosta terrestre, quali gli

sono dettate dai suoi calcoli anteriori. Colla traduzione di essi porremo fine a questa Nota Quarta, di appunti per la storia della geodesia.

" Un' ipotesi che sembra suggerita dai calcoli precedenti è questa. Che cioè, supponendo che la Terra sia stata una volta in uno stato fluido, quando essa si solidificò, si contrasse inegualmente, lasciando montagne, là ove la contrazione fu minore, e letti di oceani, ove la contrazione fu maggiore. Cercheremo ora di mostrare questo coi dati.

" La prima cosa da notarsi nei risultati dati nell'ultimo paragrafo, è l'ammontare piccolissimo delle attrazioni risultanti alle stazioni dell'arco indiano: mentre si è pur dimostrato che gli effetti dell'oceano e delle montagne sono molto grandi. Ciò prova che l'effetto delle variazioni di densità della crosta deve essere molto grande, per produrre questa quasi intiera compensazione. In realtà la densità della crosta sotto le montagne deve essere minore di quella sottostante alle pianure, ed ancora minore di quella sottostante al letto dell'oceano. Se la solidificazione dallo stato fluido cominciò dalla superficie, l'ammontare della contrazione nelle parti solide sotto la superficie della regione montagnosa fu minore che nelle parti sotto il letto del mare. Infatti, è questa diseguale contrazione che sembra aver cagionato le cavità nella superficie esterna, che divennero poi i bacini nei quali si versarono le acque a formare gli oceani. Col raccogliersi delle acque nelle cavità così create, la pressione sul letto dell'oceano veniva accresciuta, e la crosta finchè era sufficientemente sottile da subire l'influsso dei principii idrostatici di galleggiamento, si sarà così disposta che la pressione sopra ciascuna *couche de niveau* del fluido rimaneva la stessa. Ma alloraquando la crosta divenne sufficientemente spessa da non rompersi sotto lo sforzo prodotto da un cambiamento nella sua densità: vale a dire, quando cessò di dipendere dai principii di galleggiamento per l'elevazione o la depressione delle sue varie parti, la quantità di materia in ogni prisma verticale, passante attraverso il fluido sottostante fino ad una certa distanza dal centro della terra, era rimasta la medesima, attraverso a tutti i cambiamenti anteriori. Dopo ciò, ogni ulteriore contrazione od ogni espansione nella crosta solida non altererebbe la quantità di materia nel prisma verticale, tranne dove esiste un'oceano: nel caso di una

contrazione sotto un oceano maggiore che altrove, l'oceano diverrebbe più profondo e la quantità di materia maggiore, e nel caso di una minore contrazione o di un' espansione della crosta sotto un oceano, l'oceano diverrebbe meno profondo e l'acqua ne defluirebbe, ossia la quantità di materia nel prisma verticale diventerebbe minore di prima. Non è probabile che dilatazioni o contrazioni nella crosta solida affettino la distribuzione della materia in qualsiasi altro modo. Quei cambiamenti di livello avvengono per il sollevamento o l'abbassamento relativo di parti della superficie, ciò è un fatto ben assodato che favorisce assai queste considerazioni teoriche. Ma esse ricevono un valido appoggio, io penso, dall'altro fatto, che i cospicui effetti dell'oceano e delle montagne, spariscono quasi intieramente dalle deviazioni risultanti messe in luce dai calcoli per le stazioni dell'arco indiano.

" Quella parte della teoria che insegna che gli oceani aperti si raccolsero sovra parti della superficie terrestre, dove si erano prodotte delle cavità per effetto della contrazione e quindi con aumento della densità nella crosta sottostante, è molto bene illustrata dall'esistenza di un intiero emisfero di acqua, del quale la Nuova Zelanda è il polo, in equilibrio stabile. Se la crosta sottostante fosse solamente della densità medesima di quella sotto i continenti circostanti, l'acqua sarebbe tratta via dall'attrazione e non potrebbe permanere imperturbata nella posizione che occupa „.

Seguono quindi alcuni paragrafi che trattano essenzialmente questioni geologiche: sull'origine delle montagne e lo spessore della crosta terrestre. Pratt è convinto, che da tempo lunghissimo questo spessore sia grande assai, accordandosi in ciò con Hopkin e Sir William Thomson. Vien quindi ripreso l'esame della costituzione generale della crosta terrestre nei paragrafi che qui riproduciamo tradotti.

" La circostanza già notata, che in sette stazioni su tredici la deviazione è verso il mare, sembra attestare in favore della verità dell'ipotesi qui sostenuta, che la crosta sotto gli oceani deve aver subìto una contrazione maggiore di altre parti. La deviazione verso terra delle altre sei stazioni costiere può naturalmente spiegarsi senza invocare affatto la teoria. La vicinanza della terra si può facilmente riguardare come sufficiente a con-

trobilanciare qualsiasi effetto delle parti più lontane della crosta sotto l'oceano. Si è il fatto che anche alcune delle deviazioni sono verso il mare che attesta in favore della teoria, mentre le altre non oppongono alcun argomento in contrario. Queste stazioni della costa, quindi, molto confermano la teoria così ragguardevolmente suggerita dai fatti venuti in luce nell'India, che cioè, le regioni montagnose e gli oceani sono in larga scala stati prodotti dalla contrazione dei materiali, quando la superficie della terra passò da uno stato fluido a quello di solidità — l'ammontare della contrazione sotto le regioni montagnose essendo stato minore che sotto la superficie ordinaria, ed ancora minore che sotto il letto degli oceani, col quale procedimento si formarono quelle cavità nelle quali defluirono i mari. A dir il vero, l'attestazione di queste stazioni di costa può essere spinta ancora avanti in favore della teoria, in quanto che esse coll'eccesso di attrazione verso il mare sembrano indicare, che la contrazione della crosta sotto l'oceano andò crescendo ancora in qualche misura dopo anche che la crosta era divenuta troppo spessa per essere influenzata dai principii di galleggiamento, e che un'afflusso addizionale di acqua nelle crescenti cavità ha accresciuto l'ammontare dell'attrazione sopra stazioni sulle sue sponde „ (*).

“ Coi metodi dati in articoli precedenti l'autore ha applicato i risultati delle osservazioni pendolari, recentemente istituite nell'India, a saggiare questa ipotesi in uno scritto comunicato alla Società Reale nel 1871. Il risultato è riferito nella tavola annessa. I numeri dati sono le ultime cifre in sette posti decimali, rappresentanti il rapporto di queste differenze alla gravità stessa. Il punto decimale e le cifre sono ommesse per convenienza „ (Vedi la Tabella alla pag. seguente).

“ La prima colonna, che è dedotta dalle osservazioni pendolari, dopo aver eliminato gli effetti della latitudine e dell'altezza, al fine di istituire il confronto, mostra che alle cinque

(*) La prima parte di questa teoria apparentemente conferma l'ipotesi del sig. Airy (*Phil. Transac.*, 1855, p. 101). Ma il suo ragionamento si fonda sull'ipotesi della crosta sottile, così sottile da essere influenzata nella sua posizione dal fluido sottostante, il che non è ammissibile. Si veda anche una nota dell'autore nelle *Philosophical Transactions* pel 1871 (Nota di Pratt). Su questa nota dovremo ritornare in seguito.

stazioni quasi egualmente distanti, che abbiamo scelto dall'arco indiano di meridiano, gli effetti dell'attrazione locale relativa-

STAZIONI	Differenza di gravità rispetto a quella di Punnæ			
	Effetti relativi dell'attrazione locale dedotti dalle osservazioni pendolari	Errori residui dopo la correzione		
		Colla formola del Dr Young	Con questa ipotesi $m = 50$	Con questa ipotesi $m = 100$
Arco Indiano				
Punnæ	.....	.....	.....	.....
Bangalore . .	+ 384	— 562	— 78	— 557
Damargida . .	— 323	— 926	— 455	— 584
Kalianpur . . .	+ 341	— 208	+ 338	+ 315
Kaliana . . .	— 707	— 957	+ 69	+ 320
Costa				
Punnæ	.....	.....	.....	.....
Alleppy . . .	+ 302	+ 314	+ 331	+ 360
Mangalore . .	— 166	— 154	— 122	— 79
Madras . . .	— 197	— 192	— 138	— 78
Cocanada . . .	+ 142	+ 153	+ 216	+ 291
Oceano				
Isola Minicoy .	+ 894	+ 906	+ 31	+ 102

mente all'estremo sud dell'arco sono alternativamente in eccesso e difetto, quello alla stazione prossima (Bangalore) essendo in eccesso. Fra tutti i luoghi considerati hanno effetti massimi, Kaliana in difetto, e Minicoy Island (250 miglia all'Ovest di Punnæ) in eccesso, benchè sia in oceano aperto „. — “ Si avvertirà che il solito metodo di correggere per l'attrazione locale (cioè, quello di Young) aggrava gli errori sull'arco di meridiano ed in Minicoy, invece di diminuirli. Nè il metodo del dr. Young, nè la presente ipotesi affettano molto le stazioni di costa. Quelle

regioni devono essere meglio rilevate. Ma nelle stazioni sull'arco e sull'Oceano, questa ipotesi li diminuisce tutti tranne due, e nelle più importanti di tutte, li annulla complessivamente, quando $m = 50$. Le eccezioni sono Damargida, ove vi è una deficienza di materia indicata da -455 e Kalianpur ove vi è un eccesso di materia indicato da $+338$. Se in una tavola data precedentemente si esaminano i risultati dell'attrazione orizzontale locale, si vedrà che le anomalie attorno a Damargida che vi appaiono denotano una deficienza dalle due parti di Damurgida, e che vi è un eccesso al Sud di Kalianpur, fra Kalianpur e Takul Khera. Questi risultati s'accordano quindi con quelli delle osservazioni pendolari. Essi mostrano che vi sono irregolarità locali nella crosta, ma che la disposizione generale espressa nell'ipotesi qui proposta, rimuove od almeno diminuisce in notevole misura queste apparenti deviazioni dalla regolarità, mentre col metodo usuale si giunge all'opposto. La verità dell'ipotesi è specialmente sostenuta dal fatto, che essa rende ragione della circostanza singolare che la gravità possa essere maggiore in mare che sulla costa „.

Queste sono le ultime parole che Pratt scrisse sulla sua ipotesi. Se ci sarà concesso di continuare questi studî, vedremo la sorte che essa ebbe, e come le più recenti misure la confermino.

Sul potere d'inversione di alcuni pseudoacidi a funzione complessa.

Nota del Dott. RODOLFO TORRESE.

Già dal 1850 il Biot aveva accennato come l'inversione dello zucchero di canna mediante gli acidi diluiti sarebbe stata quella, fra le reazioni così dette catalitiche, la quale sia per il lento decorso sia per l'omogeneità del sistema risultante avrebbe permesso, più facilmente che qualsiasi altra, di studiare il modo con cui procede questo importante fenomeno di dinamica chimica. L'idea del Biot condusse il Wilhelmy a pubblicare nel medesimo anno (1) la celebre memoria intorno alla legge secondo la quale gli acidi diluiti agiscono sullo zucchero di canna, legge che in ultima analisi ci dice come la quantità di saccarosio che s'inverte in ogni istante in una soluzione zuccherina trattata con un acido, è proporzionale alla quantità di zucchero presente all'istante considerato. Quindi la quantità di zucchero invertita nell'unità di tempo, ossia la velocità di reazione, aumenta, per una medesima quantità di acido, proporzionalmente alla quantità di zucchero, per cui soluzioni zuccherine differenti, nelle medesime condizioni di acidità e di temperatura, s'invertono nel medesimo tempo qualunque sia la loro ricchezza in saccarosio.

Però non tutti gli acidi si mostrano ugualmente attivi nell'inversione dello zucchero, anzi vi è una grande disparità nell'attività dimostrata da ciascuno di essi, anche mantenendo costante la temperatura e proporzionali le quantità di acido poste a reagire, per cui era naturale che si cercasse di spiegare il perchè di questa diversità d'azione. Nel 1876 il Fleury (2) sperimentando con diversi acidi l'inversione dello zucchero, notò

(1) Wilhelmy, " Poggend. Ann. ", 81, pag. 413-499 e 499-526; Ostwald's, " Klassiker d. exakt. Wissensch. ", n. 29.

(2) Fleury, A. Ch., (7), 5, pag. 381.

come non vi esista alcun rapporto fra la velocità di reazione ed il peso molecolare della sostanza che lo produce, come supponeva il Biot, e quantunque la rapidità d'azione dell'acido cloridrico si accordasse alla grande diffusibilità che gli attribuisce il Graham, non avendo potuto riscontrare il fenomeno in altri casi, conchiude: " Che se le molecole le più pesanti sono le più diffusibili, questa proprietà non è senza dubbio la sola che influisca sulla rapidità dell'inversione „.

Secondo l'Ostwald (1) l'inversione del saccarosio è in istretto rapporto coll'energia di affinità dell'acido e la velocità di reazione proporzionale, entro certi limiti, alla quantità dell'acido adoperata (2). Naturalmente aumentando la temperatura aumenta pure la quantità di zucchero invertita, quando si mantengano uguali tutte le altre condizioni. Ma nello spirito del lavoro, più che il ricercare le cause a cui si deve la maggiore o minore attività dimostrata dagli acidi nell'inversione del saccarosio, si è di comparare la forza specifica degli acidi sin'ora studiati, a quella di molte sostanze che, pur non essendo veri acidi organici, funzionano come tali. Voglio alludere a certe sostanze speciali a funzione mista, che il prof. I. Guareschi, mi ha gentilmente offerto di studiare, alcune delle quali si mostrano attivissime nell'inversione dello zucchero di canna.

Prima però di entrare in questo argomento voglio ancora ricordare, che se non esiste nessun rapporto fra il peso molecolare dell'acido e la velocità di reazione, nè sussistano differenze essenziali fra gli acidi organici e quelli minerali nell'inversione del saccarosio, vi sono tuttavia delle relazioni, che occorre aver presenti, per cui gli acidi che si mostrano maggiormente attivi nell'inversione del saccarosio son pure quelli che hanno un'attività catalitica maggiore ed una conducibilità specifica più grande. Infatti l'Ostwald dalla velocità con cui progrediva lo sdoppiamento dell'acetato di metile con diversi acidi e nelle medesime condizioni ha determinato una costante K misura del potere catalitico dell'acido stesso (3). D'altra parte, studiando l'inversione del saccarosio, ottenne una seconda serie

(1) " Journ. f. prakt. Chem. „, (2), 51, pag. 307.
(2) Palmaer, " Zeit. f. physik. Chem. „, 22, 492.
(3) " Journ. f. prakt. Chem. „, (2), 28, pag. 449.

di valori i quali si avvicinano assai a quelli trovati per il potere catalitico, e che per comodità di raffronto io scriverò nella seconda colonna della tavola seguente (1), ove nella prima raggrupperò i valori trovati per il potere catalitico di diversi acidi studiati, e nella terza i numeri che esprimono la loro conducibilità specifica, fatto, in ogni caso. l'acido cloridrico uguale ad 1:

	I	II	III	
Acido cloridrico	1	1	1	
„ bromidrico . . .	0,983	1,114	1,001	
„ jodidrico	0,963	—	—	
„ nitrico	0,915	1,000	0,996	
„ clorico	0,944	1,035	—	
„ solforico	0,547	0,536	0,651	
„ etilsolforico . . .	0,987	1,000	—	$K_{HCl} = 1$
„ etansolfonico . .	0,979	0,912	0,799	
„ benzensolfonico . .	0,991	1,044	0,748	
„ formico	0,013	0,0153	0,0168	
„ acetico	0,0034	0,004	0,0142	
„ monocloroacetico .	0,043	0,0484	0,049	
„ dicloroacetico . .	0,23	0,271	0,253	
„ tricloroacetico . .	0,68	0,754	0,623	

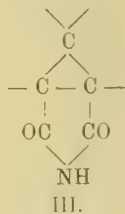
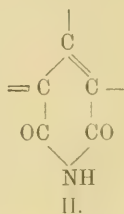
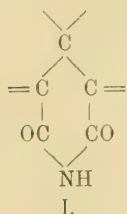
Ma non soltanto i veri acidi organici e quelli minerali, sono capaci di invertire il saccarosio. Vi sono infatti delle sostanze che, pur non essendo acidi organici, si mostrano attivissime nella scissione dello zucchero di canna, tanto che qualcuna fra esse sorpassa in attività non solo tutti i veri acidi organici, ma anche quasi tutti gli acidi minerali. Sono, questi composti, dei pseudoacidi che il prof. I. Guareschi ottenne dalla condensazione dell'etere cianacetico colle aldeidi e coi chetoni in presenza di ammoniaca (2); queste sostanze possono avere due formole: la *imidica* o la *enolica*.

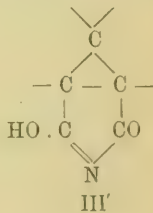
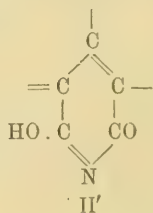
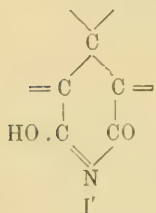
Ma l'interesse maggiore dello studio di queste sostanze, non

(1) Ostwald, " Journ. f. prakt. Chem. „, 2, 29, pag. 385.
(2) " Mem. R. Acc. Sc. di Torino „, Serie II, t. XLVI e L.

consiste soltanto nel fatto che qualcuna si mostra attivissima nell'inversione del saccarosio, ma perchè essendo tutte di un medesimo tipo a seconda delle modificazioni introdotte nella molecola, questa attività era soggetta a variazioni, per cui sostanze attive divenivano inattive o aumentavano o diminuivano la loro attività specifica a seconda dei gruppi introdotti nella molecola, a seconda del numero dei CN, a seconda della posizione dei doppî legami, ecc.

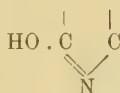
E che infatti gli acidi studiati appartengano ad una medesima categoria di composti lo provano gli schemi seguenti a cui le sostanze studiate si possono raggruppare:

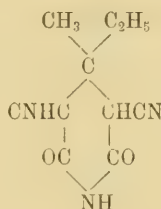
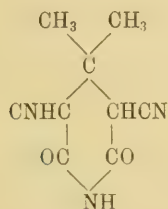
```
      \ /              |               \ /
       C               C                C
      / \             / \\             / \
   =C     C=       =C     C—       —C — C—
    |     |         |     |         |    |
   OC     CO       OC     CO       OC   CO
      \ /             \ /             \ /
      NH              NH              NH
      I.              II.             III.
```

schemi che si potranno rappresentare anche nel modo seguente:

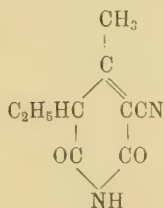
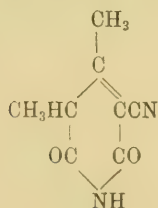
```
        \ /                |                 \ /
         C                 C                  C
        / \               / \\               / \
     =C     C=         =C     C—         —C — C—
      |     |           |     |           |    |
   HO.C     CO       HO.C     CO       HO.C   CO
       \\ /              \\ /              \\ /
         N                 N                 N
         I'                II'               III'
```

essendo queste sostanze, come si disse, dei pseudo-acidi per cui oltre alla formola imidica possono avere anche quella enolica.

Ma noi vedremo in sèguito quale sia lo schema che meglio si convenga a ciascuna di queste sostanze. A rigore di termini gli acidi appartenenti al tipo III, sia della forma enolica o imidica, non potrebbero essere compresi fra quelli di schema I e II poichè contengono un gruppo trimetilenico, ma io li ho raggruppati assieme poichè essi derivano dall'eliminazione del bromo dai derivati bromurati in ββ' di tipo I, e perchè, funzionando da acidi, supponevo avessero anch'essi una azione pressochè identica

a quella degli altri. Come chiaramente si può vedere, e tralasciando per ora l'influenza che i gruppi sostituenti le valenze potrebbero avere sull'aumento o sulla diminuzione del carattere elettronegativo della molecola, le sostanze in esame sono acidi essenzialmente per il gruppo:

```
 |    |                     |    |
OC   CO      oppure     HO.C    C
  \ /                      \\  /
  NH                         N
```

a seconda della formola che loro si attribuisce. Ora essendo o l'uno o l'altro di questi due gruppi comune a tutti i composti studiati, le sostanze in esame avrebbero dovuto avere tutte un'azione più o meno grande nell'inversione dello zucchero di canna: ciò invece, almeno nelle condizioni in cui furono fatte l'esperienze, non si verifica. Se noi prendiamo in esame la diciandimetilglutarimide o la dicianmetiletilglutarimide

```
   CH3   CH3               CH3   C2H5
     \   /                   \   /
       C                       C
     /   \                   /   \
CNHC       CHCN         CNHC       CHCN
   |       |               |       |
  OC       CO             OC       CO
     \   /                   \   /
      NH                      NH
```

appartenenti come si vede allo schema I (oppure I' se ad esse si attribuisce la formola enolica) e le paragoniamo alla metilcianmetilglutaconimide ed alla etilcianmetilglutaconimide:

```
        CH3                     CH3
        |                       |
        C                       C
      /   \\                  /   \\
CH3HC       CCN        C2H5HC       CCN
   |        |               |       |
  OC        CO             OC       CO
     \    /                   \   /
      NH                       NH
```

di schema II, noi vediamo come questi due ultimi composti sieno attivi nel saccarosio, mentre i due primi affatto inattivi,

quantunque assai simili fra loro e quantunque tutti e quattro contengano il gruppo:

```
 |    .                      |    |
OC    CO               HO . C    CO
  \  /       oppure          \\  /
   NH                          N
```

a seconda della formola che loro si attribuisce. Ma c'è di più. Se noi consideriamo la N-metil β3 dician-γ-dimetilglutaconimide:

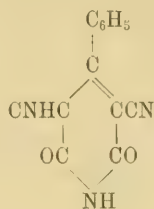
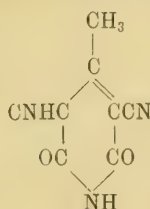
```
    CH3   CH3                       CH3   CH3
      \   /                           \   /
        C                               C
      /   \                           /   \
  CNHC     CHCN       oppure       CNC     CCN
    |       |                       ||      ||
   OC      CO                   HO . C      C . OH
     \    /                           \    /
      NCH3                             NCH3
```

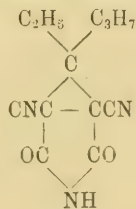
noi ci troviamo dinanzi al fatto che quantunque questa sostanza in soluzione abbia reazione acida, e formi un sale biargentico, comportandosi quindi come acido bibasico, essa non inverte il saccarosio.

Ora gli acidi di schema II differiscono da quelli di schema I per due caratteri: primo per avere un doppio legame in posizione β-γ, secondo per avere un solo gruppo cianico invece di due, qualunque sia la formola che si voglia considerare. Naturalmente l'aumento di un gruppo — CN in composti ed in posizione come quella in questione, non può essere la causa per cui il carattere elettronegativo dell'acido venga a mancare, anzi questo dovrebbe essere maggiore. Infatti se noi paragoniamo il lavoro che sono capaci di compiere la cianmetilglutaconimide e la cianfenilglutaconimide

```
        CH3                         C6H5
         |                            |
         C                            C
       /   \\                       /   \\
   2HC      CCN                 2HC      CCN
    |        |                   |        |
   OC       CO                  OC       CO
     \     /                      \     /
       NH                           NH
```

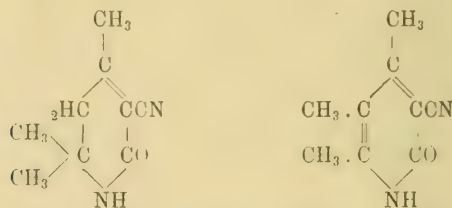
nelle medesime condizioni della metildicianglutaconimide (1) e della fenildicianglutaconimide:

```
        CH3                     C6H5
        |                        |
        C                        C
       / \\                     / \\
  CNHC    CCN             CNHC    CCN
    |      |                |      |
    OC    CO                OC    CO
      \  /                    \  /
       NH                      NH
```

noi vedremo come i composti aventi due gruppi — CN nella molecola siano assai più attivi di quelli che ne hanno uno solo. Però se nelle sostanze di tipo II il carattere acido aumenta aumentando il numero dei gruppi — CN, questo fatto però non è tale da rendere attiva una sostanza, anche se questa oltre ai due gruppi — CN contenga il gruppo caratteristico di cui si è parlato, qualora essa non abbia in sè quel complesso di requisiti che la rendono tale. Infatti le imidi metiletildiciantrimetilendicarbonica ed etilisopropildiciantrimetilendicarbonica

```
    CH3  C2H5                C2H5  C3H7
       \/                        \/
       C                         C
      / \                       / \
  CNC — CCN                 CNC — CCN
    |    |                    |    |
   OC    CO                  OC    CO
     \  /                      \  /
      NH                        NH
```

da me esperimentate quantunque abbiano i caratteri di cui si è parlato più sopra tuttavia non hanno un'azione apprezzabile sullo sdoppiamento del saccarosio. Per cui noi siamo costretti ad ammettere che sia il doppio legame in γ-β ciò che dà agli acidi di schema II la loro forza d'inversione, od almeno che sia un carattere necessario perchè essi si mostrino attivi nell'inversione dello zucchero. Ma noi vedremo come questo carattere sia subordinato ad un altro coefficiente, acciocchè il carattere elettronegativo della sostanza si manifesti, e cioè al mantenimento inalterato dei due carbonili della molecola, poichè se noi sostituiamo l'ossigeno di uno di essi, il composto risul-

(1) E. Quenda, “ Atti R. Acc. Sc. di Torino „, vol. XXXII.

tante, pur conservando il doppio legame nella posizione stabilita, non ha più alcuna forza d'inversione, come lo provano i due ciantrimetilpiridoni seguenti:

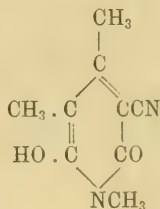
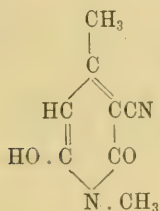
```
             CH3                      CH3
              |                        |
              C                        C
             / \\                     / \\
          2HC   CCN           CH3 . C   CCN
    CH3\   |     |                  ||
        > C     CO            CH3 . C   CO
    CH3/   \   /                     \ /
            NH                       NH
```

i quali diedero risultati negativi nelle mie esperienze.

Secondo i moderni criteri gli acidi, o le sostanze funzionanti come tali, sono tanto più attive quanto maggiore è la loro dissociazione elettrolitica, per cui aumentando il numero di ioni H˙ nella soluzione, aumenta l'energia dell'acido. Quindi di conseguenza le sostanze studiate dovranno mettere in libertà, quando siano in soluzione, questo idrogeno H˙ ione al cui numero è dovuta la loro energia specifica. Ma noi abbiamo già visto come gli acidi più facilmente ionizzabili siano pure quelli più attivi sul saccarosio, quindi inversamente quelli più attivi sul saccarosio saranno anche i più ionizzabili, per cui la dissociazione elettrolitica, almeno nelle condizioni delle esperienze, avverrà, in quantità apprezzabile, soltanto negli acidi di tipo II, più innanzi ricordato, poichè quelli appartenenti agli schemi I e III non hanno alcuna azione sul saccarosio. Ne viene di conseguenza che noi dobbiamo ammettere che non tutte le sostanze studiate, almeno alla temperatura a cui si è operato (60°), abbiano il medesimo tipo di formola, poichè se così fosse avrebbero dovuto mostrarsi tutte più o meno attive nell'inversione del saccarosio. Ora quale struttura spetterà di preferenza a ciascuno di questi composti?

La risposta non è certo facile, però noi sappiamo come nei composti organici, gli ioni H˙ si mettano in libertà più facilmente in quelle sostanze in cui esso è attaccato all'ossigeno. D'altra parte dai lavori di Henrich e di Charon è dimostrato come un gruppo carbonico è tanto più negativo quanto maggiori sono le valenze che gli atomi componenti questo gruppo si saturano fra loro, per cui noi potremo stabilire già a priori che

presenteranno una maggiore attività quelle fra le sostanze studiate che hanno più doppi legami nella molecola. Quindi noi possiamo ritenere che la formola enolica spetterà di preferenza ai composti che sono capaci d'invertire il saccarosio.

E che ciò debba essere così lo prova anche il fatto che se nella cianmetilglutaconimide e nella metilcianmetilglutaconimide, di cui già diedi le formole, noi sostituiamo l'idrogeno imidico con un residuo alchilico, la (2)cian-(1)metil-glutacon(4)metilimide e la (6)metil(2)cian(1)metilglutacon(4)metilimide risultanti:

```
         CH3                          CH3
          |                            |
          C                            C
         / \\                         / \\
       HC    CCN               CH3.C    CCN
       ||     |                    ||     |
   HO.C      CO                HO.C      CO
       \    /                      \    /
        N.CH3                       NCH3
```

conservano il potere d'inversione, per cui in questo caso l'attività dell'acido sarà evidentemente dovuta all'idrogeno $H^{\cdot}$ ione del gruppo-OH, quindi sarà lecito supporre che questo H fosse attaccato all'ossigeno anche negli acidi da cui questi due ultimi composti derivano, cosicchè noi potremo ammettere che non soltanto a questi due composti, ma pur anche a tutti quelli del medesimo tipo, spetti la formola enolica a preferenza di quella imidica, sia dello schema già dato o, forse anche meglio, quella modellata sul tipo delle due ultime sostanze ricordate in cui il doppio legame si trova assai più vicino a quello in γ-β.

D'altra parte la succinimide, da cui derivano le sostanze di tipo III, non ha conducibilità elettrica (1), quindi nessuna azione sul saccarosio, poichè, almeno nei casi sin'ora studiati, i due fenomeni sono paralleli, per cui è da supporre che anche la glutaconimide, da cui derivano le altre sostanze studiate, sia anch'essa inattiva sul saccarosio. Noi potremo perciò concludere che, in questa serie di pseudoacidi, il mantenimento inalterato dei due carbonili ed il doppio legame in γ-β siano condizioni necessarie affinchè essi dimostrino un'attività nell'inversione del saccarosio.

---

(1) P. Walden, " Zeits. f. physik. Chem. ", 8, 484.

Ho già accennato come l'attività dimostrata nell'inversione del saccarosio, da quelle fra le sostanze che possiedono questa proprietà, varii a seconda delle modificazioni introdotte nella molecola del pseudoacido, ed abbiamo già visto come aumentando il numero dei gruppi cianici in composti del medesimo tipo, aumenti pure l'energia dell'acido. Questo fatto trova un riscontro nell'acido acetico, la cui forza d'inversione aumenta a misura che s'introducono nella sua molecola degli atomi di cloro, per cui la dissociazione elettrolitica di questi pseudoacidi diviene anch'essa maggiore a seconda del numero di radicali elettronegativi che in essa s'introducono. Se noi consideriamo i valori trovati per queste sostanze e li paragoniamo a quello dell'acido tricloroacetico ricavato nelle medesime condizioni, noi vedremo come alcune di esse sieno molto più attive di questo acido che occupa uno dei primi posti nell'attività d'inversione dello zucchero di canna.

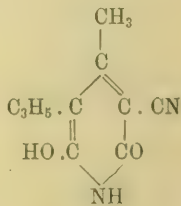
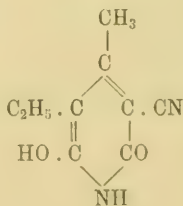
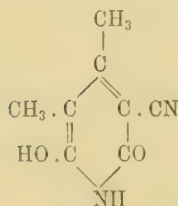
D'altra parte, se noi consideriamo le formole di questi acidi descritte più innanzi, riesce evidente come essi, quantunque appartenenti al medesimo tipo, si possano raggruppare in tre serie distinte:

I. Quelli aventi un gruppo metilico in γ, un atomo di idrogeno in β', sostituito da un residuo alchilico, ed un CN in β;

II. Quelli aventi un gruppo cianico in β ed uno in β', con un radicale grasso in γ;

III. Quelli aventi in γ un radicale aromatico, un gruppo cianico in β ed uno in β'.

Considerando la quantità di saccarosio che le sostanze del primo gruppo sono capaci d'invertire nelle medesime condizioni, noi vedremo come per la metilcianmetilglutaconimide, per la etilcianmetilglutaconimide e per la allilcianmetilglutaconimide:

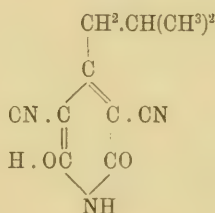
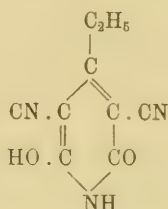
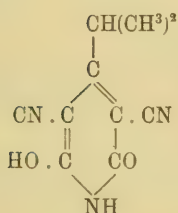
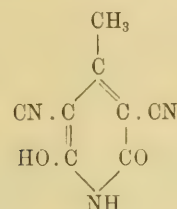
```
         CH3                    CH3                    CH3
          |                      |                      |
          C                      C                      C
         / \\                   / \\                   / \\
  CH3 . C    C . CN    C2H5 . C    C . CN    C3H5 . C    C . CN
        ||   |                ||   |                ||   |
   HO . C    CO         HO . C    CO         HO . C    CO
         \  /                  \  /                  \  /
          NH                    NH                    NH
```

la quantità di zucchero invertito è rispettivamente:

gr. 0.179 gr. 0.1916 gr. 0.1982

cioè questa quantità aumenta aumentando il peso molecolare del gruppo costituente l'idrogeno in β'.

Al secondo gruppo appartengono la γmetilββ'dicianglutaconimide, la γetilββ'dicianglutaconimide, la γ-isopropil-ββ'-dicianglutaconimide (1) e la γ-isobutilββ'dicianglutaconimide (2)

```
          CH3                        C2H5
          |                          |
          C                          C
         / \\                       / \\
   CN . C     C . CN         CN . C     C . CN
        ||    |                   ||    |
   HO . C     CO             HO . C     CO
         \   /                     \   /
          NH                        NH

        CH(CH3)2                  CH2.CH(CH3)2
          |                          |
          C                          C
         / \\                       / \\
   CN . C     C . CN         CN . C     C . CN
        ||    |                   ||
   HO . C     CO             H . OC     CO
         \   /                     \   /
          NH                        NH
```

le quali, al contrario, delle prime invertono una quantità di zucchero tanto minore quanto maggiore è il peso molecolare del gruppo sostituente l'idrogeno in γ. Noto però subito che le quantità di zucchero invertito non sono nè proporzionali al peso molecolare del gruppo sostituente, nè vi è una regolarità nell'inversione come si vede dai dati seguenti che esprimono le quantità di zucchero invertito trovate:

gr. 0.243 gr. 0.1982 gr. 0.209 gr. 0.1982.

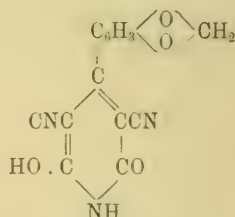
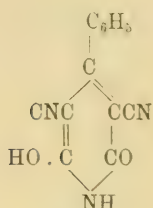
E ciò dipende senza dubbio dal fatto che l'isopropildicianglutaconimide e l'isobutildicianglutaconimide contengono, nel gruppo sostituente l'idrogeno in γ, due metili attaccati al medesimo

(1) Z. Treves, " Atti R. Acc. Sc. di Torino ", vol. XXXIV.

(2) I. Guareschi, Id., vol. XXXVIII.

atomo di carbonio, disposizione che aumenta il carattere elettronegativo della sostanza.

Tra gli acidi appartenenti al terzo gruppo io ho studiato la γ-fenil ββ'dicianglutaconimide e la γ-piperonil ββ'dicianglutaconimide (1):

```
        C6H5                      C6H3<O>CH2
         |                              O
         C                          |
        / \\                         C
     CNC   CCN                      / \\
      ||    |                    CNC   CCN
   HO.C    CO                     ||    |
       \  /                    HO.C    CO
        NH                         \  /
                                    NH
```

le quali si mostrano più attive dell'acido tricloroacetico nell'inversione del saccarosio e la seconda è assai più energica della prima poichè certamente il gruppo sostituente l'idrogeno in γ, ha un carattere elettronegativo maggiore.

Anche in questi composti, come nei veri acidi organici, se noi sostituiamo un atomo di idrogeno con un gruppo metilico, l'acido abbassa il suo potere d'inversione come lo provano la cianmetilglutaconimide e la metilcianmetilglutaconimide (vedi tabelle più innanzi) le quali dànno, nelle medesime condizioni, rispettivamente:

gr. 0.2038 e gr. 0.179

di zucchero invertito. Così pure negli pseudoacidi studiati sostituendo un atomo di idrogeno di un gruppo sostituente con un gruppo NO_2 la quantità di zucchero invertita è maggiore quando esso si trova in posizione para che quando sia in posizione meta, nel modo analogo all'acido benzoico in cui il derivato meta è più debole del derivato para. Infatti se nella cianfenilglutaconimide noi sostituiamo un atomo di idrogeno del gruppo fenilico con un gruppo NO_2, la quantità di zucchero invertito è gr. 0.227 pel derivato meta, e gr. 0.2157 pel derivato para.

(1) G. Piccinini, " Atti R. Acc. Sc. di Torino ", vol. XXXVIII.

Sarebbe stato di grande vantaggio che io avessi potuto condurre le mie esperienze nel modo dell'Ostwald. così avrei potuto dare le costanti d'inversione di questi pseudoacidi in condizioni tali da poter essere paragonate ai valori degli acidi già conosciuti, ma ciò non mi fu possibile per la natura speciale di queste sostanze. In primo luogo la loro poca solubilità, anche a temperatura assai maggiore di 25°, mi impedì di sperimentare con soluzioni normali, quindi avendo dovuto adoperare quantità piccole di acido, sono stato costretto ad elevare assai più la temperatura acciocchè l'inversione fosse più marcata. Ora, sia per la temperatura relativamente alta, sia perchè certamente taluna di queste sostanze ha un'attività ottica, invece di determinare la quantità di saccarosio invertita, col polarimetro, sono ricorso al liquore di Fehling. Inoltre avendo queste sostanze un peso molecolare abbastanza elevato (164-281-) anche se qualcuna fosse stata solubile nel rapporto normale alla temperatura delle esperienze, io avrei dovuto disporre di quantità relativamente grandi di acido, anche per fare soltanto poche determinazioni nelle condizioni dell'Ostwald. D'altra parte, avendo dovuto dosare lo zucchero invertito ponderalmente e con quantità d'acido sempre relative, ho dovuto prenderne una quantità che per le sostanze di azione debole avessi una riduzione tale da darmi delle analisi in condizione possibile, mentre essa non fosse troppo grande per quelle sostanze di azione forte. Certamente il metodo polarimetrico presenta vantaggi non dubbi sul dosamento dello zucchero invertito mediante la soluzione cupro-potassica, però io ho cercato di attenermi, per quanto mi fu possibile, alle norme stabilite per il dosaggio gravimetrico degli zuccheri col metodo Soxhlet-Kjeldahl. A tal fine mi sono preparato una soluzione di Fehling secondo la formola normale ($CuSO_4 . 5\,H_2O$ gr. 34,64 acqua fino a 500 cm^3) (NaOH gr. 60 sale Seignette 173 acqua fino a 500 cm^3) mantenendo le due soluzioni separate e non mescolandole che al momento del bisogno. Il reattivo così preparato, anche dopo parecchio tempo, immerso in un bagno-maria bollente non dava che una lieve riduzione quando si prolungava l'azione del calore per almeno venti minuti, per cui, ad ovviare questo inconveniente, io ho riscaldato sempre soltanto dieci minuti, tempo più che sufficiente ad ottenere la completa riduzione del reattivo. D'altra parte, io ho adoperato sempre la medesima quantità di

soluzione di Fehling diluita con ugual volume di acqua (50 cm^3), salvo in quei casi in cui la quantità di zucchero invertita richiedeva una quantità maggiore di reattivo, e la precipitazione del rame fu costantemente fatta nel medesimo becher per cui si veniva ad eliminare in questo modo le due maggiori cause di errore, quella dovuta alla diversa quantità di reattivo e quella, più importante ancora, della diversa superficie esposta all'ossidazione dell'aria. Così pure furono sempre i medesimi tubetti quelli che servirono alla riduzione del protossido di rame in rame metallico, come pure furono sempre i medesimi recipienti quelli adoperati nell'inversione dello zucchero coll'acido da esperimentare. Anche il saccarosio adoperato per le esperienze era assai buono poichè 10 cm^3 di una soluzione al 20 %, anche dopo un riscaldamento di mezz'ora a 60°, non riduceva che una quantità estremamente piccola di reattivo.

Non voglio con ciò presumere di aver eliminato ogni causa di errore e di dare dei resultati teorici, quantunqe abbia cercato di operare colle cure necessarie e nelle condizioni migliori che la natura degli acidi esperimentati me lo permettevano. Del resto, anche ammettendo che le quantità di rame metallico ottenute nei singoli dosamenti non sieno esattamente corrispondenti alla quantità reale di saccarosio invertito, ciò non ha, nello studio presente, un' importanza capitale, poichè, più che la quantità assoluta di saccarosio che un acido è capace d'invertire in un dato tempo, ha interesse l'esame della diversa attività che le sostanze studiate dimostrano nel compimento di questo lavoro. Ed a questo risultato io son convinto di essere giunto, poichè, anche ammesso che nelle mie esperienze ci sia una causa di errore, questa fu evidentemente ripetuta in ogni singolo caso, per cui se la quantità di zucchero invertita sarà un po' diversa da quella trovata, rimarrà però sempre costante la relazione verificata fra il potere d'inversione delle diverse sostanze studiate. Ed ecco ora il modo con cui furono condotte le esperienze:

In un bagno-maria, mantenuto costantemente alla temperatura di 60°, immergevo una provetta, alquanto lunga, contenente 10 cm^3 di una soluzione $\frac{N}{82}$ dell'acido da esaminare, ed un'altra contenente 10 cm^3 di una soluzione al 20 % di saccarosio. Quando i liquidi erano pervenuti alla temperatura del bagno

versavo la soluzione zuccherina in quella dell'acido, agitando di continuo, e notando l'istante in cui le due soluzioni venivano in contatto. D'altra parte in un becher di circa 300 cm^3 mescolavo 25 cm^3 di soluzione bianca di Fehling e 25 cm^3 di soluzione azzurra, e diluivo il tutto con ugual volume di acqua distillata. Dopo 25 minuti, dal momento in cui la soluzione zuccherina era stata messa in contatto coll'acido, ponevo il becher contenente il reattivo in un bagno-maria previamente portato all'ebollizione, quindi trascorsi cinque minuti versavo la soluzione zuccherina invertita nel reattivo caldo lavando la provetta con 20 cm^3 di acqua tiepida in due riprese. Dopo altri cinque minuti, tenendo sempre il bagno all'ebollizione, raccoglievo l'ossidulo di rame nel tubetto di Allihn, procedendo in sèguito col solito metodo per il dosaggio degli zuccheri riduttori.

Naturalmente, date le condizioni diverse in cui ho esperimentato, i resultati da me ottenuti non avrebbero potuto per nulla essere comparati ai valori dell'Ostwald, nè era possibile dai dati avuti ricavare il valore dell'inversione di questi pseudoacidi dato che si fosse operato nelle condizioni di questo autore. Per cui, affine di avere una base su cui fondare il paragone fra l'attività specifica di queste sostanze, e quella degli acidi sinora studiati, ho sottoposto l'acido tricloroacetico al mio studio nelle identiche condizioni di esperienza. Ho preso come termine di paragone l'acido tricloroacetico non soltanto perchè, fra gli acidi organici, è uno dei più attivi sul saccarosio, ma anche perchè il suo peso molecolare si avvicina assai a quello delle sostanze studiate.

Ed ora raccolgo qui sotto i valori trovati, mantenendo in contatto per 30′ alla temperatura di 60°, 10 cm^3 di una soluzione $\frac{N}{82}$ dell'acido con 10 cm^3 di una soluzione al 20 $^0/_0$ di saccarosio.

Sostanza esaminata	Rame metallico	Zucchero invertito	Saccarosio corrispond.
$C . Cl_3 . COOH$	1° Determ. gr. 0,424 2° „ „ 0,425 3° „ „ 0,4238 in media gr. 0,424	0,235	0,2232
CH_3 | C / \\ CN . C C . CN ‖ | HO . C CO \\ / NH cianmetilglutaconimide	1° Determ. gr. 0,3778 2° „ „ 0,3790 3° „ „ 0,3786 in media gr. 0,3785	0,2038	0,1937
CH_3 C / \\ CH_3 . C C . CN ‖ | HO . C CO \\ / NH metilcianmetilglutaconimide	1° Determ. gr. 0,341 2° „ „ 0,3385 3° „ „ 0,340 4° „ „ 0,3405 in media gr. 0,340	0,179	0,170
CH_3 | C / \\ C_2H_5 . C C . CN ‖ | HO . C CO \\ / NH etilcianmetilglutaconimide	1° Determ. gr. 0,3624 2° „ „ 0,361 3° „ „ 0,3619 in media gr. 0,3618	0,1927	0,183
CH_3 | C / \\ C_2H_5 . C C . CN ‖ | HO . C CO . H_2O \\ / NH allilcianmetilglutaconimide	1° Determ. gr. 0,371 2° „ „ 0,370 3° „ „ 0,3704 in media gr. 0,3704	0,1982	0,1855

Sostanza esaminata	Rame metallico	Zucchero invertito	Saccarosio corrispond.
CH_3 C CN . C C . CN HO . C CO . 2 $^1/_2$ H_2O NH metildicianglutaconimide	1° Determ. gr. 0,4354 2° „ „ 0,436 3° „ „ 0,434 in media gr. 0,4351	0,243	0,2305
C_2H_5 C CN . C C . CN HOC CO . $2H_2O$ NH etildicianglutaconimide	1° Determ. gr. 0,370 2° „ „ 0,371 3° „ „ 0,3695 in media gr. 0,370	0,1982	0,1855
C_3H_7 C CN . C C . CN HO . C CO . $3H_2O$ NH isopropildicianglutaconimide	1° Determ. gr. 0,388 2° „ „ 0,386 3° „ „ 0,385 in media gr. 0,386	0,209	0,1985
C_4H_9 C CN . C C . CN HO . C CO NH isobutildicianglutaconimide	1° Determ. gr. 0,3702 2° „ „ 0,3705 3° „ „ 0,3698 in media gr. 0,370	0,1982	0,1855

Sostanza esaminata	Rame metallico	Zucchero invertito	Saccarosio corrispond.
C_6H_5 | C HC C . CN ‖ | HO . C $CO.H_2O$ NH cianfenilglutaconimide	1° Determ. gr. 0,3495 2° „ „ 0,350 3° „ „ 0,3505 in media gr. 0,350	0,1853	0,1732
C_6H_5 | C CN . C C . CN ‖ | HO . C CO NH fenildicianglutaconimide	1° Determ. gr. 0,4445 2° „ „ 0,447 3° „ „ 0,4465 4° „ „ 0,4461 in media gr. 0,446	0,250	0,2375
$C_6H_4 . NO_2$ | C CN . C C . CN ‖ | HOC CO NH metanitrofenildician-glutaconimide	1° Determ. gr. 0,4164 2° „ „ 0,4167 3° „ „ 0,4166 in media gr. 0,4166	0,2297	0,2157
$C_6H_4 . NO_2$ | C CN . C C . CN ‖ | HO . C CO NH paranitrofenildician-glutaconimide	1° Determ. gr. 0,4454 2° „ „ 0,4456 3° „ „ 0,4454 in media gr. 0,4455	0,249	0,2365

Sostanza esaminata	Rame metallico	Zucchero invertito	Saccarosio corrispond.
$C_6H_3<\binom{O}{O}>CH_2$ | C / ⧵⧵ CN.C C.CN ‖ | HO.C CO ⧵ / NH piperonildicianglutaconimide	1° Determ. gr. 0,467 2° „ „ 0,4668 3° „ „ 0,4669 in media gr. 0,467	0,264	0,2508
C_2H_5 | C / ⧵⧵ CH_3C C.CN ‖ | HO.C CO ⧵ / NH metilcianetilglutaconimide	1° Determ. gr. 0,369 2° „ „ 0,370 3° „ „ 0,3709 in media gr. 0,370	0,1982	0,1855
CH_3 | C / ⧵⧵ HC C.CN ‖ | HO.C CO ⧵ / $N.CH_3$ cianmetilglutaconmetilimide	1° Determ. gr. 0,340 2° „ „ 0,3395 3° „ „ 0,3405 in media gr. 0,340	0,179	0,170
CH_3 | C / ⧵⧵ $CH_3.C$ C.CN ‖ | HO.C CO ⧵ / $N.CH_3$ metilcianmetilglutacon-metilimide	1° Determ. gr. 0,399 2° „ „ 0,3968 3° „ „ 0,3972 in media gr. 0,3977	0,217	0,2061

Torino. Laboratorio di chimica farm. e tossic. Febbraio 1906.

L'emissione del carbone in alcune fiamme.

Nota del Prof. ALESSANDRO AMERIO.

(Con una Tavola).

1. Scopo della ricerca. — Mi sono proposto di esaminare l'emissione del carbone finamente diviso e a temperature molto elevate, come si trova nelle fiamme, per poter stabilire se, anche in tali condizioni, esso si comporti come quando è freddo nel nero fumo, cioè come corpo molto approssimativamente nero.

2. Disposizione. — Era perciò necessario paragonare la distribuzione dell'energia negli spettri di queste fiamme, e nello spettro di un corpo nero avente la stessa temperatura.

Ci sono riuscito nel modo seguente che riferisco, per quanto la ricerca non abbia avuto il suo completo sviluppo.

a) *Le fiamme.* — Ne ho adoperate tre differenti. Una di gas illuminante, uscente verticalmente da foro circolare; la sua lunghezza era di cm. 14 circa, il suo spessore, nella parte più luminosa, mm. 6; lo splendore era quivi uniforme per circa 2 cm. di altezza.

La seconda era pure di gas illuminante, però più alta e più grossa della precedente.

La terza era di acetilene, lunga cm. 5, con spessore di mm. 4 ed usciva dal foro circolare di un tubetto capillare di vetro.

Queste fiamme venivano disposte vicino alla fenditura di uno spettrometro, in modo che ad essa fosse affacciata la parte più splendente.

La loro altezza veniva mantenuta costante per ogni singola esperienza, ed uguale, per ogni specie di fiamma al valore detto sopra, mediante un manometro e un regolatore.

b) *I corpi neri.* — La costruzione di un corpo nero, col quale avessi potuto raggiungere la temperatura delle fiamme, avrebbe certo costituito un'ardua impresa.

I corpi neri elettrici di Paschen, Lummer e Kurlbaum, Lummer e Pringsheim, ecc., oltre che dispendiosi, sarebbero stati inadatti, perchè non avrei avuto nessun criterio rigoroso per determinare la condizione nella quale la loro temperatura fosse quella delle fiamme in esame.

Eliminai tale difficoltà coll'artifizio di costituire con le fiamme stesse i corpi che, se anche non sono veramente neri, potevano ugualmente servire pel confronto.

Perciò disposi intorno alla fiamma un cilindro di rame inargentato e speculare internamente, lungo cm. 22 e largo cm. 5, osservando accuratamente che il suo asse coincidesse con quello della fiamma. Una finestra, avente circa 2 mm. di larghezza e 25 di altezza, era praticata parallelamente all'asse, in corrispondenza della regione di massimo splendore.

L'azione di questo tubo d' argento sull' emissione delle fiamme non è tanto semplice. Per vedere quale sia, bisogna tener conto delle seguenti circostanze che si presentano contemporaneamente:

1° La fiamma nella parte più splendente, è essenzialmente costituita da particelle di carbone incandescenti che dànno uno spettro continuo, immerse in anidride carbonica e vapor acqueo che dànno spettri a bande;

2° La temperatura non vi è distribuita uniformemente;

3° La fiamma è più o meno trasparente, per tutti i raggi (eccetto che per quelli emessi dai due gas sopradetti), secondo che le particelle di carbone vi sono più o meno lontane.

Suppongo dapprima che sia nulla l'azione del miscuglio di vapor acqueo e di anidride carbonica, che la temperatura sia distribuita uniformemente e che la fiamma sia opaca; in seguito cercherò l'effetto di queste altre circostanze.

Nell'ipotesi fatta è evidente che almeno nella parte centrale, corrispondente alla finestra, il sistema fiamma e tubo costituisce un corpo nero e che perciò se il carbone fosse già perfettamente nero l'effetto del tubo sarebbe nullo, o al più, poichè il tubo rifletterebbe sulla fiamma dell'energia che altrimenti sfuggirebbe, ne eleverebbe la temperatura e quindi anche

l'emissione; quest'aumento sarebbe più spiccato per le onde corte che per le lunghe (1).

Se il carbone fosse *grigio*, cioè assorbisse incompletamente tutti i raggi nella stessa misura, l'emissione verrebbe aumentata uniformemente in tutto lo spettro, salvo l'effetto dovuto all'aumento di temperatura.

Se per contro il carbone non fosse nè nero nè grigio, si manifesterebbe una differenza tra l'emissione della fiamma da sola e quella della stessa nel tubo, specialmente per quelle onde per le quali il carbone fosse meno assorbente.

Esaminiamo l'effetto dei due gas CO_2, H_2O. Essi emetteranno pure, ma l'emissione delle parti più interne verrà assorbita dagli strati più esterni e più freddi (per quanto, secondo Paschen, l'emissione vada diminuendo di lunghezza d'onda col crescere della temperatura). Essi sottrarranno dall'emissione del carbone i raggi corrispondenti alle loro bande di assorbimento, e la presenza del tubo farà sì che quest'assorbimento si manifesti tanto meglio quanto più trasparente sia la fiamma per le altre regioni dello spettro.

Vediamo ora l'effetto delle differenze di temperatura che esistono tra le varie parti della fiamma (fig. 1).

Se A e B sono a temperatura diversa, il raggio A C B che parte da A, e dopo la riflessione in C va a colpire la particella B, vi trasporta una radiazione diversa da quella che B emette.

Se la particella B fosse nera, ciò non farebbe altro che aumentare la temperatura coll'effetto già visto; così pure se B fosse grigia, e di più, in questo caso, alla radiazione di B si aggiungerebbe parte di quella di A che ha temperatura diversa, perciò l'emissione aumenterebbe in tutto lo spettro in modo, se non uniforme, gradatamente crescente da un estremo all'altro; infine se B per certe onde avesse un assorbimento differente che per certe altre, l'effetto del tubo sarebbe di rinforzare maggiormente l'emissione di quelle onde per cui B fosse meno assorbente.

L'effetto prodotto dalla trasparenza della fiamma sarà evidentemente quello di aumentare l'emissione in modo uniforme per tutto lo spettro, dove non ci sia uno speciale assorbimento.

(1) Quest'effetto però, dai risultati delle esperienze, risulta trascurabile.

Riassumendo si ha dunque che la presenza del tubo deve aumentare l'assorbimento nelle bande dell'anidride carbonica e del vapor acqueo, tanto più quanto più trasparente sia la fiamma; aumentare l'emissione in quelle regioni dello spettro ove il carbone sia meno assorbente se il carbone non presenti un assorbimento uniforme; aumentare l'emissione gradatamente o uniformemente per tutto lo spettro se il carbone sia grigio, o se, essendo nero, la fiamma sia trasparente; avere effetto nullo se il carbone sia nero e la fiamma opaca.

c) *Lo spettrometro.* — Era di Brunner, grande modello; ad esso adattai lenti e prismi di salgemma e un bolometro che descriverò in sèguito. Davanti alla fenditura potevo alzare ed abbassare uno schermo metallico nero.

Per disporre il prisma in deviazione minima seguii due metodi.

Dapprima quello di far riflettere i raggi uscenti dal prisma sopra uno specchio metallico piano, solidale con esso, e fissato in modo che allorquando sul bolometro, che sta fisso, cadono i raggi della riga D del sodio, questi siano in deviazione minima.

Allora, girando solidalmente prisma e specchio, tutto lo spettro viene a scorrere sul bolometro che resta immobile, e si può vedere facilmente che i raggi che vengono a colpirlo a mano a mano, sono sempre in deviazione minima.

Questo metodo presenta degli inconvenienti tra i quali, nel caso mio, i più interessanti sono che la riflessione sullo specchio, oltre che potrebbe modificare leggermente la distribuzione dell'energia nello spettro, indebolisce alquanto l'intensità dei raggi, e che inoltre per far passare sul bolometro tutto un dato spettro, bisogna che il prisma ruoti solo della metà dell'angolo formato dai due raggi estremi, e poichè le letture che si fanno sono della rotazione del prisma, si ha minor precisione che in questo altro metodo che seguii nella maggior parte delle esperienze.

Adattai il bolometro al cannocchiale B dello spettrometro (fig. 2); a questo un altro cannocchiale C, munito di reticolo, in modo da poterlo far ruotare intorno all'asse dello spettrometro, tanto liberamente, quanto solidalmente col bolometro.

Con quest'aggiunta si disponga il prisma P e il bolometro in modo che su questo cada la riga D quando si trovi in deviazione minima; poscia, tenendoli fissi, si aggiusti la posizione

del cannocchiale C in modo che i raggi provenienti dal collimatore e riflessi dalla prima faccia del prisma, diano un'imagine della fenditura coincidente con un filo verticale del reticolo; indi si renda C solidale con B.

Se ora si fanno rotare insieme il bolometro B e il cannocchiale C di un angolo 2α, affinchè sul bolometro cada un raggio in deviazione minima, sarà necessario che il prisma ruoti dell'angolo α nello stesso senso, ciò che si ottiene facilmente facendone rotare la base fino a che sul reticolo di C cada nuovamente l'imagine della fenditura.

3. Il bolometro. — Nella costruzione del bolometro dovetti raggiungere una sensibilità tale che mi potessi servire di un galvanometro a quadro mobile, di Hartmann e Braun, che con 61 ohm di resistenza dà circa 450 mm. di deviazione su scala a 1 m. per ogni microampère, perchè in causa della vicinanza dei tramvai elettrici non era possibile ricorrere agli altri tipi più sensibili.

Perciò ho seguìto contemporaneamente questi due criteri: 1° aumentare la resistenza dei lati del bolometro senza aumentarne la lunghezza, nè diminuire la superficie esposta ai raggi, come avverrebbe mettendo un filo molto sottile; 2° tenerli nel vuoto allo scopo di potervi mandare correnti relativamente forti, senza che si producessero le perturbazioni dovute ai moti convettivi dell'aria.

Per raggiungere il primo intento costruii delle spiraline con filo di Wollaston; esse hanno il diametro di mm. 0,3 e contengono un 80 spire nella lunghezza di 9 a 10 mm.

Dopo liberate le spiraline dall'argento le annerivo (1) platinandole prima, e ricoprendole poi di un leggero strato di nero fumo, dato da una debole fiamma fumosa.

Due di queste spiraline, uguali per quanto è possibile, dove-

(1) Tutte queste operazioni sono di estrema delicatezza, specialmente quando il filo di platino è di pochi millesimi di millimetro. In questo caso, se si cerca di estrarre le spiraline dall'acido nitrico che le ha spogliate dell'argento, senza precauzioni speciali, esse, per via della tensione superficiale, si distendono senz'altro in un filo appena ondulato.

Ci si riesce solo versando sull'acido nitrico uno strato di acqua distillata e su questa uno di alcool, indi tirandole fuori molto cautamente.

vano costituire due lati consecutivi del bolometro, che, per raggiungere il secondo intento, ho fatto come segue (fig. 3).

Due tubi di ottone entrano esattamente l'uno nell'altro. Il tubo esterno lungo cm. 5, largo 3,3 è chiuso anteriormente da un robusto disco di ottone munito di una finestra centrale F rettangolare di mm. 4 × 14. Il tubo interno, lungo cm. 4, è chiuso posteriormente da un altro robusto disco, pure di ottone, munito di cinque aperture circolari; esso porta anteriormente, cioè verso la finestra F, un disco di ebanite E, fissato con due viti; su questo disco sono fissate tre lastrine d'ottone A, B, C, alle quali saldavo le spiraline.

Dietro a queste, nel disco di ebanite, sono praticate due finestre di mm. 2 × 12, e tra E ed il disco anteriore c'è un diaframma d'ottone (non segnato in figura) con due finestre uguali e corrispondenti alle precedenti.

Alle lastrine A, B, C, sono saldati tre fili di rame che escono pei fori 1, 2, 3 attraverso a tappi di ebanite che li otturano a forza, e vanno a pescare in tre bicchierini di mercurio mediante i quali sono messi in comunicazione col resto del ponte di Wheatstone.

Al foro 4 è saldato un tubo d'ottone T.

Per mettere insieme le varie parti procedevo così: prima fissavo con glu marino i tre fili ai tre tappi di ebanite, e questi ai fori 1, 2, 3, una lastrina di vetro al foro 5, e al tubo T un tubo di vetro, che lo abbracciava esattamente, poi saldavo le spiraline a quattro sporgenze delle tre lastrine; spalmavo esternamente il tubo minore con glu marino e poi lo introducevo a caldo nell'altro, in modo che le spirali risultassero parallele al lato maggiore della finestra del disco anteriore.

Poscia chiudevo questa finestra con una lastrina di salgemma a facce piane e parallele fissandola con balsamo del Canadà o con glu marino, e, quando tutto era freddo, facevo il vuoto nel bolometro con una tromba di Geryk connessa col tubo di vetro: finalmente chiudevo questo con un fiamma.

Le due spiraline si trovano, per quanto è possibile, nelle stesse condizioni, ma però di esse solo quella che è centrale è colpita dai raggi che entrano per la finestra, e in nessun modo è possibile veder l'altra, nè, essendo l'interno tutto annerito, può darsi che per via di successive riflessioni la colpiscano raggi in quantità notevole.

Per mettere a posto il bolometro nello spettrometro mi servivo della luce gialla del sodio. Lo disponevo colla spirale centrale parallela alla riga D e nello stesso piano focale, poscia giravo prisma e bolometro, finchè guardando per l'apertura 5 vedessi coincidere bene la riga D e la spirale quando la D era in deviazione minima, finalmente tiravo indietro il bolometro di circa 5 mm. per mettere la spirale nel piano focale della parte media dello spettro.

Dopo ciò procedevo come già ho detto per ogni esperienza.

La corrente che percorreva il bolometro era di circa $\frac{1}{40}$ di ampère; gli altri due lati del ponte erano costituiti da due cassette di resistenza e da un reocordo.

Il galvanometro, essendo a quadro mobile, presentava lo inconveniente che quando era chiuso solo sui lati del ponte, che avevano una resistenza di circa 40 ohm ciascuno, si muoveva troppo lentamente.

Ero perciò costretto a diminuire la sensibilità della disposizione, introducendo nel circuito una resistenza variabile dai 100 ai 350 ohm, a seconda delle circostanze, affinchè le deviazioni si compissero in un minuto.

Per compensare in parte questa diminuzione di sensibilità ho ricorso a questo espediente. Anzichè tenere scala e cannocchiale uniti, alla stessa distanza dal galvanometro, p. es. m. 1,20, pongo la scala a 2 m., il cannocchiale a cm. 40; in tal modo l'ingrandimento non è variato, e poichè le deviazioni diventano quasi doppie, la sensibilità è cresciuta in proporzione.

4. Esecuzione delle esperienze. — In queste condizioni la sensibilità è sufficiente, il galvanometro sta in quiete, o meglio non ha oscillazioni provenienti da rapide variazioni nella temperatura delle spirali. Tuttavia, perchè le esperienze riuscissero bene e concordi ho dovuto far fronte ancora ad un inconveniente.

Durante ogni esperienza il galvanometro aveva un movimento lento, continuo e apparentemente uniforme, che solo dopo qualche ora diventava trascurabile ed era dovuto alla inevitabile disuguaglianza delle spirali, e al notevole calore che si svolgeva nel bolometro, per cui si richiedeva un tempo considerevole prima che si stabilisse uno stato di equilibrio.

Procedetti così: prima badai di diaframmare con cura il cammino dei raggi in modo che giungesse al bolometro solo una stretta zona intorno al raggio che colpiva la spirale; inoltre, dopo aver disposto lo spettrometro per la deviazione minima di un raggio, attendevo che il galvanometro avesse compiuta la sua deviazione, poi dal posto ove ero abbassavo lo schermo che andava a coprire la fenditura e, al termine di un minuto, durante il quale il galvanometro era tornato nella posizione di riposo, leggevo al galvanometro e rialzavo lo schermo; dopo un altro minuto rileggevo e riabbassavo, e così per cinque letture.

Dalla media di due letture fatte quando la fenditura è illuminata, sottraendo la lettura intermedia si ha il valore della deviazione corretto dallo spostamento detto. Dalle cinque letture ottenevo così due valori per le deviazioni e ne facevo la media; essi furono sempre concordi salvo pochi casi, nei quali ripetei le misure.

5. **Risultati**. — La fiamma dell'acetilene in tubo d'argento dà le più grandi deviazioni per tutta l'estensione dello spettro. Segue da vicino l'istessa fiamma libera. La fiamma del gas illuminante, in tubo d'argento ha un'emissione generalmente inferiore a quella dell'acetilene libera, salvo forse nelle grandi lunghezze di onda; la stessa, libera, presenta sempre la minor emissione.

Coi dati così ottenuti costruii le curve rappresentanti la distribuzione dell'energia nei vari spettri, portando come ordinate le deviazioni del galvanometro, come ascisse gli angoli letti allo spettrometro, partendo dalla posizione in cui la riga D cade sul bolometro, presa come zero.

Riducendo alla stessa scala le curve corrispondenti alle due fiamme di gas illuminante adoprate, non riscontrai differenza sensibile, perciò le sovrapposi tutte e ne ricavai la curva I della prima tavola.

Nello stesso modo ottenni la curva II della stessa tavola, che si riferisce alle stesse fiamme circondate dal tubo d'argento.

Siccome la presenza del tubo fa crescere molto le deviazioni del galvanometro, per la fiamma del gas illuminante, perchè si potessero paragonare meglio i risultati, costruii le due curve, dopo varie prove, in scale tali che risultassero eguali le ordinate corrispondenti alla lunghezza d'onda $\lambda = 1,5\ \mu$.

Le curve III e IV della seconda tavola, si riferiscono rispettivamente alla fiamma dell'acetilene libera o in tubo d'argento.

Si vede che le curve I e II, mentre procedono quasi sovrapposte fino a $\lambda = 1,5\ \mu$, da questo punto in poi si staccano sensibilmente e l'emissione della fiamma libera si mantiene notevolmente inferiore a quella della stessa nel tubo d'argento.

Se si nota che la fiamma del gas illuminante in queste condizioni è trasparente, tanto che attraverso alla sua parte più luminosa si riesce bene a leggere uno scritto, si è autorizzati a conchiudere che il carbone a quelle elevate temperature è ancora nero, o almeno grigio, per le lunghezze d'onda inferiori a circa $\lambda = 1,5\ \mu$, ed è relativamente poco assorbente pei raggi di maggior lunghezza d'onda.

Anche l'emissione della fiamma dell'acetilene è rinforzata dalla presenza del tubo, ma in grado assai minore dell'altra fiamma.

Le curve III e IV sono state ridotte in scala come le altre due; se esse non sono identiche, è certo però che la differenza rimarchevole presentata dalle I e II, vi è assai ridotta.

Tuttavia questo risultato non è in contraddizione col precedente, anzi dà origine ad un'osservazione di una certa importanza.

Infatti riflettiamo che delle fiamme esaminate quella del gas illuminante è ben trasparente, quella dell'acetilene è opaca o quasi.

Ciò dimostra che nella prima le particelle assorbenti di carbone vi sono così lontane, che buon numero di raggi possono attraversarla senza incontrarne e quindi senza venirne assorbiti in tutto o in parte, a meno dell'azione già considerata dei due gas: anidride carbonica e acqua.

In conseguenza l'emissione proveniente da una particella interna potrà in parte notevole uscire dalla fiamma senza subire modificazioni per parte delle altre particelle; quindi se la radiazione di ogni particella non è nera nè grigia, non sarà neanche tale quella emessa dalla fiamma; e se questa è deficiente per le onde lunghe vorrà dire che per esse le particelle sono poco assorbenti.

Circondandola col tubo d'argento vengono compensate queste deficenze e la radiazione avvicinata a quella del corpo nero, secondo la discussione fatta al pgr. 2. *b*).

Consideriamo per contro la fiamma dell'acetilene. In essa il carbone vi è densissimo, perciò l'emissione di una particella interna non può uscire senza incontrarsi in altre particelle, e perciò, anche se queste non sono nere, essa verrà modificata nelle successive riflessioni e avvicinata alla radiazione del corpo nero.

In tal caso l'emissione della fiamma consterà di due parti: una proveniente dalle particelle superficiali e non modificata, o poco, dalle riflessioni, l'altra più interna e prossimamente nera. Questa sarà tanto più preponderante quanto più lontana dal corpo nero è l'emissione di ogni particella.

Per tal ragione l'emissione della fiamma sarà quasi come se questa fosse nera, e la presenza del tubo d'argento avrà azione solo sopra la radiazione delle particelle più esterne, cioè sarà poco notevole come si verificò realmente.

Se questa interpretazione dei risultati sia vera o no, avrei voluto verificare esaminando l' assorbimento esercitato dalla fiamma a gas illuminante sopra la radiazione della fiamma dell'acetilene nel tubo d'argento.

Ma non mi fu concesso il tempo necessario per questa ricerca.

Tutte le curve presentano in modo marcatissimo le bande d'assorbimento del vapor acqueo e dell'anidride carbonica, sopratutto la II corrispondente alla fiamma del gas illuminante nel tubo d'argento, per quanto il cammino dei raggi avvenisse sempre per aria relativamente disseccata e liberata dall'anidride carbonica mediante acido solforico, cloruro di calcio e calce viva.

Riducendo le curve allo spettro normale, per cui bisogna portare come ascisse le lunghezze d'onda e come ordinate le deviazioni del galvanometro divise per $\frac{d\lambda}{d\alpha}$ (α essendo la deviazione minima prodotta dal prisma sul raggio di lunghezza d'onda λ), si ottengono altre quattro curve nelle quali, se il carbone fosse nero, si dovrebbero verificare le leggi dell'emissione dei corpi neri.

Così si ha che la fiamma del gas illuminante in tubo di argento presenta il massimo d'emissione per $\lambda = 1{,}30\ \mu$, cioè fuori delle bande d'assorbimento. Per la legge di spostamento del Wien

$$\lambda_{max}\,\Theta = 2930 \tag{1}$$

dove si esprimono le λ in μ e le Θ indicano le temperature assolute, ne risulterebbe per la parte più splendente

$$\Theta = \frac{2930}{1,30} = 2250^\circ.$$

Lo stesso massimo si verifica allorchè la fiamma è libera; ora le curve trovate indicano che le fiamme emettono proporzionatamente tanto se libere che nel tubo fino a $\lambda = 1,5\mu$: ne viene che la (1) *è pure applicabile per la determinazione della temperatura di queste fiamme.*

In conseguenza la fiamma libera del gas illuminante ha ancora la stessa temperatura.

Per la fiamma dell'acetilene, in entrambi i casi si verifica il massimo per $\lambda = 1.28$ per cui risulta $\Theta = 2280^\circ$.

È bene però notare che questo metodo per determinare le temperature è assai impreciso, e che del resto, potrebbe darsi, come mi pare assai probabile, che questa temperatura non dovesse venire intesa nel significato solito, perchè la natura dell'emissione del carbone nelle fiamme può dipendere oltre che dalla temperatura di queste, anche dall'eccitazione prodotta sulle particelle dalla reazione chimica.

6. Conclusione. — Riassumendo ho dunque dimostrato che:

1° Il carbone nelle fiamme non è nero, e neanche grigio per tutta l'estensione dello spettro, ma solo per le onde $< 1,5\,\mu$; per le onde maggiori ha un potere assorbente relativamente debole;

2° Ciò nondimeno la fiamma dell'acetilene emette sensibilmente come un corpo nero;

3° Le temperature di emissione delle particelle di carbone in queste fiamme, e probabilmente anche in altre (petrolio, olio, ecc.) sono calcolabili in base alla legge di spostamento del Wien, come se il carbone fosse un corpo nero.

Ringrazio di cuore il prof. Andrea Naccari che, per ben due periodi di vacanze estive, pose a mia disposizione i mezzi del Laboratorio di Fisica della R. Università di Torino, da lui diretto.

Reggio Calabria, dicembre 1905.

TAVOLA 1ª

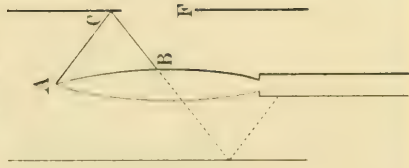
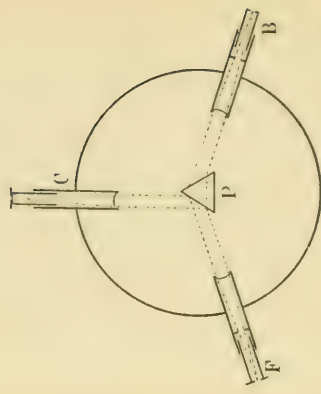
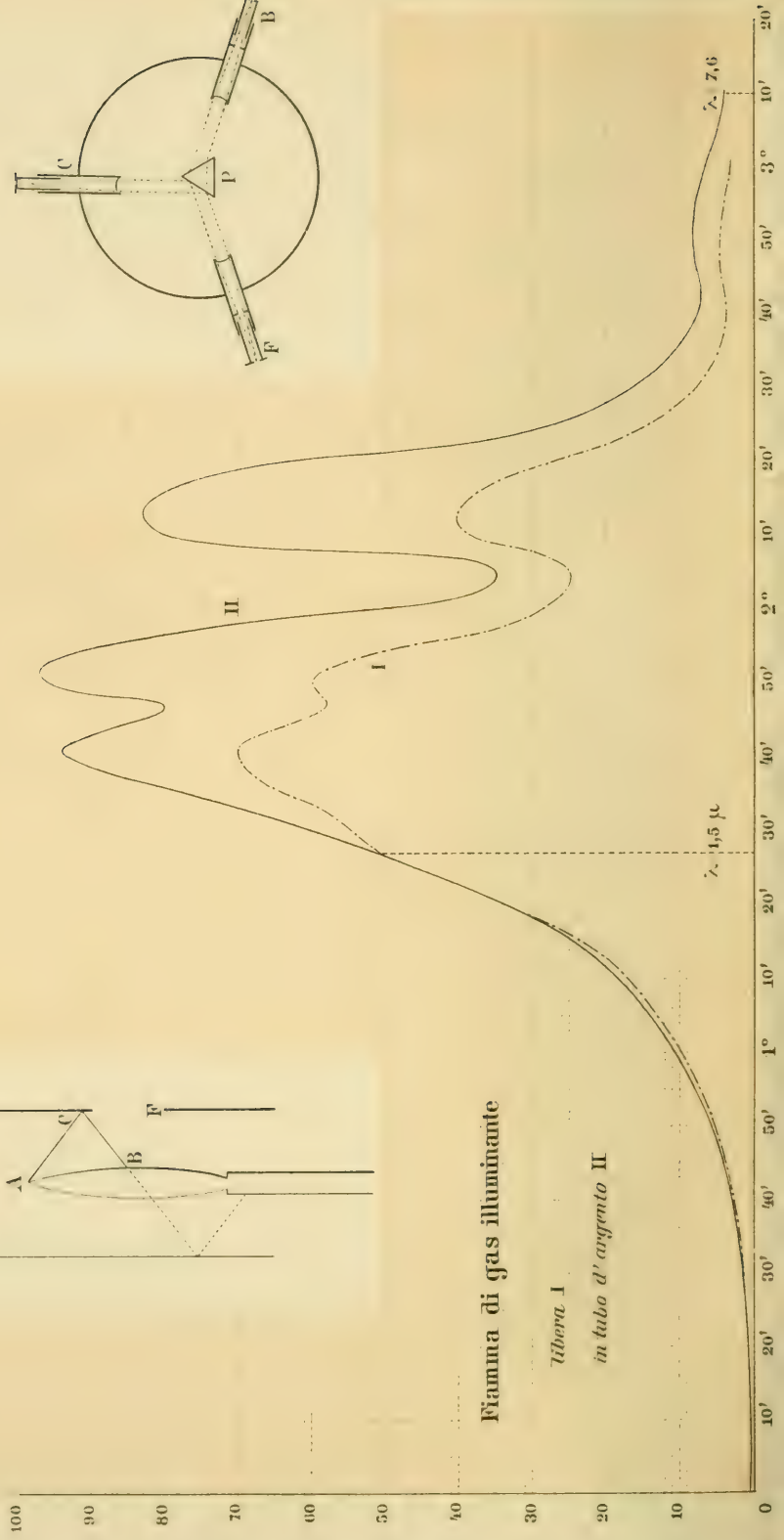
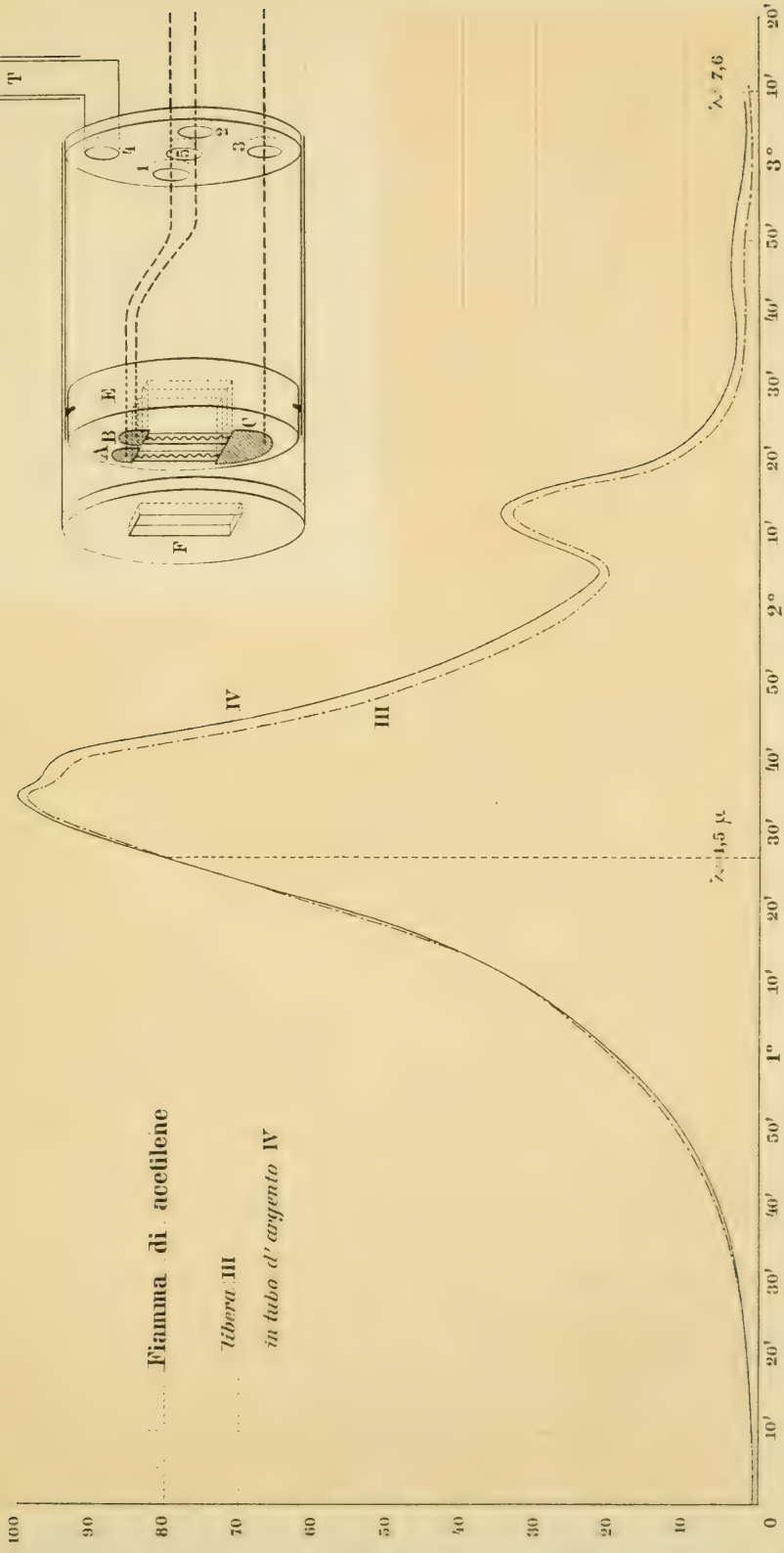



Fig. 1
A
B
C
F
Fig. 2
C
P
F
B
Fiamma di gas illuminante
libera I
in tubo d' argento II
I
II
λ 1,5 μ
λ 7,6
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
10'
20'
30'
40'
50'
1°
10'
20'
30'
40'
50'
2°
10'
20'
30'
40'
50'
3°
10'
20'

TAVOLA 2ª.

Fig. 3
Fiamma di acetilene
libera III
in tubo d' argento IV
IV
III
λ 1,5 μ
λ 7,6
A
B
C
E
F
T
1
2
3
4
5
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
10'
20'
30'
40'
50'
1°
10'
20'
30'
40'
50'
2°
10'
20'
30'
40'
50'
3°
10'
20'

Breve aggiunta alla memoria :
“ Nuovi principî di Geometria projettiva complessa ”.

Nota di MARIO PIERI.

Nel Saggio, ch'ebbi l'onore di pubblicare con questo titolo nelle Memorie dell'Accademia delle Scienze (t. LV_2, 1905) accolsi in ufficio di POSTULATO **XXVIII** — e cioè come proposizione primitiva — il seguente principio (Ivi, pag. 28-216):

“ Se a, b, c sono punti l'un l'altro distinti d'una retta complessa r, “ esiste un'aliomografia che li rappresenta ciascuno in sè “ stesso, senza però convertire in sè stesso ogni punto di r ”;

proposiz.[e] la quale può subito tradursi nell'altra equivalente (Ivi):

“ Sotto la stessa ipotesi, l'inversione rispetto alla catena $|abc|$ “ è una trasformazione aliomografica della retta r in sè “ stessa (cioè muta le catene in catene) ”.

Ma, non potendomi dissimulare la gravità di una concessione sì fatta, emisi il dubbio, che questa fosse per apparire eccessiva (Ivi, pag. 29-217); tanto più che la sua indipendenza dalle premesse anteriori non era affermata, né stabilita in niun modo. — Tornando ora a considerar questo punto, mi accorgo che l'anzidetta prpsz.[e] può veramente dedursi (come dubitavo) dai Postul.[i] **I-XXVII** che la precedono: e il desiderio che di codesta semplificazione deduttiva rimanga traccia negli Atti Accademici mi spinge a chiedere ancora ospitalità per la dimostrazione seguente.

Potrò liberamente appellarmi al contenuto dei §§ 1, 2, 3 e alle prime prpsz.[i] del § 5; poi che anche queste riposano in tutto sui principî **I-XXVII**, come fu rilevato a pag. 35-223.

a) " Se i punti a e b sian separati armonicamente da due punti p " e q d'una catena χ, gli armonici di a e b rispetto a χ saranno eziandio separati armonicamente dai punti p e q „. [Si può conceder, che a e b non sian separati armonicam.e da χ. — Detti a' e b' gli armonici di a e b rispetto a χ (§ 3, Tr. 12), i quattro punti (distinti) a, b, a', b' giaceranno sopra una stessa catena ρ, ortogonale a χ in due punti (§ 3, Tr. 13 e Df. 3ª) che chiameremo u e v. Ora i due punti a e b son separati l'un l'altro dalla catena χ (§ 5, Tr. 5) e dalla coppia u, v (§ 5, Tr. 1): per la qual cosa i due punti armonici ad ambo le coppie (a, b) ed (u, v) (XXIV) saranno armonici rispetto a ρ (§ 3, Df. 2), e giaceranno in χ (§ 3, Df. 3ª e Tr. 15): anzi coincideranno coi punti p e q, dal momento che, per ipts., a e b non separano armonicam.e χ. Saranno dunque in involuzione su ρ le tre coppie di punti (u, v), (a, b), (a', b'') — dove $b'' \equiv Arm(p, q, a')$ — grazie all'aliomografia involutoria $Arm(p, q, r)$ (§ 2, Tr. 5º) che rispecchia in sè stessa la catena ρ, e al Tr. 7 § 3 per cui si sa che b'' deve cader su ρ. Ma questa catena è altresì convertita in sè stessa dalla trasformaz.e $Arm(u, v, r)$, che rappresenta u, v, a', b rispettiv.e in u, v, a, b': onde saranno pure in involuzione su ρ le tre coppie (u, v), (a, b), (a', b'); dunque $b'' = b'$ (§ 2, Tr. 4, ecc.) c. v. d.].

b) " Dato che p, q siano punti distinti d'una catena χ ed a un " punto (della medesima retta r) escluso da χ, poscia a' " l'armonico di a rispetto a χ; qualunque volta un punto b " della catena $|paq|$ non sia separato da a per mezzo dei " punti p e q, l'armonico di b rispetto a χ giacerà sulla " catena $|pa'q|$ „. [Si può conceder che b sia diverso da a, e che la catena $|paq|$ non sia ortogonale a χ. — I punti a, b, a', b' — dove b' è l'armonico di b rispetto a χ — spetteranno ad una catena ρ ortogonale a χ in due punti u e v: e qui pur, come dianzi, saranno in involuzione su ρ le tre coppie (u, v), (a, b) e (a', b'), grazie all'aliomografia involutoria $Arm(u, v, r)$. Ora, poiché le catene ρ e χ — passanti sì l'una che l'altra per i due punti distinti u e v — tagliano una medesima catena $|paq|$, non contenente u né v, secondo coppie di punti che non si separan fra loro, nemmeno i punti u e v potranno esser separati dai punti a e b (§ 5,

Tr. 6): e però la catena ρ, che è tagliata in queste due coppie di punti dalle catene $|paq|$ e χ ed esclude ambo i punti p e q, sarà inoltre tagliata dalla catena $|pa'q|$ nel punto a' e nel conjugato di a' rispetto all'involuzione (u, v), (a, b) (§ 5, Tr. 6); dunque in a' e b', c. v. d.].

c) " L'inversione rispetto ad una catena χ trasforma qualunque " catena che tagli χ in una catena. „ [Siano p e q due punti arbitrarî di χ (purchè diversi fra loro); ed a, a' due punti separati armonicam.ᵉ da χ. L'armonico di un punto b della catena $|paq|$ rispetto a χ giacerà per certo in $|pa'q|$, se a e b non separan p e q (b). Ora, preso a piacere sulla catena $|paq|$ un punto c, che insieme con a separi i punti p e q — e d sia l'armonico di c rispetto a p e q — l'inversione rispetto a χ porterà questi punti c e d in altri due punti c' e d' eziandio conjugati armonicam.ᵉ fra loro rispetto a p e q (a). Ma, per essere il punto c esterno ad ambo i segmenti (paq), (pdq) non potranno separarsi a vicenda le coppie (a, d) e (p, q) (θ: § 6, P 12): sicchè, grazie a b), il punto d' giace sulla catena $|pa'q|$, e questa non si distingue dalla $|pd'q|$ (§ 2, Tr. 2). Dunque anche il punto c', in quanto appartiene a $|pd'q|$ (XVII), giacerà nella $|pa'q|$. Ecc.]

d) " Dall'esser χ una catena ed a, b, c tre punti esterni a χ " (oltre che diversi fra loro) ma tali che la catena $|abc|$ sia " tangente a χ, si deduce che gli armonici di a, b, c rispetto a χ sono eziandio concatenati col punto di contatto. „ [Detti a', b', c' questi armonici e p il punto di contatto; nessuna delle catene $|a'pb'|$, $|a'pc'|$ potrà incontrarne χ fuori di p: se no, grazie a c), dai punti comuni passerebbe eziandio la catena $|apb|$, contro l'ipts. Dunque $|a'pb'| = |a'pc'|$, in virtù del pstl. XXV].

e) " Se due punti e, f separano armonicamente ciascuna delle " catene λ, μ, ν, ..., le tracce di queste sopra una stessa ca- " tena χ (scelta a piacer sulla retta) saranno in involuzione. „ [Sia ρ la catena, che passa per ambo i punti e, f ed è ortogonale a χ. Le catene λ e χ essendo ambedue ortogonali a ρ, i loro punti comuni, ove esistano, saranno armonici rispetto a ρ (§ 3, Tr. 17); e quindi anche rispetto ai due punti, in cui ρ s'incontra con χ. Ma, per la stessa ragione, questi due punti saranno eziandio conjugati armonicam.ᵉ rispetto alle tracce di μ su χ, di ν su χ, ..., ove esistano].

f) " L'inversione rispetto ad una catena χ trasforma qualunque " catena λ che non incontri χ (pur giacendo con questa sulla " medesima retta) in un'altra catena. „ [Siano a e b due punti arbitrarî di λ (pur che distinti fra loro), a' e b' i loro armonici rispetto a χ; e pongasi $|aba'| \equiv \sigma$. Le catene χ e σ si taglieranno in due punti u e v armonici ad ambo le coppie (a, a') e (b, b'): onde saranno in involuzione su σ le tre coppie di punti (u, v), (a, b), (a', b'). Ma per ipotesi esiston due punti e, f armonici così rispetto a λ, come rispetto a χ (§ 3, Tr. 20); poscia esiste una catena λ' passante per a' e separata armonicam.te dalla coppia e, f (§ 3, Tr. 10): e d'altra parte su σ le tracce di χ, λ e λ' saranno coppie di punti in involuzione (e). Dunque σ e λ' dovranno incontrarsi, fuori di a', nel punto che corrisponde ad a' secondo l'involuzione definita dalle due coppie (u, v) ed (a, b): vale a dire nel punto b'].

Da c), d), f) si raccoglie la verità di quanto asserimmo innanzi: cioè che " *l'inversione rispetto ad una catena è sempre un'aliomografia* „. —

Mi sia concesso in fine di segnalare, che tutto il § 5° e la maggior parte del 4° potrebbero ridursi a non dipendere affatto dal principio **XXIX**: e che la distinzione fra *omografia* ed *antiomografia* sopra una retta complessa (e similmente nel piano e nello spazio) potrebbe anche farsi *senza uscir dalla retta*, e senza appellarsi ad alcun nuovo principio, dopo i postul.i **I-XXVII**; chiamando senz'altro $\left.\begin{array}{c}\text{collineazione}\\\text{anticollineazione}\end{array}\right\}$ (della retta, del piano, ... in sè medesimi) l'aliomografia che $\left.\begin{array}{c}\text{equivale}\\\text{non equivale}\end{array}\right\}$ al *quadrato* di un'altra aliomografia. Anzi allora si proverebbe il teorema fondamentale di v. Staudt *senza bisogno di richiamarsi al principio* **XXIX** — cui resterebbe soltanto l' ufficio di stabilire qualmente la corrispondenza definita *per projezioni successive* è ancora una *collineazione*, nel nuovo significato del termine.

Catania, Gennaio del '906.

L'Accademico Segretario
Lorenzo Camerano.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 21 Gennaio 1906.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Rossi, Carle, Brusa, Carutti, Pizzi, De Sanctis, Ruffini e Renier Segretario. — Il Direttore della Classe, Socio Ferrero, scusa l'assenza.

L'atto verbale dell'adunanza antecedente, 7 gennaio 1906, è approvato.

Il Socio Brusa annuncia di aver ricevuto la relazione intorno al disegno del nuovo Codice di procedura penale. Desidera che la Classe ne prenda cognizione, perchè implica argomenti di generale interesse; quindi promette di riferirne in altra tornata. Per il momento segnala alcune disposizioni per le quali il nuovo Codice previene le altre nazioni progredite, trattenendosi in ispecial guisa sulle garanzie della libertà civile durante le istruttorie ed i dibattimenti d'assise.

Il Presidente ringrazia il Socio Brusa in nome della Classe e prende atto della sua promessa.

L'Accademico Segretario
Rodolfo Renier.

Torino, Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi.

CLASSI UNITE

Adunanza del 28 Gennaio 1906.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: Naccari, Spezia Camerano, Segre, Peano, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti, Parona, Mattirolo, Morera, Grassi e Fusari; il Socio Somigliana scusa l'assenza;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: Boselli, Vice Presidente dell'Accademia, Carle, Graf, Cipolla, Brusa, Pizzi, De Sanctis, Ruffini e Renier, Segretario.

Si approva l'atto verbale dell'adunanza plenaria antecedente, 30 aprile 1905.

Il Presidente si rallegra, in nome del sodalizio, col Socio Brusa per la sua recente nomina a Senatore del Regno, ed il Socio Brusa ringrazia.

L' " American Philosophical Society „ di Philadelphia invita l'Accademia a prendere parte alle feste bicentenarie della nascita di Beniamino Franklin. Su proposta del Socio Naccari sarà invitato a rappresentare l'Accademia a quelle feste il Socio corrispondente Samuel Pierpont Langley di Washington.

Sono quindi lette le relazioni, che compaiono negli *Atti*: 1° quella della Commissione per il premio Gautieri (letteratura, triennio 1902-1904) letta dal relatore Socio Ruffini; 2° quella della 2ª Giunta per il premio Bressa (nazionale, quadriennio 1901-1904) letta dal relatore Socio Naccari.

È aperta dal Presidente la discussione sulle proposte fatte dalle singole Commissicni. Prendono la parola i Soci Brusa, De Sanctis, Naccari e Pizzi.

Quindi, a norma dei regolamenti speciali, chiuso definitivamente il periodo delle proposte, si procederà nella prossima adunanza a Classi Unite, del 4 febbraio prossimo, al conferimento dei due premi.

Relazione della Commissione per il premio Gautieri.

Onorevoli Colleghi,

I Soci, a cui Voi commetteste di farvi proposte per il conferimento del premio Gautieri, da assegnarsi alla migliore opera di letteratura pubblicata nel triennio 1902-1904, non hanno potuto accordarsi pienamente nelle loro conclusioni.

È parso, innanzi tutto, ad una maggioranza di essi, composta dei Soci Manno e Ruffini, che delle opere attinenti alla poesia, intesa naturalmente la parola nel suo più largo senso, o, se volete, alla letteratura di invenzione, nessuna ve ne fosse la quale veramente sulle altre eccellesse non solo per il magistero dell'arte, ma ancora per il valore morale o civile del pensiero informatore. Del quale è fermo convincimento dei detti Soci che l'Accademia debba tenere gran conto nell'assegnare i premii; e ciò per tutte quelle ragioni che furono poste in così evidente rilievo dalla prima relazione per il conferimento di questo medesimo premio, e che del resto possono essere chiarite, con l'efficacia sopra ogni altra probativa dell'esempio, dal semplice ricordo dell'opera allora premiata, che fu il *Piccolo mondo antico* del Fogazzaro. Escluso che esistesse per il nostro triennio un'opera di letteratura artistica in eguale misura di questa e per eguali qualità eccellente; e reso, con ciò, anche più malagevole e malsicuro, che di sua natura già non sia, il còmpito di giudicare delle rimanenti, la maggioranza stimò, che il partito migliore per la Commissione fosse di volgersi senz'altro alle opere di letteratura scientifica, di storia cioè e di critica letteraria; ritenendo, essa maggioranza, che meglio convenga agli ufficii della Accademia, che s'intitola delle scienze e non delle lettere, e meglio risponda agli intenti del premio il compensare — se meritevole — il lavoro oscuro, troppo dai più disconosciuto, e troppo sovente ingrato del ricercatore e del critico, anzi che un lavoro, il quale può trarre — se valido — dal suo successo medesimo presso l'universale compensi di ogni maniera.

È parso, per contro, ad una minoranza, costituita dal Socio Ferrero, che il rapporto fra le cose più sopra asserite e i concetti ivi esposti avesse da invertirsi; e che, pertanto, mancando

a suo avviso un'opera di storia o di critica letteraria veramente insigne, fosse miglior partito volgersi ad alcuna di quelle più applaudite produzioni di varia letteratura, o in versi o in prosa, delle quali non fu difetto nel triennio; poichè l'Accademia meglio avrebbe con ciò provveduto non solo a compiere la volontà del fondatore, ma anche a conciliarsi il consenso del pubblico, il quale ebbe, appunto nel caso testè menzionato, a manifestare un maggiore compiacimento che non mai per l'addietro dell'operato dell'Accademia, vedendola entrare nelle più fresche correnti della vita intellettuale del paese.

Di qui l'impossibilità di una proposta unica.

Se non che, pur nel farvi più proposte, a un qualche accordo si sarebbe potuto ad ogni modo addivenire, ove la Commissione si fosse indotta a proporvi la divisione del premio, oppure ancora nell'ipotesi che, lasciando a Voi di scegliere fra le due categorie della letteratura artistica o della scientifica, maggioranza e minoranza avessero però creduto di poter accedere, in maniera subordinata, ciascuna alla proposta dell'altra; nel che — sia detto di passata — a torto altri ravviserebbe una contraddizione o un eludere il còmpito assegnato alla Commissione, vista appunto la diversità delle proposte e la questione pregiudiziale di principio che essa implica. Ma neppure questo le riuscì, se non in parte. Ed ecco perchè, ed in che modo.

Dopo un conscienzioso lavorìo di eliminazione, compiuto in entrambi i campi con il concorso volonteroso di tutte e due le parti; — poichè, è bene che lo si avverta, divarii di vedute e non contrasti vi furono nella Commissione —; la maggioranza decise di fermare la sua attenzione sull'opera del Prof. Emilio Bertana, che s'intitola:

Vittorio Alfieri, studiato nella vita, nel pensiero e nell'arte, con lettere e documenti inediti, ritratti e fac-simile, Torino, Casa editrice Ermanno Loescher, 1ª ed. 1902, 2ª ed. 1904; pp. IX-599.

La minoranza invece mise innanzi il nome del Pascoli, del quale cadono nel triennio queste due raccolte di versi:

Canti di Castelvecchio, 3ª ediz., Bologna, Zanichelli, 1905.
Poemi conviviali, 2ª ediz., Bologna, Zanichelli, 1905.

Ora, mentre i Soci Manno e Ruffini assentirono, dal canto loro, a che il Pascoli fosse proposto anche in loro nome, il Socio

Ferrero, dal canto suo, dichiarò invece di non potere acconciarsi alla proposta del Bertana, pur riconoscendo nel libro di lui preziose doti di ricercatore laborioso e felice.

Ragioni del diniego, francamente e nettamente espresse, queste: il Bertana non seppe, forse perchè non piemontese, penetrare a fondo nell'anima dell'Alfieri nè comprendere a pieno l'ambiente piemontese del tempo; troppo visibile poi in lui il proposito di diminuire la grande figura storica dell'Alfieri, il che non può non ferire il sentimento patriottico di quanti si gloriano di essere suoi compaesani.

Piemontesi entrambi, i Soci Manno e Ruffini hanno però creduto di tener ferma la loro proposta. Vero, che una maggiore misura in qualche giudizio e una minor crudezza in qualche espressione avrebbero cresciuto pregio al libro e considerazione all'autore e, anzi, persino efficacia alla sua dimostrazione sempre che il documento da lui scovato dice più assai del mordace commento; ma vero del pari che la critica del Bertana non si scompagna mai dalla prova più rigorosa dei fatti; vero quindi ch'essa non trascende mai i diritti della ricerca scientifica; vero infine che l'impressione di severità eccessiva che la lettura del libro lascia è derivata in massima parte, come l'autore stesso confessa, dalla sua " scarsa attitudine ad adoperare, scrivendo, il *sordino* „. Ed è poi non meno vera ancora quest'altra cosa, che coloro stessi, i quali si sono messi a rimbeccare il Bertana con la maggiore vivacità, hanno però ampiamente riconosciuto che il suo non è solamente un vigorosissimo saggio di critica storica e letteraria, ma un lavoro di importanza capitale per lo studio dell'Alfieri.

Al quale proposito è da considerare, che se il libro, giungendo proprio nel punto che in Italia si commemorava il primo centenario della morte dell'Alfieri, dovette forse a tale congiuntura parte della rara fortuna che gli toccò di avere in un anno una nuova edizione, per un altro verso però dalla stessa fonte gli è derivata la poca benevolenza con cui da molti fu accolto; poichè a molti appunto degli Italiani, assorti e accesi in glorificare uno dei più possenti ideali autori del loro risorgimento nazionale, è suonata male, e si comprende, la fredda parola dello scienziato. Ma che nel Bertana non fosse, come egli stesso dice molto bene in quello stile nervoso e incisivo che gli è proprio,

il proposito di fare il *guastafeste*, risulta non solo da ciò, ch'egli non è di sicuro persona di così povera ispirazione e di così cattivo gusto, e che d'altra parte per feste non usa, almeno da noi, mettere insieme opere di così lunga lena com'è la sua, ma ancora e massimamente da tutta la anteriore sua preparazione scientifica. Cimentatosi, invero, già da tempo con altri parecchi suoi lodatissimi saggi nella scabrosa storia letteraria del settecento, così da acquistarvi una competenza che in Italia non ha forse la uguale, egli era dalla forza stessa delle cose sospinto a doversi occupare o prima o poi, ognun l'intende, dell'Alfieri. Ed egli l'ha saputo fare da par suo.

Intanto, il centenario alfieriano è oramai trascorso; ma tutta la congerie di pubblicazioni, e alcune certo di non piccolo valore, che in quella occasione son venute fuori, non hanno però conferito — e assai ci manca — quanto l'opera sola del Bertana alla storia della vita dell'Alfieri, del suo pensiero e della sua arte: che egli ricercò a fondo, e la vita in modo più particolare, usando de' più legittimi e più sicuri metodi della critica storica, e non disdegnando neppure di giovarsi, ma con discernimento e temperanza grandissimi, anche dei dettami più moderni delle discipline psico-fisiche. E a lui riuscì di mostrare per davvero e per il primo, come gli elementi forniti dalla genuina indole dell'Alfieri e i dati della sua esistenza reale siansi venuti confondendo coi tratti di certo suo ideal modello di sè medesimo e con essi siffattamente componendo, in una quasi ipostatica unione, da generare quella figura, mirabilmente rilevata di chiaroscuro, profondamente segnata dalla impronta di una volontà inflessibile, simpaticamente armonica pur nelle asperità impetuose, che l'Alfieri stesso fermò nella Autobiografia, dalla quale passò poi nella storia e quasi nella leggenda.

Ora appunto, poichè la gloria dell'Alfieri è oramai, come lo Zanella già aveva detto, “ più gloria d'uomo che di scrittore „, e della sua produzione letteraria più viva di tutto e sola veramente popolare è la *Vita*, chi vorrà unirsi al biasimo, che altri volle dare al Bertana, di essersi indugiato intorno alla figura dell'uomo più che non a quella del pensatore e dell'artista? E poichè, come in ogni altra più povera anima umana, in ogni altra più oscura esistenza di mortale, anche nelle anime più alte e nelle esistenze più fulgide, quali furono quelle dell'Alfieri, sono incon-

seguenze, manchevolezze, tortuosi meandri bui, doveva il Bertana coprirli di silenzio? Forse che la scienza ha minore diritto che la giustizia, che innanzi a lei si dica non solo la verità, ma *tutta* la verità? O forse che non è venuto ancora il tempo, che intorno all'Alfieri si faccia opera di pura scienza?

Al quale riguardo un ricordo storico, che direttamente ci tocca, si offre opportuno a chiarire il nostro pensiero. Il 20 marzo 1818 l'Accademia delle Scienze di Torino prometteva in premio una medaglia d'oro del valore di 30 zecchini all'autore della migliore memoria, che avesse difesa la gloria dell'Alfieri contro i notissimi attacchi dello Schlegel. Nessuna delle memorie presentate meritò il premio. Opera, per altro, altamente civile fu quella della nostra Accademia allora, che quel bene, che l'Alfieri fece, al dire del Bertana stesso, " operando sulle torbide coscienze e sulle molli fibre degli Italiani scaduti „, era ancora ben lontano dall'avere spiegata la sua piena efficienza. Ma vorremmo forse dire con ciò, che non sarebbe ugualmente da lodarsi, non ugualmente consona allo spirito e ai bisogni del tempo, non ugualmente ossequiosa alla memoria del grande Piemontese l'opera dell'Accademia che premiasse ora lo studio più importante e, quanto alla copia dei documenti e alla loro critica, quasi definitivo, che intorno a lui fu fatto?

Questo il pensiero dei Soci Manno e Ruffini nel farvi la loro proposta prima e principale.

Schiettezza vuole poi che essi vi dicano ancora, che il loro assentire alla diversa proposta della minoranza fu non solamente subordinato a quella loro propria, di cui si è detto fin qui, ma ancora non senza una qualche riserva e, forse, una qualche esitazione.

Intendiamoci bene: nei Soci Manno e Ruffini non è di certo meno vivace e meno vibrante che in tutti Voi, onorevoli Colleghi, e che del resto in tutti gli Italiani, l'ammirazione per la nobile, per la pura, per la originalissima poesia del Pascoli. Il tentarne anzi qui un qualunque elogio sembrerebbe loro cosa non solamente superflua, ma quasi risibile, trattandosi di scrittore da ben altre voci di già e in ben più degna maniera celebrato. Basti dunque il dire, che le parole, con cui il Socio Ferrero ne indicò i pregii nel punto che ne faceva il nome, non furono, ve lo assicuriamo, contraddette nè dal Socio Manno, nè dal Socio Ruffini.

I quali però hanno creduto — e grave in ciò è riuscito ad essi il loro ufficio —, che fosse debito loro di non tacervi, che un assentimento più spontaneo e più pieno essi avrebbero dato alla proposta del Pascoli, quando fosse stato questione di premiare, anzi che le due raccolte citate, le *Myricae*, la più antica raccolta dei versi di lui; poichè essi non Vi sanno nascondere il senso, come di scontento e a volte quasi di smarrimento, che va guadagnando l'animo loro e di molti altri ammiratori del Poeta, man mano che si ravvisa farsi più radi nelle opere nuove que' frammenti di una grande poesia, che nelle antiche abbondavano, e la vena già sì limpida alle scaturigini intorbidirsi in suo corso fra singolarità di forma troppo preziose e viluppi troppo intricati di pensiero.

Ma dal Socio Ferrero fu opposto l'uso dell'Accademia di premiare, in occasione di lavoro anche meno lodevole, l'opera complessiva vuoi di uno scienziato, vuoi di un artista. Di ciò gli altri membri della Commissione pensarono di lasciare che giudicasse l'Accademia; avvertendo tuttavia, per debito di imparzialità, che un uguale criterio dovrebbe adoperarsi pure nel deliberare del Bertana per que' suoi scritti anteriori di cui si disse. Di qui ad ogni modo una prima riserva.

Un'altra poi riguarda la data primitiva della pubblicazione di parecchi dei componimenti compresi nelle due raccolte del Pascoli, i quali apparvero in giornali e riviste prima assai del triennio. E anche di questo giudicherà l'Accademia.

La Commissione pertanto, onorevoli Colleghi, vi fa queste proposte per il conferimento del premio Gautieri:

1° Emilio Bertana, per il lavoro sull'Alfieri, proposto dalla maggioranza, composta dei Soci Manno e Ruffini;

2° Giovanni Pascoli, per i *Canti di Castelvecchio* e per i *Poemi conviviali*, proposto dalla minoranza, costituita dal Socio Ferrero; nella quale proposta, subordinatamente a che l'Accademia non decida di accogliere quella loro prima e principale, anche i Soci Manno e Ruffini convengono.

A. Manno,
E. Ferrero,
F. Ruffini, *relatore*.

Relazione della Commissione per il premio Bressa.

CHIARISSIMI COLLEGHI,

Il 30 aprile dell'anno scorso ebbi l'onore di farvi noto, a nome della prima Giunta per il XIV premio Bressa, che le due proposte stimate degne di essere prese in considerazione per quel premio riguardavano:

1° *Le scoperte archeologiche fatte in Creta* dal Prof. FEDERICO HALBHERR;
2° *La traduzione latina dell'Opera astronomica dell'Albatenio* o "*Al-Battani*" fatta dal Prof. CARLO ALFONSO NALLINO.

La seconda Giunta, confermò il giudizio della prima. Perciò, a nome della Giunta stessa, io Vi leggerò alcuni cenni intorno alle due proposte e poi riferirò le conclusioni prese dalla Giunta nell'ultima sua adunanza.

Devo i cenni che seguono intorno alle scoperte del professore Halbherr alla cortesia del socio De Sanctis.

Il Prof. Halbherr, che è nativo di Rovereto e insegna epigrafia greca nell'Università di Roma, già noto per le importanti esplorazioni compiute precedentemente in Creta, ritornò colà nel 1899 come capo della missione archeologica inviata nell'isola dal nostro Governo, e in tale qualità diresse negli anni seguenti l'esplorazione dell'antica Phaestos presso l'attuale villaggio di Haghios Joannis. Quivi s'iniziò nel 1900 e si compì nel 1902 lo scavo sistematico di un grande palazzo miceneo. È questo edificio uno dei più notevoli monumenti di quella età remotissima e la sua importanza, specialmente dal lato architettonico, è tale che può paragonarsi al palazzo di Tirinto scoperto dallo Schliemann ed a quello di Cnosso scoperto dall'Evans.

La sala maggiore del palazzo di Phaestos supera in dimensioni tutte quelle degli edifizi congeneri, e le sue monumentali gradinate ne costituiscono una particolarità molto notevole. Vi

si rinvenne un'abbondante suppellettile archeologica: giare di terracotta, vasi con derrate, ceramiche dello stile antichissimo detto di Kamares, idoletti fittili in figura di animali e di uomini, una tavola di libazione, qualche documento scritto in caratteri che rimangono finora indecifrabili.

Ancora più copiosi e più importanti oggetti si trovarono in un vicino edificio, o complesso di edificii, pure di età micenea, che si pose alla luce tra il 1902 e il 1904 sopra un colle, ove sorgeva una chiesetta veneziana dedicata a S. Giorgio. Ivi si trovò una coppa di steatite con figure di guerrieri ch'è uno dei più bei prodotti dell'arte micenea. Vi si raccolsero inoltre non poche tavolette scritte di argilla e, cosa affatto nuova per l'arte micenea, diciannove grandi pani di bronzo, tutti presso a poco dello stesso peso di 30 chilogrammi, alcuni contrassegnati con caratteri micenei, che costituivano, a quanto pare, una specie di moneta. Notevolissimi, infine, gli affreschi, dei quali vennero pubblicate eccellenti riproduzioni a colori.

Fu poi esplorato il cimitero miceneo di quell'antica città. Quivi pure si trovò in una tomba, o camera, un preziosissimo cimelio, un grande sarcofago di pietra ricoperto d'intonaco, dipinto in parte con motivi ornamentali, in parte con grandi scene.

Gli scavi di Phaestos pertanto diedero un contributo importantissimo alle nostre cognizioni sulla civiltà dei paesi dell'Egeo nella seconda metà del secondo millennio a. C.

Lo Halbherr ha il merito di avere scelto il luogo degli scavi e di averli fatti eseguire secondo un programma suo proprio dirigendo passo per passo le operazioni. Ha inoltre il merito di avere studiato scientificamente e descritto gli edifici scoperti e gli oggetti trovati. Benchè abbia avuto dei collaboratori, egli diresse ogni cosa, sicchè questi scavi vanno considerati come opera sua.

È opportuno aggiungere che egli non ebbe per questo suo lavoro alcun premio da altre Accademie.

Passiamo ora all'opera del Nallino. Ho desunto le notizie che seguono dalla prefazione del Nallino stesso e da una recensione del Senatore Giovanni Schiaparelli, altre mi furono cortesemente fornite dal socio Pizzi. Mohammed, figlio di Gabir, Al-Harrani, Al-Battâni, noto sotto il nome di Albatenio, ripu-

tato il più grande degli astronomi arabi, nacque prima dell'858 in Harran città della Mesopotamia occidentale. Suo padre, a quanto si crede, fu artefice famoso di strumenti astronomici. Probabilmente egli addestrò il figlio nell'osservazione degli astri e gli insegnò gli elementi dell'Astronomia.

L' Albatenio fu di religione musulmana, visse a lungo in ar-Raqqah, antichissima e allora fiorente città sulla sinistra dell'Eufrate. Ivi egli fece osservazioni negli anni 879, 882, 883, 891. Nel 901 dimorò per qualche tempo in Antiochia. Morì nel 929 in un luogo detto Qasr al-Giss, mentre tornava da Bagdad, dove era andato a reclamare contro un ingiusto tributo per incarico dei suoi concittadini.

La sua opera principale è il trattato d'Astronomia, in arabo *zig*, che il Nallino trascrisse e tradusse in latino. Con la parola *zig* designavano gli Arabi un libro, che, ommessi gli elementi dell'astronomia, ne esponesse le dottrine più alte e contenesse le tavole relative alle osservazioni.

La prima parte dell'opera tratta dei problemi principali dell'Astronomia. La seconda contiene le tavole, le quali erano rimaste finora inedite.

L'Albatenio fu valente osservatore e si valse, come altri astronomi arabi, di istrumenti molto più grandi e più perfetti di quelli usati dai Greci. Egli determinò l'obliquità della eclittica in 23° 35′ commettendo un errore di soli 26″ a paragone delle misure moderne ridotte a quell'epoca. La durata dell'anno data dall'Albatenio servì nel Medio Evo come base per proporre delle riforme del calendario Giuliano. Le sue misure valsero grandemente ad aumentare la conoscenza del moto apparente del sole rispetto alla terra. Nella parte teorica l'Albatenio seguì interamente Tolomeo; ma fece della trigonometria uso più ampio e più utile che non avessero fatto i suoi predecessori. Il libro di lui è il solo tra gli scritti degli Arabi che abbia influito sugli studi matematici e astronomici dell'Occidente perchè fu noto agli Arabi spagnuoli e venne alle mani del Regiomontano. L'opera ebbe dall'autore stesso due edizioni diverse: una innanzi al 901; un'altra più ampia qualche anno dopo. Ed è questa che è a noi pervenuta.

Una traduzione latina ne fu fatta nel 1140 da Roberto Cataneo inglese, ma andò perduta. Un'altra traduzione pure latina

ne fece Platone da Tivoli. Questa fu stampata due volte; in Norimberga nel 1537, in Bologna nel 1635. La traduzione comprende tutto il testo, ma non le tavole. Il traduttore non era molto dotto nelle due lingue e meno ne sapeva di astronomia, sicchè tutto lo scritto è rozzo e in molti punti incomprensibile. Pure fino al dì d'oggi si è attinto solo da essa quanto si sa intorno all'Albatenio. Esiste pure una traduzione spagnola che si conserva a Parigi, ma non s'estende a tutta l'opera ed è per altre ragioni difettosa.

Di codici arabi si conosce solo quello dell'Escurial, che il Nallino trascrisse. Pare che esso sia stato scritto alla fine dell'undecimo secolo o al principio del duodecimo. Non ha frontispizio, nè titolo, ma contiene l'intero testo e le tavole.

L'esemplare, da cui esso fu tratto, doveva essere scorretto e scritto da persona che aveva cercato di colmare, come poteva, le lacune esistenti nel manoscritto che copiava e di ridurre a miglior lezione i passi manifestamente errati. Per fortuna, dice il Nallino, colui doveva essere affatto ignorante di matematiche, sicchè le sue aggiunte si possono facilmente distinguere dal testo Albateniano. In alcuni luoghi, essendo errata la figura, lo scrittore, invece di correggerla, modificò il testo per adattarlo alla figura. La traduzione di Platone da Tivoli ha pressochè gli stessi difetti, sicchè pare che il codice dell'Escuriale e quello di cui si valse quel traduttore, abbiano la stessa provenienza.

L'opera del Nallino richiese dieci anni di lavoro. Oltre le difficoltà della trascrizione, per la quale il Nallino dovette soggiornare lungamente in Ispagna, il lavoro di emendazione del testo richiese grandi cure. Nè il Nallino vi sarebbe riuscito senza una lunga preparazione, che oltre lo studio della matematica e dell'astronomia richiese pur quello dell'Almagesto di Tolomeo, degli scritti degli astronomi arabi che precedettero l'Albatenio e in generale di tutte le opere che trattano della storia delle scienze esatte fra gli Arabi.

Come attesta lo Schiaparelli in una sua recensione, molte cose concernenti l'astronomia degli Arabi vennero in luce con l'opera del Nallino. Certe critiche fatte al grande astronomo arabo furono dimostrate ingiuste. La storia della scienza fu in più punti chiarita. Le numerose annotazioni fatte dal Nallino alla traduzione e la prefazione da lui posta innanzi a quest'ultima dànno

ampia prova della sua erudizione. Ai due fratelli Celestino e Giovanni Schiaparelli, il primo dei quali l'incitò a questo lavoro, l'altro lo sorresse con l'aiuto della propria scienza ed erudizione, aggiungendo anche all'opera delle note, e fece pubblicare l'opera stessa a spese della Specola di Brera, il Nallino si dichiara gratissimo.

L'intera opera del Nallino consta della pubblicazione del testo arabo, che fu fatta nel 1899, di quella delle tavole numeriche, che sono in corso di stampa e della versione latina. Entro il quadrieunio spettante al XIV premio Bressa fu solamente pubblicata la traduzione. Questa è corredata da numerose note, che comprendono il lavoro della emendazione critica del testo.

A favore dell'opera del Nallino può citarsi per testimonianza del socio Pizzi, l'ampia lode ch'egli ebbe per essa dalla commissione adunatasi recentemente in Roma per la sua promozione ad ordinario, commissione composta dai prof. Lasinio, Guidi, C. Schiaparelli, Kerbaker e Pizzi. Fu riconosciuto da questi la diligenza, l'accuratezza, la precisione del candidato in impresa tanto ardua e irta di difficoltà.

Anche il Knobel, membro della Società astronomica di Londra e conoscitore della lingua araba, riconobbe i meriti di quell'opera in una seduta della Società stessa, e il Suter professore di matematica a Zurigo e dotto cultore della storia delle scienze esatte, ne parlò con gran lode.

La Giunta, dopo avere discusso i meriti dei due candidati prof. Halbherr e prof. Nallino, decise di presentarvene i nomi senza alcuna distinzione di merito, affinchè Voi scegliate fra essi quello che stimate più degno.

Il Segretario della Giunta
A. Naccari.

Gli Accademici Segretari
Lorenzo Camerano.
Rodolfo Renier.

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 28 Gennaio 1906.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Naccari, Jadanza, Segre, Fusari, Spezia, Guidi, Fileti, Morera, Grassi, Peano, Guareschi, Mattirolo, Parona, Foà e Camerano Segretario.

Si legge e si approva il verbale dell'adunanza precedente.

Il Presidente presenta in omaggio le opere seguenti:

Traité pratique de calorimétrie chimique, del Socio straniero M. Berthelot;

Vorlesungen über theoretische Spektroscopie, del prof. Antonio Garbasso;

Commemorazione del prof. Bernardino Silva, del Dr. Karl Rühl.

Il Socio Spezia presenta in omaggio all'Accademia a nome dell'autore la nota seguente: H. Rosenbusch, IV. *Studien im Gneisgebirge des Schwarzwaldes.*

Vengono presentate per l' inserzione negli *Atti* le note seguenti:

Influenza della temperatura sulle costruzioni murarie, del Socio Camillo Guidi;

Dott. Giuseppe Gola: *Sull'attività respiratoria di alcuni semi durante il periodo di quiescenza,* dal Socio Mattirolo.

Osservazioni meteorologiche fatte nell'anno 1905 all'Osservatorio della R. Università di Torino, calcolate dal Dr. Vittorio Fontana, dal Socio Naccari.

LETTURE

Influenza della temperatura sulle costruzioni murarie.

Nota del Socio CAMILLO GUIDI.

Si ha in generale un' idea intuitiva dell'entità delle deformazioni che una variazione di temperatura produce nelle costruzioni metalliche, e note sono le disposizioni costruttive che tendono ad eliminare, o almeno a diminuire, le conseguenze dannose alla stabilità di siffatte costruzioni, derivanti da un'impedita dilatazione termica; ma non si pensa comunemente che dello stesso ordine di grandezza, ed in certi casi perfino maggiori, possono essere gli effetti prodotti dalla stessa causa su di una costruzione muraria. Eppure fin dal 1863 l'Ing. Bouniceau pubblicava nelle *Annales des ponts et chaussées* i risultati di alcune sue accurate esperienze per la determinazione dei coefficienti di dilatazione termica lineare di diversi materiali lapidei e cementizi; dai quali risultati appare che per un beton di cemento tale coefficiente può superare quello del ferro, che per le pietre da taglio è in media da $^2/_3$ a $^3/_4$ quello del ferro.

A tali esperienze il Bouniceau venne indotto dall'aver rilevato, con sua grande sorpresa e non senza preoccupazione, delle fessure verticali in un muro di recente terminato nel porto di Havre, fessure che egli non poteva attribuire a cedimenti di fondazione, o ad altre cause, e che finalmente dovette riconoscere prodotte da una variazione di temperatura.

Se nelle costruzioni murarie usuali vengono raramente avvertite le lesioni prodotte da impedite dilatazioni termiche, ciò è unicamente dovuto alla molteplicità e vicinanza dei giunti, sì che i distacchi si ripartiscono in più punti e risultano perciò meno appariscenti. Ma, specialmente nelle moderne costruzioni in beton armato, nelle quali si presentano spesso delle ampie superficie senza giunti, le lesioni prodotte da variazione di temperatura risultano meglio visibili.

Le impedite dilatazioni termiche producono nelle masse murarie sforzi interni, della cui entità non si ha sempre un giusto concetto. Si tratti, per fare un esempio, di un muro il quale, sopportando un aumento di temperatura di $t°$, sia *assolutamente* impedito di dilatarsi nel senso della sua lunghezza. Se α è il suo coefficiente di dilatazione termica lineare, si genererà in esso tale sforzo unitario σ di compressione, come se, per una pressione esternamente esercitata nel senso della sua lunghezza, esso venisse raccorciato per unità di lunghezza della quantità αt, cioè:

$$\sigma = E\alpha t$$

se E rappresenta il modulo di elasticità a sforzo normale del materiale di cui si tratta. La quantità E, come ci dicono i risultati sperimentali più recenti e più attendibili, è variabile non solo per i diversi generi di muratura, e da caso a caso, ma anche secondo l'entità dello sforzo; tuttavia per una muratura in pietrame di sufficiente maturazione, e nei limiti di sforzi più comuni nella pratica, possiamo, in media, valutarla in 200 $^{t}/_{cm^2}$ (per alcune murature in pietra da taglio può sorpassare notevolmente tale valore). Quindi, ammesso che la temperatura del muro cresca di 20°, ciò che molte volte in pratica potrà avverarsi, e ritenuto come valor medio $\alpha = 0,000008$, esso subirebbe per tale fatto uno sforzo unitario

$$\sigma = 200000 \times 0,000008 \times 20 = 32 \ ^{Kg}/_{cm^2}.$$

Raramente si presenterà nella pratica un caso simile a quello supposto; ma in qualsiasi costruzione muraria, più o meno energicamente impedita di dilatarsi, si generano per variazione di temperatura sforzi interni che possono raggiungere valori considerevoli. Taluni disastri, a tutta prima inesplicabili, trovarono ed altri troveranno spiegazione nelle deformazioni termiche. L'elementare calcoletto sopra svolto dimostra di quale considerazione siano degni tali fenomeni per il costruttore e con quanto interesse dovrebbero le amministrazioni che hanno a loro disposizione opere murarie, specialmente i ponti, raccogliere dati di osservazione allo scopo di definire sempre meglio il coefficiente α ed il modulo E per le murature, sia per renderci conto pre-

ventivamente delle deformazioni che nelle opere murarie produrranno variazioni di temperatura, sia, ed ancor più, per poter valutare con maggiore esattezza gli sforzi interni che ne derivano nelle costruzioni impedite di dilatarsi liberamente.

Già da gran tempo ed a più riprese furono fatte osservazioni sulle deformazioni termiche delle opere murarie, ma vogliamo qui più specialmente fermarci su alcune di esse che sembrano maggiormente degne di considerazione.

Nella volta da ponte di 60 m. di luce del viadotto del *Gour-Noir* sulla linea da Limoges a Brive, l'Ing. Draux constatò (*Annales des ponts et chaussées*, 1892) che rispetto alla posizione assunta dalla chiave dopo il disarmo, essa nell'inverno 1889-90 si abbassò di mm. 10, e di mm. 12 durante l'inverno 1890-91, mentre nell'estate intermedia si era sopraelevata di mm. 3. Partendo dai coefficienti di Bouniceau, il Draux dedusse che l'abbassamento di 12 mm. alla chiave corrispondeva ad un abbassamento di temperatura di 20° nel corpo della volta.

L'Ing. Bouffet, Ispettore generale onorario di ponti e strade in Francia, riporta in un interessante articolo comparso nelle *Annales des ponts et chaussées*, 1er trim. 1905, dal titolo *Étude sur les effets de la dilatation dans les ouvrages d'art en maçonnerie, viaducs et barrages-réservoirs*, alcuni dati preziosi d'osservazioni eseguite sopra viadotti di recente costruzione sulla linea da Quillan a Rivesaltes nell'alta valle dell'Aude. Nel viadotto di Lapradelle si osservarono delle fessure nel parapetto, che col crescere della temperatura si rinchiudevano: misurata esattamente tale variazione di lunghezza, si potè calcolare il coefficiente di dilatazione del materiale, che risultò di 0,0000079, com' era stato già trovato dal Bouniceau pel granito, e di granito sono i parapetti del viadotto in questione. Disegnato il diagramma della variazione d'ampiezza delle fessure e quello della variazione della temperatura, risultò manifesta la concordanza perfetta fra essi. Il Bouffet dalle sue osservazioni sul viadotto di Lapradelle fu indotto a concludere che le volte in muratura si comportano nelle loro oscillazioni termiche come un monolite elastico.

Da tali fatti trae poi occasione il Bouffet per sviluppare alcune importanti considerazioni sulle condizioni statiche che

vengono prodotte nelle alte dighe di ritenuta d'acqua in seguito a variazioni di temperatura.

Osservazioni analoghe interessantissime furono fatte recentemente dalla Direzione dei Lavori della Rete Adriatica sul Ponte sull'Adda presso Morbegno, linea Colico-Sondrio, ponte in muratura di granito, di 70 m. di corda e 10 m. di freccia (*). Dal marzo 1904 al marzo 1905, con osservazioni giornaliere, fu rilevata la temperatura nell'interno della massa muraria della volta confrontandola colle oscillazioni della temperatura esterna; e mediante livellazioni fu rilevata la quota del parapetto in corrispondenza della mezzeria. Dai diagrammi rappresentanti la legge di variazione di queste quantità si deducono le seguenti importanti conclusioni:

1° Nella massa della volta (**) penetra la media della temperatura giornaliera.

2° La variazione massima nell'annata sopra indicata fu di **34°**; si ebbero infatti (da quanto rilevasi dai diagrammi) + 26° alla metà di agosto, e — 8° ai primi di gennaio.

3° Una rimarchevole concordanza regna fra l'andamento dei due diagrammi: quello della variazione della temperatura interna, e l'altro dello spostamento del vertice dell'arco. Lo spostamento massimo risultò di mm. **33** essendosi letta nella prima metà di agosto la quota di m. 263,729 e nella prima metà di gennaio m. 263,696.

Già da più decine d'anni il Winkler, il Culmann, il Castigliano ed altri avevano intraveduto che le volte in muratura si comportano come solidi elastici, e la conferma più assoluta la si ebbe dalle famose esperienze dell'austriaca *Commissione delle volte* (***). Applicando pertanto a tali costruzioni la teoria del-

---

(*) Alla cortesia della detta Direzione devo la comunicazione dei risultati sperimentali, ed il permesso di renderli di pubblica ragione; per il che mi è gradito dovere rendere le più vive grazie.

(**) Ricordiamo che la volta (V. Tav. annessa) presenta alla chiave la larghezza media di m. 5,20 ed uno spessore di m. 1,50; alle imposte la larghezza media di m. 6,18 e lo spessore di m. 2,20. In causa delle voltine di scarico sui fianchi della grande arcata, quest'ultima è esposta alla temperatura esterna anche per $^1/_5$ circa dello sviluppo totale dell'estradosso.

(***) Cfr. *Bericht des Gewölbe-Auschusses*, " Zeitsch. des Oesterr. Ing. u. Arch-Vereines ", Wien, 1895.

l'elasticità si deve avere una conferma dei risultati ottenuti dall'osservazione. Ora noi abbiamo dimostrato in una recente Nota (*) la seguente formola:

$$\delta_t = \alpha t l \left(\frac{H}{1} + \frac{y}{l} \right) \tag{1}$$

nella quale:

δ_t = spostamento verticale di un punto qualunque dell'asse geometrico di un arco elastico (la cui ordinata contata dalla corda l del medesimo vale y) prodotto da una variazione di temperatura di t^o,

α = coefficiente di dilatazione termica lineare del materiale di cui l'arco è formato,

$\frac{H}{1}$ = rapporto fra la spinta orizzontale, prodotta da un carico unitario insistente sul punto considerato, e l'unità di carico, cioè rapporto fra l'ordinata della *linea d'influenza* della spinta orizzontale, contata sulla verticale del punto considerato, ed il segmento che rappresenta l'unità di carico.

Nell'unito disegno vedonsi tracciati, per il ponte di Morbegno, il *secondo*, il *quarto* ed il *quinto* dei noti *cinque poligoni funicolari*, che servono allo studio statico di un arco elastico (**). Il poligono p_5 fornisce, come è noto, la linea d'influenza della spinta orizzontale H (***).

(*) Cfr. C. Guidi, *Una proprietà degli archi elastici*, " Atti della R. Acc. delle scienze di Torino, 1905 " — ovvero: *Lezioni sulla Scienza delle costruzioni*, Parte IV: *Teoria dei ponti*. Torino, 1905.

(**) Cfr. C. Guidi, *Teoria dei ponti*.

(***) Allo scopo di costruire i detti poligoni si prese in esame un anello di volta, situato sotto il binario, avente dimensione normale all'asse stradale = m. 1,00 al piano del ferro, e crescente colla profondità sotto il detto piano nella stessa proporzione in cui cresce la larghezza totale dell'arcata. Nella tavola è rappresentata la sezione longitudinale media della metà di questo anello.

Diviso l'asse geometrico di questo semiarco in 12 parti uguali, ne risulta un Δs = m. 3,13. Le ellissi di elasticità dei varî tronchi Δs dell'arco

Applicando pertanto la (1) al vertice di questa volta si ha:

$$l = \text{cm. } 7130\,, \qquad \frac{y}{l} = {}^1/_7\,;$$

---

trascurando le deformazioni prodotte dal taglio, hanno tutte per semiasse disteso secondo l'asse geometrico dell'arco:

$$\rho = 3{,}13 \sqrt{\frac{1}{12}} = 3{,}13 \times 0{,}289 = \text{m. } 0{,}905$$

mentre i semiassi radiali valgono 0,289 degli spessori medî dei varî tronch i e cioè partendo dalla chiave,

$$\begin{array}{llll}
\rho_1' = 0{,}289 \times 1{,}50 = \text{m. } 0{,}434\,, & & \rho_7' = 0{,}289 \times 1{,}80 = \text{m. } 0{,}520 \\
\rho_2' = \;\text{"}\quad 1{,}52 = \text{"}\; 0{,}439\,, & & \rho_8' = \;\text{"}\quad 1{,}88 = \text{"}\; 0{,}543 \\
\rho_3' = \;\text{"}\quad 1{,}55 = \text{"}\; 0{,}448\,, & & \rho_9' = \;\text{"}\quad 1{,}95 = \text{"}\; 0{,}564 \\
\rho_4' = \;\text{"}\quad 1{,}60 = \text{"}\; 0{,}462\,, & & \rho_{10}' = \;\text{"}\quad 2{,}02 = \text{"}\; 0{,}584 \\
\rho_5' = \;\text{"}\quad 1{,}67 = \text{"}\; 0{,}483\,, & & \rho_{11}' = \;\text{"}\quad 2{,}09 = \text{"}\; 0{,}604 \\
\rho_6' = \;\text{"}\quad 1{,}74 = \text{"}\; 0{,}503\,, & & \rho_{12}' = \;\text{"}\quad 2{,}16 = \text{"}\; 0{,}624
\end{array}$$

Rilevando dal disegno le larghezze dell'arcata in corrispondenza delle orizzontali per i punti medî dei varî tronchi Δs, si calcolarono i momenti d'inerzia delle sezioni trasversali medie dei tronchi suddetti per l'anello di volta preso in esame, e cioè:

$$\begin{array}{ll}
J_1 = \frac{1}{12}\,\frac{5{,}20}{5{,}00}\,1{,}50^3 = \text{m}^4\; 0{,}293 & J_7 = \frac{1}{12}\,\frac{5{,}42}{5{,}00}\,1{,}80^3 = \text{m}^4\; 0{,}527 \\
J_2 = \frac{1}{12}\,\frac{5{,}20}{5{,}00}\,1{,}52^3 = \text{"}\; 0{,}304 & J_8 = \frac{1}{12}\,\frac{5{,}52}{5{,}00}\,1{,}88^3 = \text{"}\; 0{,}611 \\
J_3 = \frac{1}{12}\,\frac{5{,}22}{5{,}00}\,1{,}55^3 = \text{"}\; 0{,}324 & J_9 = \frac{1}{12}\,\frac{5{,}62}{5{,}00}\,1{,}95^3 = \text{"}\; 0{,}695 \\
J_4 = \frac{1}{12}\,\frac{5{,}24}{5{,}00}\,1{,}60^3 = \text{"}\; 0{,}358 & J_{10} = \frac{1}{12}\,\frac{5{,}76}{5{,}00}\,2{,}02^3 = \text{"}\; 0{,}791 \\
J_5 = \frac{1}{12}\,\frac{5{,}30}{5{,}00}\,1{,}67^3 = \text{"}\; 0{,}411 & J_{11} = \frac{1}{12}\,\frac{5{,}92}{5{,}00}\,2{,}09^3 = \text{"}\; 0{,}901 \\
J_6 = \frac{1}{12}\,\frac{5{,}36}{5{,}00}\,1{,}74^3 = \text{"}\; 0{,}471 & J_{12} = \frac{1}{12}\,\frac{6{,}08}{5{,}00}\,2{,}16^3 = \text{"}\; 1{,}021
\end{array}$$

Si hanno quindi i seguenti *pesi elastici* (supposto $E = 1$):

$$\begin{array}{lll}
\frac{\Delta s}{J_1} = 10{,}68 & \frac{\Delta s}{J_3} = 9{,}66 & \frac{\Delta s}{J_5} = 7{,}62 \\
\frac{\Delta s}{J_2} = 10{,}30 & \frac{\Delta s}{J_4} = 8{,}74 & \frac{s}{J_6} = 6{,}64
\end{array}$$

inoltre dalla linea d'influenza della H risulta, in corrispondenza della mezzeria:

$$\frac{H}{1} = 1{,}79;$$

finalmente adottando per α il valore 0,000008 trovato dal Bouniceau per il granito, otteniamo:

$$\delta_t = 0{,}11\, t^o$$

e per $t = 34°$:

$$\delta_t = \text{cm. } 3{,}7.$$

La concordanza rilevante, avuto riguardo all'indole della questione, fra questo risultato teorico e quello d'osservazione, è una conferma che la volta si comporta veramente come un arco elastico. La piccola eccedenza del risultato teorico su quello sperimentale può anch'essere spiegata dal cedimento di una delle due imposte, la quale è fornita da una spalla in muratura, abbastanza sviluppata, mentre l'altra imposta è offerta dalla roccia salda.

$$\frac{\Delta s}{J_7} = 5{,}94 \qquad \frac{\Delta s}{J_9} = 4{,}50 \qquad \frac{\Delta s}{J_{11}} = 3{,}47$$

$$\frac{\Delta s}{J_8} = 5{,}12 \qquad \frac{\Delta s}{J_{10}} = 3{,}96 \qquad \frac{\Delta s}{J_{12}} = 3{,}07$$

Questi pesi elastici furono portati orizzontalmente sulla corda dell'arco, rappresentandone (nel disegno originale, di cui l'annessa tavola è una riduzione fototipica nel rapporto quasi esatto di $^2/_3$) l'unità con mm. 2,5 e furono projettati dal polo P_2 a distanza $\lambda_2 = $ m. 5: le corrispondenti linee d'azione (orizzontali per i baricentri dei tronchi Δs) furono connesse col relativo poligono funicolare p_2, il quale determinò il baricentro elastico G dell'arco, ed i segmenti proporzionali ai momenti statici dei pesi elastici rispetto all'orizzontale baricentrica per G. Tali segmenti vennero poi projettati dal polo P_4 a distanza $^1/_2\, \lambda_4 = $ m. 5 e le corrispondenti linee d'azione (orizzontali per gli antipoli dell'orizzontale per G rispetto alle ellissi di elasticità dei varî tronchi) furono connesse col relativo poligono funicolare p_4, il quale fornì il segmento n (che letto sulla scala dei pesi elastici vale 20,08) proporzionale al momento d'inerzia dell'arco elastico rispetto all'orizzontale per G. Gli stessi segmenti furono poi projettati dal polo P_5 a distanza polare n, e le linee d'azione (ora verticali per gli antipoli suddetti) vennero connesse col poligono p_5 a lati rispettivamente normali ai raggi del polo P_5. Il poligono p_5 fornisce, come è noto, la linea d'influenza della spinta H.

Risolvendo la (1) rispetto ad α si ha il modo di determinare il coefficiente di dilatazione termica lineare del materiale di una volta di cui siasi misurato lo spostamento verticale δ_t:

$$\alpha = \frac{\delta_t}{tl\left(\frac{H}{1} + \frac{y}{l}\right)}. \tag{2}$$

Non limitando la misura dello spostamento al vertice, ma estendendola ad altri punti dell'asse geometrico dell'arco, si ha nella (2) un mezzo semplice per ricavare un valor medio molto approssimato del coefficiente di dilatazione.

I risultati forniti dalla (2) saranno tanto più attendibili quanto più trascurabili saranno le deformazioni delle imposte.

Nel caso in questione, dal solo spostamento del vertice, si ricaverebbe:

$$\alpha = \frac{3,3}{34 \times 7130\left(1,79 + \frac{1}{7}\right)} = 0,000007$$

valore forse un poco inferiore al vero per lo stesso motivo già accennato di sopra, cioè per un certo cedimento di una delle imposte.

Poichè le volte dei ponti in muratura si deformano in seguito a variazioni di temperatura, esse, a meno che possano dilatarsi liberamente (*), vanno soggette, per tal fatto, a sforzi interni, che, come è noto, possono immediatamente calcolarsi, conosciuta che sia la *spinta* generata dall'impedita dilatazione. Questa spinta passa per il *baricentro elastico* dell'arco ed ha la direzione coniugata alla verticale nel sistema dei pesi elastici dei varî tronchi Δs (nel caso frequente di un arco simmetrico è orizzontale); essa ha per espressione:

$$H_t = \frac{\alpha t E l}{\sum \frac{\Delta s}{J} y y'} \tag{3}$$

(*) Quand'anche la volta sia provvista di cerniere, l'attrito che si sviluppa in queste contrasta sempre più o meno e talvolta *completamente*, gli spostamenti termici.

nella quale:

$E =$ modulo di elasticità normale del materiale,

$\sum \frac{\Delta s}{J} yy' =$ momento d'inerzia dell'arco elastico rispetto all'asse baricentrico coniugato alla verticale nel sistema dei detti pesi elastici (orizzontale baricentrica, nel caso di un arco simmetrico)

e gli altri simboli hanno il significato già noto.

Gli sforzi interni prodotti da tale causa, i quali rientrano nella categoria dei cosidetti *sforzi secondarii*, perchè non prodotti dai carichi, venivano generalmente trascurati per lo addietro, sia per la limitata ampiezza che si attribuiva alle volte da ponte, sia per gli spessori relativamente notevoli che ad esse si assegnavano; ma al giorno d'oggi, costruendosi volte sempre più ardite, e non di rado di spessore molto ridotto, perchè si provvede, meglio che non si facesse per lo addietro, ad una conveniente distribuzione del peso proprio, è necessario rendersi conto dell'entità di questi sforzi.

Per il ponte di Morbegno la rimarchevole concordanza trovata fra lo spostamento termico teorico del vertice della volta e quello effettivamente misurato, ci assicura che egualmente attendibile sarà il risultato fornito dalla (3). Orbene dall'annessa tavola abbiamo:

$$\sum \frac{\Delta s}{J} yy' = \lambda_2 \,.\, \lambda_4 \,.\, n$$

e ricordando che λ_2 e λ_4 vanno lette nella scala delle lunghezze, ed n in quella dei pesi elastici, si deduce, se si assume il metro come unità lineare,

$$\sum \frac{\Delta s}{J} yy' = 5 \times 10 \times 20{,}08 = 1004$$

ovvero, prendendo per unità lineare il centimetro,

$$\sum \frac{\Delta s}{J} yy' = 10{,}04;$$

ritenendo poi $E = 250 \ {}^{t}/_{cm^2}$, otteniamo (in tonnellate):

$$H_t = \frac{0,000008 \times 250 \times 7130}{10,04} t^o = 1,42 t^o.$$

Osservando che la sezione in chiave e quelle d'imposta hanno rispettivamente per moduli di resistenza:

$$W_0 = \frac{1}{6} 100 \frac{5,20}{5,00} 150^2 = \text{cm}^3 \ 390000$$

$$W_{12} = \frac{1}{6} 100 \frac{6,18}{5,00} 220^2 = \quad " \quad 997040$$

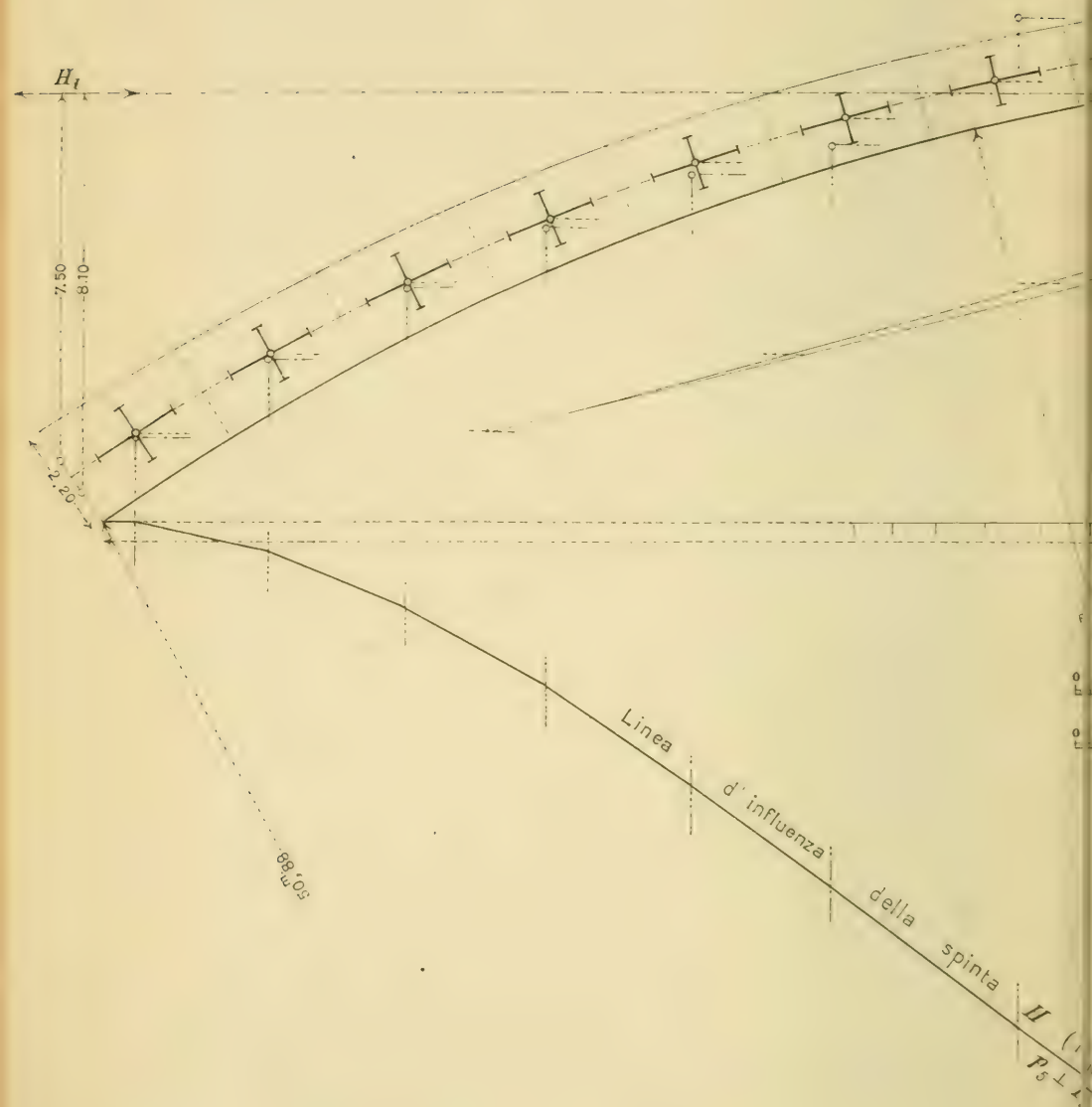
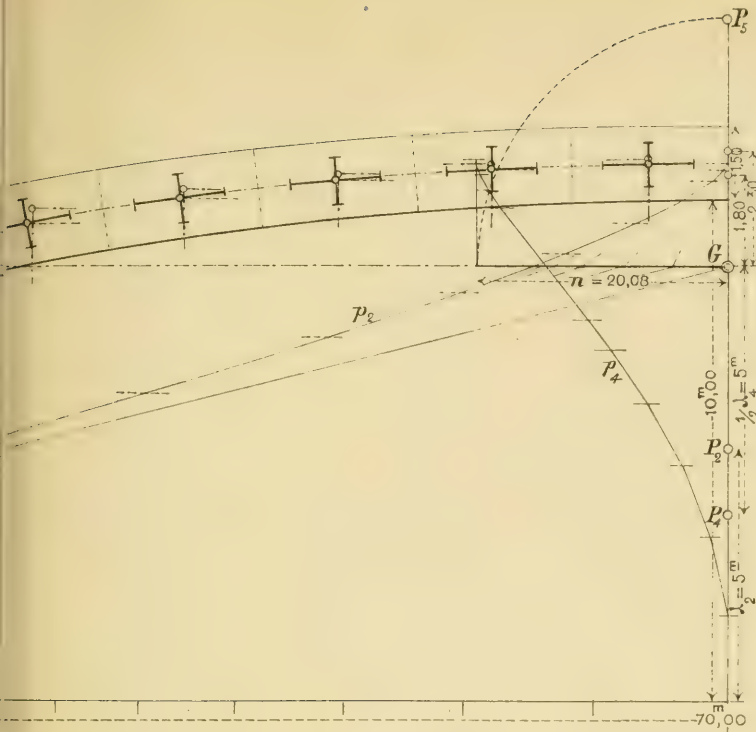
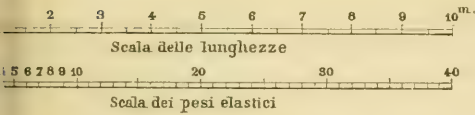
e che i bracci di leva di H_t rispetto ai *punti di nocciolo* delle dette sezioni valgono rispettivamente (V. tavola):

$$\text{chiave} \begin{cases} h_n = \text{cm. } 180 \\ h_m = \quad " \quad 230 \end{cases} \qquad \text{imposte} \begin{cases} h_n = \text{cm. } 810 \\ h_m = \quad " \quad 750 \end{cases}$$

si ottengono all'estradosso ed all'intradosso del giunto in chiave e di quelli alle imposte le seguenti espressioni per gli sforzi unitarî in ${}^{Kg}/_{cm^2}$:

$$\text{in chiave} \begin{cases} \sigma_e = \pm \dfrac{1420 \times 180}{390000} t^o = \pm 0,655 \, t^o \\[2ex] \sigma_i = \mp \dfrac{1420 \times 230}{390000} t^o = \mp 0,837 \, t^o \end{cases}$$

$$\text{alle imposte} \begin{cases} \sigma_e = \mp \dfrac{1420 \times 810}{997040} t^o = \mp 1,154 \, t^o \\[2ex] \sigma_i = \pm \dfrac{1420 \times 750}{997040} t^o = \pm 1,068 \, t^o. \end{cases}$$

Analoghe espressioni possono scriversi per un altro giunto qualunque.

PONTE IN MURATURA SULL' ADDA PRESSO MORBEGNO

Linea Colico - Sondrio

Le cerniere di questo ponte, terminato il periodo costruttivo, vennero rese inattive mediante muratura eseguita nel mese di agosto, cioè all'epoca della temperatura più alta; la volta è perciò impedita di deformarsi liberamente per un abbassamento di temperatura che, secondo le osservazioni fatte, può raggiungere i 34°, e quindi gli sforzi massimi che ne derivano in chiave ed alle imposte possono raggiungere i valori:

$$\text{in chiave} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_e = -0{,}655 \times 34 = -22 \ ^{Kg}/_{cm^2} \\ \sigma_i = +0{,}837 \times 34 = +28 \quad " \end{array} \right.$$

$$\text{alle imposte} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_e = +1{,}154 \times 34 = +39 \quad " \\ \sigma_i = -1{,}068 \times 34 = -36 \quad " \end{array} \right.$$

Veramente quel lieve cedimento di una imposta, di cui si è precedentemente fatto cenno, influirà nel senso di diminuire di qualche poco l'entità di questi sforzi. Così pure l'attrito che senza dubbio si sarà sviluppato nelle cerniere, nel tempo in cui esse dovevano essere attive, avrà in parte, seppur non completamente, contrastato la deformazione provocata dall'aumento di temperatura, cosicchè gli sforzi effettivi risulteranno in realtà inferiori a quelli qui sopra calcolati; ma ad ogni modo, ammessa anche l'ipotesi più favorevole che le cerniere fossero rimaste inattive ad una temperatura intermedia, si vede sempre che gli sforzi termici sono di un ordine di grandezza non trascurabile. Lo sforzo di pressione σ_i alle imposte, se esso si avverasse in tutta l'entità sopra valutata, sarebbe il 106 % circa di quello massimo totale prodotto simultaneamente dal peso proprio e dal carico accidentale più sfavorevole.

Se l'aggiunta di tali sforzi termici non può generare preoccupazione per il ponte di Morbegno, data la natura dell'ottimo materiale ivi impiegato e gli spessori della volta, non può dirsi in generale che essi possano essere impunemente trascurati. In special modo in quelle volte da ponte, nelle quali e con un'opportuna distribuzione del carico morto e coll'adozione di cerniere attive, o almeno ritenute tali, durante la costruzione, si tende a centralizzare al massimo la curva delle pressioni dovuta al

peso proprio, e per le quali il carico accidentale sia di poca importanza rispetto al peso proprio, possono bastare e vengono talvolta adottati al giorno d'oggi spessori molto ridotti: in tali casi gli sforzi secondari, tra cui principalmente quelli termici, e quelli anche prodotti dall'attrito nelle cerniere, facilmente calcolabili, possono raggiungere, come è ovvio, valori notevolissimi, e però conviene tenerne conto, specialmente quando non si possa fare assegnamento su di un sufficiente cedimento delle imposte.

Torino, Dicembre 1905.

Sull'attività respiratoria di alcuni semi durante il periodo della quiescenza.

Nota del Dr. GIUSEPPE GOLA
Assistente al R. Istit. Botanico di Torino.

In una Memoria presentata lo scorso anno a questa Reale Accademia, io ho studiato ampiamente la proprietà che hanno i semi di alcune famiglie di piante, di permanere inalterati nel suolo per un tempo lunghissimo e di germinare allorchè le mutate condizioni di ambiente siano tali da permettere alle nuove piante un favorevole sviluppo (1).

Nelle famiglie che avevo fatto allora oggetto di studio, la causa di questa particolare disposizione risiede nella impermeabilità dei tegumenti dei semi, onde la relativa secchezza nella quale essi vengono a trovarsi, ne rallenta fortissimamente l'attività respiratoria e con essa i fenomeni del ricambio. Ne viene che il limitato logorìo di forze permette il mantenersi più a lungo della vitalità nelle cellule dell'embrione.

Ma oltre che nelle Leguminose, Malvacee, Cistacee, in molte altre famiglie si osservano specie i cui semi conservano assai a lungo la loro vitalità nel terreno; però i semi di esse non

(1) *Ricerche sulla biologia e fisiologia dei semi a tegumento impermeabile*, " Mem. della R. Acc. delle Scienze di Torino ", Serie II, T. LV, 1905.

presentano nei loro tegumenti alcuna disposizione che valga a difenderli contro una eccessiva imbibizione di acqua, anzi alcuni di essi ne possono assumere quantità assai notevoli. Era quindi interessante studiare quali fossero le condizioni che permettono il permanere per lungo tempo della vitalità in questi semi.

Le specie degne di studio sotto questo riguardo appartengono a famiglie diversissime: mentre nelle specie a semi longevi per impermeabilità dei tegumenti, si osserva una grande uniformità di disposizioni anatomiche, e una stretta affinità sistematica, tra le specie a semi a tegumento permeabile e tuttavia a lungo vitali, tali affinità e uniformità non si verificano mai. Piuttosto si riscontra una grande analogia per quanto ha riguardo all'*habitat* di esse; infatti esse appartengono in prevalenza a quelle che caratterizzano la flora ruderale o la palustre. Pochi esempi tratti da quanto si trova riferito nella letteratura botanica bastano a provarlo.

Heldreich (1) sulle scorie delle antiche miniere del Laurion in Attica, state rimosse per nuovi trattamenti metallurgici, trovò abbondanti un *Glaucium* sconosciuto fin allora nella Grecia, il *Glaucium Serpieri Heldr.*, una sua varietà a fiori doppi, e la *Silene Juvenalis*, pur essa ignota fin d'allora nella flora greca; la causa di tale comparsa improvvisa si deve ricercare nella presenza probabile di tali semi sotto alle scorie accumulate dai lavori del periodo greco-romano.

Ernst (2) riferisce due casi interessanti di vitalità dei semi di alcune piante nate sulla piazza del mercato di Caràcas, e nei pressi del nuovo palazzo del Congresso dove si erano rimossi degli antichi accumuli di terra; le specie ricomparse in tali occasioni erano in parte nuove per la flora dei dintorni come la *Broteroa trinervata*; erano abbondanti la *Portulaca oleracea*, *Oxalis corniculata*, *Capsella Bursa-Pastoris*, *Chenopodium murale*, *Ch. ambrosioides*, ecc.

Treichel (3) ha riferito sulla comparsa di *Polygonum avi-*

---

(1) De Heldreich Th., Atti Congr. Intern. Bot. di Firenze, 1874, p. 137.

(2) Ernst A., " Botanische Zeitung ", 1876, p. 33.

(3) Treichel A., *Ueber ruhenden Samen*, *Ref.* in " Iust's. Bot. Jahresber. ", 1879, Bd. II, p. 203.

culare, *Potentilla anserina*, *Capsella Bursa-Pastoris* su un terreno dal quale era stata asportata la cotica erbosa.

Chabert (1) ha osservato la ricomparsa di *Conium maculatum* presso Chambéry in una località dove non era mai stato veduto prima che fossero eseguiti alcuni sterri; egli ha pure osservato la ricomparsa del *Sisymbrium austriacum* sul terreno smosso nelle ricerche paleoetnografiche eseguite allo sbocco di caverne preistoriche.

Goiran (2) a San Vito del Mantico nel Veronese rilevò la presenza d'una colonia di *Hieracium staticaefolium* cresciuta sui materiali di scavo del nuovo canale dell'alto Agro Veronese; le numerose considerazioni da lui svolte in tale occasione fanno ritenere come molto probabile trattarsi di piante provenienti da semi rimasti sepolti nel suolo da tempo lunghissimo, e stati portati alla superficie dai movimenti di terra eseguiti durante il lavóro.

Anche frequente è la ricomparsa delle piante palustri dopo una lunga quiescenza; il *Scirpus macronatus* è una delle piante più infeste alla cultura del riso costituendo una delle specie più frequenti tra quelle che si incontrano nella mondatura delle risaie. Gli agricoltori hanno osservato che se si interrompe per alcuni anni la coltura a risaia in una località, alla ripresa di questa, collo stabilirsi di nuovo di condizioni adatte allo sviluppo del *Scirpus*, esso ricompare anche se l'intervallo tra l'una e l'altra coltivazione è superiore a dieci anni.

Giglioli (3) riassumendo alcune considerazioni sulla prolungata permanenza della vitalità in alcuni semi, conchiude colle seguenti parole: “ Così avviene che in terreni lungamente sommersi o nelle profondità del suolo, i semi si occultano per lungo tempo; e piante inusitate si vedono sorgere dal limo

---

(1) Chabert A., *De l'emploi populaire des plantes sauvages en Savoye.* Chambéry, 1897.

(2) Goiran A., *A proposito di una singolare stazione di “ Hieracium staticaefolium Vill.* „ (“ Bull. Soc. Bot. It. „, 1893, p. 93). L'autore qui accenna anche ad un altro gruppo di mezzi tendenti a conservare a lungo quiescenti i semi nel suolo mediante l'inglobamento di essi in blocchi di ghiaccio, come ha luogo nei nevai del Monte Baldo.

(3) Giglioli I., *Chimica agraria campestre e silvana.* Napoli, 1902.

estratto da uno stagno e sul terreno che profondi lavori hanno portato alla superficie „.

È degno di nota il fatto che le specie che più frequentemente si incontrano in tali ricomparse, hanno i semi che in condizioni abituali non presentano alcuna spiccata tendenza a conservare a lungo la loro vitalità. Per lo più si tratta di specie ruderali (*Glaucium*, *Papaver*, *Capsella*, *Sisymbrium*, *Polygonum*, *Chenopodium*, *Amarantus*, Ombrellifere. Cariofillee) di Ciperacee palustri e persino di specie del genere *Salix* i cui semi sono spesso indicati come tipici tra quelli aventi labilissima la facoltà di mantenere l'attività germinativa (1).

Quanto alle cause che permettono il conservarsi così a lungo della facoltà germinativa nei semi poco ancora si conosce: s crede però che il fenomeno sia in dipendenza di una limitata attività respiratoria.

Ho pensato quindi potesse essere degno di interesse lo studio dell'attività respiratoria in alcuni semi quiescenti appartenenti alle famiglie sopra ricordate, onde verificare se anch'essi con disposizioni ancora ignorate fossero capaci di mantenere costantemente bassa la misura del loro ricambio gasoso malgrado un aumento notevole del contenuto in acqua. È noto infatti quanta influenza abbia la funzione respiratoria nella conservazione dell'attività vitale nei semi; le mie esperienze altre volte riferite ne sono una prova e altre le ha fornite Giglioli (2). Egli in alcune cariossidi di frumento trovato negli scavi di Pompei e che avevano totalmente perduta la loro facoltà germinativa, senza tuttavia mostrare di essere stati alterati per eccessivo aumento di temperatura ambiente, o da altre cause, eseguì delle analisi del contenuto in cenere, rilevando un notevole aumento nel contenuto in elementi minerali rispetto a quello delle cariossidi normali. L'aumento delle sostanze minerali ha luogo, secondo l'A., soltanto in modo relativo, diminuendo probabilmente il contenuto in materie organiche in conseguenza dell'attività respiratoria dei tessuti.

I semi o rispettivamente frutti, che ho sottoposto ad espe-

---

(1) De Candolle A., *Sur la durée rélative de la faculté des germes* (“ Ann. Sc. Nat. „, ser. III, t. VI, p. 373).

(2) Giglioli I., Loc. cit.

rienze, appartengono alle seguenti specie: *Alisma Plantago, Scirpus lacustris, S. maritimus, Panicum Crus-Galli, Amarantus retroflexus, Chenopodium album, Polygonum Persicaria, Bidens tripartita.*

Come si vede ho scelto specie ruderali e palustri come appunto sono quelle che ho avuto finora occasione di menzionare. Il metodo di studio è quello che ho impiegato nelle ricerche sui semi a tegumento impermeabile e che ho già descritto a proposito di quelle. La quantità di semi impiegata oscillava tra i 300 e i 500 grammi ed a ciascuna porzione, dopo ogni analisi, aggiungevo piccole quantità di acqua. Ogni volta che procedevo ad una determinazione di CO_2, prelevavo un campione per la dosatura del contenuto in acqua; ed ho pure avuto cura di determinare i limiti massimi e minimi entro i quali può oscillare il grado di umidità dei semi tenuti sia in aria satura di vapor acqueo sia in aria confinata sopra H_2SO_4. I dati riguardanti tali limiti sono pure riferiti nella tabella dove sono riportati i valori trovati per l'emissione di CO_2.

Per ogni esperienza sono segnate due colonne di cifre, la prima indica il contenuto in acqua in grammi per ogni 100 gr. di semi; nella seconda sono riportate in mmgr. le quantità di CO_2 emesse per ogni 1000 gr. di semi e in 24 ore.

Le cifre indicanti l'emissione di CO_2 concordano tutte nel dimostrare quanto sia costante l'aumento dell'attività respiratoria allorchè venga ad aumentare la quantità di acqua contenuta nei loro tessuti; è pure evidente che l'aggiunta ai semi di quantità piccole di acqua provoca sempre un aumento proporzionale nell'emissione del CO_2; fatto questo che non si verifica nei semi impermeabili delle leguminose. Si deve quindi ammettere che con tale intensa attività respiratoria in dipendenza del grado di umidità dei semi, la loro vitalità debba ben presto esaurirsi, e che essi di per sè non oppongono alcuna facoltà difensiva all' eccessivo logorìo di forze che importa l' aumento della respirazione.

La causa della lunga vitalità di questi semi deve ricercarsi nelle condizioni di ambiente in cui vengono a trovarsi durante il riposo. Le ricerche di molti naturalisti (1) hanno infatti dimo-

(1) Mangin L., *Études sur la végétation dans ses rapports avec l'aération du sol* (" Ann. de la Soc. agronomique franç. et étrang. ,). — Boussingault

NOME DELLE SPECIE	Quantità massima di H_2O assorbita in aria satura di umidità	Esperienza I		Esperienza II		Esperienza III		Esperienza IV		Esperienza V	
		H_2O %	CO_2 mmgr.	H_2O %	CO_2 mmgr.	H_2O %	CO_2 mmgr.	H_2O %	CO_2 mmgr.	H_2O %	CO_2 mmgr.
Alisma Plantago . .	18,8716	7,5809	0,4668	7,9721	0,6248	8,3972	1,8789	8,5066	2,1308	9,2135	2,5721
Scirpus lacustris . .	12,2075	8,3045	0,2021	9,0352	0,4416	9,1613	0,7784	9,3416	1,5247	9,7659	4,3356
— maritimus .	17,5250	7,0038	0,4490	7,2691	0,4942	7,8809	1,7026	8,3421	1,8698	8,7580	1,9443
Panicum Crus-galli .	14,8604	4,5893	0,2097	4,7018	0,2158	5,2789	1,6120	5,4015	0,9850	5,9685	1,6128
Amarantus retrofl. .	14,5071	6,4080	0,3904	6,9461	0,6244	7,4019	1,0524	8,4058	2,3627	9,8810	2,9301
Chenopodium album .	14,5812	8,1034	0,2462	8,5413	1,4119	8,3341	2,0720	9,1643	2,2514	9,5648	2,9704
Polygonum Persicaria	16,8834	7,9641	0,1596	8,3171	0.3324	8,7280	1,0366	8,9580	1,0489	9,9519	2,0793
Bidens tripartita . .	14,4985	6,5634	0,2462	6,9054	0,5817	7,3028	1,1264	7,8635	1,8344	8,0422	2,1812

strato quanto sia abbondante l'anidride carbonica nell'aria confinata negli strati profondi del suolo; e in molti casi quanto sia piccola la quantità di ossigeno ivi contenuta. È sufficiente che la quantità di questo gas venga ad essere inferiore al 5-8 % (1) perchè sia impedita la normale funzione di ricambio nelle piante superiori: ora nei semi germinanti l'attività vitale richiede ossigeno sempre in quantità più notevole della normale, e ancor più notevole allorchè si tratta dei semi grassi nei quali il quoziente respiratorio durante la germinazione si abbassa molto al disotto dell'unità (2). A tal proposito occorre rilevare la coincidenza notevole che molti semi che mantengono una lunga vitalità soltanto se affondati nel terreno, sono appunto assai ricchi di grassi e l'ossigeno agendo sulle riserve di tal natura le altera in breve tempo producendo la morte dell'embrione (*Sisymbrium*, *Capsella*, *Papaver*, Ombrellifere). In tal modo la mancanza di ossigeno durante la quiescenza nel suolo ha per risultato, non solo di evitare il logorìo della vitalità del seme, ma anche d'impedire il prodursi dei derivati dell' ossidazione di alcune riserve del seme stesso, che hanno azione tossica sull'embrione.

Nei semi delle piante palustri di solito non è così abbondante il grasso da rendere necessaria una forte quantità di ossigeno al momento della germinazione, o da poter influire sulla vitalità dell'embrione, ma le condizioni di ambiente sono ancora più sfavorevoli. Non si tratta più in tal caso di penuria d'ossigeno, ma di assoluta mancanza di esso, a causa di fenomeni intensi di riduzione provenienti sia da semplici reazioni chimiche, tra i corpi esistenti nel limo dei laghi palustri, sia anche dall'attività di una numerosa e varia flora batterica, tra cui conviene annoverare i microrganismi riduttori dei composti ferruginosi, di quelli solforati e persino dall'anidride carbonica (3).

---

et Lewy, *Mém. sur la composition de l'air confiné dans la terre végétale* (" Ann. de Chim. et de Physique ", XXXVII, 1853). — Ebermeyer, *Mittheilungen über den Kohlensäure gehalt der Waldluft und des Waldbodens in Vergleich zu einer nicht bewaldeten Fläche* (" Forschungen auf den Gebiete der Agrikultur-Physik ", Bd. I, 1878.

(1) Stich C., *Die Athmung der Pflanzen bei verminderten Sauerstoffspannung.* Flora, 1891.

(2) Pfeffer W., *Pflanzenphysiologie,* II Aufl., Bd. I, p. 534.

(3) Beijerinck M., *Centralbl. Bakt.*, II Abt., XI, 1004, pp. 593-599 Ref. in " Just's Bot. Jahresber. ", XXXII, Abt. II, p. 95.

In tal modo, con un meccanismo perfettamente diverso da quello presentato dalle specie con semi impermeabili, una numerosa categoria di specie perviene, se le circostanze lo permettono, a tramandare intatti i suoi caratteri attraverso numerosissime vicende sfavorevoli.

Inoltre queste piante ricomparse così improvvisamente nel centro di una regione floristica senza l'intervento di alcun agente attuale di disseminazione, possono costituire un centro nuovo insospettato di espansione di determinate specie, espansione capace sia di influire sulle condizioni della vegetazione attuale, sia di fornire il mezzo di interessanti deduzioni sulle condizioni floristiche della regione in epoche remote.

È questo un fatto di biologia vegetale tenuto finora in piccolo conto e che potrebbe avere una certa importanza negli studî di fitogeografia.

Torino, Istituto Botanico, 28 gennaio 1906.

L'Accademico Segretario
LORENZO CAMERANO.

CLASSI UNITE

Adunanza del 4 Febbraio 1906.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: Salvadori, Direttore della Classe, Naccari, Mosso, Spezia, Camerano, Segre, Peano, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Parona, Mattirolo, Morera, Grassi e Somigliana; è scusata l'assenza del Socio Fileti;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: Ferrero, Direttore della Classe, Rossi, Carle, Graf, Cipolla, Brusa, Allievo, Carutti, Pizzi, Chironi, De Sanctis, Ruffini e Renier Segretario.

Si approva l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 28 gennaio 1906.

L'Accademia procede al conferimento dei premi Gautieri e Bressa.

Conferisce il premio Gautieri per la letteratura (triennio 1902-1904) al prof. Emilio Bertana, Provveditore agli studi in Ascoli-Piceno, per la monografia: *Vittorio Alfieri studiato nel pensiero, nella vita e nell'arte,* Torino, 1904, 8°; e il XIV premio Bressa (nazionale 1901-1904) al prof. Carlo Alfonso Nallino dell'Università di Palermo, per l'opera: *Al-Battānī sive Albatenii Opus Astronomicum,* Milano, 1903; 4°.

Gli Accademici Segretari
Lorenzo Camerano.
Rodolfo Renier.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 4 Febbraio 1906.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Ferrero, Direttore della Classe, Rossi, Carle, Graf, Cipolla, Brusa, Allievo, Carutti, Pizzi, Chironi, De Sanctis, Ruffini e Renier Segretario.

Viene approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente, 21 gennaio 1906.

Il Socio Brusa fa omaggio all'Accademia di due pubblicazioni, delle quali mette in rilievo lo speciale valore. Sono un opuscolo di Lucia Bartelett, *Il sistema di prova in America*, Roma, tip. Agostiniana, 1905; ed un volumetto di Samuel J. Barrows, *Children's Courts in the Unit. States*, Washington, 1904.

Per l'inserzione negli *Atti* il Socio Graf presenta una nota del Dr. Luigi Fassò, *Saggio di ricerche sulla fortuna di Walter Scott in Italia.*

LETTURE

Saggio di ricerche intorno alla fortuna di Walter Scott in Italia.

Nota di LUIGI FASSÒ.

Chi prendesse a narrare con cura la storia della fortuna che ebbero le opere di W. Scott in Italia farebbe senza dubbio libro importante, utile e attraente: importante per lo studio delle letterature comparate a cui si dà ora giustamente tanto peso, utile per la conoscenza esatta di non pochi nostri prosatori del periodo romantico, attraente per la copia e per la natura stessa dei fatti che converrebbe lumeggiare. Certo cosifatto lavoro non sarebbe nè facile nè breve: non sarebbe facile perchè il determinare con precisione la misura e il grado dell'influenza esercitata da uno scrittore sovra un altro o sovra altri è tra i còmpiti più delicati che la critica storica ed estetica possa prefiggersi — i tentativi fatti finora per stabilire quanto allo Scott debba il Manzoni informino —; non sarebbe breve perchè anche prescindendo dalla necessaria analisi di un bel numero di romanzi e di racconti più o meno estesi, ampie e lente debbono di necessità riuscire le ricerche in giornali, opuscoli, epistolari editi ed inediti, di altri documenti e fatti utili all'assunto; ma, nonostante questo, io credo che l'opera sulla fortuna dello Scott in Italia non può tardar molto ad apparire perchè da qualche tempo i critici sembrano finalmente convinti della necessità di studiare per monografie anche la storia minuta delle nostre lettere nella prima metà del sec. XIX; e nell'attesa appunto del volonteroso che si sobbarchi all'accennata fatica non parrà certamente cosa vana l'esporre qui, intorno all'argomento, alcune notizie che mi venne fatto di raccogliere, come saggio di quel molto che altri potrà scovare ed illustrare.

La prima opera dello Scott comparsa in veste italiana è, per quello che a me consta, *Kenilworth* data in luce a Milano da Gaetano Barbieri coi tipi del Ferrario l'anno 1821 (1). Non del tutto bene serviva adunque la memoria a *Carlo Varese*, uno dei più notevoli scottiani d'Italia, quando scrivendo al Brofferio affermava che i romanzi dello Scott comparvero in Italia nel '22 o '23. La *Biblioteca Italiana*, l'organo magno dei *classicisti*, annunciava *Kenilworth* con queste parole: " Ottimo divisamento è quello del sig. Ferrario di dare all'Italia tutti i romanzi di W. Scott tradotti nella lingua nostra. Noi siamo così poveri in questo genere ch' egli è bene che qui si portino le ricchezze straniere onde conoscerle e giudicarle, e mostrare agli ingegni italiani una strada che offre una nuova corona letteraria „; e riportato il fervorino editoriale concludeva: " Auguriamo alla impresa del sig. Ferrario buona fortuna e vogliamo ricordargli che a proposito di romanzi vi sono quelli di *miss Edgeworth* che tengono il primo posto in Inghilterra, massimamente per lo scopo morale a cui tendono e per la pittura esatta e vivissima ch'ella fa dei costumi della civile società „ (cfr. t. 24, p. 159). Il consiglio di intraprendere la pubblicazione delle opere di miss Edgeworth dopo quella dei romanzi dello Scott, avuto riguardo alla diversa tempra degli autori e alla diversa natura dei loro libri, è per lo meno curioso, ma il carattere del giornale in

---

(1) Cosa degna di nota per più rispetti, i romanzi dello Scott penetrarono prima in Francia che in Italia. Il primo romanzo dello Scozzese pubblicato in Francia è difatti *Guy Mannering* e reca sul frontispizio l'anno 1816 (cfr. L. Maigron, *Le roman historique à l'époque romantique*, Paris, Hachette, 1898, p. 101 e seg.). La differenza, avuto riguardo al genere dei libri, non è tanto lieve come appare numericamente, nè basta a spiegarla la maggior vicinanza geografica della Francia alla Scozia, ma conviene tener nel debito conto altri fatti e non dimenticare sopratutto che il romanzo storico non era in senso assoluto una novità per la Francia mentre, almeno in senso relativo, era una novità per l'Italia; e neanche è a dimenticare, tra l'altro, come pochi anni prima che lo Scott iniziasse i suoi romanzi storici conformandoli a quelle regole destinate poi a divenire in certa guisa rigide come le tanto combattute regole aristoteliche, uno scrittore francese, lo Chateaubriand, aveva messo egregiamente in opera uno degli elementi essenziali del genere, *il color locale*. Del resto a tutto ciò si riconnette strettamente il fatto che il romanzo storico ebbe nella formazione del romanticismo un'importanza assai maggiore in Francia che non in Italia.

cui lo troviamo basta a spiegarlo (1). — Se, com'io penso, *Kenilworth* è il primo romanzo dello Scott apparso in veste italiana, bisogna convenire che l'editore non poteva sceglier meglio perchè esso è tra i più belli e più forti romanzi dello scozzese, così per la felice pittura dell'epoca, come per l'originale evidenza dei caratteri e l'arditezza della catastrofe finale che al Varese pareva una delle più nuove insieme e delle più terribili che immaginazion di poeta abbia mai inventato (2); ebbe infatti un grande successo e il Ferrario non esitò a fargli tener dietro nel '22 l'*Ivanhoe* (traduttore Gaetano Barbieri) e *L'ufficiale di fortuna* (3) (traduttore V. Lancetti), nel '23 *Le prigioni di Edimburgo* (*Heart of Mid-Lothian*, trad. P. Borsieri), nel '24 l'*Antiquario* ecc. Ma poichè Gualtiero Scott era stato prima poeta che romanziere, neppure i suoi poemi furono dimenticati e l'anno medesimo in cui il Ferrario pubblicava *Kenilworth* uscivano alla luce due diverse versioni della *Lady of the Lake*, alle due estremità d' Italia: a Torino cioè e a Palermo. La traduzione piemontese è opera di un “ Uffiziale del Re di Sardegna „ che si firma semplicemente *cav. P**** (4), la siciliana è dovuta ad un traduttore più coraggioso che dà intero il suo nome: “ *Giuseppe Indelicato* „ (5). Noto di passata che le due versioni vennero sot-

(1) Maria Edgeworth [1767-1814] è l'autrice di *Castle Rackrent, Belinda, Racconti popolari, Elena* ecc. Alcune delle sue opere furono voltate in italiano da Bianca Milesi Mojon, altre dal romanziere veneto A. F. Falconetti.

(2) Cfr. p. xxi della curiosa dissertazione *Di Rossini e di W. Scott messi a confronto come genii di indole identica*, premessa alla *Preziosa di Sanluri*, Milano, Stella, 1832. — Non è impossibile che *Kenilworth* a parecchi italiani fosse già noto nella versione francese, quantunque a me non sia riuscito di trovare nei nostri periodici alcun cenno delle traduzioni francesi di *The Wawerley Novels* prima del 1821.

(3) È *Legend of Montrose*. I titoli dei romanzi di W. Scott ebbero nelle traduzioni vicende curiose e non sempre è facile additare la ragione dei cambiamenti da essi subìti. I traduttori italiani accolsero in genere i titoli scelti dai traduttori francesi. — Per l'ordine con cui apparvero fra noi i romanzi dello Scott è a ricordare che il Barbieri fin dal '22 traduceva e pubblicava a Milano coi tipi del Commercio *I Puritani di Scozia (Old Mortality)* e il *Nano misterioso (Black Dwarf)*.

(4) Cfr. *La Donna del lago* poema di W. Scott, trad. del cav. P*** uffiziale del re di Sardegna (Torino, Chirio e Mina, 1821).

(5) Cfr. *La Donna del lago*, trad. di G. Indelicato (Palermo, Lorenzo Dati, 1821). Una terza versione di questo poema, di un *C. C.* pubblicò nel '29 a Milano G. Crespi coi tipi di G. Truffi.

toposte dai critici ad uno scrupoloso esame comparativo e non pochi furono i dissensi circa il valore rispettivo di esse: così, dopo che le ebbe poste a confronto fra loro la *Biblioteca Italiana* del 1822 (t. 25, p. 179) — e già prima la versione dell'Indelicato era stata esaminata dal *Giorn. Enciclopedico* di Napoli (1821, t. 3°) — Palermo vide pubblicare coi tipi De Luca un opuscolo intitolato *Estratto e commento del giudizio dato dalla Biblioteca Italiana sulle due versioni della " Donna del Lago "*. Tanto fracasso intorno alle versioni di un poema che non è certo un gran titolo alla fama dello Scott mentre, come vedremo, la critica poco si commoveva all'apparire dei romanzi che pur entusiasmavano i lettori, si spiega solo col fatto che allora, per taluni, anzi molti Aristarchi la prosa era un genere trascurabile, un *genus minus* indegno dell'attenzione rivolta alla poesia (1).

Naturalmente non è mio proposito venir seguendo una ad una le prime edizioni italiane delle opere di W. Scott: sarebbe un lavoro improbo e, almeno qui, di non grande utilità. È facile tuttavia persuadersi che le accoglienze ai primi romanzi venuti in luce furono tali da far pullulare editori e traduttori da ogni parte: da Milano era partita la prima scintilla e a Milano sopratutto divampò il fuoco, a Milano sopratutto infittirono rapidamente traduttori ed editori. Colui che vorrà fare la storia degli editori milanesi dell'epoca di cui discorriamo — e dei lavori di tal genere è ormai palese l'utilità — troverà non poca materia relativa allo Scott e ai guadagni che i suoi volumi procurarono a chi li pubblicò: non vi fu del resto nella prima metà del secolo XIX editore italiano di qualche importanza che non pubblicasse almeno uno dei tanti romanzi dello Scott, e, sebbene dopo il '50 la sete dei lettori diminuisse assai, non si cessò di stamparli e anche ora, tratto tratto, se ne ripubblica qualcuno.

Se le edizioni diluviarono, i traduttori furono una frotta e una frotta variopinta. Voglio dire che vi furono traduttori e traditori dello Scott: il bisticcio è vecchio, ma non perciò meno

---

(1) Non ce ne stupiremo gran fatto dal momento che gli stessi romantici, come bene osserva il Graf nel suo studio notissimo sul *Romanticismo del Manzoni* (nel vol. *Foscolo, Manzoni e Leopardi*, Torino, Loescher, 1898), " mostrarono sempre una spiccata tendenza a mettere la poesia sopra " la prosa ".

significativo. Il maggior numero di questi traduttori, buoni e cattivi, veri e falsi, è fornito da Milano il centro intellettuale dell'Italia d'allora, la grande dispensatrice d'ogni novità romantica, la città del Manzoni. Il romanticismo, che fu moto europeo, favorì e rese anzi necessari i traduttori, e l'Italia n'ebbe molti, intenti sopratutto a divulgare autori francesi, inglesi, tedeschi. La lingua inglese era allora sufficientemente nota agli italiani che per tal modo continuavano una tradizione già assai viva nel 700; nessuna meraviglia quindi se molti furono gli autori inglesi tradotti durante il periodo romantico e molti i traduttori. Ecco, alla rinfusa, un elenco non certo completo di traduttori dei romanzi e dei poemi dello Scott: *Gaetano Barbieri*, *Vincenzo Lancetti*, *Virginio Soncini*, *Giuseppe Giglioli*, *Bassano Finoli*, *Vittore Calnetti*, *Francesco Cusani*, *Giambattista Bazzoni*, *Nicolò Tommaseo*, *Antonio Clerichetti*, *Tommaso Grossi*, *Giovanni Crippa*, *Vittore Pecchioli*, *Giacomo Sormani*, *Carlo Rusconi*, *Luigi Toccagni*, *Pietro Borsieri*, *Luigi Bassi*, *Pietro Costa*. Un par di nomi illustri, adunque, alcuni noti, i più oscuri (1). Il vanto dell' operosità maggiore va dato all'ab. Gaetano Barbieri che tradusse quasi tutti i romanzi dello Scozzese e diede veste italiana niente affatto spregevole a molti altri scrittori (2). Degli altri sono noti Gia-

(1) Scrisse il Cantù (A. Manzoni, *Reminiscenze*, Milano, Treves, 1882, I, p. 150) che i traduttori dello Scott a Milano furono *tutti* amici del Manzoni, ma evidentemente, com'è facile scorgere pure dall'elenco sopra segnato, quel *tutti* è troppo forte: come troppo forte è la negazion assoluta che a tale asserto contrappone lo Stampa (S. S., *A. Manzoni*, *la sua famiglia*, *ecc.*, Milano, Hoepli, 1895), poichè il Tommaseo e il Grossi furono bene amici del Manzoni. Recentemente G. Sforza nella sua dotta prefazione ai *Brani inediti dei P. S.* (2ª ediz., I, p. xvi), pose tra gli amici del Manzoni anche l'ab. Gaetano Barbieri. Ma proprio merita tale onore il bravo I. R. professore di matematica?

(2) Shakespeare, Kotzebue, De Vigny ecc. Sul Barbieri traduttore dello Scott è a vedere il *Giornale Arcadico* (anno 1822, fasc. 4°). Egli fu del resto operosissimo: scrisse commedie, novelle storiche e non storiche, melodrammi e poesie liriche, diresse giornali teatrali e compilò due raccolte drammatiche, non senza tentare anche il romanzo storico (cfr. *Biblioteca Italiana*, t. 21, p. 100; t. 69, p. 93; t. 72, p. 65; t. 88, p. 294). Secondo recenti affermazioni (cfr. R. Barbiera, *Passioni del Risorgimento*, Milano, Treves, 1903, p. 74) all'Archivio di Stato di Milano esistono documenti dai quali risulterebbe che Gaetano Barbieri fu spia prezzolata dell'Austria; ma pare a me che prima di formulare in modo definitivo un giudizio infamante su di un uomo che

como Sormani e Carlo Rusconi per le loro versioni dello Shakespeare e Francesco Cusani per la sua *Storia di Milano*; Virginio Soncini, bresciano, scrisse una *Storia della Scandinavia* (notevole il fatto che parecchi traduttori e ammiratori dello Scott coltivarono gli studi storici), tradusse anche Molière e lasciò inedito un romanzo intitolato *Conal* (1). Quanto a Vincenzo Lancetti, cremonese, è d'uopo riconoscere che ha molti titoli per essere ricordato: autore di un lodato romanzo, *Cabrino Fondulo*, poeta onorato di consigli dal Foscolo, traduttore di Petronio e dei due Filostrati, compilatore di libri eruditi ed utili nonchè *classicista* battagliero, egli è tal uomo e tal scrittore da meritare l'attenzione particolare degli studiosi (2). Nè passerò sotto silenzio Luigi Toccagni, scrittore leggiadro e modestissimo, amato teneramente da Giuseppe Verdi, traduttore dello Chateaubriand e di quella sterminata *Vita di Napoleone* che è l'unico vero delitto letterario dello Scott e che nondimeno piacque tanto in Italia da indurre, nella sola Firenze, due editori ad iniziarne contemporaneamente la pubblicazione (3). Firenze del resto, non sarà male notarlo di volo, gareggiò in pochi anni con Milano nella pubblicazione dei romanzi scottiani (4), ed è a Firenze che si pensò per la prima volta ad una collezione di romanzi storici originali italiani (5).

---

ebbe nelle lettere tanta attività intelligente ed utile, sia da attendere la pubblicazione di quei documenti. Vedi contro l'affermazione del Barbiera l'articolo di A. Luzio sulla Principessa Belgioioso nel *Corriere della Sera*, 3-4 agosto 1902.

(1) Doveva essere un romanzo storico. Vedi sul Soncini un necrologio nell'*Eco* di Milano, 1832, nº 60.

(2) Molto opportunamente il Mazzoni gli dedica una pagina del suo *Ottocento* (Milano, Vallardi, in corso di pubblicazione): alle opere del L. ivi ricordate bisogna però aggiungere l'*Almanacco dei letterati del Regno Lombardo-Veneto* (uscito nel 1825 e nel 1826) del *Chirurgo Franco Splitz*. Lo Splitz è appunto il L. come egli stesso rivela nella sua *Pseudonimia* (Milano, Pirola, 1836). Dello Splitz è a ricordare anche la *Rivista generale dei libri usciti nel 1826 nel R. Lombardo-Veneto*.

(3) Cfr. W. Scott, *Vita di Napoleone*, trad. di V. Pecchioli, Firenze, Coen, 1827 e W. Scott, *Vita di Napoleone*, Firenze, 1827, presso G. Galletti e L. Ciardetti.

(4) Cfr. le collezioni Coen e C., Ciardetti e Galletti, Passigli Borghi e C. ecc.; tutte però posteriori al '27.

(5) Fu iniziata nel 1830 presso l'editore G. Veroli. — Parecchi fra i

Non del tutto privo d'interesse sarebbe il vedere come i traduttori summentovati si comportino col loro autore e quale lingua adoperino; non sempre si può dire sia l'italiana. Curiose ad esempio le preoccupazioni che in alcuni di essi, nel Barbieri specialmente, desta la profession religiosa dello Scott: tratto tratto, in apposite note, vengono ricordando ai cattolici lettori che lo Scott non appartiene al loro ovile e che in conseguenza non c'è da far meraviglia per le frecciate che talvolta indirizza al " papismo ". Meno male che cosifatte note ci salvano dallo sconcio peggiore di tagli cesarei nel vivo testo (1). Più commendevoli assai i traduttori che a quei giorni pensarono a difendere nelle loro note l'Italia e gli Italiani non sempre favorevolmente e fedelmente dipinti dallo Scott (2). Ma, come ognun vede, questi sono argomenti che potrà approfondire il futuro storico della fortuna che lo Scott ebbe in Italia: a me basti qui ricordare ancora, prima di lasciare i traduttori, che parecchie delle loro fatiche vennero ristampate qua e là nelle città italiane senza il loro consenso e senza il loro nome, per un abuso che il poco sviluppo della legislazione sulla proprietà letteraria e la disonestà sfacciata degli editori rendevano possibile e frequente: alcuni traduttori ricorsero all'anonimo anche volontariamente, a celare versioni derivate non già dal testo inglese, ma da altre versioni francesi e non mancò chi — il milanese Crespi per esempio — ricorse a semplici iniziali le quali fanno

---

nomi dei traduttori sopra ricordati giustificano quello che scriveva nel 1831 l'anonimo autore dell'almanacco *I Letterati Lombardi* (Milano, P. M., Visaì, p. 75), a proposito di M. Mazzoni lodato traduttore del *Manfredi*: " Dacchè la originalità degli ingegni è andata (Dio sa per quali cause) mano mano languendo in tutta Europa sicchè pochi, sebben vividi astri brillano oggidì sul poetico orizzonte d'una luce lor propria, sorsero dovunque in folla i traduttori e tra questi (con detrimento dell'arte patria) alcuni, che già vantaggiosamente erano noti alla letteraria repubblica, siccome autori di qualche grido ".

(1) Cfr. ad es. le note ai cap. VIII e XVII del *Monastero*, traduz. di G. Barbieri, edizione, per citarne una recente, del Perino, Roma, 1893.

(2) G. B. Bazzoni nel 1830 rilevava che " il gran corifeo dei romanzieri, W. Scott... generalmente nelle sue opere si mostra poco proclive a dar gloria agli italiani ". Si veda, fra le tante, la nota patriottica che il Cusani pose a p 30, vol. I della sua versione dell'*Anna di Geierstein* (Milano, Crespi, 1830).

sospettare si tratti non di traduttori, ma di traduttor dei traduttori. Di questi, benchè ponesse intero il suo nome sul frontispizio, fu certamente Vittore Calnetti (1).

Se il fin qui detto mostra già assai bene il favore onde vennero fra noi circondate le opere dello Scott, una conferma magnifica ne avrebbe chi volgesse l'occhio alle arti figurative e alla musica: le tele, le pietre litografiche e fors'anco il marmo e il bronzo divennero interpreti insieme delle bellezze che quei romanzi contenevano e dell'entusiasmo appassionato che destavano nei loro lettori. O non si vide forse l'*Hayez*, il capo della pittura romantica, disegnare tutta una serie di litografie illustranti le scene principali del capolavoro scottiano, l'*Ivanhoe*? E un *Antonio Banfi* dipingere l'*ultimo addio del sere di Ravensvod alla sua diletta Lucia?* E *Federico Moja* ritrarre con " stupendo colore „ il romitaggio di *Friar Tuck?* — E la musica! La musica, la divina fra le arti, la musica che, come le sorelle sue, non lascia di farsi a volta a volta specchio di molte delle tendenze dei varii tempi, non fu ancor essa ammaliata dal fascino di quei racconti, non si avvinse, essa divina, a quella fantasia che i contemporanei chiamavano divina? La musica fu, tra i mezzi che diffusero il romanticismo, uno dei più efficaci e insieme, com'è naturale, ricevette da esso un'impronta indelebile. Che vi sia stata e tuttora continui una musica alla quale si può dare l'appellativo di *romantica* è cosa che chiunque abbia qualche conoscenza, sia pure superficiale, della musica del sec. XIX, non può certo pensar a negare: io credo anzi che senza il romanticismo difficilmente avremmo avuto Riccardo Wagner, almeno quale oggi lo veneriamo. E non intendo riferirmi al solo melodramma, quantunque in esso il romanticismo musicale per virtù della parola a cui si appoggiano le note si appalesi di necessità nel modo più evidente, ma anche alla musica pura, a quella che per sola virtù propria si eleva nei cieli dell'ebbrezza e dei

(1) Chi voglia persuadersene cfr. la sua versione del *Kenilworth* (Milano, Crespi, 1831) colla versione francese del *De Fauconpret* e col testo inglese. — Il più tipico dei traduttori fu però Giovanni Campiglio, monzese, il quale iniziò a Milano una collezione intitolata " *Amenità di W. Scott o suoi romanzi storici abbreviati nelle parti meno importanti, dati però interi i più perfetti* „.

sogni, perchè ancor essa si imbevve di romanticismo e toccò così altezze prima ignorate. Era inevitabile del resto: quando le creature di Shakespeare, di Goethe, di Byron, di W. Scott vivevano nella mente e nel cuore di milioni di lettori, quando torrenti di passionalità veramente umana e pur nuova rigeneravan le smorte fibre della poesia, come poteva la musica continuare nei cincischii del '700? Venne Beethoven, il gran Beethoven che diede saggi di musica romantica destinati a rimanere insuperati (1); e venne, per tacer d'altri, Berlioz (2). — W. Scott ebbe, sebbene indirettamente, non piccola parte in tale rinnovarsi della musica: ho fatto il nome di Berlioz e mi convien ricordare che l'autore della *Dannazione di Faust*, dell'*Ouverture du roi Lear*, di *Giulietta e Romeo* e della *Scène de l'ombre d'Hamlet* compose anche una *Ouverture de Waverley* e in Italia, si noti, in Italia, una *Ouverture de Rob-Roy*. E volendo uscir di Francia, lo *Czerny*, la delizia dei principianti di pianoforte, non scrisse numerose *fantasie* sui romanzi dello Scott? — Ma limitiamoci alla nostra penisola e ai nostri musicisti. Finora gli studiosi di questo argomento hanno ricordata la *Donna del lago* di Rossini, l'*Ivanhoe* del Pacini, il *Templario* del Nicolai tratto dall'*Ivanhoe*, e la *Lucia* di Donizetti (3); ma c'è ben altro, e se ne persuaderebbe subito chi volesse gettare un'occhiata anche fuggevole ne' giornali dell'epoca. Intanto l'*Elisabetta al castello di Kenilworth* di Donizetti poteva essere ricordata facilmente, non fosse che per la ragione che è di Donizetti. Più difficili a rintracciarsi, perchè giustamente dimenticati, sono i melodrammi seguenti che quantunque destituiti di valore artistico, hanno per noi un valore storico non minore di quello che ha per esempio la *Lucia* che tuttora si applaude: l'*Eco* del 1829 (n. 64) dopo una critica del ballo *La fuga di Edoardo Stuart* (si noti l'argomento scottiano del ballo, quantunque sia tratto da una commedia del Kotzebue) aggiunge: " Speriamo nel *Talismano* del sig. Barbieri messo in musica dal M° Pacini, di cui si sente a dir bene da chi va

---

(1) Chi non pensa alle *Sinfonie* e alle *Suonate* VIII e XIV?

(2) Cfr. ciò che del Berlioz dice il Gautier nella sua vivace *Histoire du romantisme*, p. 26.

(3) Così il Mazzoni nell'*Ottocento* cit. e seguendo fedelmente il Mazzoni, l'Albertazzi nel suo " *Romanzo* „ (Milano, Vallardi).

alle prove „. Nel n. 70 dello stesso anno c'è la cronaca della prima rappresentazione del *Talismano* e il libretto vien detto indegno di " un uomo d'ingegno che sa maneggiare la penna, che come giornalista e come autore deve conoscere l'effetto teatrale, che ha pratica e facilità di verso e di rima „. Povero I. R. professore di matematica! Il libretto è detto anche " singolare e strano „; e quanto alla musica, applauditissima, si scrive con accorta parola che *il tempo insegnerà poi il resto.* Il Pacini [1796-1867] dovette essere un grande ammiratore dello Scott perchè nello stesso anno 1829 il troppo fecondo maestro faceva rappresentare al S. Carlo di Napoli *Il connestabile di Chester* tratto da *The betrothed* su libretto di un tal Gilardoni; e l'opera, interpretata da artisti quali la Boccabadati, la Tosi, il Lablache, ebbe sorti lietissime non solo a Napoli, ma anche altrove. Che più? Il grande ed infelice Donizetti non fu il primo a rivestire di note la pazzia della povera sposa di Lammermoor perchè, sempre nel '29, il maestro napoletano Michele Carafa [1787-1872] faceva rappresentare al *Theâtre Royal Italien* di Parigi *Le nozze di Lammermoor* e il corrispondente parigino dell'*Eco* dando conto della musica " senza espressione nè grazia „ aggiungeva: " L'argomento non è di cattiva scelta, v'ha azione, movimento e passioni, e siccome è preso dal conosciutissimo romanzo di W. Scott che ha lo stesso titolo, non occorre che ve ne parli (1) „. E un'altra opera, *La fidanzata di Lammermoor*, traeva dallo stesso romanzo, pur precedendo Donizetti, un maestro insigne che tuttora Milano ricorda, Alberto Mazzucato. Ancora, successo lietissimo riportava all'I. R. Teatro della Canobbiana il 13 novembre 1830 *La dama bianca d'Avenello* tratta dal *Monastero* poesia di G. Rossi, musica del M° V. Pavesi [1779-1850]. Mette conto di riportare qualche brano del giudizio recato dal critico dell'*Eco* (n. 137), giudizio che data l'indole prettamente romantica del giornale, è di un sarcasmo singolare: " Il dramma è un miscuglio di commedia e di romanzo, trattato e versificato in modo alquanto e più che alquanto strano, di maniera che il buon Pavesi non ha fatto poco a salvarsi „. E poco oltre aggiunge: " Il vestiario ci è parso quello che doveva essere. Non

---

(1) Cfr. *Eco*, 1829, n. 159. — Nel 1839 a Varsavia, Vittorio Ducange faceva rappresentare un melodramma col titolo *La Sposa di Lammermoor*.

ne parleremo per la grande antipatia che abbiamo già da qualche tempo a tutta la genìa di montanari scozzesi in commedie, tragedie, opere e balli e, sia permesso il dirlo, anche in romanzi „. Per un giornale romantico che aveva a collaboratori romanzieri quali G. B. Bazzoni e Achille Mauri non c'è male; ma dopo tutto il cronista dell'*Eco* non aveva gran torto nel lamentare l'invasione dei montanari scozzesi (1). Una delle prove della fortuna e influenza di W. Scott è appunto nella facilità colla quale sorsero lavori d'ogni maniera riguardanti la storia di Scozia. Così è indubitabile che senza *The Waverley Novels* i nostri teatri non avrebbero mai avuto il *Wallace o l'Eroe scozzese* melodramma serio composto da Felice Romani, nè, per tacere d'altri molti, l'*Edoardo in Iscozia* e la *Maria Stuarda* di Carlo Coccia [1782-1873], lavori i quali ottennero per molti anni sorti lietissime. E non mancarono neanche autori che all'ombra benigna dello Scott riuscirono a farsi leggere e magari ammirare in varie nazioni: così, per fare almeno un nome, *Giovanna Porter*, ora completamente dimenticata, vide fin dal 1823 il suo ponderoso romanzo *I capi Scozzesi* voltato in italiano da Angiola Pernecchi, e non fu quella la sola traduzione italiana. — E dovrei qui parlare anche dei balli, spettacoli in quell'età importantissimi e ammiratissimi, ma dopo quel che s'è visto, non riuscirà difficile credere, senza bisogno di prove, che anche la coreografia rispecchia in modo significantissimo l'entusiasmo per i romanzi scottiani (2);

(1) I melodrammi italiani tratti dalle opere di W. Scott non si riducono naturalmente ai sovra accennati, dei quali ritrovai notizie frequenti nei giornali; di molti altri è possibile aver per altra via notizia. Così il Pacini musicò ancora un *Allan Cameron*, Federico Ricci, *Le prigioni di Edimburgo*, B. Pisani una *Rebecca* che il Piave cavò dall'*Ivanhoe*, il Lucilla *La bella fanciulla di Perth* che doveva poi tentare anche la possente fantasia del Bizet. Del resto è incredibile la facilità e la frequenza con cui dai romanzi storici italiani e stranieri si trassero melodrammi: i musicisti seppero giovarsi tanto di capolavori come i *Promessi Sposi* (Petrella, Ponchielli), quanto di cosucce dimenticate come la *La Bella Celeste degli Spadari* (Coppola).

(2) Si suol ricordare il solo *Kenilworth* di Gaetano Gioia, ma di molti altri si potrebbe agevolmente recare il titolo, e d'altra parte chi potrà dire quanti degli innumerevoli *Pirata* che corsero le nostre scene in quei giorni (i giorni della Taglioni, della Cerrito, della Essler) si debbono far risalire allo Scott? Accanto ad essi sorgevano non meno numerosi i *Corsari*, figli illegittimi di Lord Byron.

e lo stesso è a ripetere per le mode femminili e non femminili di cui resta l'eco nei giornali.

Ho fatto menzione dei giornali e debbo subito aggiungere che non v'ha foglio di qualche importanza romantico o non romantico, il quale nel periodo dal '24 circa al '32, anno in cui lo Scott si spense, non contenga pressochè in ogni numero qualche notizia o qualche articolo relativo al grande Scozzese. Si ricorre a fonti inglesi, tedesche, francesi, a fonti di ogni lingua pur di tener informati i lettori delle particolarità più ghiotte intorno all'adorato romanziere: se ne descrive la vita privata, l'abitazione, la libreria, si riferiscono tutti i giudizî che le riviste straniere dettano intorno a lui e ai suoi romanzi, si riassumono le sue opere man mano che vengono pubblicate e si riportano tradotti non solo i suoi racconti minori, ma anche i suoi scritti più futili, come ad esempio quello sulla *Coltivazione delle rape in Inghilterra* (1). Quando poi lo Scott s'ammala gravemente le notizie spesseggiano e prima è tutto un inno d'augurî, poi, quando ogni speranza è svanita, si invoca per quella gran mente una morte serena (2). La morte dello Scott fu pianta anche in versi: Francesco Ruffo, fra gli altri, intitolava *In occasione della morte di W. Scott* un suo canto lirico dato alle stampe in Napoli. Nè mancarono altri omaggi, alcuni curiosissimi, di poeti e di prosatori. L'anno stesso in cui lo Scott si spense, Francesco Beltrame da Conegliano pubblicava a Venezia il 2° volume delle sue opere *Versi e prose*, il quale, a differenza del primo tutto *classico* è tutto *romantico:* in esso dedica versi men che mediocri alla *Morte di Arny*, la soave figura che destò tanta ammirazione nei lettori del *Kenilworh*, e a meglio dimostrare il suo entusiasmo per il romanzo di questo titolo e per la dolce donna che vi campeggia accanto ad Elisabetta d'Inghilterra, univa a quei versi la tragedia *Amalia di Leicester*. Sempre nel '32 veniva in luce un componimento che è certo tra i più interessanti e singolari frutti dell'ammirazione italiana per lo Scott e che non ha, per quanto almeno è a mia conoscenza, alcun riscontro nelle altre letterature. Si tratta di un poemetto così

(1) Tratto dalla *Cronicle Gallignani Messenger*.

(2) Non mi soffermo sui necrologi il cui tono è facile immaginarsi. Cfr. per es. l'*Eco* '32, n. 122.

intitolato: *Minna, racconto storico tratto dal Pirato di G. Scott. Pirato* e non *Pirata,* commenta l'*Eco* (n. 42) nel darne notizia, " seguendo la Crusca anzichè l'uso e la derivazione latina „! È in versi sciolti eccetto alcuni passi intrecciati di canzoni e di stanze. Che cosa sia avvenuto della povera protagonista del tipico romanzo scottiano in sì curiosa derivazione non è facile immaginarsi. L'*Eco* si contenta di chiamare falso il sistema di composizione, lamenta le oscurità che esso presenta e deplora che il giovane autore anonimo " consumi senza frutto le sue facoltà in un poema che è già annullato dalla memoria di un altro „.

***

E la critica? La critica commentò e in parte ancor essa fomentò il trionfale successo.

Nelle battaglie più propriamente intitolate al classicismo e al romanticismo, sorte in Italia dopo la polemica tra la Staël e il Giordani sulle traduzioni, non si accenna al romanzo storico e non appare per un certo tempo almeno il nome dello Scott: ma non perciò il sire d'Abbotsford divenne un ausiliare men formidabile dei romantici, che anzi, quantunque sulle prime non curato, egli operò senza perdere il tempo in parole più o meno vane, conquistando colla sua apparenza queta e bonaria proseliti infinitamente più numerosi di quelli che si vennero raccogliendo intorno ai teorici solenni. Anche lo Scott compose alcune trattazioni teoriche, ma non ad esse è dovuta la straordinaria sua influenza: strumento unico e poderoso di questa furono i suoi romanzi che, non degnati subito degli sguardi dei critici classicisti, intenti a difendere il terreno della mitologia e delle unità, avvinsero a sè così rapidamente l'immensa maggioranza dei lettori che allorquando quelli se ne accorsero e si precipitarono sovra di essi, dovettero subito convincersi che era ormai troppo tardi per mostrarsi del tutto severi; ond'è che dopo un poco di titubanza decisero di inchinarsi all'autore, ma di attaccare senz'altro il genere da lui coltivato. Sfogliando la raccolta della *Biblioteca Italiana* assistiamo appunto allo spettacolo curioso che suole offrire chi è costretto a far buon viso a una dura e incresciosa verità. La prima menzione dello Scott è nel-

l'annuncio del *Kenilworth* che ho riferito e che, vedemmo, contiene insieme coll'elogio all'editore Ferrario una specie di restrizione in quel tal consiglio di non dimenticare le opere di miss Edgeworth, opere educative e quindi, par di leggere fra le righe, di utilità vera e grande e non frivoli passatempi come quelle dello Scott. Ho scritto frivoli passatempi e la parola *frivolo* come qualificativo del romanzo scottiano in genere si trova effettivamente nel tomo successivo dello stesso giornale, in un articoletto sui guadagni dello Scott in Inghilterra. La *B. I.* continua poi a dare l'annuncio dei vari romanzi dello Scott pubblicati dal Ferrario, ma pel solo *Ivanhoe* spende due parole di recensione. Tuttavia nel '23, per singolari circostanze, si trova costretta a rendere omaggio pieno allo Scott. *Pougens* “ il celebre autore di tante opere classiche „, com'essa dice, diventa suo corrispondente letterario da Parigi e stende la bibliografia delle opere nuove che escono in Francia: ma, ahimè, il celebre autore di tante opere classiche è un ammiratore fervido dello Scott e dei suoi romanzi, e annuncia inesorabilmente tutte le edizioni che di essi vien pubblicando a Parigi il *Gosselin*, sicchè ad ogni nuovo romanzo è l'aggettivo inimitabile, magnifico, ecc., che alla povera *Biblioteca* tocca di stampare. Ma non lascia di rifarsi qua e là. Già nel '24 annunciando la versione di due racconti della Edgeworth tornava sul paragone fra lo Scott e la scrittrice senza celare le sue preferenze per questa. Nel proemio all'annata XI (1826), parlando dei romanzi che si venivano voltando in italiano e che, a suo credere, potevan recar danno gravissimo alla gioventù, “ distraendola dagli studi più utili e severi e facendo sì che ella poi schizzinosa rifugga dai buoni classici italiani „, aggiunge: “ Forse gli anzidetti librai furono a tali intraprendimenti invitati dall'immenso lucro che Walter Scott trasse dai suoi romanzi scozzesi. Ma sarà ben difficile che di sì fortunato successo godano quei romanzi trapiantati in un terreno che loro non bene si addice nè per l'argomento, nè pei costumi e sceveri delle originali bellezze della lingua che è pure uno dei non minori pregi dell'autore „. Nel '27 annunciando una nuova traduzione del famoso e soporifero *Viaggio di Anacarsi nella Grecia ecc.* del Barthelemy scrive: “ Noi ameremmo che tutti i romanzi storici fossero, come questo di Barthelemy, fonte inesausta e purissima d'erudizione in ogni

genere... Ma l'autore durò la fatica di ben trent'anni nel condurre a compimento l'opera sua: al contrario i nostri facitori di romanzi mille ne detterebbero in sì lungo corso d'anni. Se non che del *Viaggio di Anacarsi* vanno ogni dì ed in ogni lingua ripetendosi le edizioni ,e la fama dell'A. risorge ognor più splendida: i romanzi dei moderni, trattone appena alcuno, cederanno colla moda, perchè scritti appunto all'improvviso e col perdoni l'ammaliatore delle nostre dame, il Walter Scott „. Ma siamo nel '27 e già il Bazzoni raccoglie in volume il fortunato suo *Castello di Trezzo* non ancora uscito tutto sul *Nuovo Ricoglitore*, e Alessandro Manzoni licenzia al pubblico il suo capolavoro compiuto da un pezzo, e il Varese rimanda allo Stella, un poco ripulita, *Sibilla Odaleta:* i tempi maturano e il tomo successivo della *Biblioteca Italiana* contiene già la prima parte di un discorso *Del romanzo in generale, e dei Promessi Sposi in particolare*, che sebben privo di firma è nota opera di Paride Zaiotti il magistrato acuto critico quanto acuto inquisitore, uomo a cui, almeno negli scritti letterari, lo spirito di parte non fece mai soverchio velo. L'umile prosa prima disdegnata ha ormai acquistata tanta voga da richiedere per sè numerose e fitte pagine di ogni tomo del giornale. Già nel citato discorso lo Zaiotti rende omaggio allo Scott riconoscendo in lui una *magnificenza* tale d' ingegno " da farne parere laudabili anche i difetti „ e altri omaggi viene successivamente tributandogli — sebbene con non poche restrizioni — nei molteplici articoli scritti intorno ai romanzi storici nostri pullulanti da ogni parte. Però subito nel '28 ci imbattiamo in una nuova testimonianza del dispettuccio non del tutto lieve che lo Zaiotti — o almeno il suo giornale, poichè non è sempre facile additare l'autore degli articoli — prova nel dover inchinarsi a quel grande romantico. Discorrendo (t. 50, p. 22) della *Fidanzata ligure* del Varese scrive intorno allo Scott: " Gualtiero, collocato in una nazione tanto diversa dalla nostra, conobbe il posto che gli era assegnato, conobbe gli uomini che doveva dilettare e seguendo l' inclinazione della sua patria, rappresentò la natura come a lui si offeriva senza studiar molto nella scelta, senza nobilitare ciò che per altri popoli sarebbe soverchiamente triviale. In Italia la maniera ch'ei prese ha bisogno d'essere grandemente modificata e ben lo mostra l'accoglienza che ebbero i suoi romanzi fra noi.

Per verità egli ottenne molti applausi, ma che sono mai comparati a quei tanti ch'ebbe presso le altre nazioni? E chi ardirebbe sostenere che egli ci sia divenuto scrittor popolare? Fu renduta giustizia al suo ingegno miracoloso, ma in ispecie le donne che sono tanta e sì nobile parte del genere umano non si adattarono mai volentieri a discendere con lui fino all'ultima feccia della massa sociale „. Si potrebbe chiedere allo Zaiotti — se è lui lo scrivente — come mai intenderebbe conciliare la ripugnanza che egli attribuisce alle donne coll'affermazione sua o del suo giornale più sopra riportata nella quale lo Scott è dato come l'*ammaliatore delle nostre dame*: altro che ripugnanza! Ma c'è di meglio in quella tipica domanda: " E chi ardirebbe sostenere che egli ci sia divenuto scrittor popolare? „ la quale dopo quanto abbiamo fin qui veduto, acquista tutto l'aspetto di una ingenuità un po' eccessiva.

Lasciando di osservare il contegno della *B. I.* di fronte alla voga crescente dei romanzi scottiani perchè quello che siamo venuti rilevando basta a mostrare che le sue titubanze, i suoi stessi giudizi sfavorevoli, o solo apparentemente favorevoli, costituiscono una prova eloquente che quella voga esistette e grandissima per giunta, volgiamoci a qualche altro critico (1). Non ne mancarono di acuti e sereni. Fin dal '24 quando nella pubblicazione dei suoi romanzi lo Scozzese non era giunto che al *Peveril of the Peak* e a *Quentin Durward*, *l'Antologia*, il miglior giornale letterario d'allora, accoglieva un articolo di Sansone Uzielli *Del romanzo storico e di W. Scott* (2); l'Uzielli fu anche il primo a toccare nel giornale fiorentino quella questione della legittimità del romanzo storico come componimento d'arte che, per merito sopratutto del Tommaseo, doveva poi esservi trattata ripetutamente (3). Si comprende però che meglio che in articoli o scritti appositi, i giudizi dei critici italiani sullo Scott si trovano sparsi qua e là nelle recensioni dei nostri romanzi storici, le quali erano spesso vere diffuse polemiche pro e contro il ge-

(1) È a notare, sempre a proposito della *B. I.*, che invano si cercherebbe in essa anche un semplice accenno alla morte di Walter Scott.

(2) Cfr. *Ant.*, 1824, fasc. di marzo e di aprile.

(3) Nella parte del suo scritto riguardante lo Scozzese, l'U. rileva assai bene i caratteri dell'arte di lui, senza dimenticarne i difetti.

nere. Non posso qui esimermi dal ripetere il nome di Nicolò Tommaseo che più volte nelle sue recensioni parlò acutamente dello Scott e stese anche un notevole articoletto sulle *Cronache del Canongate*, opera della quale si fece poi traduttore (1). Il Tommaseo fu ammiratore caldo, sebbene non entusiasta dello Scott, e vide assai bene i difetti di lui ingrandirsi nei suoi troppi imitatori. Entusiasta si mostrò invece il buon Francesco Beltrame da Conegliano, il poeta e prosatore classico e romantico che già conosciamo, il quale nel ricordato 2° vol. delle sue opere inserì anche *Alcuni cenni sui romanzi storici di W. Scott al chiarissimo signor Defendente Sacchi di Pavia*. Incomincia col giustificare la sua dedica al Sacchi dicendolo colui che meglio d'ogni altro potrebbe consacrarsi alla filosofica investigazione delle cause per cui " quel privilegiato ingegno di W. Scott sì forte e potente esercitò un predominio ai nostri giorni „ e quell'investigazione, aggiunge, " inutile non sarebbe per la storia dei progressi dello spirito umano e della presente civiltà „. Il Beltrame non si contenta di proclamare ben alto i pregi del suo autore, ma anche lo difende con molto calore dalle accuse mossegli dai critici (2): analizza con cura minuziosa il *Kenilworth* a lui tanto caro, come vedemmo, e l'*Ivanhoe*, nel quale gli sembra che " non meno terribile e forse di più drammatico effetto [*del sogno di Don Rodrigo nei Promessi Sposi*] sia la voce della sciagurata Ulrica accanto al Frondebeuf morente „. Conclude invitando il Sacchi a fare per le opere dello Scott quel commento storico che pei *Promessi Sposi* fece il Cantù. Ma il più singolare omaggio reso dalla nostra letteratura critica allo Scott è senza dubbio la dissertazione del Varese già menzionata *Di Rossini e di W. Scott messi a confronto come genî d'indole identica*. L'idea di un tal paragone non manca di originalità o, se vuolsi, di stranezza, ma è giusto riconoscere che il Varese seppe trattarla con garbo e con disinvoltura. Prendendo le mosse da un articolo del *New Monthly Magazine* " Dell'indole delle composizioni di Rossini „ si propone di dimostrare che le caratteristiche dell'arte rossiniana hanno un esatto riscontro, ragion fatta della materia di-

(1) Cfr. *Antologia*, maggio 1826 e il *Dizionario Estetico*.

(2) Sopratutto nega che egli si ripeta nei caratteri e che la storia nulla abbia a guadagnare nei suoi romanzi.

versa, nell'arte dello Scott. Così, per recare un esempio, come il Pesarese ha per massima favorita " mantenete il movimento „ e la mette in pratica facendo uso ed abuso della *terzina* e di altri ritmi consimili, lo Scott dal canto suo adopera in sostanza il medesimo artifizio quando trascina il lettore attraverso scene rapide e serrate, quando fa uso ed abuso di un dialogo animato e suggestivo; e via di questo passo accostando i pregi e i difetti dell'uno ai pregi e ai difetti dell'altro per concludere poi che " o non v'è analogia assoluta tra le cose create, o esiste tra il genio di Rossini e quello di W. Scott „ (1). Chi ricorda quanto accennammo per rispetto alla fortuna dei personaggi dello Scott nella nostra musica melodrammatica non potrà non rilevare tutto il significato del bizzarro raffronto su cui s'indugiò il Varese (2).

L'aspetto più degno di attenzione e di studio della fortuna scottiana in Italia è certamente l'efficacia dello Scott come caposcuola, grandissima per estensione se non per intensità. Tutta Europa e non la sola Europa divenne sul suo esempio feconda di romanzi storici e fra le nazioni europee la nostra non poteva far eccezione. Dal 1826, anno in cui cominciò ad apparire il *Castello di Trezzo*, fino al '60 circa è un vero pullulare di siffatte produzioni e lo studioso che ora vi getta lo sguardo trova in esse accanto a nomi illustri come quelli di Grossi, Azeglio, Cantù (il Manzoni è troppo in alto per menzionarlo qui cogli altri), accanto a nomi noti come quelli del Bazzoni, del Varese, del Rossini, nomi ormai ignoti come quelli di A. Mauri, A. F. Falconetti, G. Campiglio, nomi ignotissimi come quelli di P. Zorzi, G. Orti, G. Colleoni, B. Finoli, ecc. W. Scott fu il

---

(1) Nel cercar di provare che se il Rossini è a un tempo originale e plagiario di alcuni predecessori, lo stesso è a pensare dello Scott, il Varese, tra i primi critici, fa il nome dello Shakespeare, esprimendo l'avviso che le opere dell'immortale drammaturgo siano i *magazzini nei quali il felice romanziere si è servito a piene mani.*

(2) Un altro lungo ma non molto notevole articolo sullo Scott scrisse nella *Rivista Europea* del 1840 G. Nicolini.

gran modello, scottiano il concetto fondamentale, scottiani gli svolgimenti, scottiani i personaggi, i dialoghi, le descrizioni. Chi studierà tali derivazioni non avrà, già lo dissi, còmpito facile e breve: l'arte dello Scott era troppo nuova e troppo ammirata perchè non ne sorgessero ovunque imitatori, ma nel tempo stesso aveva troppi lati caratteristici perchè gli imitatori, sia pure più umili, fossero del tutto simili l'uno all'altro nei loro tentativi. Di qui una varietà di cui sarebbe utile determinare almeno le linee principali: taluno si affisò più specialmente al *color locale*, altri alla rappresentazione fedele il più possibile dei fatti storici, altri alla cura per i personaggi umili e tipici. E non converrebbe dimenticare che l'influenza dello Scott si esercitò dopo il '30 anche indirettamente, di seconda mano, a traverso le opere di altri romanzieri stranieri e italiani. Non è qui il luogo di accennare alla difficile questione riguardante la parte che nei *Promessi Sposi* va fatta allo Scott, ma è innegabile che anche tale questione (a parer mio tuttora insufficientemente studiata) basta di per sè sola a mostrare l'intimo legame che unisce lo scozzese alle nostre lettere della prima metà del secolo XIX; tacendo dei *Lombardi alla I Crociata*, nessuno dei romanzieri che soglionsi ascrivere alla cosidetta scuola manzoniana si sottrae all'influenza dello Scott, e allo Scott va del pari ricollegato per più d'un rispetto il gruppo Guerrazziano.

Il quale Scott ebbe adunque in Italia fortuna reale e vasta, suscitò tutta una schiera di traduttori, arricchì editori, ispirò musicisti, coreografi, poeti, artisti d'ogni maniera, ebbe le carezze e i morsi della critica, offrì movenze ad un'opera immortale e aperse ai nostri prosatori una via nuova nella quale parecchi di essi impressero orme tuttora visibili: ebbe insomma una popolarità e un successo di tale estensione che la storia delle nostre lettere non ce ne presenta forse un'altro ad esso paragonabile, forse neppure quello del Byron che non fu certo piccolo (1). Quali le ragioni di tanta fortuna nella nostra penisola? Evidentemente le stesse che ci spiegano la fortuna che lo Scott

(1) Non poco interessante sarebbe venir rintracciando i giudizi che intorno allo Scott ebbero a pronunciare i grandi scrittori nostri, suoi contemporanei. Basti qui far il nome del Manzoni.

ebbe nel resto dell'Europa. Il romanzo scottiano è indissolubilmente avvinto al romanticismo delle cui teorie parve subito una splendida applicazione: il romanticismo infatti bandiva la mitologia, le tre unità e l'imitazion servile dei classici, assegnava al vero nell'arte un posto che mai non aveva avuto e insieme accoglieva un sopranaturale nuovo, ammetteva la legittimità della mescolanza del tragico e del comico e collocava sugli altari in luogo degli antichi idoli classici " dei barbari non privi d'ingegno „; ed ecco che lo Scott, messo da banda ogni vaneggiamento mitologico, rotto ogni legame di tempo e di luogo, ripudiati i modelli classici, rivestiva le sue finzioni di vivi colori rubati alla storia e suscitava i fantasmi del *Monastero*, creava Wildrake e Elena Campbell e si ispirava a Shakespeare. Se adunque il romanticismo, e sarebbe assurdo negarlo, rispondeva ai nuovi formidabili bisogni del tempo e lo Scott era, a dir così, l'incarnazione di tanta parte della nuova dottrina, come avrebbero potuto i suoi romanzi non destare l'entusiamo delle folle? Nè mancarono, per l'Italia, ragioni particolari al trionfo scottiano: quando comparve fra noi la serie *The Waverley Novels* romantici e classici battagliavano da non gran tempo con l'accanimento dei primi scontri e Shakespeare, Goethe, Byron eran nomi sublimati e maltrattati; ma se la nuova dottrina aveva già dato anche fra noi frutti cospicui mancava alla sua corona di vittoria una delle frondi più ambite, la popolarità vera e completa. Invano G. Berchet, l'introduttore delle nordiche ridde di scheletri, scriveva, sotto le spoglie di Grisostomo che la letteratura deve volgersi al popolo; il popolo non poteva dirsi conquistato nè dagli inni, nè dalle tragedie manzoniane; occorreva, per conquistarlo, un genere d'arte piano, semplice, adorno di tutte le qualità che più colpiscono l'immaginazione popolare, franco d'ogni canone abusato, specchio delle correnti nuove e insieme capace di rifletterne altre più nuove. Apparve all'orizzonte W. Scott e fu salutato come un messia.

Che cosa era la nostra prosa narrativa poco prima che egli apparisse? Il non lontano settecento aveva prodotto un'infinità di romanzi, ma niuno più li ricordava all'infuori dei letterati che volevan farsene beffe; se dobbiam credere alle testimonianze di alcuni critici, lo stesso nome di romanziere era

scaduto a grande bassezza per colpa dei settecentisti. I primi venticinque anni del secolo non erano stati sterili di prose narrative, ma quali prose? Accanto al *Jacopo Ortis* non ingiustamente considerato il primo romanzo moderno, ma non destinato ad innovazioni immediate nella nostra letteratura, era sorta una sequela d'opere sentimentali, scolorita e sonnolenta famiglia, strano miscuglio di influenze diverse che vanno da Goethe e da Chateaubriand, alla Cottin e alla Genlis. Una simile prosa non poteva soddisfare che una parte della generazione d'allora e anche questa parte ne fu ben presto più che sazia.

Come stupirci che i libri dello Scott facessero dimenticare tutta quella produzione e non tardassero a sorgere imitatori numerosi? (1). La *B. I.* anzichè pensare al " vuoto tedioso e spiacevole " che certo non valevano a riempire i flaccidi romanzi del Sacchi e del Bertolotti, volle vedere nel solo genio di W. Scott la causa dello sviluppo sollecitamente raggiunto dal romanzo in Italia (2); la fama e le qualità dello Scott erano per essa la più forte " ragione del mutamento avvenuto in questa parte inferiore della nostra letteratura ": ma il giornale classicista e devoto alla I. R. Maestà austriaca dimenticava troppe cose, dimenticava sopratutto ciò che il romanzo storico divenne pensatamente nelle mani di scrittori nobilissimi e forse impensatamente nelle mani di scrittori meno nobili e meno alti di quelli. Se il Medio Evo e in genere la nostra storia passata veniva in quei romanzi rievocata con tanto fervore non era senza di gran perchè. Fattesi ormai ardite e aperte negli italiani le prime aspirazioni alla libertà politica, al nazionale risorgimento, il patriottismo proseguiva senza posa la sua eroica conquista dei

(1) Disse bene il Tommaseo (*Antologia*, sett. 1830): " Il vuoto tedioso, spiacevole pel quale si aggiravan le menti nel mondo delle finzioni fantastiche, non poteva essere più sopportabile a generazioni già uscite dall'infanzia e non travolte dalla corruzione e dalla schiavitù in uno stato di imbecillità prematura: la mente umana sentiva irrequieta il bisogno di una più larga porzione, di una maggior dose, se così posso dire, di verità: questo bisogno un ingegno più accorto e più solido che a taluno non paia l'ha indovinato e l'ha soddisfatto. E quanto urgente il bisogno fosse, cel prova il mirabile, l'unico successo delle opere sue ".

(2) *Passim*, ma specialmente in " Idee generali sul romanzo storico " (t. 53, 1830).

cuori e delle menti trasformando le lettere in un'arme non meno poderosa delle congiure. Come non vedere subito nella rievocazion sapiente dei secoli passati un valido mezzo di diffusione delle idee generose, un caldo soffio atto a sciogliere dal gelo le anime assiderate nell'acquiescenza neghittosa e vile al dominio straniero? (1) Un tale assunto del nostro romanzo storico spiega l'ampiezza della produzione e l'accanimento con cui fu combattuto: quanto poi alla grandezza del beneficio che per tal guisa l'esempio fortunato del sire d'Abbotsford, recò alle nostre lettere e al nostro pensiero civile potrà misurarla soltanto colui che scriverà la storia minuta del romanzo storico italiano o, che è tutt'uno, la storia della fortuna di W. Scott in Italia.

Novembre 1905.

---

(1) " Questa gente che dormiva o solo per metà chiudeva gli occhi al suono dell' ingiuria transalpina e al rimbombo del cannone napoleonico, bisognava riscuoterla dal suo torpore, bisognava apporle, come al Rinaldo del Tasso, lo specchio della sua storia e farle intendere l'orecchio all'eco sonora del suo passato, alle maschie voci dei robusti italiani d'una volta. Le cronache erano lì, depositarie fedeli di una grandezza obbliata, ma non perduta: bisognava compulsarle, dar vita e parola al taciturno testimonio dei fatti, risuscitare queste mummie stecchite col potente galvanismo dell'arte. Lo fecero e in breve tempo l'Italia si coprì di romanzi storici ". Queste parole leggo in un eccellente saggio sul romanzo italiano, pubblicato in Milano l'anno 1853 sotto i rigori dell'ultima restaurazione austriaca. Il saggio, che non reca firma d'autore (e si trova nel *Crepuscolo*, anno IV), è opera di *Giacomo Battaglia* e non di *Carlo Tenca*, come stranamente dice il Galletti nel suo lavoro *L'opera di V. Hugo nella lett. it.* (Suppl. 7 del " Giorn. Stor. ").

L'Accademico Segretario
RODOLFO RENIER.

Torino, VINCENZO BONA, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi.

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza dell' 11 Febbraio 1906.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: JADANZA, SPEZIA, NACCARI, GUIDI FUSARI, FILETI, GRASSI, FOÀ, SEGRE, MORERA, MOSSO, GUARESCHI e CAMERANO, Segretario.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente.

Il Presidente annunzia la nomina dell'On. Paolo BOSELLI Vice Presidente dell'Accademia a Ministro dell'Istruzione Pubblica e propone gli venga spedito un telegramma di congratulazione. La Classe all'unanimità accoglie la proposta.

Il Presidente legge i ringraziamenti pervenuti dai professori BERTANA e NALLINO pei premi a loro conferiti dall'Accademia.

Il Presidente presenta: 1° il discorso letto nell'adunanza generale della Società geologica italiana tenutasi in Tolmezzo dal Socio corrispondente Torquato TARAMELLI, inviato dall'Autore in dono alla Classe; 2° l'opera del Socio straniero Ernesto HAECKEL: *Wanderbilder* Ser. I und II *Naturwunder der Tropenwelt*, pure inviata dall'Autore.

Il Socio GRASSI presenta in dono all'Accademia il volume secondo della sua opera: *Corso di elettrotecnica*.

Vengono presentate per l' inserzione negli *Atti* accademici le note seguenti:

1° Dr. Giacinto GUARESCHI, *Sulla geometria di una forma quadratica e di una forma di Hermite a variabili coniugate*, dal Socio SEGRE;

2° Dr. Giacomo PONZIO, *Sul comportamento dell'acetossima e delle diossime verso l'ipoclorito sodico*, dal Socio FILETI.

Il Socio MOSSO presenta per l'inserzione nelle *Memorie* un suo lavoro intitolato: *Cranii etruschi*. La Classe con votazione segreta approva all'unanimità la stampa di questo lavoro nei volumi accademici.

LETTURE

Sulla geometria di una forma quadratica e di una forma di Hermite a variabili coniugate.

Nota di GIACINTO GUARESCHI.

In considerazione dell' importanza che vanno assumendo sempre più le *forme di Hermite* a variabili complesse coniugate, spero che anche il seguente piccolo contributo allo studio geometrico del sistema di una forma quadratica e di una forma Hermitiana possa riescire di qualche utilità.

Interpretate le variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ come coordinate omogenee di punto nello spazio S_{n-1}, la forma n-aria quadratica uguagliata a zero

$$(1) \qquad \Sigma a_{lm} x_l x_m = 0, \qquad (a_{ml} = a_{lm})$$

rappresenta la quadrica fondamentale della polarità definita dall'equazione

$$(1') \qquad \Sigma a_{lm} x_l y_m = 0,$$

x ed y indicando punti reciproci, e la forma n-aria Hermitiana uguagliata a zero.

$$(2) \qquad \Sigma b_{lm} x_l \bar{x}_m = 0, \qquad (b_{lm} = \bar{b}_{ml}) \text{ (*)}$$

rappresenta l'iperquadrica fondamentale dell'antipolarità definita dall'equazione

$$(2') \qquad \Sigma b_{lm} x_l \bar{y}_m = 0,$$

anche qui, x ed y indicando punti reciproci (**).

(*) Di un numero complesso x indichiamo il coniugato col simbolo $\bar{x}$.

(**) Cfr. C. Segre, *Un nuovo campo di ricerche geometriche,* " Atti R. Acc. delle Scienze di Torino ", vol. XXV-XXVI (1889-1890-1891), 4 note. — Id., *Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici,* " Mathematische Annalen ", Bd. 40 (1892).

Se la (2) non ammette soluzioni, le proprietà che si ottengono, si riferiscono al sistema della polarità (1′) e dell'antipolarità (2′).

1. Piramidi autopolari comuni ad una quadrica e ad una iperquadrica. — Per ricercare il numero e la specie (*) delle piramidi autopolari che una quadrica Q ed un'iperquadrica I di uno stesso spazio S_{n-1} possono avere in comune, basta esaminare quali proprietà presenti, rispetto agli elementi uniti, l'anticollineazione A prodotto della polarità e dell'antipolarità, rispettivamente individuate da Q e da I.

Un'anticollineazione generale in uno spazio S_{n-1} possiede un certo numero k (tale che $0 \leq 2k \leq n$) di coppie di punti involutorii ed inoltre $n - 2k$ punti uniti, costituenti tutti insieme i vertici di una piramide Σ (**).

Se il numero k è nullo, risulta senz'altro che Σ è piramide autopolare della stessa specie tanto rispetto a Q, quanto rispetto ad I.

Se invece k non è nullo, indichiamo con $0_1, 0_2, \ldots, 0_{n-2k}$ i punti uniti dell'anticollineazione A e con P_1, P_1'; P_2, P_2';...; P_k, P_k' le k coppie di punti involutorii. Detti π_h e π_h' gli iperpiani polari del punto P_h rispetto a Q e ad I, e quindi del punto P_h' rispetto ad I e a Q, si ha che π_h e π_h' sono involutorii in A e coincidono con una delle k coppie di iperpiani che congiungono ogni coppia di punti P allo spazio S_{n-3} individuato dai punti 0 e dalle rimanenti $k - 1$ coppie di punti P. Se l'uno dei punti P_h, P_h' sta sull'una forma, su questa sta anche l'altro e

(*) Di una forma quadratica od Hermitiana f sia data una piramide autopolare Σ, di cui chiamiamo i vertici $0_1, 0_2, \ldots, 0_n$ e gli iperpiani $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ (ω_k essendo l'iperpiano polare di 0_k). Sia il vertice 0_h autoreciproco rispetto ad f; allora quel vertice 0_k che non sta in ω_h è pure autoreciproco rispetto ad f ed ha, fra gli $n-1$ iperpiani di Σ passanti per esso, come polare quello che non passa per la retta 0_h0_k. Se un 3° vertice 0_l è autoreciproco, il suo iperpiano polare ω_l passerà per la retta 0_h0_k ed esisterà un 4° vertice 0_m autoreciproco, esterno ad ω_l. Continuando il ragionamento si giunge alla conclusione che, se la piramide Σ possiede vertici autoreciproci rispetto ad f, questi devono essere in un certo numero pari $2p$ (tale che $0 \leq 2p \leq n$). Si definisce come *specie* della piramide Σ il numero $p + 1$.

(**) Cfr. Segre, *Un nuovo campo*, ecc., Nota I.

nè l'uno nè l'altro punto sta sull'altra forma. Al contrario, se il punto P_h non sta su Q, π_h è l'iperpiano individuato dagli $n-1$ vertici di Σ ottenuti escludendo P_h e π_h' è l'iperpiano (involutorio al precedente in A) individuato dagli $n-1$ vertici di Σ ottenuti escludendo P_h', e quindi P_h e P_h' stanno su I; in ugual modo se P_h non sta su I deve stare con P_h' su Q.

Si conclude: *Se un certo numero* 2r (*tale che* $0 \leq 2r \leq n-2k$) *di punti* 0 *è comune alle due forme e se un certo numero* s (*tale che* $0 \leq s \leq k$) *di coppie di punti* P *sta sulla quadrica, la piramide* Σ *è autopolare di specie* $r+s+1$ *per la quadrica e di specie* $k-s+r+1$ *per l'iperquadrica.*

Nel caso di $n=3$ si ha che " in generale, una conica ed un'iperconica complanari hanno a comune un solo triangolo autopolare, o della stessa specie sì per l'una che per l'altra, ovvero di 1ª specie per l'una e di 2ª specie per l'altra forma ".

Casi particolari si otterrebbero specializzando l' anticollineazione A.

2. Intersezione di una quadrica e di una iperquadrica. — Dato uno spazio complesso ad n dimensioni T, i suoi punti si possono rappresentare (*) mediante i punti reali di uno spazio S_{2n} reale, considerando in questo la forma fondamentale (riferita collinearmente a T) composta degli S_n passanti per uno spazio S_{n-1}, r fisso, completamente immaginario, e precisamente, prendendo come immagine di ogni punto, il punto reale intersezione dello spazio S_n (che gli corrisponde nel riferimento collineare anzidetto), collo spazio coniugato passante per lo spazio r', coniugato di r.

Data ora in T una quadrica Q, i punti di questa, nello spazio rappresentativo S_{2n} reale, avranno per immagini i punti reali di una certa varietà F^4_{2n-2}, intersezione di un certo cono quadrico di specie n, V^2_{2n-1}, di *vertice* r, col suo cono coniugato V'^2_{2n-1} (uscente da r').

Analogamente un'iperquadrica I di T ha come immagine, nello stesso spazio rappresentativo reale S_{2n}, una varietà quadratica reale M^2_{2n-1} passante per r ed r' (**).

(*) Cfr. Segre, *Le rappresentazioni reali, ecc.*, n° 7.

(**) Cfr. Segre, *Le rappresentazioni reali, ecc.*, n° 15.

Gli eventuali punti comuni a Q e ad I hanno per immagini nel suddetto S_{2n} reale i punti reali dell'intersezione dei due coni V e V' e della varietà M. L'intersezione di queste 3 quadriche è una varietà F^8_{2n-3}; lo spazio r doppio per V e semplice per M incontra V' secondo una varietà V^2_{n-2} tutta di punti doppi per la F^8_{2n-3}, e così pure lo spazio r' procura alla F una varietà V^2_{n-2} tutta di punti doppi. Dunque:

L'eventuale intersezione di una quadrica e di un'iperquadrica di uno spazio S_n *è, in generale, una varietà a* $2n-3$ *dimensioni avente per immagine nello spazio rappresentativo reale* S_{2n} *una* F^8_{2n-3} *dotata di 2 varietà* V^2_{n-2}, *completamente distinte, costituite tutte di punti doppi.*

Per dualità, da quest'ultima proposizione se ne ottiene un'altra relativa alla natura dell'insieme degli iperpiani tangenti comuni ad una quadrica e ad un'iperquadrica.

3\. — Analiticamente lo studio dell'intersezione di una quadrica e di un'iperquadrica di uno spazio ad $n-1$ dimensioni si riduce a ricercare le soluzioni complesse comuni alle due equazioni (1) e (2).

Posto $x_l = x_l' + ix_l''$, $a_{lm} = \alpha_{lm} + i\beta_{lm}$, $b_{lm} = \gamma_{lm} + i\delta_{lm}$ (*), abbiamo a studiare quali sono le soluzioni reali comuni a certe 3 forme quadratiche reali $2n$-arie, cioè ancora a studiare l'intersezione di 3 quadriche reali di un S_{2n} reale.

4\. — Questo studio si può spingere più innanzi nel caso di $n=2$, cioè di una conica C e di un'iperconica I complanari.

In questo caso l'immagine dell'eventuale intersezione nell'S_4 reale rappresentativo è data da una curva C^8 reale, dotata di 4 punti doppi (le V^2_{n-2} del caso generale si riducono a coppie di punti). Sia p una retta che congiunge un punto doppio di C^8 giacente su r con un punto doppio di C^8 giacente su r'; se dalla p si proietta la C^8 su di un piano generico, si ha come proiezione una C^4 dotata di 2 punti doppi. La C^4 piana con 2 punti doppi possiede, al massimo e in generale, il genere 1 ed è composta o di zero o di uno o di due rami reali, e quindi la

(*) Con i indichiamo al solito l'unità immaginaria pura.

nostra C^8 è, al massimo e in generale, di genere 1 (*) ed è composta o di zero o di uno o di due rami reali. Si conclude: *In generale, l'intersezione di una conica e di un'iperconica complanari consta o di zero o di uno o di due fili.*

5. — Allo stesso risultato si giunge per la seguente via. Dato un punto sulla conica, esistono su di essa 2 punti reciproci del primo rispetto all'iperconica (le intersezioni della sua polare rispetto alla I colla C).

L' antipolarità di cui I è forma fondamentale stabilisce adunque sulla C una corrispondenza iperalgebrica (2, 2). La conica come ente razionale si può rappresentare su una sfera reale, ossia si può far corrispondere agli ∞^2 punti della conica le ∞^2 generatrici della stessa schiera di una sfera reale. La corrispondenza iperalgebrica (2, 2) fra i punti della conica è così rappresentata da una corrispondenza iperalgebrica (2, 2) fra le generatrici di una stessa schiera della sfera, e quindi da una corrispondenza algebrica (2,2) fra le generatrici delle due schiere (**). L'intersezione dei due enti ha per immagine il luogo dei punti reali della sfera intersezioni di generatrici omologhe nella corrispondenza algebrica anzidetta, cioè una quartica sghemba di 1ª specie.

La quartica sghemba di 1ª specie, rispetto alla realtà ed al numero dei suoi rami, fu classificata da Cremona (***). Essa può dar luogo ai seguenti casi:

1° Essere una curva reale monogrammica, cioè con un sol ramo reale,

2° essere una curva reale digrammica, cioè con due rami reali,

3° essere una curva immaginaria,

non tenendo conto dei casi che si possono presentare considerando posizioni speciali delle quadriche dalla cui intersezione la

---

(*) Risultato concordante con quello che deriva da una formola del Veronese, *Behandlung der proiectivischen Verhältnisse, etc.*, " Mathematische Annalen ", Bd. 19, (1882), § 36.

(**) Cfr. Segre, *Le rappresentazioni reali, ecc.*, n° 18.

(***) Cremona, *Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre*, " Crelle ", vol. 68 (1863). Vedi nⁱ 161-170.

quartica è individuata. Ne segue di nuovo che: " In generale, l'intersezione di una conica e di un'iperconica complanari consta o di zero o di uno o di due fili ".

6. — La ricerca analitica di questa intersezione è semplice nel caso generale in cui i due enti hanno a comune (n. 1) un triangolo autopolare U (che si assume come triangolo fondamentale delle coordinate).

La conica si può rappresentare parametricamente colle formole

$$x_1 = 2\lambda,\ x_2 = \lambda^2 - 1,\ x_3 = -i(\lambda^2 + 1), \tag{3}$$

quando U è per essa triangolo autopolare di 1ª specie; colle formole

$$x_1 = \lambda^2,\ x_2 = \lambda,\ x_3 = 1, \tag{4}$$

quando U è per essa autopolare di 2ª specie.

L'equazione dell'iperconica è del tipo:

$$a_1 x_1 \bar{x}_1 + a_2 x_2 \bar{x}_2 + a_3 x_3 \bar{x}_3 = 0, \tag{5}$$

(le a indicando numeri reali non tutti dello stesso segno) quando U è triangolo autopolare di 1ª specie, del tipo:

$$a x_1 \bar{x}_3 + \bar{a} x_3 \bar{x}_1 + b x_2 \bar{x}_2 = 0, \tag{6}$$

(b essendo un numero reale) quando U è triangolo autopolare di 2ª specie.

Studiamo separatamente i 4 casi che si possono presentare.

I° Caso. — Il triangolo U sia autopolare di 1ª specie per ambe le forme.

Nella (5) supponiamo $a_1 < 0,\ a_2 \geq a_3 > 0$.

Posto $\lambda = x + iy$, i punti di C, ossia (3), che appartengono pure ad I, cioè a (5), sono quelli il cui parametro λ è tale che risulti soddisfatta l'equazione:

$$(x^2 + y^2)^2 - h\,(x^2 + y^2) - k\,(x^2 - y^2) + 1 = 0, \tag{7}$$

essendo

$$h = -\frac{4a_1}{a_2 + a_3}, \quad k = \frac{2(a_2 - a_3)}{a_2 + a_3}.$$

Si riconosce che:

1° Quando si ha $a_2 = a_3$, la conica e l'iperconica non hanno punti a comune se è $-a_1 < a_3$; hanno a comune la catena conica di punti di equazione:

$$\lambda\bar{\lambda} = x^2 + y^2 = 1,$$

lungo la quale si toccano, se è $-a_1 = a_3$; hanno a comune le due catene coniche di punti di equazioni:

$$\lambda\bar{\lambda} = -\frac{a_1}{a_3} + \sqrt{\frac{a_1^2}{a_3^2} - 1}, \quad \lambda\bar{\lambda} = -\frac{a_1}{a_3} - \sqrt{\frac{a_1^2}{a_3^2} - 1},$$

se è $-a_1 > a_3$;

2° quando invece si ha $a_2 > a_3$, i due enti non hanno punti a comune se è $-a_1 < a_3$; hanno a comune i 2 punti $\lambda = 1$, $\lambda = -1$ (nei quali sono tangenti), se è $-a_1 = a_3$; hanno a comune due fili distinti di punti se è $-a_1 > a_3$ (questi due fili sono 2 catene coniche solamente quando è $-a_1 = a_2$, e precisamente catene coniche passanti pei punti $\lambda = i$, $\lambda = -i$, nei quali i 2 enti sono tangenti) (*).

(*) La (7), interpretate x e y come coordinate cartesiane ortogonali di punto nel piano, rappresenta una quartica bicircolare C^4 simmetrica sia rispetto all'asse delle x, sia rispetto all'asse delle y. Facendo uso di coordinate polari ρ e φ, determinate dalle formole:

$$x = \rho \cos\varphi, \qquad y = \rho \operatorname{sen}\varphi,$$

l'equazione di questa C^4 diventa:

$$(\alpha) \qquad \rho^4 - (h + k\cos 2\varphi)\rho^2 + 1 = 0.$$

Quest'equazione fornisce per ρ 4 valori a 2 a 2 opposti, per la cui realtà è necessario e sufficiente sia:

$$(\beta) \qquad h + k\cos 2\varphi \geq 2.$$

Ora al variare di φ il 1° membro di questa relazione oscilla fra il valore massimo $h+k$ ed il minimo $h-k$. Sicchè: se $h+k<2$ (ossia $-a_1 < a_3$), la (β) non è mai soddisfatta e la C^4 non ha punti reali; se $h+k=2$ (ossia $-a_1 = a_3$) la C^4 ha reali soli 2 punti. Se poi è $h+k>2$ (ossia $-a_1 > a_3$) distinguiamo ancora 3 sottocasi a seconda che è

$$h - k >\,<\,= 2.$$

Se $h-k>2$ (ossia $-a_1 > a_2$), per ogni valore di φ i 4 valori di ρ

II° Caso. — U sia triangolo autopolare di 1ª specie per C e di 2ª specie per I.

Si assuma come equazione dell'iperconica (analoga a (6)):

$$b x_1 \bar{x}_1 + a x_2 \bar{x}_3 + \bar{a} x_3 \bar{x}_2 = 0\,,$$

ove $b > 0$.

Posto $\lambda = x + iy$, $a = \alpha + i\beta$, i punti di intersezione colla conica (3) sono quelli corrispondenti a valori del parametro λ, tali che risulti soddisfatta l'equazione:

$$\beta(x^2 + y^2)^2 - 2b(x^2 + y^2) + 4\alpha xy - \beta = 0. \tag{8}$$

Si riconosce che:

1° Quando si ha $\alpha = 0$, i 2 enti si tagliano secondo la catena conica di punti rappresentata dall'equazione:

$$\lambda\bar{\lambda} = \frac{b}{\beta} + \sqrt{\frac{b^2}{\beta^2} + 1}\,;$$

2° quando si ha $\beta = 0$, i 2 enti non hanno punti a comune se è $\alpha^2 < b^2$ hanno a comune la catena conica dei punti λ che si ottengono dando ad y tutti i valori reali nella formola:

$$\lambda = \left(\frac{\alpha}{b} + i\right) y,$$

se è $\alpha^2 = b^2$ (e lungo questa catena si toccano); hanno a comune le 2 catene coniche costituite dai punti λ che si ottengono dando ad y tutti i valori reali nelle formole:

$$\lambda = \left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - b^2}}{b} + i\right) y, \quad \lambda = \left(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - b^2}}{b} + i\right) y,$$

se è $\alpha^2 > b^2$;

---

forniti dalla (α) sono reali e distinti, e la C^4 si compone quindi di 2 rami l'uno interno all'altro; se $h - k < 2$ (ossia $-a_1 < a_2$) la condizione (β) limita φ fra due valori opposti, corrispondenti alla coincidenza dei due valori di ρ^2, sicchè la C^4 si compone di 2 ovali esterne l'una all'altra simmetriche rispetto all'origine; infine se $h - k = 2$ (ossia $-a_1 = a_2$) la C^4 si scompone nei due cerchi:

$$x^2 + y^2 \pm \sqrt{2k}\,.\,x - 1 = 0.$$

3° quando si ha $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, i 2 enti si intersecano secondo un solo filo di punti (*).

III° Caso. — U sia triangolo autopolare di 2ª specie per C e di 1ª specie per I.

In questo caso, sostituendo le (4) nella (5), si ha che i punti di intersezione dei due enti sono quelli corrispondenti ai valori del parametro λ, tali che

$$a_1(\lambda\bar{\lambda})^2 + a_2\lambda\bar{\lambda} + a_3 = 0. \tag{9}$$

Supponendo nella (5) $a_1 > 0$, e posto $D \equiv a_2^2 - 4a_1a_3$, si vede che i due enti hanno a comune:

1° Due catene coniche di punti di equazioni:

$$\lambda\bar{\lambda} = \frac{-a_2 + \sqrt{D}}{2a_1}, \quad \lambda\bar{\lambda} = \frac{-a_2 - \sqrt{D}}{2a_1}$$

quando è $D > 0$, $a_2 < 0$, $a_3 > 0$;

2° una sola catena conica di punti di equazione

$$\lambda\bar{\lambda} = \frac{-a_2 + \sqrt{D}}{2a_1},$$

quando è $D > 0$, $a_3 < 0$;

3° una sola catena conica di punti (lungo la quale si toccano) di equazione

$$\lambda\bar{\lambda} = -\frac{a_2}{2a_1},$$

quando è $D = 0$, $a_2 < 0$;

4° nessun punto negli altri casi.

IV° Caso. — Sia U triangolo autopolare di 2ª specie per ambe le forme.

(*) La (8), interpretate x ed y come coordinate cartesiane ortogonali di punto nel piano, rappresenta una quartica bicircolare simmetrica rispetto all'origine, e la cui equazione in coordinate polari ρ e φ è:

$$\beta\rho^4 + 2(\alpha \operatorname{sen} 2\varphi - b)\rho^2 - \beta = 0.$$

Per ogni valore di φ quest'equazione fornisce un sol valore reale e positivo per ρ^2; sicchè la nostra quartica si compone di una sola ovale entro cui sta l'origine.

Come equazione dell'iperconica si assuma la (6). Allora sostituendo le (4) nella (6) si ha che i punti comuni alle 2 forme sono quelli il cui parametro λ soddisfa l'equazione:

$$(10) \qquad a\lambda^2 + \overline{a}\,\overline{\lambda}^2 + b\lambda\overline{\lambda} = 0,$$

da cui si trae:

$$(11) \qquad \frac{\lambda}{\overline{\lambda}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a\overline{a}}}{2a}.$$

Affinchè esistano valori λ soddisfacenti la (10) è necessario e sufficiente che la quantità costante

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a\overline{a}}}{2a}$$

abbia per modulo l'unità positiva; ciò che si verifica quando sia $b^2 - 4a\overline{a} \leq 0$.

Si riconosce quindi che i 2 enti non hanno punti a comune se è $b^2 - 4a\overline{a} > 0$; mentre hanno a comune:

1° Due catene coniche di punti, rispettivamente di equazioni:

$$\frac{\lambda}{\overline{\lambda}} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a\overline{a}}}{2a}, \qquad \frac{\lambda}{\overline{\lambda}} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a\overline{a}}}{2a},$$

quando è $b^2 - 4a\overline{a} < 0$;

2° la sola catena conica di punti (lungo la quale si toccano) di equazione;

$$\frac{\lambda}{\overline{\lambda}} = -\frac{b}{2a},$$

quando è $b^2 - 4a\overline{a} = 0$.

7. — La legge di dualità permette di assegnare subito, in ciascuno dei 4 casi considerati, la natura del *sistema delle tangenti* comuni alla conica ed all'iperconica, a seconda delle relazioni che passano fra i coefficienti già considerati. Così la natura del detto sistema di rette viene a porsi a riscontro di quella dell'intersezione della conica e dell'iperconica.

Torino, febbraio 1906.

Sul comportamento dell'acetossima e delle diossime verso l'ipoclorito sodico e sulle proprietà del tetrabromuro di carbonio.

Nota del Dr. GIACOMO PONZIO.

I.

Sul cosidetto "ipoclorito di acetossima".

Nei trattati di chimica organica è generalmente ricordata la proprietà dell'acetossima $(CH_3)_2C=NOH$ di formare un *ipoclorito* $(CH_3)_2C=NOCl$, liquido di odore gradevole, bollente a 134°. Non parendomi abbastanza provata l'esistenza di questo composto, descritto per la prima volta da Möhlau e Hoffmann (*) ho voluto studiare nuovamente l'azione dell'ipoclorito sodico sull'ossima dell'acetone nelle condizioni accennate da detti chimici ed i risultati delle mie esperienze mi permettono di concludere che il cosidetto *ipoclorito* (unterchlorigsäure-ester) *di acetossima non è altro che 2-cloro-2-nitropropano* $CH_3-C\langle^{Cl}_{NO_2}-CH_3$.

Operando secondo Möhlau e Hoffmann (loc. cit.) vale a dire aggiungendo a poco a poco una soluzione acquosa di acetossima alla soluzione, raffreddata in ghiaccio, di ipoclorito sodico (ottenuta saturando con cloro una soluzione di NaOH al 10 %) ho osservato anch'io la formazione di goccioline azzurre, le quali, per azione di un eccesso di ipoclorito, si raccolgono al fondo del recipiente in un liquido incoloro. Però invece di separare semplicemente il prodotto della reazione con un imbuto a robinetto e distillarlo senz'altro dopo disseccamento su cloruro di calcio, come fecero gli autori citati, ho creduto più conveniente estrarlo con etere, lavare l'etere con idrato sodico, seccarlo su

(*) Berichte *20*, 1504 (1887).

solfato sodico anidro e quindi distillare il solvente. Ottenni in tal modo un liquido incoloro, di odore gradevole rinfrescante, bollente senza decomposizione a 133° e che all'analisi diede numeri corrispondenti perfettamente alla formola del 2-cloro-2-nitropropano.

I. Gr. 0,4277 di sostanza fornirono gr. 0,4962 di cloruro d'argento.

II. Gr. 0,2085 di sostanza fornirono cc. 21 di azoto ($H_0 = 731,88$ $t = 15°$), ossia gr. 0,023811.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_3H_6O_2NCl$
Cloro	28,70	28,78
Azoto	11,41	11,33

Che si tratti realmente di tale composto e non di un etere dell'acido ipocloroso risulta anche dalle determinazioni della densità di vapore che ho fatto col metodo di V. Meyer, dalla sua identità col 2-cloro-2-nitropropano ottenuto da Henry (*) per azione del cloro sulla soluzione alcalina del nitroisopropano $CH_3.CHNO_2.CH_3$ e dalla sua stabilità verso gli idrati alcalini, nei quali è insolubile anche a caldo.

Le discordanze dei risultati analitici da me ottenuti con quelli di Möhlau e Hoffmann (che li condusse alla formola C_3H_6ONCl la quale richiede $Cl = 32,96$ e $N = 13,02$ %) debbono attribuirsi evidentemente alla non completa purezza del loro prodotto e forse anche alla facile volatilità della sostanza, per l'analisi della quale si richiedono speciali cautele.

Il 2-cloro-2-nitropropano non è però che il prodotto finale dell'azione dell'ipoclorito sodico sull'acetossima: la reazione va in due tempi ed infatti con altre esperienze ho potuto provare che si forma dapprima il 2-cloro-2-nitrosopropano $CH_3{-}C\Big\langle{Cl \atop NO}{-}CH_3$ il quale si ossida poi nel nitroderivato corrispondente.

La formazione intermedia del nitrosoderivato è già evidente

(*) Rec. Trav. Chim. *17*, 17 (1898).

impiegando l'ipoclorito sodico e si manifesta colla suaccennata separazione di goccioline azzurre (osservata pure da Möhlau e Hoffmann), ma si dimostra meglio operando nel modo seguente, sciogliendo cioè l'acetossima in idrato sodico al 10 %, raffreddando in ghiaccio e facendo passare una corrente di cloro. In tal modo si raccoglie alla superficie un liquido colorato intensamente in azzurro, il quale separato mediante imbuto a robinetto, lavato rapidamente prima con idrato sodico diluito, poi con acqua, e seccato su cloruro di calcio, fornisce all'analisi numeri assai prossimi a quelli corrispondenti alla formola C_3H_6ONCl.

Perfettamente puro il *2-cloro-2-nitrosopropano*

$$CH_3 - C\begin{matrix}\diagup Cl \\ \diagdown NO\end{matrix} - CH_3$$

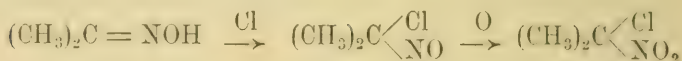
non lo si ha che dopo distillazione nel vuoto: costituisce allora un liquido di odore pungentissimo e che ha il colore azzurro caratteristico dei composti nitrolici liquidi. Alla pressione di 18 mm. di mercurio bolle verso 7° trasformandosi in un vapore incoloro, alla pressione ordinaria bolle verso 68° con decomposizione. È poco stabile e non si può conservare a lungo alla temperatura ordinaria: mi sono perciò limitato a studiarne il comportamento verso l'ipoclorito sodico, che specialmente mi interessava per spiegare l'andamento della reazione fra l'acetossima ed il cloro in soluzione alcalina.

Agitando il 2-cloro-2-nitrosopropano con una quantità sufficiente di soluzione di ipoclorito sodico (sulla quale galleggia) il colore azzurro scompare rapidamente, e al fondo del recipiente si va a raccogliere del 2-cloro-2-nitropropano che si può isolare sia estraendolo con etere, sia distillandolo col vapore (dopo aver reso alcalino il liquido con idrato sodico) e che presenta tutte le proprietà sopradescritte.

La formazione del 2-cloro-2-nitrosopropano trova perfetto riscontro nella formazione del 2-bromo-2-nitrosopropano $CH_3 - C\begin{matrix}\diagup Br \\ \diagdown NO\end{matrix} - CH_3$ osservata da Piloty (*) per azione del bromo sulla soluzione piridinica dell'acetossima, e siccome d'altra parte la formola di struttura del 2-cloro-2-nitropropano è stata dimo-

(*) Berichte *31*, 452 (1898).

strata da Henry (loc. cit.) così si può concludere che la trasformazione dell' acetossima in 2-cloro-2-nitropropano avviene nel seguente modo:

$$(CH_3)_2C=NOH \xrightarrow{Cl} (CH_3)_2C\begin{matrix}\diagup Cl\\ \diagdown NO\end{matrix} \xrightarrow{O} (CH_3)_2C\begin{matrix}\diagup Cl\\ \diagdown NO_2\end{matrix}$$

II.

Azione dell'ipoclorito sodico sulle diossime.

Alcune ossime, p. es. quella della canfora (*), e, come ho dimostrato nella I parte di questo lavoro, anche quella dell'acetone, si trasformano per azione dell'ipoclorito sodico nei cloronitroderivati degli idrocarburi corrispondenti:

$$>C=NOH \xrightarrow{HClO} >C\begin{matrix}\diagup Cl\\ \diagdown NO_2\end{matrix}$$

Riferisco ora i risultati delle mie esperienze sul comportamento delle diossime, sia dei dichetoni che dei chinoni, verso lo stesso reattivo, comportamento che, a differenza di quanto si poteva prevedere per analogia col caso delle ossime, si riassume in una semplice ossidazione.

Infatti per azione dell'ipoclorito sodico la p-chinondiossima dà p-dinitrobenzolo, la β-naftochinondiossima dà 1,2-dinitrosonaftalina, mentre le diossime del benzile e del canfochinone si trasformano nei corrispondenti perossidi.

Ora siccome si può ammettere che nel caso della chinondiossima la formazione del dinitrobenzolo sia preceduta da quella del dinitrosobenzolo (facilmente ossidabile) e siccome ritengo probabile che, dato il loro modo di formazione, i cosidetti p-dinitrosobenzolo e 1,2-dinitrosonaftalina

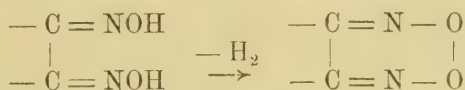
$$C_6H_4\begin{matrix}\diagup NO\ (1)\\ \diagdown NO\ (4)\end{matrix} \quad e \quad C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup NO\ (1)\\ \diagdown NO\ (2)\end{matrix}$$

(*) Journ. Chem. Soc. 75, 1141 (1899).

altro non siano che i perossidi delle corrispondenti diossime del p-chinone e del β-naftochinone (*)

$$C_6H_4\begin{matrix}\diagup N - O \\ \quad\;\; | \\ \diagdown N - O\end{matrix} \quad e \quad C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup N - O \\ \quad\;\; | \\ \diagdown N - O\end{matrix}$$

così la reazione fra l'ipoclorito sodico e le diossime si può supporre consista nella eliminazione di due atomi di idrogeno con formazione di un composto ciclico (perossido):

$$\begin{matrix}-C = NOH \\ | \\ -C = NOH\end{matrix} \quad \xrightarrow{-H_2} \quad \begin{matrix}-C = N - O \\ | \qquad\quad | \\ -C = N - O\end{matrix}$$

Il modo di agire dell'ipoclorito sodico è, nei casi che ho riferito, simile a quello del ferricianuro potassico, ma col notevole vantaggio che l'ossidazione ha luogo quasi istantaneamente ed a freddo e dà inoltre un rendimento teorico. Infine permette di ottenere subito dei prodotti che non richiedono quella lunga purificazione inevitabile se si opera col ferricianuro.

La reazione ha luogo nelle migliori condizioni impiegando una soluzione neutra di ipoclorito sodico ottenuta saturando con cloro una soluzione di idrato sodico al 10 %, versando in essa la soluzione della diossima pure in idrato sodico della stessa concentrazione e raccogliendo il precipitato dopo un'ora.

β-*diossima del benzile.*

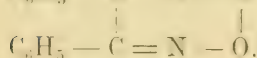
Secondo le indicazioni di Goldschmidt (**) la β-diossima del benzile $\begin{matrix}C_6H_5 - C - C - C_6H_5 \\ \| \quad\; \| \\ OH.N \quad N.OH\end{matrix}$ si ottiene riscaldando per parecchie ore a 170° il benzile colla quantità corrispondente di cloridrato di idrossilamina, alcool ordinario e un po' di acido cloridrico. Aperto il tubo (in cui v'è una forte pressione) si versa il contenuto in acqua e si cristallizza dall'alcool acquoso la sostanza separatasi.

(*) Su questo argomento ho in corso esperienze che riferirò prossimamente.

(**) Berichte *16*, 2176 (1883).

Secondo le mie esperienze le condizioni precise nelle quali si deve operare per avere un buon prodotto sono invece alquanto differenti. Gr. 4 di benzile si riscaldano in tubo chiuso, per tre ore a 170°, con gr. 2,8 di cloridrato di idrossilamina, gr. 12 di alcool assoluto e 3-4 goccie di acido cloridrico concentrato. Dopo raffreddamento si versa il contenuto del tubo (nel quale non v'è quasi pressione) in un imbuto a robinetto e si separa lo strato inferiore acquoso (contenente qualche cristallo di cloruro ammonico) dello strato superiore alcoolico ove la diossima è disciolta. Si svapora l'alcool a bagno maria, si tratta il residuo con idrato sodico al 10 %, si filtra, si diluisce con molta acqua e si acidifica con acido solforico al 20 %. Dopo riposo si raccoglie la sostanza separatasi e, quando è secca, si lava con benzolo. Si ottiene così una polvere bianca che si fonde a 203°-204° e che con una sola cristallizzazione dall'alcool al 50 % si porta al punto di fusione esatto della β-diossima (207°).

Il trattamento coll'ipoclorito fu fatto nelle condizioni sopra accennate: gr. 5 di diossima sciolti in gr. 50 di idrato sodico al 10 % si versarono in 200 cc. di ipoclorito; si separò tosto una sostanza bianca (gr. 4,8) che raccolta dopo un'ora e cristallizzata dall'alcool si presenta in splendidi e lunghi aghi bianchi fusibili a 114°. Tutte le proprietà del prodotto e la sua analisi confermano che si tratta del *perossido della diossima del benzile*

$$\begin{array}{l} C_6H_5 - C = N - O \\ \quad\quad\quad | \quad\quad\quad\;\; | \\ C_6H_5 - C = N - O. \end{array}$$

Gr. 0,2566 di sostanza fornirono cc. 25,5 di azoto ($H_0 = 739,82$ $t = 7°$), ossia gr. 0,030129.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{14}H_{10}N_2O_2$
Azoto	11,73	11,77

Questo composto era già stato preparato da Koreff (*) dalla β-diossima del benzile e da Auwers e Meyer (**) dalla α- e dalla γ-diossima mediante ossidazione con ferricianuro potassico alla temperatura di ebollizione e in soluzione alcalina. In tal

(*) Berichte *19*, 184 (1886).
(**) Id. *21*, 804 (1888) e *22*, 716 (1889).

modo detti chimici ottennero però sempre un prodotto giallo, purificabile solo con difficoltà per ripetute cristallizzazioni dall'alcool e trattamento con carbone animale.

Invece, come ho detto, per azione dell'ipoclorito sodico si ottiene senz'altro, e a freddo, il perossido puro in quantità teorica.

p-chinondiossima.

Ho preparato la p-chinondiossima $C_6H_4<\begin{matrix}NOH\ (1)\\NOH\ (4)\end{matrix}$ secondo le indicazioni di Nietzki e Guitermann (*) vale a dire trattando il p-nitrosofenolo con cloridrato di idrossilamina e acido cloridrico a freddo: per cristallizzazione dell'alcool al 50 $^0/_0$ la ebbi in prismetti grigi fusibili a 240°, temperatura alla quale si fondono pure le altre due varietà della stessa diossima: quella in corti aghi incolori e quella in lunghi aghi gialli ottenute dai citati chimici per precipitazione della soluzione ammoniacale con anidride carbonica.

Sciogliendo la diossima in idrato sodico al 10 $^0/_0$ e versando la soluzione bruna nell'ipoclorito sodico ottenni immediatamente un precipitato giallognolo che raccolto e lavato prima con acqua e poi con alcool si riconobbe per *p-dinitrobenzolo* $C_6H_4<\begin{matrix}NO_2\ (1)\\NO_2\ (4)\end{matrix}$.

Gr. 0,1506 di sostanza fornirono cc. 21 di azoto ($H_0=743,8$ $t=9°$), ossia gr. 0,024802.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_6H_4N_2O_4$
Azoto	16,40	16,66

Come ho già accennato, è probabile che nella reazione si formi dapprima il cosidetto p-dinitrosobenzolo $C_6H_4<\begin{matrix}NO\ (1)\\NO\ (4)\end{matrix}$ che Nietzki e Guitermann (**) ottennero dalla p-chinondiossima per ferricianuro potassico e che è molto facilmente ossidabile. Gli stessi autori (***) consigliano di preparare il p-dinitrobenzol

(*) Beriche *21*, 429 (1888).
(**) Berichte *20*, 615 (1887).
(***) Id. *21*, 430 (1888).

mettendo a reagire per 24 ore la p-chinondiossima con acido nitrico concentrato: mi sembra però preferibile il trattamento coll'ipoclorito, il quale è molto più rapido e dà un rendimento teorico.

β-*naftochinondiossima.*

Per preparare la β-naftochinondiossima $C_{10}H_6\langle{}^{NOH\ (1)}_{NOH\ (2)}$ sono consigliati due procedimenti: il primo, quello di Goldschmidt e Schmid (*) consiste nel sciogliere l'α-nitroso-β-naftolo in alcool metilico e riscaldarlo per più giorni con cloridrato di idrossilamina e qualche goccia di acido cloridrico; l'altro di Kehrmann e Messinger (**) consiste nel far agire a freddo l'idrossilamina in soluzione fortemente alcalina sul sale sodico del nitrosonaftolo.

Per quanto quest'ultimo metodo sia assai più rapido non è però a mio giudizio il preferibile perchè dà un prodotto molto colorato e più difficile a purificare.

Sciogliendo la β-naftochinondiossima in idrato sodico e versando la soluzione nell'ipoclorito si separa immediatamente una sostanza giallognola la quale raccolta dopo un'ora e cristallizzata dall'alcool fornisce aghi appiattiti, quasi incolori e fusibili a 127°. L'analisi e le proprietà del prodotto dimostrano trattarsi della cosidetta *1,2-dinitrosonaftalina* $C_{10}H_6\langle{}^{NO\ (1)}_{NO\ (2)}$, già stata ottenuta da Ilinski (***) ossidando la diossima del β-naftochinone con ferricianuro potassico.

Gr. 1805 di sostanza fornirono cc. 23 di azoto ($H_0 = 741,82$ $t = 7°$), ossia gr. 0,027286.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{10}H_6N_2O_2$
Azoto	15,11	15,05

(*) Berichte *17*, 2066 (1884).
(**) Id. *23*, 2815 (1900).
(***) Berichte *19*, 349 (1886).

Canfochinondiossima.

L'α- e la β-diossima del canfochinone $C_8H_{14}\left<\begin{array}{l}C = NOH \\ | \\ C = NOH\end{array}\right.$ le ottenni assieme facendo agire il cloridrato di idrossilamina sulla bromocanfora in presenza di acetato sodico secondo le indicazioni di Angelico e Montalbano (*) e separandole poi mediante la loro diversa solubilità in alcool.

Tanto l'una quanto l'altra diossima sciolta in idrato sodico e versate nell'ipoclorito danno immediatamente un precipitato bianco, il quale raccolto e cristallizzato dagli eteri di petrolio fornisce prismetti fusibili a 145° e che all'analisi e alle proprietà si riconoscono per il *perossido della canfochinondiossima* $C_8H_{14}\left<\begin{array}{l}C = N - O \\ | \qquad\quad\;\; | \\ C = N - O\end{array}\right.$ già descritto da Forster (**).

Gr. 0,1582 di sostanza fornirono cc. 19,5 di azoto ($H_0 = 741,82$ $t = 9°$), ossia gr. 0,023134.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{10}H_{14}N_2O_2$
Azoto	14,62	14,43

III.

Sulle proprietà del tetrabromuro di carbonio.

Le nostre conoscenze sulle proprietà del tetrabromuro di carbonio sono per la maggior parte dedotte da un lavoro di Bolas e Groves (***) il quale, oltre ad essere insufficiente sotto molti aspetti, è anche assai inesatto.

Allo scopo di correggere gli errori che si ripetono in tutti i trattati di chimica, ed anche di completare lo studio di tale

---

(*) Gazz. Chim. It. *30*, I, 300 (1900).
(**) Journ. Chem. Soc. *83*, 25 (1903).
(***) Journ. Chem. Soc. *29*, 782 (1871).

interessante composto, ho fatto alcune esperienze i cui risultati credo utile riassumere brevemente.

Anzitutto dirò che la preparazione del tetrabromuro di carbonio riesce semplicissima modificando come segue il metodo di Wallach (*), sciogliendo cioè 10 gr. di acetone in 10 litri di acqua, aggiungendo 180 gr. di bromo e 1500 cc. di una soluzione di idrato sodico al 30 %: in tali condizioni la separazione del tetrabromuro si inizia subito e dopo breve riposo si possono raccogliere gr. 32-33 di prodotto.

Ho inoltre trovato che lo stesso tetrabromuro di carbonio si forma anche per azione dell'ipobromito sodico sulla diossima del diacetile (in quantità notevole: gr. 5 di CBr_4 da gr. 5 di $CH_3 . C : NOH . C : NOH . CH_3$), dalla metiletilchetossima, dall'isonitrosometiletilchetone e dall'isonitrosocanfora.

Azione dell'acqua. — Il tetrabromuro di carbonio riscaldato con acqua in tubo chiuso a 100° non si altera; a 200° si decompone completamente in *anidride carbonica* e in *acido bromidrico*, conforme all'equazione:

$$CBr_4 + 2H_2O = CO_2 + 4HBr.$$

Azione dell'alcool. — Secondo Bolas e Groves (loc. cit.) l'alcool agendo sul tetrabromuro di carbonio forma acetaldeide, bromalio e acido bromidrico. Io ho trovato invece che a 100° l'alcool assoluto non esercita azione alcuna e che soltanto per riscaldamento durante tre ore a 150° in tubo chiuso si ottiene un liquido bruno il quale lavato con acqua fredda e frazionato si divide in due porzioni: una bollente a 37°-38° che si riconosce per *bromuro di etile*, l'altra bollente a 149°-50° che si riconosce per *bromoformio*.

Gr. 0,2429 di sostanza fornirono gr. 0,5393 di bromuro d'argento.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $CHBr_3$
Bromo	94,56	94,86

Contemporaneamente si formano traccie di acetaldeide.

(*) Annalen *275*, 147 (1893).

Coll'alcool acquoso (p. es. all'80 %) la decomposizione del tetrabromuro comincia già a 100°.

Azione dell'etilato sodico. — Facendo agire il sodio su una soluzione alcoolica di tetrabromuro di carbonio si ottiene soltanto bromuro sodico. Trattando invece il tetrabromuro sciolto in etere anidro con etilato sodico polverizzato e previamente seccato a 170° si forma *ortocarbonato di etile* bollente a 157°-58°.

Gr. 0,1120 di sostanza fornirono gr. 0,1070 di acqua e gr. 0,2300 di anidride carbonica.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_9H_{20}O_4$
Idrogeno	10,60	10,41
Carbonio	56,00	56,25

Azione dell'anilina. — Secondo Bolas e Groves (loc. cit.) scaldando leggermente l'anilina col tetrabromuro di carbonio avviene una reazione molto energica e si origina trifenilguanidina. Di questa però (che è facilissima a riconoscersi sotto forma di picrato) non ne ho riscontrato traccia alcuna; l'unico prodotto che potei isolare dalla massa resinosa fu *bromidrato di anilina.*

Gr. 0,1050 di sostanza fornirono gr. 0,1140 di bromuro d'argento.

Così su cento parti:

	trovato	calcolato per C_6H_8NBr
Bromo	46,20	45,97

Facendo agire il tetrabromuro di carbonio sull'anilina in presenza di idrato potassico alcoolico si forma invece *fenilcarbilamina.*

Azione della fenilidrazina. — Mescolando il tetrabromuro di carbonio colla fenilidrazina si inizia spontaneamente ed a freddo una reazione molto violenta e si ottengono soltanto piccolissime quantità di prodotti difficilmente purificabili. Aggiungendo invece la fenilidrazina alla soluzione del tetrabromuro in etere anidro e raffreddando in ghiaccio, ha luogo una reazione assai mode-

rata, accompagnata da sviluppo di bollicine gassose e separazione di laminette giallognole che si riconoscono per *bromidrato di fenilidrazina*.

Gr. 0,1519 di sostanza fornirono gr. 0,1517 di bromuro d'argento.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_6H_9N_2Br$
Bromo	42,50	42,32

Da 10 gr. di tetrabromuro di carbonio si possono così ottenere gr. 7 di prodotto: la reazione suaccennata può perciò servire assai bene come metodo di preparazione del bromidrato di fenilidrazina.

Secondo Broche (*) quest'ultimo è solubile nell'alcool a freddo e si fonde a 204°; io ho trovato che si può benissimo cristallizzare da detto solvente ed allora lo si ha in larghe lamine o in lunghi aghi leggermente giallognoli e fusibili a 212°.

Trattando la fenilidrazina con tetrabromuro di carbonio in presenza di potassa alcoolica si forma *fenilcarbilamina*.

Torino. Istituto Chimico della R. Università.
Febbraio 1906.

(*) Journ. Prakt. Chem. *50*, 113 (1894).

L'Accademico Segretario
LORENZO CAMERANO.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 18 Febbraio 1906.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Ferrero, Direttore della Classe, Rossi, Manno, Cipolla, Brusa, Allievo, Carutti, De Sanctis e Renier Segretario. — È scusata l'assenza dei Soci Carle e Ruffini.

L'atto verbale dell'adunanza precedente, 4 febbraio 1906, è approvato.

Il Presidente legge il testo del telegramma di felicitazione che la Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali inviò a S. E. Boselli, nominato Ministro dell' Istruzione pubblica, e la risposta del Ministro. La Classe di scienze morali, storiche e filologiche incarica il Presidente di far sapere al Ministro Boselli ch'essa di gran cuore si associa alle felicitazioni inviategli.

Sono lette le lettere con cui il prof. Carlo Alfonso Nallino ringrazia l'Accademia per il premio Bressa conferitogli ed il il prof. Emilio Bertana per il premio Gautieri di letteratura a lui assegnato.

Presentazione di libri:

1°, d'ufficio, *Commemorazione di Ferdinando von Richthofen* dettata dal Socio corrispondente Dalla Vedova, estr. dai " Rendiconti dell'Accademia dei Lincei ", classe fisico-matematica, Roma, 1905;

2°, dal Socio Brusa, *Rapports présentés au Congrès pénitentiaire international de Budapest par la Société générale des prisons, avec une introduction de Mr A. Ribot,* 1905; ed i seguenti opuscoli proprî: *Rapports et projet de resolutions présentés à l'Institut de droit international,* 1898; *Bibliographie pénale et pénitentiaire de l'Italie,* dal 1885 al 1890; *Grazia o condanna condizionale?*, Roma, 1901; *La contravvenzione penale e l'azione civile,* Torino, 1903; *Simulazioni nelle costituzioni sociali,* Torino, 1903;

3°, dal Direttore della Classe Socio Ferrero i seguenti opuscoli, tutti pubblicati recentemente a Torino dal prof. Efisio Giglio Tos: 1°, *Liberatione de l'assedio di Torino;* 2°, *Di tre lettere inedite sulla battaglia di Torino, 7 sett. 1706;* 3°, *Maria Bricco e la fazione di Pianezza;* 4°, *Il maresciallo Ferdinando de Marcin.*

Dall'aver nominato quest'ultimo personaggio, il Socio Ferrero toglie occasione per informare la Classe del proposito da altri manifestato di sostituire una nuova iscrizione a quella fatta collocare da Vittorio Amedeo II sulla tomba del maresciallo de Marcin, che è nella Chiesa della Madonna di Campagna. Per rispetto alla storia e per ossequio alla volontà sovrana, la Società di archeologia e belle arti ha già mosso istanza al Municipio di Torino, affinchè venga conservata la vecchia epigrafe che è storicamente esatta e stilisticamente pregevole. Su proposta del Socio Cipolla, la Classe unanime delibera che il voto suo si unisca a quello della Società di archeologia affinchè l'iscrizione non sia rimossa, e che di questo voto sia resa partecipe l'Autorità Municipale torinese.

Per gli *Atti* sono presentate le seguenti note:

1°, dal Socio Allievo alcuni suoi *Appunti di antropologia e psicologia;*

2°, dal Socio Cipolla: Roberto Cessi, *L'espugnazione di Monselice nel 1338;*

3°, dal Socio Renier: Attilio Levi, *Toscano " áschero " ed affini.*

Il Socio Cipolla, incaricato col Socio Ferrero di riferire intorno alla memoria del Dott. Dino Muratore, *L'imperatore Carlo IV nelle terre Sabaude nel 1365 e il vicariato imperiale del Conte Verde,* legge la relazione inserita negli *Atti*. Con votazione palese la Classe approva la relazione e poscia, presa cognizione della monografia documentata, ne approva con votazione segreta unanime l'inserzione nelle *Memorie* accademiche.

Raccoltasi poscia la Classe in adunanza privata, a norma dell'art. 1 del Regolamento speciale, procede alla nomina della Commissione per il conferimento del premio di fondazione Gautieri per la Filosofia e Storia della Filosofia, triennio 1903-1905. Sono eletti i Soci Chironi, Allievo, Carle.

LETTURE

Appunti di antropologia e psicologia.

Nota del Socio GIUSEPPE ALLIEVO.

Concetto dell'Antropologia.

L'antropologia, del pari che ogni altra scienza, muove da un concetto di senso comune, ossia dalla nozione dell'uomo oscura, imperfetta, indeterminata, che tutti abbiam per natura, e si forma sviluppando da questo concetto, per mezzo della riflessione, le cognizioni, che vi sono contenute in germe. Che cosa è adunque l'uomo? Ecco la prima dimanda, che si presenta a chi imprende lo studio dell'antropologia, ed a questa dimanda risponde il senso comune medesimo, il quale riconosce nell'essere umano due essenziali componenti, che sono l'anima ed il corpo. Seguendo la scorta del senso comune, noi possiamo dell'uomo comporre una definizione tale, che lo distingue da qualsiasi altro essere sussistente, nel che sta appunto la natura e lo scopo di ogni definizione.

L'uomo è persona, ossia è un soggetto fornito di intelligenza conoscitiva e di attività volontaria: ecco la prima nota costitutiva dell'uomo. Questa nota distingue l'uomo da tutti gli altri esseri dell'universo corporeo, in nessuno dei quali risplende il carattere della personalità. Ma ciò non basta ancora, giacchè anche Dio è un essere personale. Ora l'uomo non è solamente un essere personale dotato di pensiero e di libera volontà, ossia spirito puro, sciolto da ogni contatto colla materia, ma il senso comune riconosce altresì in lui un organismo corporeo congiunto colla personalità, e sotto questo riguardo si distingue essenzialmente da Dio. L'uomo adunque, a volerne dare una definizione compiuta, è la sintesi vivente di un' anima razionale e di un corpo organico, insieme composti ad unità di essere; o meglio ancora è una mente informante un organismo corporeo, prendendo qui il vocabolo *mente* come sinonimo di spirito, ossia di anima razionale.

Questa definizione dell'uomo è il sostrato e la base fondamentale di tutta l'antropologia, la quale si può dire un continuo commento ed uno sviluppo della medesima. Se non che prima di intraprenderne lo studio occorre accennare le molteplici scienze antropologiche particolari, le quali si diramano dall'antropologia, come da loro tronco comune, ma non vanno confuse con essa. L'antropologia è una sola, come è una sola l'essenza costitutiva dell'uomo, intorno alla quale essa si travaglia; ma questa essenza si manifesta sotto diverse forme particolari, le quali ci presentano l'uomo sotto moltiformi aspetti; e di qui hanno origine le scienze antropologiche particolari. A volerle classificare in ordine logico, esse vanno distribuite in due categorie, delle quali le une riguardano l'uomo individuo, le altre l'uomo sociale. Le prime si suddividono in due classi, secondochè riguardano la mente dell'uomo individuo, o l'organismo corporeo: alla prima classe appartengono la logica, l'etica, l'estetica, l'eudemonologia, la filologia, la pedagogia; alla seconda la fisiologia ed anatomia umana, la patologia, la terapeutica, l'igiene e la ginnastica. Le scienze poi, che riguardano l'uomo sociale, e che perciò possono appellarsi con un nome comune scienze sociali, sono la politica, la giuridica, l'economia pubblica colle scienze commerciali ed industriali, l'etnografia, la storia, la filosofia della storia (1).

Tra l'antropologia generale e le scienze antropologiche particolari intercede un duplice rapporto, di distinzione cioè e di unione. Nessuna di esse scienze è l'antropologia; epperò errano coloro, che riducono tutta quanta la scienza antropologica alla fisiologia od alla etnografia, come se l'uomo consistesse tutto quanto nell'organismo corporeo. E nemmeno prese tutte quante insieme le scienze antropologiche adeguano l'antropologia, perchè non risalgono a quel principio supremo, da cui hanno origine, e quindi mancano di quel vincolo logico, che le coordini in un tutto. Questo principio supremo è l'essenza costitutiva dell'uomo, che è mente e corpo, e quest'essenza è appunto contemplata dall'antropologia generale, la quale così si distingue dalle altre scienze, ma ad un tempo si collega con esse, perchè contiene la ragione spiegativa di tutte (2). Così la filologia, a ragion

(1) Vedi la mia opera: *L'uomo ed il cosmo,* pag. 3.

(2) Idem, pagg. 8-10.

d'esempio, ha la sua ragione spiegativa nell'essenza dell'uomo, che consta di un' anima razionale e di un corpo organico, essendochè il vocabolo per una parte importa l'organo vocale, che lo formi e lo pronunzii, per l'altra essendo un segno sensibile ed espressivo di un' idea della mente, importa un soggetto personale, che pensi e conosca. Similmente il dovere, che è oggetto dell'etica, ed il diritto, intorno a cui si travaglia la giuridica, importano un soggetto personale, che si senta obbligato ad adempiere la legge morale, ed abbia la facoltà di non essere ragionevolmente impedito da nessuno nel conseguimento della sua perfezione finale. Così pure la politica si fonda su questo principio, che lo Stato in ogni suo atto deve riconoscere e rispettare nei singoli cittadini la dignità personale dell'uomo, trattandoli non come cose o strumenti de' suoi voleri, ma come persone fornite della coscienza di sè e del dominio di sè.

L'Antropologia ed i sistemi antropologici.

L'antropologia non solo si distingue dalle scienze antropologiche particolari, ma essenzialmente si differenzia dai sistemi, essendochè la scienza, qualunque ne sia l'oggetto, possiede i caratteri della verità e della oggettività, dell'unità e della universalità, mentre ogni sistema, essendo il portato di una mente individuale, è di sua natura soggettivo e particolare, epperò può essere vero od erroneo, certo o più o meno probabile. Noi abbiamo chiamato a rassegna in un altro nostro lavoro i principali sistemi antropologici diversi ed opposti, quali sono il materialismo e l'idealismo, il positivismo ed il trascendentalismo, l'evoluzionismo; ed a tutti questi si viene ad aggiungere lo scetticismo, il quale pronuncia che il problema antropologico è un problema disperato, sicchè per quantunque si mediti e si discuta, non si conchiuderà mai alcunchè di vero e di certo intorno l'origine, la natura e la destinazione finale dell'uomo.

Volgendo lo sguardo a questo spettacolo di tante e diverse dottrine, che si urtano, si combattono, si distruggono l'una l'altra, si prova un certo qual senso di scoraggiamento e di sconforto. Ci interessa pur tanto di conoscere con sicurezza la nostra natura, i nostri destini, il còmpito nostro in mezzo all'immenso sistema degli esseri: ci interessa più ancora che non

il conoscere le cose esterne, che non sono noi; e ci sarebbe pur tanto caro che tutte le umane intelligenze armonizzassero concordi nella sicura e vera conoscenza del nostro essere. Noi la cerchiamo questa verità, che tanto ci interessa e tanto ci è cara; ma dove si trova essa mai? In quale dei tanti dissidenti sistemi dimora? Ciascun pensatore proclama il suo sistema siccome l'unico vero, e rigetta come erronei gli altri tutti. Si dirà: gli è davanti al tribunale della ragione che hanno ad essere citati tutti quanti: ad essa spetta il pronunciare la sentenza di approvazione o di condanna, e giudicare se un dato sistema sia il lavoro di un giusto e saldo ragionamento, e quindi conforme a verità. Ma che? Non vi ha pensatore, il quale non pretenda che egli ha ragionato giusto, e che tutti gli altri sono vittime di un ragionamento storto ed illusorio. Arroge che ragionare dirittamente non basta: occorre altresì, che i principii, da cui muovono i nostri ragionamenti, siano conformi al vero, giacchè anche l'errore ha la sua logica.

Che conchiuderemo adunque? In mezzo a tanta incertezza e discordanza di dottrine ci abbandoneremo noi allo scetticismo, o rinunzieremo alla scienza per rimanere nella bassa sfera del senso comune? Non ci soccorre adunque verun criterio che valga a secernere la verità in mezzo a tanti discordi sistemi? Di sicuro ci debb'essere, perchè la verità è la vita dell'intelligenza, e senza di essa la stessa persona umana, la quale è intelligente per natura, cesserebbe di esistere. Siffatto criterio in che dimora esso mai? La natura ha posto un ordine nel nostro essere per guisa che le molteplici sue potenze e manifestazioni devono armonizzare insieme nell'unità del nostro io personale. In quest'armonia voluta dalla natura sta il criterio della verità, il quale può essere così formulato: è erroneo un sistema antropologico, il quale genera il disordine nella vita interiore del nostro io, non riconoscendo tutte le sue essenziali manifestazioni, e ciascuna nell'ordine suo. Così il sapere ed il conoscere è una delle manifestazioni del nostro io, come lo è l'arte, la moralità, la religiosità e va discorrendo; ma tutte queste manifestazioni sono collegate da vincoli d'armonia e si sorreggono a vicenda, perchè quell'io che coltiva la scienza, è quel medesimo, che esercita l'arte, che adempie il dovere. Certamente la scienza non è l'arte, come l'arte è altra cosa dalla moralità, ed hanno ciascuna un

campo di attività tutto suo e leggi sue proprie; ma ad un tempo hanno intimi punti di contatto, per cui cospirano tutte al medesimo fine, che è il massimo perfezionamento possibile dell'io umano, in quella guisa che nel nostro corporeo organismo ciascun organo pur mentre adempie una funzione speciale sua propria, cospira con tutti gli altri organi a conservare la vita di tutto l'organismo. Quindi si scorge che come è erronea la sentenza *l'arte per l'arte*, lo è del pari la sentenza *la scienza per la scienza*, come se un pensatore nelle sue speculazioni scientifiche non debba preoccuparsi se la sua dottrina si troverà in aperta contraddizione colle altre manifestazioni essenziali della natura umana. Per lo contrario, un sistema antropologico, che nelle sue conclusioni riesce a calpestare la dignità della specie umana e le nostre aspirazioni morali e religiose, distruggendo così l'unità del nostro io, e quindi la stessa sua vita, già per ciò stesso non può pretendere a verità.

Mi si obbietterà: la scienza è dessa la maestra e la banditrice della verità; essa esercita il suo libero esame sulle credenze morali e religiose, su tutte le manifestazioni dello spirito umano giudicando se e quali abbiano consistenza o siano un'illusione. Ma forsechè la verità è privilegio esclusivo della scienza e del pensatore, che la coltiva? Forsechè al di fuori della cerchia della speculazione scientifica non si possiede la conoscenza di nessuna verità? Ma allora bisognerebbe condannare all'ignoranza la più gran parte del genere umano, essendo ben pochi coloro, che hanno agio, tempo ed attitudine per applicarsi al sapere. Per lo contrario ci sono verità universali di tutti i tempi, di tutti i luoghi, di tutte le menti, che formano la sapienza del genere umano; verità che si intuiscono per natura e sono come l'onore, il quale si sente, ma non si discute. Queste verità non sono una scoperta della scienza, ma la precedono e sono come il semenzaio, da cui essa germoglia; disconoscendole o rigettandole rinnegherebbe sè stessa.

Lo spiritualismo ed i suoi avversarii.

Fra le tante e diverse dottrine antropologiche, che abbiamo chiamato a rassegna, tiene un posto cospicuo lo spiritualismo, siccome quello, che per i suoi caratteri singolari ha un' impor-

tanza affatto speciale. Ai giorni nostri esso ha incontrato fieri avversarii nei fautori delle dottrine positivistiche e materialistiche, i quali lo combattono e lo ripudiano, ma lo fraintendono affatto. Essi lo accusano di sacrificare la materia allo spirito e pretendono di spiegare la natura dell'essere umano, senza tener nessun conto delle funzioni vitali dell'organismo corporeo. A sentirli loro, gli spiritualisti son gente, che pretende si debba vivere di puro spirito, di pura idealità, sdegnando ogni contatto colla realtà sensibile e materiale; e che professare lo spiritualismo sia un farla da teologo ed entrare in sacrestia. Ma erano forse gente da sacrestia Platone, Aristotele, Socrate, Leibnitz, Cartesio, ed infiniti altri sommi pensatori, i quali riconoscevano nell'universo uno spirito divino distinto da tutto il creato, nell'uomo uno spirito pensante distinto dal corpo?

A sventare l'accusa, che allo spiritualismo muovono i suoi avversarii, basta esporre il giusto e vero concetto di questa dottrina da essi fraintesa. Preso nel suo più ampio senso lo spiritualismo risiede nell'ammettere l'esistenza di sostanze immateriali, che cioè non cadono sotto i sensi e non hanno le proprietà della materia, quali sono la figura, la grandezza, l'estensione, la divisibilità, il movimento locale, bensì sono fornite di intelligenza e di libera volontà. Preso in senso speciale e propriamente antropologico lo spiritualismo consiste nell'ammettere la reale esistenza dell'anima umana, come sostanza distinta dall'organismo corporeo, non però separata da esso come se fosse uno spirito puro: tanto è che lo spirito umano si appella propriamente anima, perchè anima, avviva, informa il corpo, ed è con esso vitalmente congiunto. Quindi si scorge che questa dottrina si denomina spiritualismo, non già perchè riduca l'essere umano ad un puro spirito, bensì perchè oltre il corpo ammette lo spirito che lo anima; epperò esso non si confonde coll'idealismo, che ripone il vero essere umano nella pura razionalità.

Definito così lo spiritualismo, cerchiamone la base fondamentale. Esso non è una dottrina aerea foggiata dalla semplice immaginazione o fondata sopra di una pura astrazione, bensì si regge sulla base salda dell'esperienza. Infatti la coscienza interiore interrogata su questo punto ci attesta in modo irrepugnabile, che la nostra vita si svolge e si manifesta sotto due grandi forme distinte, le quali comprendono da un lato i fenomeni psi-

chici o mentali, dall'altro i fenomeni fisiologici od animali; e siccome è assioma di senso comune, che non si dànno fenomeni senza sostanza, in cui avvengono, come non si dànno effetti senza causa, che li produca, così necessita ammettere nell'essere umano due sostanze distinte, come sono distinte le due forme di fenomeni, val quanto dire l'anima razionale e l'organismo corporeo. Perciò falsamente si immaginano i positivisti che lo spiritualismo riguardi il corpo colle sue funzioni fisiologiche siccome estraneo alla vita umana ed allo sviluppo dell'anima razionale, ma lo ritiene siccome essenziale anch'esso ed assolutamente necessario a costituire l'essere umano, tanto quanto lo spirito, ma lo vuole a suo posto, cioè inferiore per natura all'anima, che lo informa e lo governa (1). Anima e corpo in noi sono due intimi compagni, che insieme convivono e si prestano mutui servizi. La storia della filosofia ci attesta, che i seguaci dello spiritualismo non solo hanno ammesso questa dualità di sostanze distinte componenti l'essere umano, ma hanno altresì riconosciuto che torna impossibile rendere una compiuta ragione dei fenomeni della vita mentale senza lo studio delle funzioni vitali dell'organismo, con cui sono intimamente congiunti (2).

Dalle cose discorse consegue che l'accusa dei positivisti non regge alla critica. Ma qui possiamo stringerli più da presso, e dimandar loro se veramente siano poi proprio coerenti con sè stessi dando lo sfratto allo spiritualismo. Essi ci parlano di fenomeni psichici o mentali e di fenomeni fisiologici od animali, ammettono esservi una corrispondenza tra gli uni e gli altri e ricercano questa correlazione, ma ad un tempo li ritengono distinti gli uni dagli altri. Ora domando io: il distinguere i fenomeni mentali o psichici dai fenomeni fisiologici non è appunto un professare una certa quale specie di spiritualismo? Veramente se si dimandasse loro un concetto chiaro e preciso di questa distinzione tra le due sorta di fenomeni, si troverebbero assai imbarazzati a rispondere. Essi parlano di psicofisica, di psicofisiologia, di fisiopsicologia, di fisiologia dello spirito; di fenomeni biopsichici; e tutti questi vocaboli si trovano ad ogni pie' sospinto nei loro volumi; ma alla fin fine quando si tratta di

---

(1) *Animi imperio, corporis servitio magis utimur;* Sallustio, *Catilin.* 2ª.

(2) Vedi il mio opuscolo: *La psicologia filosofica ed i suoi avversarii.*

spiegare in che consista un dato fenomeno mentale o che cosa abbia di proprio, per cui è un fatto psichico e non fisiologico, lo avvolgono in tante considerazioni intorno i centri nervosi, i movimenti cerebrali, le impressioni meccaniche ed altrettali, che il fenomeno psichico, che si doveva spiegare, finisce per scomparire in mezzo a tanto lusso di osservazioni, ed il fenomeno fisiologico rimane esso solo a tenere il campo. Così la loro dottrina riesce un impasto di fisiologia con una superficiale e leggerissima tinta di psicologia.

Dalla distinzione delle due classi di fenomeni, che si svolgono nella nostra vita interiore noi abbiamo argomentato l'esistenza di due distinte sostanze componenti il nostro essere, l'anima ed il corpo. L'anima razionale poi, contemplata ne'suoi attributi, ne' suoi fenomeni mentali, nelle sue potenze immateriali e nelle sue attinenze intime coll'organismo corporeo, costituisce l'oggetto della psicologia. Ora i positivisti si fermano, come abbiamo veduto, alle due distinte classi di fenomeni interni, e non vanno più in là, non risalgono sino alle due sostanze, da cui derivano; epperò la loro psicologia ha per suo esclusivo oggetto lo studio di essi fenomeni, è una psicologia senz'anima, essenzialmente distinta dalla filosofica.

Ma noi abbiamo ragione di dimandare: come mai possono darsi fenomeni senza sostanza, in cui avvengano: pensieri, sentimenti, voleri, senzachè esista chi pensa, chi sente, chi vuole? Tocca ai positivisti il rispondere, se loro riesce, a siffatta dimanda, e intendersela col senso comune, al quale ripugna l'ammettere fatti o manifestazioni senza un soggetto, che si manifesta, come ripugna un effetto senza causa.

Abbiamo superiormente proposto un criterio, che ci guidi nel giudicare della verità di un sistema antropologico, ed ora è pregio dell'opera riscontrarlo nello spiritualismo, che andiamo esaminando. Se havvi dottrina antropologica, la quale riconosca l'armonia, che la natura ha posto nell'essere umano, essa è senza dubbio lo spiritualismo. Infatti armonia importa una moltiplicità di elementi in conveniente accordo fra di loro, una varietà composta ad unità. Ora nell'umano soggetto, più che in qualsiasi altro essere dell'universo, risplende il carattere dell'armonia, perchè in lui si riscontra la massima varietà possibile di fenomeni e di manifestazioni, le quali hanno il loro unico e supremo

centro di unità nell'io umano personale. Quell'io, che in noi sente, è quel medesimo, che pensa e ragiona; quell'io, che coltiva la scienza, è quel medesimo, che crede, che opera, che adempie il dovere; il pensatore più sublime, che si solleva alle più alte cime del sapere e scruta i più profondi misteri della natura, è quel medesimo, che vive la vita comune ed ordinaria insieme col popolano più semplice ed ignoto. Ora lo spiritualismo riconosce l'essere umano in tutta l'integrità de' suoi elementi, in tutta l'armonia del suo insieme: esso ammette tutto ciò che gli appartiene, rigetta tutto ciò, che è contrario alla sua natura, tutto ciò, che turba la sua armonia, che introduce in lui il disordine e la rovina.

E veramente senza varietà e distinzione non si dà armonia; e lo spiritualismo riconosce nell'uomo la dualità e la distinzione delle due sostanze, anima e corpo, e quindi la indefinita moltiplicità di fenomeni, che ne discendono. Ma neanco senza unità ed accordo di parti non esiste armonia; e lo spiritualismo ammette, che l'anima razionale ed il corpo organico, pur mentre sono sostanze distinte, ed hanno ciascuna funzioni, leggi e svolgimenti suoi proprii, formano un essere unico, appartengono al medesimo io. Oltre di ciò lo spiritualismo insegna, che la natura vuole l'umano soggetto non solo in perfetta armonia con sè medesimo, ma altresì con tutta la realtà universale, con Dio, con tutto il mondo esteriore, che lo circonda, perchè la sua vita è essenzialmente collegata con tutto quanto esiste: la solitudine, l'isolamento sarebbe morte per lui.

La psicologia fenomenistica sperimentale (1).

Lo spiritualismo giustamente inteso ci conduce al vero concetto della psicologia filosofica, la quale ha per oggetto suo proprio l'anima umana studiata nella sua sostanziale natura e ne' suoi fenomeni col mezzo del senso intimo avvalorato dalla riflessione e dal ragionamento. Ad esso si oppone la nuova psicologia inaugurata dagli avversarii della metafisica e dello spiritualismo, la quale rigettando la realtà sostanziale dell'anima,

(1) Vedi il mio opuscolo: *La psicologia filosofica di fronte alla psicologia fenomenistica.*

si raccoglie tutta quanta nello studio esclusivo de' fenomeni psichici, epperò si appella fenomenistica, e proclama siccome unico mezzo e strumento di siffatto studio l'esperienza sensibile sussidiata dallo sperimento, denominata perciò sperimentale e considerata come scienza naturale e non filosofica o metafisica. Giova esaminare questa nuova psicologia sotto entrambi i suoi caratteri, che essenzialmente la differenziano dalla filosofica.

La psicologia fenomenistica ha essa ragione di ammettere siccome unico oggetto di studio i fenomeni psichici, negando il soggetto, ossia l'anima, a cui appartengono? Anzi tutto occorre notare che sostanza e fenomeni sono due termini distinti e ad un tempo inseparabili, tanto che l'uno non può sussistere senza l'altro. Sono distinti essendochè la sostanza esiste in sè e non fa parte di un altro essere, ossia possiede un' esistenza reale, oggettiva, individua e tutta sua propria, mentre un fenomeno non esiste in sè, ma nella sostanza, da cui origina; essa è permanente e durevole, mentre i fenomeni sono passeggieri e successivi; è una, come uno è l'essere, la persona in ciascuno di noi, mentre i fenomeni sono molteplici e varii. Pur tuttavia sostanza e fenomeni sono indisgiungibili, perchè la sostanza vive e si sviluppa ne' suoi fenomeni, ed ogni fenomeno spunta da una sostanza, e non dal nulla. Questa verità ci viene indubbiamente attestata dal senso intimo. Per poco, che ci raccogliamo dentro di noi, diciamo a noi medesimi: io penso alla tal cosa, io voglio il tal oggetto, io provo il tal piacere, il tal dolore. Dicendo *io* noi affermiamo la nostra realtà sostanziale, individua ed una: dicendo *penso*, *voglio, provo piacere o dolore*, noi affermiamo i fenomeni, che avvengono in noi e li riconosciamo come nostri.

Da questo concetto della sostanza e del fenomeno, formalmente distinti e realmente inseparabili, consegue per logica necessità, che la psicologia fenomenistica erroneamente pretende di negare la sostanzialità dell'anima ed ammettere lo studio esclusivo dei fenomeni psichici. Essa proclama che l'io (vocabolo, con cui affermiamo l'esistenza dell'anima nostra) è una vana illusione. Ma, dimando io, può forse darsi illusione senza un soggetto, una sostanza, uno spirito che si illuda? Voi ripiglierete: non è l'anima, che si illude, ma un fenomeno psichico. In tal caso voi ammettete fenomeni illusorii: ed io vi dimando, come distinguete voi i fenomeni illusorii dagli effettivi e reali? A tal uopo vi

occorre un criterio, il quale va naturalmente cercato fuori dei fenomeni stessi. Voi rigettate l'io come una vana illusione, eppure questo vocabolo si rinviene bene spesso nel vostro linguaggio e lo adoperate proprio nel senso, in cui viene inteso dall'universale degli uomini, contraddicendo così alla vostra medesima dottrina (1).

Un altro gravissimo difetto scorge la critica nella psicologia fenomenistica ed è la mancanza di unità nel suo organismo, e questo difetto è una conseguenza necessaria del concetto, su cui si fonda. Alla scienza torna essenziale la forma sistematica dell'unità per guisa che le molteplici cognizioni, di cui si elementa, siano una logica esplicazione di un concetto unico supremo. Per contro la nuova psicologia muove da un molteplice di fenomeni, che essendo disgregati dal soggetto sostanziale, a cui appartengono, mancano di un centro originario unificatore. Per il che i lavori dei pensatori, che la professano, non appariscono modellati sopra un disegno armonico e concorde, ed i varii argomenti, di cui discorrono, sono come altrettante monografie raccostate insieme senza vincolo di unità ideale, che le componga in forma di sistema.

Dalla psicologia fenomenistica passiamo alla sperimentale. S'intende da sè, che queste non sono due diverse specie di psicologia fondata su due tipi diversi, bensì la stessa psicologia costrutta sul concetto positivistico e considerata sotto due diversi riguardi. Essa prende nome di fenomenistica dacchè si propone per esclusivo oggetto delle sue indagini i fenomeni psichici separati da ogni soggetto sostanziale; si appella poi sperimentale dacchè nel processo delle sue indagini segue l'esperienza sensibile sussidiata dallo sperimento; e siccome questo processo è quel medesimo delle scienze naturali, così essa si appella altresì naturale (2).

La psicologia sperimentale presuppone il principio, che esiste una stretta corrispondenza tra i fenomeni fisiologici proprii della

(1) Vedi il mio opuscolo: *La psicologia filosofica di fronte alla psicologia fenomenistica*, pag. 21, 22.

(2) Il Nicati pubblicò a Parigi nel 1896 un volume intitolato: *Psychologie naturelle*; ma gran parte del libro discorre della visione dei colori e dell'armonia musicale, sicchè la parte veramente psicologica ne rimane soffocata.

vita corporea ed i fenomeni psichici proprii della vita spirituale, tantochè da quelli si può argomentare la natura di questi. Questo principio non è una nuova scoperta del positivismo, giacchè lo spiritualismo ha sempre ammesso un intimo connubio di vita tra l'anima ed il corpo. Perciò la psicologia sperimentale ha ragione di esistere e può rendere un efficace servizio alla scienza dell'anima col suo studio accurato e colla sua paziente indagine dei fenomeni fisiologici, ma a condizione che non esorbiti dai limiti, che la circoscrivono, vale a dire che riconosca che non è essa sola tutta quanta la psicologia, bensì una sua parte soltanto, e che l'esperienza sensibile costituisce soltanto una parte del processo psicologico, il quale debb'essere altresì ed assai più fondato sull'osservazione interiore. L'esperienza sensibile ci rivela l'uomo esteriore; ma alla vera conoscenza dell'uomo interiore non si perviene se non per mezzo della coscienza e del senso intimo, che osserva e riflette.

Infatti nei più intimi penetrali di un'anima umana si compiono fenomeni mentali, che non si manifestano a veruna esperienza sensibile esterna, non sono cimentabili da nessun apparato meccanico, quali sono ad esempio il sentimento morale e religioso, il rimorso, il concetto della vita oltremondana, le ragioni del diritto e del dovere ed altrettali. Invano altri tenterebbe di scoprire l'origine e la natura delle più alte idealità dello spirito nelle pieghe cerebrali, o nelle correnti nervose, come gli antichi aruspici cercavano il secreto dell'avvenire nelle viscere ancora palpitanti delle vittime immolate. Quindi si può affermare con sentimento di verità che i fenomeni della vita mentale e le rappresentazioni dell'esperienza sensibile e dello sperimento stanno fra loro in ragione inversa, sicchè quanto più un fenomeno mentale tiene un posto elevato nella vita superiore dello spirito, tanto meno fa mostra di sè nella sfera dell'esperienza sensibile.

Questi limiti proprii della psicologia sperimentale ci appariscono vieppiù manifesti se poniamo mente ai fenomeni che essa prende ad oggetto delle sue indagini. Tali sono la percezione del tempo e dello spazio mediante la vista ed il movimento della mano, il processo delle sensazioni visuali, uditive e tattili, le illusioni ottiche, il lavorìo mentale in rapporto colla fatica e col riposo, l'influenza dei diversi sentimenti e delle emozioni sui polsi e le respirazioni e quella dell'attenzione sul dilatamento

ed il ristringimento della pupilla. Come ognun vede, tutti questi ed altrettali fenomeni riguardano direttamente la vita sensibile animale e l'uomo esteriore e solo indirettamente toccano i fenomeni della vita strettamente mentale.

Meritano una speciale considerazione le esperienze, mercè cui la psicologia sperimentale ha tentato di misurare gli atti psichici; ma i risultati della sua psicometria sono tuttora controversi e non si può affermare che abbiano raggiunto una ferma e salda certezza. È noto ad esempio che la legge formolata dal Weber riguardo al rapporto tra la vivezza della sensazione e l'intensità dell'eccitazione venne riconosciuta incerta ed incompiuta dal Wundt. Certo è che le operazioni dello spirito anche le più elevate si compiono nel tempo e si succedono secondo una certa durata; ma non sempre, nè tutte possono essere misurate nella loro durata.

Ho notato più su, che la psicologia sperimentale non adegua essa sola tutta la scienza psicologica e per conseguente l'esperienza sensibile non è la norma suprema che deve dirigere il processo di questa disciplina. Sonvi fenomeni psichici strettamente mentali, che essenzialmente appartengono alla nostra natura razionale e si compiono negli intimi penetrali dello spirito, dove rimangono nascosti allo sguardo altrui, come ad esempio un puro ed astratto ragionamento, che altri faccia dentro di sè, un'aspirazione religiosa, un *voglio* imperioso, un proposito di vendetta. Siffatti fenomeni, appunto perchè assolutamente intimi, non sono percepibili mediante l'esperienza sensibile esterna, nè sperimentabili mediante qualche apparecchio meccanico, e tuttavia formano oggetto di studio, sono avvertibili dalla coscienza e non possono essere studiati se non mediante l'osservazione interiore e la riflessione rivolta sopra di noi. Altri ve ne sono, che dall'intimo dell'anima, in cui avvengono, si fanno sentire in una determinata parte dell'organismo corporeo, e vi lasciano la loro speciale impronta. Così una meditazione troppo intensa e prolungata all'eccesso, spossa il cervello e genera mal di capo; l'annunzio di una repentina sciagura contrista l'anima, e quella interna tristezza si annunzia al di fuori e si diffonde nel pallore del volto, nella cupezza dello sguardo, nell'atteggiamento depresso della persona. I fenomeni di questa seconda specie sono oggetti di esperienza sensibile esterna e di sperimento; ma

l'osservazione esteriore si ferma alla corrispondenza, che corre tra il fenomeno fisiologico organico ed il fenomeno psichico mentale, quale sarebbe nel citato caso la meditazione, la tristezza dell'anima. Il fenomeno mentale può solo essere studiato e spiegato mediante la coscienza e la riflessione interiore. Arroge che questi secondi fenomeni, anche considerati sotto il loro aspetto fisiologico cadono in certo qual modo sotto il dominio della coscienza, essendochè quando l'osservazione esteriore che io faccio sulla tristezza dipinta sul volto di una persona, è avvertita e studiata dalla scienza, diventa un fenomeno mentale.

L'esame delle due specie di fenomeni conduce alla conseguenza, che l'osservazione interiore è la guida sovrana degli studi psicologici, anche quando è sussidiata dall'esperienza sensibile esterna e dallo sperimento. Questa verità che ci è dettata dalla ragione, viene altresì confermata dal fatto. La storia della filosofia ci presenta una luminosa e continuata schiera di pensatori, che contemplarono coll'occhio della mente il mondo interiore dell'anima e scrutarono la vita dello spirito quale si manifesta nei più semplici pensieri e nelle più umili conoscenze, come nelle più sublimi e profonde, nei sentimenti e negli affetti più volgari, come nei più nobili e grandi, nelle velleità più sfuggevoli, come nei voleri più saldi e costanti, e ci lasciarono nei loro volumi tanta e tale sapienza psicologica, quale nessun laboratorio di psicologia sperimentale ci potrà dare giammai. Chi non ha letto con vivo interesse il *Saggio di morale* di Pietro Nicole, i *Pensieri* di Biagio Pascal, i *Caratteri* di Labruyère, la *Fisiologia delle passioni* di Alibert? Questa potenza dell'osservazione interiore non si manifesta soltanto nelle severe e fredde meditazioni dei pensatori e nei loro volumi filosofici, ma risplende altresì nelle inspirazioni del genio e nei lavori letterarii. *La Divina Commedia* dell'Alighieri, i drammi di Shakespeare, il *Faust* di Volfango Goethe sono splendidi capolavori psicologici, che rispecchiano l'uomo interiore nella sua lotta colle passioni, nei più intimi movimenti del suo cuore, nelle sue idealità più sublimi come ne' suoi più ignobili istinti. Essi hanno sentito le interne aspirazioni del loro genio e le hanno consegnate alla carta: è Dante, che disse di se medesimo: " I' mi son un, che quando Amore spira, noto, ed a quel modo Che detta dentro, vo significando ".

L'osservazione interiore.

L'osservazione interiore si fonda sulla coscienza psicologica, mercè di cui il soggetto personale ripiegandosi sopra di sè afferma il suo essere ed i suoi modi di essere riconoscendosi una unità individua vivente, distinta da ogni altra sussistenza. Il vocabolo *io* è l'espressione di siffatta affermazione; e questo atto del ripiegarsi sopra di sè come in un semplicissimo punto indivisibile, è tutto proprio dello spirito, essendochè la materia, fosse pure un punto impercettibile, è incapace di ripiegarsi in sè, perchè estesa ed impenetrabile. La coscienza psicologica sorge dalla vaga ed oscura intuizione, che il fanciullo ha di se stesso, e va via via formandosi e chiarendosi sempre più, a mano a mano che egli si trova in contatto con altri esseri e con altre forze esterne, che lo costringono a raccogliersi in sè ed avvertire quel che sente e quel che fa. Di qui si scorge la somma sua importanza e necessità sia pel felice successo dell'educazione dell'alunno, sia per la vita sociale e morale dell'uomo maturo. Poichè l'adolescente, che di quando in quando si raccoglie in sè per rendersi ragione de' proprii studi e delle difficoltà, che incontra, cammina franco e spedito per la diritta via del proprio sviluppo, mentre mal provvedono alla educazione dei proprii alunni quegli istitutori e maestri, che li lasciano crescere distratti e disattenti, o peggio ancora li sopraffanno con eccessivo lavoro o con una insistente pressione, mai non lasciando loro tanto di libero riposo da potersi raccogliere interiormente e pensare a sè stessi. La coscienza ammaestra altresì l'uomo maturo e libero di sè, dandogli la giusta misura delle sue forze ed il prudente accorgimento per riuscire a bene prima di accingersi a qualche grave intrapresa. È poi evidente che la sincera consapevolezza dei nostri vizi e difetti è necessaria condizione per venirne al riparo.

La coscienza psicologica mi afferma due verità entrambe incontrastabili, l'esistenza dell'io ed i suoi fenomeni: io sono un essere, un soggetto individuo, una sostanza; io sento, penso, voglio, passo di cangiamento in cangiamento. Il positivista, che ammette i soli fenomeni e nega l'io, in cui si sostanziano, contraddice ad una solenne affermazione della coscienza, e toglie con ciò stesso ogni veracità anche all'esperienza sensibile, su cui fonda il suo sistema, perchè se io fossi in una illusione, se non

dovessi credere alla testimonianza della coscienza, tanto meno dovrei credere a ciò che non è me. Voi credete all'esistenza dei vostri fenomeni psichici, perchè vi sono rivelati dalla coscienza; perchè adunque le negate fede allorchè vi attesta l'esistenza del vostro io? Forsechè non è la stessa coscienza e quindi autorevole allo stesso grado nell'un caso e nell'altro? Nelle vostre indagini psicologiche voi seguite la via dell'esperienza e della osservazione esteriore; ma siete voi conscii di questo processo, che voi tenete, oppure camminate inconsciamente, alla ventura? Ora chi vi attesta che voi tenete siffatto cammino e non un altro? La coscienza; così essa sovrasta per autorevolezza alla stessa osservazione esteriore, su cui fondate il vostro processo. La coscienza ci rivela l'io ed i suoi fenomeni siccome due termini correlativi ed indisgiungibili, e voi li separate rigettando il primo ed appigliandovi al secondo. Ma in tal modo voi facendo astrazione dall'io riducete i fenomeni psichici ad entità puramente astratte e contraddite al principio fondamentale del vostro positivismo, il quale stabilisce che la scienza deve esordire da fatti concreti e reali, e non già da concetti astratti e metafisici.

Orditura generale della scienza antropologica.

Che l'antropologia abbia per ufficio suo proprio lo studio dell'essere umano, siccome distinto da ogn'altra specie di esseri, è cosa già posta in sodo. Ma dell'uomo che cosa si propone essa di conoscere? Quali sono i problemi, che intende di risolvere e con qual ordine procede nel loro scioglimento? In altri termini, questa scienza come è fatta, qual è la sua generale struttura, quale l'organismo delle sue parti? Ecco la dimanda, a cui occorre primamente soddisfare.

Ponendoci a considerare l'organismo intrinseco della scienza nostra, ci si presentano alla mente due guise affatto diverse di concepire e di comporre l'antropologia, e sono il tipo antico, che rappresenta questa disciplina quale venne a poco a poco formandosi e sviluppandosi dai tempi più remoti alla Scolastica medioevale e dal medio evo fino a noi; ed il tipo moderno affatto nuovo, che rappresenta l'antropologia contemporanea radicalmente mutata da quella di prima. A differenziarle l'una dall'altra appelleremo antropologia filosofica la prima, positivistica la seconda.

Qual è l'organismo dell'antropologia filosofica? A' suoi occhi l'uomo non è nè la natura fisica esteriore, nè Dio, ma costituisce una specie essenzialmente diversa da tutte le altre: epperò l'antropologia apparisce una scienza speciale diversa da ogni altra. Ponendosi poi allo studio dell'uomo, essa lo concepisce non come uno spirito puro, nè come un mero animale, ma come la sintesi vivente di due componenti, che sono l'organismo corporeo e l'anima razionale, distinti per natura l'uno dall'altro, ma tuttavia congiunti tanto da formare un solo essere, che è la persona umana. Da questo concetto dell'uomo si svolge la scienza antropologica tutta quanta. Lasciando alla fisiologia e ad altre discipline naturali il còmpito di studiare più di proposito ed in sè medesimo l'organismo corporeo umano, essa si propone di contemplare in modo affatto speciale l'anima razionale, ossia la mente, ragione per cui assunse segnatamente la denominazione di *psicologia,* val quanto dire scienza dell'anima. Ma non si creda per ciò, che essa lasci da banda ogni studio riguardante la parte animale dell'uomo, giacchè in ogni trattato di antropologia in ogni sua parte compiuto vi si discute il problema intorno l'intima ed operosa unione dell'anima col corpo.

Quanto poi allo studio dell'anima, ecco come l'antropologia procede nelle sue indagini. Da prima raccoglie, osserva e spiega i fatti interni dell'anima, da essi assorge alle sue potenze, tenendo essenzialmente distinte quelle animali dalle spirituali, come tiene distinti nell'essere umano i suoi componenti, animalità e ragione. Tutto questo primo studio de' fatti interni dell'anima e delle corrispondenti potenze costituisce la psicologia empirica. Vi succede la seconda parte della psicologia, la razionale, che risalendo dai fatti interni e dalle potenze all'essenza intima dell'anima, la viene studiando sotto tre grandi aspetti, cioè nella sua origine, nella sua specifica natura, nella sua destinazione finale. Spiegando la natura dell'anima, enumera e discerne le proprietà, che la costituiscono, quali sono la sostanzialità, la semplicità, la spiritualità e l'immortalità e da quest'ultima proprietà passa a ragionare della sua destinazione suprema, la quale si compie in una vita oltremondana.

Tale è l'orditura dell'antropologia costrutta sul tipo antico o dirò meglio tradizionale. Ed ora passiamo a considerare l'organismo proprio dell'antropologia positivistica contemporanea.

Qui non abbiamo più molteplici e differenti specie di esseri essenzialmente distinte. Tutto è trasformazione, cangiamento, evoluzione: non vi sono più nè veri esseri, nè vere sostanze, ma fatti e fenomeni, che si succedono e si trasformano. L'uomo anch'esso non costituisce una specie particolare e distinta, ma si confonde cogli esseri della natura fisica esteriore, e per ciò stesso l'antropologia non costituisce più un corpo di scienza da sè, un tutto distinto ed improntato di un carattere suo proprio, ma trovasi qua e là disseminata fra le varie branche delle discipline naturali. Questa nuova antropologia ponendosi allo studio dell'uomo non lo riconosce già come un vero essere in sè sussistente, una vera sostanza, che sente, intende, vuole, immagina, riflette, ragiona, bensì come un complesso di fenomeni, cioè di sensazioni, di pensieri, di immagini, di desiderii, fenomeni, che non sono di nessuno, non appartengono a nessuno. Noi ci crediamo di essere qualche cosa di più de' nostri fatti interni; nessuno crede di essere niente più che il tal pensiero, il tal sentimento, il tal desiderio, che succede in lui, e nemmeno il complesso o la somma di tutti questi fenomeni e manifestazioni, bensì di essere una vera e vivente individualità, di essere cioè colui, che sente, intende, desidera, ed ha coscienza di tutte queste sue mutazioni affermando sè stesso col vocabolo *Io*. Noi lo crediamo, ma tutta questa universale credenza viene dall'antropologia positivistica rigettata siccome una vana illusione. Eppure anche il positivista ci tiene assai al proprio io sostanzialmente sussistente, e se si chiamasse un mero fenomeno, non lo direbbe in sul serio.

Concepito l'uomo siccome un complesso di fatti, l'antropologia positivistica si fa a distribuirli in due grandi ordini o classi, cioè in fisiologici ed in psichici, senza però riconoscere tra gli uni e gli altri una distinzione essenziale, essendochè sostiene che i fisiologici si trasformano in psichici e questi ritornano in quelli. Poi procede alla ricerca delle leggi, che governano questi fatti e risale alle loro potenze. Anche qui nel costrurre la teorica delle umane potenze non ammette una distinzione assoluta tra le une e le altre, ma una trasformazione delle inferiori nelle superiori: il senso fisico diventa intelligenza e ragione, l'istinto animale si muta in volontà spontanea e consapevole di sè, le sensazioni fisiche prendono forma di affetti e sentimenti

umani. E che ne è dell'anima umana, della sua origine, delle proprietà costituenti la sua natura, della sua destinazione oltremondana? Tutti questi problemi non trovano luogo nell'antropologia positivistica.

Uopo è riconoscere che l'antropologia metafisica non avendo ancora conchiuso il suo periodo terminativo, presenta tuttora difetti e lacune, e molti difetti e lacune già andò adempiendo attraverso il suo sviluppo storico: ma pur tuttavia mantenne sempre il suo spirito tradizionale abbracciando nelle sue indagini tutta quanta l'ampiezza dell'essere umano, epperò ha un carattere comprensivo. Per contro l'antropologia positivistica, sebbene abbia allargato assai la cerchia degli studi, che riguardano i fenomeni psicologici, tuttavia tenendosi sempre esclusivamente ristretta in questa cerchia, ha disconosciuto quanto vi ha di intimo, di sostanziale e di supremo nella natura umana, e quindi ha un carattere esclusivo.

Concetto generale della psicologia.

A comporci in mente un concetto nitido e giusto di una scienza qualsiasi occorre por mente all'oggetto fondamentale, intorno a cui essa si travaglia. Se una disciplina esiste, lo deve alla esistenza del proprio oggetto, e cesserebbe di esistere quando l'oggetto suo venisse assorbito in quello di altra scienza, e più non le appartenesse in forma esclusiva. Parimenti se una scienza possiede una natura sua propria ed uno speciale organismo, che la impronta e da tutte le altre la differenzia, se ha dei limiti, che la circoscrivono e la definiscono, se nel suo svolgimento tiene un processo metodico suo particolare ed adopera tale anzichè tal altro strumento, tutto ciò è dovuto alla natura propria dell'oggetto, che essa va contemplando. Breve, esiste una data scienza perchè esiste un dato oggetto, ed è quella, che è, e non un' altra, perchè versa intorno ad un dato oggetto e non ad un altro. La matematica e la fisica ne porgono un cospicuo esempio.

Veniamo alla psicologia. Evvi un oggetto, che la fa essere, e determina la sua natura distintiva, i suoi confini, il suo processo. Quest'oggetto è indicato dal significato stesso etimologico del vocabolo *discorso o scienza dell'anima*. Esiste poi davvero

(potrebbe altri qui domandare) una realtà, una sostanza, un alcunchè denominato anima umana? Avvertasi bene; non si domanda già ora, se quest'anima sia di natura spirituale o materiale, se sia semplice o composta, se immortale o peritura, se abbia una connessione necessaria coll'organismo corporeo, oppure viva una vita tutta intima e solitaria: gravissime questioni son queste, che non possono trovar qui il loro scioglimento, ma saranno discusse nel processo della scienza, siccome quelle, che riguardano l'intima natura od essenza dell'anima. La dimanda, che ci si è presentata, riguarda l'esistenza dell'anima e niente più.

L'esperienza risponderà alla proposta questione. È cosa di fatto, che esiste una moltiplicità di scienze, le quali hanno per oggetto gli esseri svariati che compongono la natura sensibile esteriore, quali sono la mineralogia, la fisica, la chimica, la geologia, la botanica e va discorrendo; scienze le une dalle altre distinte, le une più, le altre meno progredite. Or bene tutte queste discipline non sono spuntate dal nulla quasi per incanto, bensì presuppongono siccome condizione e cagione di loro esistenza un principio intelligente, che sta riposto dentro di noi ed esce fuori dai penetrali del nostro essere nel mondo della natura esteriore per contemplarlo, studiarlo, comporne la scienza: in altri termini presuppongono nell'uomo una mente, uno spirito, in una parola l'anima umana. Negata l'esistenza di questo principio intelligente, di questa mente, s'incorre nell'assurdo di ammettere un effetto, cioè le scienze naturali, senza una cagione, che le abbia costrutte.

Esiste adunque in noi un principio interiore, che i filosofi appellano *Io*, e nel linguaggio del senso comune si denomina anima umana; e quest'Io, quest'anima si manifesta e rivela sè stessa attraverso una serie successiva e continua di fenomeni suoi proprii, ossia di pensieri, di sentimenti, di desiderii, di volizioni e via via. Perciò è ufficio della psicologia il contemplare l'oggetto suo proprio sotto due grandi riguardi, studiare cioè l'anima umana nel suo essere e ne' suoi modi di essere, in ciò, che essa essenzialmente ed immutabilmente è, ed in ciò, che naturalmente fa o patisce, nella sua intima natura e nelle sue estrinseche manifestazioni, nella sua realtà sostanziale e ne' suoi mutabili fenomeni. Di qui la psicologia si divide in due parti corrispondenti, empirica l'una, che ha per oggetto lo studio dei

fenomeni e delle potenze dell'anima, razionale l'altra, che è rivolta a determinare l'intima sua natura. Queste due parti della nostra disciplina abbisognano l'una dell'altra, ed entrambe tornano necessarie a costituire una vera e compiuta scienza psicologica. Infatti l'intima natura dell'anima umana, come di un essere qualsivoglia, non va indovinata *a priori*, ma razionalmente argomentata dallo studio paziente e compiuto delle sue manifestazioni, ed alla loro volta i fenomeni interni o psicologici non hanno in sè medesimi la loro ragione spiegativa, ma per logica necessità importano un soggetto, a cui appartengono ed in cui avvengono. Evvi adunque tra la natura dell'anima ed i suoi fenomeni un vincolo indissolubile, in virtù del quale le due divisate parti della psicologia compongono un solo tutto scientifico. Il vincolo, di cui facciamo parola, è attestato dalla coscienza, la quale mentre ci fa accorti che dentro di noi avviene tale o tal altro fenomeno, ne avverte ad un tempo, che esso è nostro, ossia che il nostro Io è modificato in questa o quell'altra guisa.

Dalle cose fin qui rapidamente discorse intorno l'oggetto della psicologia e la partizione di essa agevolmente se ne inferisce quale sia la propria sua natura. Questa disciplina, chi ben la riguarda, presenta due precipui caratteri, dei quali l'uno la differenzia da tutte le scienze in genere, l'altro la distingue segnatamente dalle scienze della natura. La psicologia presenta questa proprietà tutta sua, che il soggetto, il quale costruisce la scienza, e l'oggetto, intorno a cui questa si aggira, in sostanza tornano ad un solo ed identico essere; è l'io, è l'anima umana, che studia sè stessa, mentre in tutte le altre scienze il soggetto, che le forma, non è l'oggetto, intorno a cui esse versano. Ma con qual mezzo l'anima compie questo studio di sè medesima e se ne compone la scienza? Forse mediante l'esperienza e l'osservazione esteriore, mercè di questo o quell'altro de' nostri sensi esterni sussidiati e sorretti da strumenti, da macchine sperimentali, come avviene nella fisica e nella chimica? No certo, bensì col mezzo di un altro senso essenzialmente diverso da tutti i sensi fisici esterni, perchè non ha, come questi, un organo apposito nel corpo umano, vogliamo dire col senso intimo ossia colla coscienza avvalorata e perfezionata dalla riflessione interiore e dal ragionamento. Ecco qui il secondo carattere, a cui accennavo testè, che distingue la psicologia dalle

scienze naturali in particolare: queste adoperano siccome mezzo loro proprio e necessario i sensi esterni, applicandoli alla percezione ed all'osservazione de' fenomeni della materia, mentre nè l'anima, nè veruno de' suoi fenomeni interni son cose, che si possano palpare colle mani, vedere cogli occhi od assoggettare al potere di macchine e strumenti.

Se tale è l'oggetto della psicologia, se tale è la sua natura, possiamo enunciare il suo concetto fondamentale con questa definizione: la psicologia è quella parte di filosofia, che ha per oggetto l'anima umana studiata ne' suoi fenomeni e nel suo essere sostanziale mediante la coscienza perfezionata dalla riflessione interiore e dal ragionamento. Ognuno può di per sè rilevare come questa definizione esprima ad un tempo sia l'oggetto proprio della psicologia, sia i due fondamentali aspetti, sotto cui va contemplata, sia lo strumento suo proprio per siffatto studio, e come ad un tempo implicitamente vi si riscontrino i suoi due essenziali caratteri. Questa definizione non esclude lo studio dell'anima anche nei suoi rapporti col corpo, perchè si denomina appunto *anima umana*, dacchè per natura anima l'organismo corporeo.

A compiere questo concetto generale della psicologia rimane che ci soffermiamo ancora per poco a riconoscere i confini, che la circoscrivono dentro la sua orbita e la distinguono da altre scienze contermini ed affini. La psicologia abbraccia nella sua sfera tutte quelle ricerche, le quali direttamente riguardano l'anima umana nella sua natura e ne' suoi fenomeni, e che si compiono mercè della coscienza e della riflessione interiore, niente di più, niente di meno. Per conseguente tutti gli studi e le indagini riguardanti que' fenomeni e quegli esseri, che sono di altra natura, per quantunque abbiano stretta attinenza coi fenomeni psicologici e giovino a meglio comprenderli ed illustrarli, non appartengono al dominio della psicologia.

Evvi una scienza, la quale giace proprio ai confini della psicologia, e trovasi con questa in intimo contatto, ma che tuttavia non ha nè diritto, nè ragione di invaderne la sfera e scacciarla dal suo dominio. Questa scienza è la fisiologia. Il bisogno profondo, che hanno l'una dell'altra queste due grandi discipline, ha potuto ingenerare in alcune menti il falso concetto, che non interceda fra di esse veruna real distinzione,

talchè la psicologia debba scomparire e cedere il campo alla fisiologia. Eppure la distinzione esiste profonda, essenziale: è quella medesima, che intercede tra i fenomeni proprii della mente, studiati dalla psicologia mediante la coscienza e la riflessione interiore, ed i fenomeni proprii dell'organismo corporeo studiati dalla fisiologia mercè de' sensi esterni e degli sperimenti materiali. Ma incorrerebbe in altro non meno grave errore chi spingesse la distinzione fra queste due scienze sino ad una reale separazione. Il vero è che queste due discipline, pur rimanendo distinte, mirabilmente si giovano e si illustrano a vicenda, essendochè nell'uomo la mente e l'organismo, l'anima ed il corpo convivono in intima corrispondenza e si compongono ad unità di essere. Laonde il psicologo deve far tesoro di tutte le verità e le scoperte della fisiologia umana, se intende di comporre una scienza compiuta dell'anima razionale, ed alla sua volta il fisiologo deve tener conto degli studi psicologici, se vuol rendersi una perfetta ragione dei fenomeni della vita animale umana. Così camminando concordi ed unite e sorreggendosi mutuamente vengono a comporre tutta intiera la scienza dell'uomo, che è l'antropologia.

Giova stringere in poche proposizioni sintetiche quanto si è venuto fin qui discorrendo intorno il concetto generale della scienza psicologica.

1° Ogni scienza deve al proprio oggetto la ragione della sua esistenza, la natura, che la determina, i limiti, che la circoscrivono.

2° L'oggetto proprio della psicologia è indicato dal medesimo significato etimologico della parola, ed è l'anima umana.

3° L'esistenza dell'anima umana è chiarita primamente dal fatto delle scienze naturali, che arguiscono in noi l'esistenza di una mente, che le abbia costrutte, secondamente dai fenomeni, i quali si avvicendano in noi, ed arguiscono in noi l'esistenza di un soggetto, a cui appartengono.

4° L'anima nostra sviluppa la sua essenza e si mostra quello, che è, nei fenomeni interni, quali sono i pensieri, i sentimenti, i voleri; epperò debb'essere studiata sotto entrambi questi riguardi.

5° Per conseguente la psicologia si bipartisce in empirica e razionale; e queste due parti si congiungono in un sol tutto

scientifico, perchè nell'anima la sua essenza ed i suoi fenomeni sono due termini l'uno dall'altro indisgiungibili.

6° La natura propria della psicologia si mostra in due caratteri essenziali, di cui il primo la distingue da ogni scienza, e sta nell'identità del soggetto, che la costruisce, e dell'oggetto, intorno a cui si occupa, il secondo la differenzia dalle scienze naturali in particolare, e sta nello strumento tutto suo proprio, che è il senso intimo avvalorato dalla riflessione.

7° I limiti della psicologia sono segnati dalla natura del suo oggetto, il quale abbraccia tutte e solo quelle ricerche, che riguardano l'essenza dell'anima umana ed i fenomeni proprii della medesima.

8° La psicologia si trova in intimo contatto colla fisiologia, ma ciascuna di queste due scienze va distinta dall'altra, perchè la prima ha per oggetto suo proprio la mente co' suoi fenomeni psichici, la seconda l'organismo corporeo colle sue funzioni vitali; e tuttavia sono unite insieme da quel medesimo vincolo, che congiunge nell'uomo l'anima razionale ed il corpo organico, e così unite costituiscono l'antropologia.

La coscienza eudemonologica.

Un incrollabile istinto, posto dalla stessa natura nell'intimo fondo dell'animo nostro, ci porta ad esistere, e più ancora ad esistere il meglio che si può, a sentire la vita il più intensamente che è possibile, sentirla, in tutto ciò, che essa ha di amabile, di lieto, di giocondo, in una parola ci porta alla felicità. Ed è felicità uno stato passivo dell'anima, che riposa imperturbata e contenta di sè. In questa incessante aspirazione, in questo irrefrenabile desiderio di un'esistenza felice ha il suo fondamento e la sua ragione la coscienza appellata eudomonologica, come apparisce dallo stesso vocabolo. Essa ha per ufficio suo proprio di tener viva questa tendenza alla felicità in tutta la specie umana, e ad un tempo di richiamare l'attenzione di ciascuna persona sopra di sè ogni qualvolta qualche prospero avvenimento viene a rallegrare il corso della sua vita. Così una lieta notizia lungamente aspettata, il conseguimento di un ideale fervidamente sospirato, il ritorno di una persona cara ci rendono momentaneamente felici, e noi lo sentiamo dentro di noi,

lo diciamo a noi stessi e vorremmo lo sapessero anche gli altri. Ma pur troppo la felicità, a cui corriamo per impeto di natura, trova quaggiù il suo opposto, che la contrasta. La coscienza eudemonologica ci apprende che una grande infelicità pesa su tutta la specie umana, e ciascuno di noi in mezzo alle vicende della sua vita scorge in sè una conferma di questa verità dolorosa. Un rovescio impreveduto di fortuna, un disinganno, un disegno fallito, un abbandono ci contristano l'esistenza. Ben di rado ci escono dal labbro queste parole: *Io mi sento proprio felice!* Più d'una volta diciamo a noi stessi: *io sento il peso dell'esistenza; si sta male quaggiù!*

La coscienza eudemonologica varia d'intensità e di forma nei diversi individui secondo la varia tempra della loro sensitività e della loro costituzione organica. Sonvi anime delicate ed espansive, che avvertono ogni benchè menoma impressione o lieta o molesta, ed altre così apatiche ed ottuse, che rimangono inconscie od indifferenti in mezzo alle più gravi peripezie della vita. Similmente la coscienza degli spiriti nobili e gentili si compiace delle idealità più sublimi e più pure, mentre le coscienze grossolane si appagano della realtà sensibile o volgare. Alloraquando la nostra esistenza scorre trista e desolata, la coscienza eudemonologica adempie un ufficio ben doloroso; essa interviene a rendere più acuta o più grave la nostra miseria. Essere infelici è già per sè cosa ben trista; ma il sapersi e sentirsi infelici è peggio assai. E allora si invoca l'oblio, la dimenticanza di un tempo felice, che non è più: si vorrebbe che la vita fosse un continuo sogno per togliersi da una realtà troppo dolorosa.

In mezzo alla sterminata varietà degli spiriti umani se ne incontrano di tali, che hanno sortito da natura una tempra profondamente melanconica, tantochè si direbbero i diseredati della felicità, quasi come se ne avessero perduta perfino la consapevolezza ed il sentimento interiore. Questa coscienza della propria infelicità era profonda e sempre viva nell'anima del nostro Leopardi, e costituiva la nota dominante della sua vita: ma egli seppe improntare la sua interiore tristezza in versi immortali, ed un qualche conforto alla sua mestizia ha dovuto venirgli dall'arte dei carmi, se gli è vero, che, come disse il poeta, *Cantando, il duol si disacerba*, nè la natura gli fu affatto matrigna, dacchè gli ha largito il genio dell'ispirazione poetica.

Attinenze tra le varie specie di coscienza.

Chiamate fin qui a rassegna le precipue specie della coscienza personale, giova divisare le intime attinenze, che le collegano (1).

Raffrontando fra di loro la coscienza individuale e la sociale, si scorge che questa ha in quella il suo principio originario, le sorti della sua esistenza, la ragione de' suoi cangiamenti. Poichè la coscienza sociale sorge e si forma dalle coscienze singolari proprie di quelle persone individue, che si stringono insieme in una comunanza di intendimenti e di voleri e cospirano insieme scientemente e liberamente al medesimo fine: essa si scompone e si dissolve alloraquando gli animi si dividono in parti contrarie e le coscienze individuali sussistono bensì, ma s'incamminano per altre vie, come avviene nei periodi delle rivolture politiche e civili: talvolta basta una sola coscienza individuale a distruggere e rifare dall'intimo fondo tutta una intiera coscienza sociale: tale è la missione dell'uomo grande, provvidenziale, di una potente individualità umana, che muta faccia ad una intiera nazione sollevandola alla coscienza di un nuovo ideale.

Intimissime e meritevoli di seria considerazione sono le attinenze, che corrono tra la coscienza morale e la religiosa. Esiste una legge morale (e la coscienza ce lo rivela), la quale imperiosamente ci obbliga di conformare la nostra libera volontà ai dettami del giusto e dell'onesto. Quest'obbligo costituisce il dovere, ed il dovere, sebbene sia un atto libero, non è mai inutilmente adempiuto, nè impunemente violato, ma si risolve in un verdetto di approvazione o di condanna, di lode o di biasimo. Or bene questa legge morale donde ci viene essa mai? Questo dovere chi ce lo impone? Io sento che essa sovrasta a tutta quanta l'umanità, perchè a tutti imperiosamente s'impone, e chiunque la calpesta, perde la dignità umana e si degrada. Se fosse una arbitraria creazione dell'uomo, l'uomo stesso potrebbe impunemente distruggerla, mentre essa rimane indestruttibile. L'uomo è un essere personale finito; dunque soltanto da un essere personale infinito può venire moralmente ed autorevolmente obbligato: val quanto dire che la legge morale ha il suo fondamento in Dio.

(1) Nel mio opuscolo: *Sulla personalità umana,* ho discorso di proposito della coscienza personale considerata nel suo concetto, nelle sue specie, nelle sue affermazioni.

In conclusione la coscienza morale ha il suo supremo principio e la sua ragione d'essere nella coscienza religiosa. Una morale senza Dio torna ad un medesimo che ad un circolo senza centro.

La coscienza morale non solo sta collegata colla religiosa, ma altresì colla eudemonologica. Basta por mente all'oggetto dell'una e dell'altra per rilevarne la stretta colleganza. La prima ha per termine la virtù, la seconda la felicità. Ora virtù e felicità son due termini essenzialmente distinti, ma ad un tempo correlativi ed inseparabili. Infatti la virtù sta nell'operar bene, la felicità nello star bene: quella importa un'attività dell'anima, questa una passività, la virtù si pratica, la felicità si sente, si prova. Sono adunque essenzialmente distinti. Però l'una è causa, l'altra effetto, epperò sono necessariamente inseparabili. Poichè chi opera bene, si trova bene, perchè operare onestamente e rettamente val quanto conformare le nostre libere azioni all'ordine natural delle cose, e l'ordine mena al buon essere, mentre il disordine conduce a perdimento e rovina. Ed ecco come alla coscienza morale, che ci avverte del nostro onesto o disonesto operare, tiene dietro come indivisibile compagna la coscienza eudemonologica, la quale ci fa sentire la pace interna od il pungolo del rimorso.

La vita propria, intima, individuale e la vita comune, esterna, sociale.

Tutti gli esseri finiti vivono di una vita propria e di una vita comune; ma l'uomo, che in virtù della personalità sua sovrasta a tutti i viventi irragionevoli dell'universo, possiede in sommo grado questa duplicità di vita. La coscienza di sè ed il dominio di sè, che gli provengono dalla intelligenza e dalla libera volontà proprie della sua persona, costituiscono la vita intima ed individua tutta sua, ponendolo in rapporto con sè medesimo: egli vive con sè ed in sè, perchè è conscio ed arbitro di sè medesimo. Esercitando l'intelligenza e la libertà sua, egli si forma dentro di sè un mondo di sentimenti, di affetti, di pensieri, di desiderii, che è tutto suo: quivi egli vive con sè e di sè: in questo suo mondo interiore nessun occhio umano vi penetra tranne l'occhio onniveggente di Dio. Le potenze, che io posseggo per natura, sono mia proprietà, e nessuno ha facoltà

di offenderle: gli atti, che io compio, sono miei e sono l'espressione della mia energia: come intelligente ho diritto alla verità, come libero ho diritto alla virtù, come sensitivo ho diritto alla felicità, e questi diritti miei sono sacri, sono inviolabili, e nessuno al mondo ha facoltà di calpestarli. Ecco la vita propria, intima, individua dell'io umano. Di qui traggono la loro prima origine ed attingono il loro vero significato le notissime e comunissime espressioni *il mio* ed *il tuo*. L'io umano, in virtù della personalità sua, può dire a sè medesimo: io ho assoluto diritto di proprietà sulla mia persona, essa appartiene a me, e non a nessun altro; essa è veramente *mia*, come sono *miei* i diritti, che le sono inerenti per natura. Questa notissima ed incontrastabile verità del *mio* e del *tuo* vale essa sola la più semplice e la più rigorosa confutazione del positivismo, il quale negando la individualità personale dell'io umano, viene a sentenziare, che i fenomeni, i quali si svolgono dentro di noi, non appartengono a verun individuo, a verun soggetto, sono *di nessuno*.

La nostra vita interiore non si svolge nel vuoto, chiusa ad ogni contatto con gli altri esseri. Nel punto stesso, che stiam raccolti nell'intimità della nostra vita, la mente, il cuore, la volontà ci portano verso il mondo esterno e se lo rappresentano idealmente. Noi viviamo in seno alla natura fisica circostante, ne accogliamo le impressioni, esercitiamo la nostra attività sulla materia trasformandola col mezzo dell'arte; viviamo in seno alla società, scambiando coi nostri simili le nostre idee, i sentimenti, cooperando tutti insieme al culto della scienza, dell'arte, della morale.

Così queste due vite sono ordinate a procedere concordi e sorreggersi a vicenda, giacchè la solitudine, se protratta fuor di misura, inaridisce le sorgenti dell'attività interiore, mentre la dissipazione esteriore ci toglie quella coscienza delle nostre forze e del nostro volere, su cui posa la fermezza del carattere. Giova ritemprare le nostre facoltà individuali al contatto della convivenza sociale in quella guisa che dopo una libera passeggiata all'aperta campagna si rincasa e ci sentiamo rifluire più vivo il sangue nelle vene, ma è pur necessario che noi conserviamo in mezzo ai nostri simili la personalità nostra propria.

Evvi un sistema, che spoglia l'io umano della vita intima sua propria assorbendolo nel gran mondo sociale; esso è il socia-

lismo assoluto. Se stesse questo sistema, la società più non sarebbe convivenza di esseri intelligenti e liberi, ma sarebbe ridotta ad una mandra di schiavi, ad una caterva di automi. Contro questa dottrina protesta la natura stessa dell'uomo, il quale essendo persona proclama come cosa sacra la individualità sua ordinata ad immortali destini, appartiene a sè stesso prima che al corpo sociale, possiede diritti inviolabili, per cui non può essere mancipio di nessuno.

Al socialismo assoluto sta diametralmente opposto l'individualismo assoluto, ossia l'egoismo nel più detestabile senso della parola. Poichè se l'uno è l'esaltazione della società e della vita pubblica sulle rovine dell'individuo e della vita privata, l'altro è l'esaltazione dell'individuo sulle rovine della società. L'egoismo è l'io umano, che non riconosce altra personalità che la sua; che non vede negli individui suoi simili se non altrettanti strumenti de' suoi sconfinati voleri, che tratta il mondo intiero come un terreno di conquista (1). Ma anche questa dottrina non è meno detestabile ed insussistente della sua opposta. Poichè se gli è vero che l'io umano ha diritto di essere riconosciuto nell'alta dignità del suo essere e rispettato come un soggetto intelligente e libero, perchè è persona, non è men vero che la sua personalità è finita, limitata, e però insufficiente a se medesima, bisognevole di essere sorretta da altre persone, tenuta a rispettare in tutti gli altri individui quella stessa personalità, di cui egli è fornito. Nessuno al mondo, per quantunque potente per elevatezza d'ingegno, per forza di volontà, per vigoria d'organismo, può dire *basto a me solo*, sdegnando il sostegno ed il conforto de' suoi fratelli. La natura ci ha posto la parola sul labbro, ci ha infuso il sentimento della simpatia e della benevolenza, ci ha data la coscienza della nostra limitazione, affinchè cercassimo nella convivenza coi nostri simili un rinforzo ed un necessario compimento alla nostra vita intima individuale, sorreggendoci a vicenda colla parola e coll'opera su per l'ardua ed infinita via della nostra perfezione finale.

(1) Tale è l'individualismo sfrenato, che G. G. Rousseau pose a fondamento del suo sistema pedagogico. Egli intendeva che Emilio crescesse indipendente e libero fuor d'ogni misura, sciolto da ogni vincolo sociale, da ogni dovere di obbedienza a qualunque autorità, come il selvaggio del deserto.

In conclusione, l'uomo è persona libera di sè, dunque non debb'essere un mero strumento sociale, epperò il socialismo è insostenibile. L'uomo è persona finita; dunque deve rispettare la libertà personale degli altri, epperò è insussistente l'individualismo assoluto. La vita propria, individuale e la vita comune, sociale debbon sussistere amendue, armonizzando insieme e sorreggendosi a vicenda.

Il trasformismo delle potenze (1).

Havvi una dottrina filosofica, la quale sostiene che l'uomo non porta con sè dalla nascita la potenza della razionalità distinta e superiore alla potenza dell'animalità, ma che nei primordii della sua esistenza egli non è altro che senso fisico e che dai sensi fisici esterni deriva tutto il sapere anche elevato che acquisterà da poi, tutte le potenze mentali degne dell'essere umano. Questa dottrina fu denominata sensismo, ed è una dottrina antichissima nella storia della filosofia, ma nel 1700 fu rinnovata da un celebre filosofo francese, il Condillac. Questo filosofo nel suo Trattato della sensazione sostenne e propugnò la trasformazione delle potenze e muovendo dalla infima delle potenze inferiori che è la facoltà della sensazione animale, la riguardò siccome la sola facoltà suprema, originaria e fondamentale, che per via di successive trasformazioni genera da un lato tutte le potenze intellettuali più elevate, dall'altro tutte le potenze affettive e morali. In sostanza questo sistema spogliato del suo paludamento filosofico e ridotto alla sua più semplice e cruda espressione viene a dir questo: l'uomo in origine non è che un bruto, il quale sente animalmente; poi esce dal suo stato brutale e diventa uomo fornito di razionalità e di libero volere. In verità che assistendo a questo stranissimo lavorio di trasformazione si prova un certo qual senso di disgusto e ci viene alla mente quella stupenda metamorfosi che si legge nel canto venticinquesimo dell'Inferno dantesco, là dove il poeta descrive due diverse nature, l'una in presenza dell'altra, cioè la natura di un serpe, che si trasforma in quella di un uomo, e la natura di un uomo, che si trasforma in quella di un serpe.

(1) Vedi il mio opuscolo: *Il sistema delle potenze umane.*

Non è qui luogo di esporre e di esaminare in tutti i suoi punti la dottrina di Condillac intorno la trasformazione delle potenze inferiori animali nelle superiori e razionali, e mi contenterò di due sole considerazioni. Le potenze animali o contengono in sè il germe della razionalità in cui si svolgeranno le potenze superiori, o no. Nel primo caso non sono più potenze essenzialmente ed esclusivamente animali; nel secondo caso, la trasformazione è impossibile, e le potenze razionali spunterebbero dal nulla. Un'altra considerazione si aggiunge: le potenze animali, allorchè si trasformarono nelle razionali, non dovrebbero più esistere, come più non esiste il granellino di frumento dopochè si è trasformato in spiga. Invece nell'uomo anche giunto al più alto grado di sviluppo razionale e morale le potenze animali continuano a svolgersi ed operare accanto alle mentali.

La credenza e la ragione (1).

Credere, pigliando questo vocabolo in senso generalissimo, vale quanto tenere per certo e per sicuro, dare il fermo ed incrollabile consenso della mente ad una verità o perchè evidente, o perchè rigorosamente dimostrata e posta fuori d'ogni dubbio. Sotto questo riguardo la credenza non differisce essenzialmente dalla ragione, perchè quel che si crede, è perfettamente compreso. Ma in senso stretto e come un atto distinto dalla ragione, il credere sta nell'ammettere come vera una proposizione senza comprenderne l'intrinseca ragione, appoggiati all'autorevole parola altrui, mentre la ragione sta nel comprendere il perchè la cosa è così, ossia nel conoscere l'intima natura delle cose.

Fin qui siamo nel campo delle verità puramente naturali, le quali non sono comprese soltanto da alcune menti, ma appartengono alla cerchia della ragione umana. Ma la facoltà della credenza si spinge più in là ed abbraccia anche quelle verità, che trascendono l'apprensiva della mente umana, e costituiscono i dogmi ed i misteri di una religione positiva rivelata. La ragione ha certamente il diritto di respingere l'assurdo, perchè l'assurdo ripugna, ma non ha diritto di respingere il mistero, perchè il mistero è una proposizione, di cui si conoscono i singoli termini, che la compongono e non si comprende bene il nesso,

(1) Vedi il nostro opuscolo: *Correlazione delle potenze umane.*

che collega il soggetto col predicato. Quindi possiamo affermare che in ogni mistero dogmatico vi è sempre alcunchè di conosciuto accessibile alla ragione, come in fondo di ogni verità conosciuta dalla ragione umana vi è sempre alcunchè di ignoto, di tenebroso, un'ombra di mistero.

Se la credenza ha i suoi misteri, anche la ragione ha i suoi, e tutto l'immenso campo delle sue indagini scientifiche presenta i suoi punti ignoti ed incomprensibili. La geometria, che pure si proclama la scienza più rigorosa, più esatta ed evidente, si fonda sul concetto dello spazio puro e del punto matematico, eppure questo concetto è tuttora oggetto delle più profonde controversie, come si questiona in matematica intorno le quantità evanescenti, in fisica intorno la divisibilità della materia all'infinito ed intorno la natura dell'atomo, che è il punto iniziale della materia.

La psicologia, più che ogni altra scienza, ha i suoi misteri profondi, indecifrabili. Se noi discendiamo nei penetrali della nostra vita intima, si rimane colpiti dalle arcane ed inesplicabili peripezie e metamorfosi, che si presentano alla nostra osservazione. Un giovane pensatore consacra tutto il suo potente ingegno al culto della scienza, scruta i più ardui problemi, avanza baldo e fidente nella via del sapere e s'immagina di avere raggiunto il sommo della sapienza. Ma che? Nuove ed imprevedute difficoltà si affacciano al suo pensiero, il dubbio viene a scuotere il suo sapere, e piomba nello scetticismo. Egli, che si credeva di riposare nel sicuro e compiuto possesso della verità, non crede più a nulla. Come si spiega tanta apostasia di pensiero? Un'anima gentile concepisce un affetto; e quest'affetto, che in origine era una semplice simpatia, si accende sempre più, la domina tutta quanta e si trasforma in una passione indomabile, strapotente. Ma che? Poco dopo la passione si dissipa, succede la calma, poi l'indifferenza, l'apatia, infine l'obblio. Chi sa spiegare tal mutamento del cuore che rompe il proprio idolo? Un'anima pia si consacra alla vita mistica e dopo inauditi sacrifici si eleva ad un altissimo grado di santità; ma viene un momento, in cui la infelice precipita dal suo cielo sublime, e giace vittima della corruzione. Donde mai la ragione di tale caduta? Ecco altrettanti misteri della scienza psicologica.

L'espugnazione di Monselice (1338).

Nota di ROBERTO CESSI.

Il documento, che ora pubblichiamo, si conserva inedito in un poco noto codice della biblioteca del Museo Civico di Padova: ho detto poco noto, ma in realtà è affatto sconosciuto, perchè di esso non approfittò affatto il Gloria, che non lo cita mai, e neppur più recentemente M. Roberti (1), alle cui diligenti ricerche, non so come, sfuggì. È intitolato: *Liber reformationum Notariorum Padue*, ed è formato di frammenti legati insieme da qualche appassionato raccoglitore di cose antiche (2).

---

(1) Il Roberti, che illustrò tanto diligentemente le corporazioni padovane d'arti e mestieri (in " Memorie del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti ", vol. 26), nell'accurata bibliografia delle fonti per la storia delle singole corporazioni, che chiude il lavoro, non registra il codice in parola fra quelle dei notai.

(2) Il ms., segn. B. P. 825, del sec. XIV, originale, di scrittura varia, legato in cuoio, 34 × 25, di c. 105 in pergamena numerate da mano moderna ed una non numerata. Le prime 16 carte sono alquanto guaste, alcune delle quali affatto illeggibili. Il volume è formato di quaderni provenienti da ms. sincroni diversi, come apparisce da una vecchia numerazione a piè di pagina a sinistra e dalla saltuarietà degli anni e dalle interruzioni degli atti. Ciascun quaderno comincia: *Liber Reformationum fratalee notariorum Padue factarum in gastaldia providorum virorum* ecc...... Due fascicoli (c. 25 e 38) invece cominciano: *Liber omnium reformacionum et provisionum fratalee notariorum et unionis fratalearum populi paduani scriptorum per me* ecc. Gli atti cominciano col 31 agosto 1334 e terminano col 1357, 11 febbr.: segue poi un istrumento di livelli di beni dell' arte del 25 febbraio dello stesso anno: nel verso della carta non numerata è trascritto un istrumento del 10 giugno 1357. Il codice non contiene soltanto le deliberazioni del collegio dei Notai, ma intercalati anche altri istrumenti, per es. di sicurtà, di livelli di beni dell'arte; a c. 81, v. 82 *r* si trova l'istrumento di privazione del diritto di esercitare l'arte notarile per Francesco Martello, essendosi dato ad una vita troppo libera e però indegno di esercitar l'arte. Fino alla c. 57 *v* si incontrano riassunti marginali degli atti scritti da mano moderna. Il documento da noi pubblicato è a c. 24.

Fra uno di questi si trova anche il nostro, che per la scarsezza dei documenti pubblici di questa età, è davvero prezioso, e perciò crediamo degno d'esser fatto noto.

Si riferisce alla espugnazione di Monselice del 1338 per opera di Ubertino da Carrara: in questa occasione grandi feste si fecero in Padova e l'unione delle arti deliberava di trasmettere al podestà uno statuto, da essa formulato, per essere inserito nel codice delle leggi del Comune, col quale si stabiliva di celebrare ogni anno la memorabile data nel giorno di S. Ludovico con una solenne processione a cui dovea partecipare tutto il clero e tutti i laici (1).

Questo il fatto, che il documento ci ricorda, ma il suo valore non si ferma lì; esso ci dice molto di più, quando si abbiano presenti i fatti storici di quell'avventurosa epoca (2).

Il 21 dicembre 1317 improvvisamente Cangrande, dopo aver rimproverato il governo veneto di non aver tutelato i suoi interessi sanciti dalla pace del 1314 (3), di cui Venezia si era resa mallevadrice, e violati recentemente dai Padovani col tentativo su Vicenza, occupa il castello di Monselice, che per la sua posizione era il punto strategico più importante del Padovano, dal quale era dominato tutto quel territorio, non solo, ma era un centro commerciale di transito di primo ordine (4).

---

(1) Abbiamo cercato inutilmente lo statuto nel *Codice Carrarese* (Bibl. Mus. Civ., ms. seg. B. P., 1237), che fu redatto nel 1362 [cfr. Botteghi L. A., *Gli Statuti di Padova*, estr. da " Mem. dell'Acc. di Scienze, Lettere ed Arti „ in Padova, vol. XXI, fasc. II, pag. 9, sgg.]. Eppure la festa fu celebrata regolarmente, almeno fino al 1355, come appare dalle reformagioni della fraglia dei Notai (ms. cit., c. 31): forse col tempo la solennità andò in disuso, tanto che nella nuova redazione del codice fu trascurata.

(2) Per la storia di questo periodo si vegga: Cipolla, *Storia delle Signorie italiane dal 1313 al 1530*, Milano, Vallardi, 1881, pp. 30 sgg. e pp. 65 sgg.; dello stesso, *Compendio della storia politica di Verona*, Verona, Cabianca, 1900, pag. 219 sgg.; Verci, *Storia della Marca Trivigiana*, Venezia, Storti, 1786, tomi V, VI, IX, X, XI; Cittadella, *Storia della dominazione Carrarese in Padova*, Padova, 1842, vol. I, pp. 59 sgg.; Spangerberg H., *Cangrande I della Scala*, Berlino, 1895, vol. I, pp. 36 fine e tutto il vol. II; Gloria, *Monumenti dell'Università*, Padova, 1888, V, I, pp. 1 sgg.

(3) Predelli R., *Regesti dei libri commemoriali della Repubblica veneta*, in " Monum. della R. Deput. Veneta di Storia Patria „, t. I, l. II, n. 70, p. 185.

(4) A. Mussato, *Sette libri inediti del " de gestis Italicorum post Henricum VII „*: prima edizione diplomatica a cura di L. Padrin, in " Monum.

L'occupazione improvvisa avea sgomentato non solo Padova, la quale si trovava ormai alla mercè dello Scaligero, ma anche Treviso e Venezia, che cercarono di affrettare una nuova pace fra Padova e Cangrande. Il trattato veniva stipulato il 12 febbraio 1318, riconoscendo a Cangrande il possesso delle terre conquistate (1). Tuttavia se esaminiamo attentamente gli articoli del trattato, che fuor d'ogni dubbio segna il principio della dominazione scaligera nel padovano, noi troviamo già in essi il primo elemento della dissoluzione della grandezza scaligera: questa ha in sè il vizio d'origine, di non poter cioè armonizzarsi coi bisogni *nazionali* dell'economia delle terre acquistate. Tanto più poi pel territorio padovano: poichè se c'è qui un movimento commerciale, questo si estende non già verso Verona, ma verso Venezia; se c'è nel governo padovano un qualsiasi indirizzo di politica commerciale, questo è strettamente connesso alla veneziana (2). Si vegga infatti qual serie di esenzioni è costretto concedere Cangrande per mantenere i nuovi possessi. Egli deve tener libere ed aperte le vie specialmente dalla parte di Monselice, Este, Montagnana, Castelbaldo *cum turri ultra Athesim*; agli antichi possessori doveano esser restituiti i beni tolti durante la guerra; dovea essere assicurata la libera esportazione e transito ai possessori abitanti in Padova dei frutti e delle mercanzie dai suddetti territorî verso Padova e qualunque altro luogo, senza alcun aggravio o dazio di sorta; sì ad essi come ai mercanti, anzi specialmente a questi *(specialiter mercatores)*, dovea esser concesso di trasportare le loro mercanzie senza alcun gravame, angaria e parangaria per i detti luoghi e per terra e per acqua verso Padova *vel eciam extra Padue districtum et de extra*

---

della R. Deput. „ già cit., s. III, Cronache e diarii, vol. III, l. IX, § VI, p. 23. Cfr. anche in Muratori, *R. I. S.*, t. X, col. 681 sgg. e Padrin L., *Il principato di Jacopo da Carrara*, Padova, 1891, pag. 12 [Cfr. *Rassegna padovana*, a. I, vol. I, pp. 119-22 e p. 150]. Per la storia di Monselice, cfr. Gloria A., *Il territorio padovano illustrato*, Padova, 1886, vol. III, pp. 126 sgg.

(1) Il testo è riportato integralmente dal Mussato, op. cit., l. X, § II, p. 32: *...pacta tenoris huinisne* (sic) *percussa sunt — quoque vulgo posteritati clarius illuceant eiusdem verbis scriptisque quibus utrinque dicta conscriptaque fuerunt, ea huic contextui inseri visum est.*

(2) Veggasi in proposito B. Cessi, *Venezia, Padova e il Polesine di Rovigo*, Città di Castello, 1904, cap. I, pp. 13-35.

paduanum districtum simili modo conducere per loca Padue districtus ad civitatem Padue et alio quo voluerint sine dacio vel tholoneo vel gravamine come per il passato; i lavoratori dei beni degli abitanti di Padova non potevano neppur essi esser sottoposti a gravami di sorta.

È evidente qui il maneggio di Venezia per non danneggiare il suo commercio. Essa avea assunto la parte di imparziale mediatrice fra le parti contendenti, ma in realtà non nascondeva il suo favore per i Padovani (1), che essa con una serie di trattati avea a sè avvinti: e qui, tosto che se le offre il destro, aggiunge un'altra pietra all'edificio di preparazione, che lentamente compie in terraferma per conquistarla. Se ben si riguarda, chi avea vinto non era lo Scaligero e anche quando egli avrà raggiunto la sua meta di occupare Padova, si troverà di fronte al maggior ostacolo, di dover cioè reggere le sorti di un territorio che ha interessi opposti ai suoi. Infatti dopo un decennio di lotta accanita (1318-1328) Cangrande *cum solemnissima pompa ingentique applausu* (2) riusciva bensì ad entrare in Padova, la quale dilaniata dalle fazioni interne avea trascorso un periodo di vera anarchia e di confusionismo politico. Tuttavia anche in questa occasione sente la necessità di non smentire la politica precedente di conquista, di non turbare cioè gli interessi della città, nè più aggravarla con contribuzioni quale città soggetta (3); non solo, ma neppur turbare la politica interna di Padova. Poichè se l'agitazione e la disarmonia delle fazioni aveano fino allora impedito che in città si insediasse uno stabile reggimento cittadino, tuttavia i Carraresi parevano i soli predestinati a diventarne signori; la loro ambigua ma pur astuta politica di destreggiamenti e d'equilibrio fra i varî partiti pareva destinata a trion-

(1) Veggasi il Mussato, op. cit., l. IX, § V, pag. 23, a proposito del contegno di Venezia nella questione fra Padova e Cangrande pel caso di Vicenza.

(2) Vergerio P. P., *Vitae principum Carrariensium*, in Muratori, op. cit., t. XVI, col. 147; cfr. Cortusiorum, *Historiae*, ivi, t. XII, col. 846; le *Notae Veronenses* edite dal Cipolla nelle *Antiche Cronache Veronesi*, t. I, pag. 471 registrano: *...intravit cum gente sua honorifice et cum magno gaudio.*

(3) Cortusiorum, op. cit., l. IV, cap. III e IV, col. 847; Vergerio, op. cit., col. 149. Più tardi invece cominciano gli aggravi, cfr. Verci, *Storia della Marca Trivigiana*, Venezia, 1786, t. X, p. 145; doc. 1189, a. 1331, 20 sett.; pag. 162, doc. 1194, a. 1332, 23 luglio.

fare: forse, se agli avvenimenti interni non si fosse intrecciata la guerra esterna, avrebbero a non lunga scadenza potuto dominare la situazione, che in quelle condizioni però Marsilio non vedeva troppo chiara nè a lui favorevole. E Cangrande con intuito fine avea compreso in qual modo dovesse per allora risolversi: entrato nel palazzo del pretorio, quando *per antianorum indicem vexillum populi ei est oblatum*, tosto lo restituì a Marsilio da Carrara e nominò costui vicario di Padova; *unde*, soggiunge il Vergerio, *civitatem atque universum populum ingens laetitia complevit quandoquidem adhuc species quaedam principatus apud suos remanebat* (1). L'affermazione in questo senso è grave, perchè se le tristi condizioni interne aveano costretto il popolo, per amor di pace, ad accettare il dominio straniero, che sotto il reggimento di Cangrande era stato *iugum mitissimum* (2), quando il governo fosse stato riordinato e per opera sua le popolazioni fossero state sollevate dal presente estenuamento, chi avrebbe garantito ulterior vita al reggimento straniero, che per primo, per necessità di cose, favoriva l'incremento di quella casa, anzi di quell'uomo, che incapace di dominare la crisi presente, risoluta questa, non avrebbe mancato di far valere la sua autorità? Non basta, ma, come abbiamo più sopra osservato, era necessario anche non inasprire la inevitabile preponderanza, che Venezia col suo commercio erasi assicurata nel territorio Padovano, e finchè visse Cangrande fu possibile trovare una formula d'accordo nella conservazione dello *statu quo ante* (3).

---

(1) Vergerio, op. cit., col. 146; Cortusiorum, op. cit., l. c.

(2) Marçagaie, *De modernis gestis*, nelle *Cronache antiche veronesi* già cit., t. I, p. 357. Il Marzagaia ha parole di viva lode per Cangrande, che avea condotto a tanta grandezza la casa Scaligera ed altrettanto fieramente biasima la condotta dei successori, che non aveano saputo mantenere il dominio acquistato; ma in ciò la critica del cronista è molto lieve, perchè non tiene conto delle condizioni speciali del dominio scaligero.

(3) Veggasi un esempio nella libertà ed immunità concessa ai mercati ed alle fiere nel Padovano. Cipolla C., *Degli atti diplomatici riguardanti il dominio di Cangrande in Padova*, Estr. dagli " Atti della R. Accademia dei Lincei ", X, 7, p. 4. Per la storia del governo Scaligero in Padova riuscirà molto utile la pubblicazione della legislazione statutaria dal 1328 al 1337, che sarà fatta prossimamente dal Dr. Benvenuto Cessi negli " Atti dell'Accademia Veneto-Trentina ". Cfr. anche Verci, op. cit., t. X, doc. 1117 e 1118, pp. 60 sgg.; doc. 1121, pp. 70 sgg.; doc. 1125, p. 76 e doc. 1139, p. 80. Una

Ma quando i successori di lui vogliono risolutamente seguire una politica da conquistatori, quando tentano sostituire alla autonomia locale delle regioni conquistate l'assolutismo signorile, che contrasta cogli interessi locali dei domini occupati, ecco sorgere un movimento di reazione e formarsi una forte coalizione *ad destructionem* degli Scaligeri, nella quale i vari potentati, Venezia, Firenze ed il Carrarese, provvedevano ciascuno ai propri interessi (1).

Il governo di Padova entrava in tal modo nella sua fase risolutiva: il dominio straniero, che aveva fin dai primi momenti mostrata la precarietà della sua posizione, compiuta la sua funzione ristoratrice di preparazione ad un governo cittadino, cadeva miseramente respinto da tutto il popolo. La gelosia degli Scaligeri contro la potenza di Marsilio era pienamente fondata, quanto però illogica, perchè dessa era il prodotto della vita cittadina e già la figura di Marsilio si alzava al di sopra dei partiti siccome legittimo e naturale rappresentante del Comune di fronte al diritto dello straniero.

Ecco or dunque spuntare la signoria medioevale, pienamente organizzata, la signoria che ha le sue radici nella vita sociale locale e non cresce quale pianta esogena in un terreno

---

conferma si ha anche nella concessione della cittadinanza veneta interna ed esterna a Cangrande, il quale fa pratiche e presta giuramento per usufruirne. Arch. di Stato in Venezia, *Libri commemoriali*, l. III, c. 41 sgg., cfr. il regesto in Predelli, op. cit., t. II, l. III, n. 158.

(1) Vergerio, op. cit., col. 154; Cortusiorum, op. cit., col. 881 sgg. Il testo del trattato della lega poi lo dimostra chiaramente. Cfr. Lazzarini V., *Storia di un trattato tra Venezia, Firenze ed i Carraresi (1337-1399)*, Estr. dal " Nuovo Archivio Veneto ", t. XVIII, pp. 42. La causa occasionale della guerra era stata offerta a Venezia dagli Scaligeri colla costruzione del Castello delle Saline poco lungi da Chioggia, *quasi imminentem Venetorum finibus speculum* [Vergerio, col. 153], per procurarsi il sale senza l'intervento di Venezia, alle cui pretese avea fino allora dovuto sottomettersi per esserne provveduto. Cfr. Verci, op. cit., vol. X, doc. 1162, a. 1330, 8 sett., pag. 122. Ma questa non era che la causa occasionale, anzi una delle tante, che rivelano una politica commerciale ostile a Venezia. Si noti poi l'importanza che avea per Venezia il monopolio del sale; questo serviva di arma contro lo scaligero per impedire l'aumento dei dazi di transito per le altre merci, che già erano stati inaspriti. Cfr. Lazzarini, op. cit., doc. I, d. 36, n. 11.

nuovo, ma ha propriamente il carattere *nazionale* sia formalmente che sostanzialmente (1): ed il popolo la saluta esultante (2). I cronisti han raccolto questo tripudio, l'han trasfuso nel loro animo, l'hanno assimilato e non mancano di ricordarcelo a gloria del signore, gli interessi del quale formano un tutto con quelli della città. Il primo periodo della storia Carrarese non era stato certo troppo felice, nè poteva ascrivere a sua gloria quello sconvolgimento interno più sopra ricordato. Eppure l'odio contro lo straniero era tanto da far dimenticare il triste ricordo di quegli anni e render più acuto il dolore dell'ultima tirannia, dei cui vantaggi però i cittadini ora sentivano l'effetto: leggendo oggi nelle pagine de' cronisti, i quali non pur scrivono per aver sentito raccontare o per aver trovato scritto da altri, bensì inspirati da quel fervido amor patrio, di cui erano stati partecipi nel turbinio degli ultimi avvenimenti, leggendo, dico, quella sincera espansione di orgoglio cittadino libero e cosciente della propria grandezza, par quasi di trovarsi davanti ad un popolo che d'un tratto si libera da un molesto incubo, che ne ha inquinato per tanti anni la vita. Non è più il *magnum gaudium* che avea accolto lo straniero, registrato con noncuranza dal cronista: la gran festa si celebra allora a Verona (3). Ora invece il cronista non è tanto parco dovendo registrare una gloria cittadina e si richiama al motto di Isaia: *Surge illuminare Hierusalem quia venit lumen tuum et gloriam domini super te orta est*, integrando il concetto con memorabili parole: *surrexisse de tenebris in lucem Paduam demonstravit*.

Furon veramente pronunciati i discorsi riportati dal Cortusi, ovvero usciron soltanto dalla penna del cronista? Noi non possiamo controllare la verità delle parole, ma del fatto sì. Anche se il deferente saluto degli ambasciatori alleati, anche se l'apologia della propria casa, tessuta da Marsilio rispondendo ad essi, anche se il ringraziamento del giudice degli anziani, il quale parla *ex parte populi* furon ben diversamente espressi, resta però

---

(1) Cfr. il recentissimo lavoro di G. Beda, *Ubertino da Carrara, signore di Padova*. Città di Castello, S. Lapi, 1906.

(2) Chi ne parla più diffusamente è il Cortusi, op. cit., l. VII, c. I sg., col. 831 sgg.

(3) Marçagaie, op. cit., p. 357 sg. *Notae Veronenses* cit., s. a., 1328, p. 471.

il fatto che tale convegno segnava tacitamente per mutuo accordo il principio di un'éra nuova di pace sicura e proficua, non solo, ma il popolo accettava entusiasta il patto stretto precedentemente con Firenze e Venezia da Marsilio, distruggendo le insegne scaligere, mentre dovunque rifulgevano insieme intrecciati il leone di S. Marco, il giglio fiorentino e lo stemma del Carrarese (1). Il Cortusi, come già notai, in mezzo al tripudio generale fa parlare il giudice degli anziani e gli fa pronunciare gravi parole, che segnan quasi l'atto di morte di quell'ordinamento popolare, che i cronisti pochi anni prima aveano celebrato. Dunque la società artigiana si era sfasciata? dunque cadeva miseramente quella unione corporativa che avea vinto tante battaglie?

Lungi dal credere che un istituto sociale della natura delle corporazioni artigiane potesse cristallizzarsi ed immobilizzarsi in una data formula politica, nè più oltre trasformarsi, tuttavia noi pensiamo che sia erroneo rappresentare quale un movimento a ritroso il sorgere della signoria (2). Pur senza entrare ora nell'esame dell'ardua questione, che ci porterebbe alla valuta-

(1) Biblioteca del Museo Civico di Padova, *Liber Reformationum fratalee notariorum*, già cit., c. 15 (30 settembre 1337): *...et eciam dicti gastaldiones fecerunt depingi in ecclesia palacii et portas palacii et in dicto palacio signa et armaturas comunium Veneciarum et Florenciorum et magnifici domini domini Marsilii de Cararia, secundum quod extitit reformatum et ordinatum.....* Questo documento conferma pienamente la notizia, che ci è data dal Cortusi (op. cit., l. VII, cap. III, col. 883.

(2) Tale idea accennata dal Roberti nel suo lavoro sulle *Corporazioni padovane* già cit. (pp. 59 sgg.), fu di nuovo ribadita e sviluppata da lui nel lavoro su *La corporazione dei giudici di palazzo e la sua lotta contro il comune popolare a Padova nel '300,* Estr. dal fasc. I dell' " Ateneo Veneto ", a. 1903. Lasciando pur da parte la molto ipotetica lotta, su cui ritorneremo altra volta, ci sembra ad ogni modo che la signoria non rappresenti, e qui ci limitiamo a Padova, un regresso delle istituzioni economiche del Comune, ma ne sia una successiva integrazione e naturale sviluppo: fuor di proposito dunque si parla di estenuamento di partiti, quali esponenti di due classi economiche lottanti fra loro, siccome base della signoria, ed in ciò forse più colse nel segno il Salzer (*Ueber die Anfänge der Signorie in Oberitalien*, Berlino, Ebering, 1900), sebbene non tutte le sue conclusioni siano accettabili: erronea a nostro avviso è poi la concezione dell'Arias (*Il sistema della costituzione economica e sociale italiana nell'età dei Comuni*, Torino, Roux e Viarengo, 1905, pag. 274 sg.), che anche qui, come altrove (cfr. in *La Critica* di B. Croce, a. IV, fasc. I, p. 33 e sg.), pecca di un soverchio schematismo.

zione di tutti gli elementi che entrano nella formazione del nuovo ordinamento, ci sembra di non errare affermando non esistere fra l'organizzazione corporativa e la signoria quella opposizione, che altri volle ravvisare, per la quale era necessario l'estenuamento della prima se l'altra dovea sorgere e dominare: il nostro documento è una buona prova; ma per una sua giusta interpretazione è necessario aggiungere qualche altra notizia.

Se i Carraresi aveano potuto ottenere facilmente per l'aiuto del popolo e per la difficoltà di difesa Padova e buona parte del territorio, lo stesso non poteva dirsi di quella fortezza, che per la sua posizione intralciava la marcia trionfale del vincitore, della quale, dice Jacopo Piacentino, *dubitabat vehementius* lo stesso Pietro de' Rossi, condottiero dell'esercito (1), Monselice, ove le milizie scaligere organizzavano l'estrema difesa. Marsilio sperava che all'apparire del suo esercito sotto le mura della città, i presidi scaligeri tosto capitolassero, pensandola ben diversamente dal suo compagno d'arme, inconscio anch'egli dell'importanza di quella posizione. Ma la prova lo dissuase e lo convinse esser necessario prender il castello per fame, se le milizie avessero avuto la costanza di sopportare per parecchio tempo le noie di un assedio. Intanto dopo il primo insuccesso affidava a Pietro de' Rossi il proseguimento dell'impresa ed egli se ne ritornava in città per dar miglior assetto alla cosa pubblica. Dopo poco moriva Pietro de' Rossi ed Ubertino da Carrara, il futuro principe, sottentrava a dirigere l'assedio; ma neppur egli con violenti attacchi riusciva ad impadronirsi della rocca ed abbattere l'ultimo vestigio di dominazione scaligera nel Padovano. Moriva anche Marsilio senza vedere l'opera compiuta: Ubertino, successogli nel principato, invano investiva più violentemente gli assediati e se non lo avesse soccorso la totale rovina della potenza scaligera, la stanchezza degli assediati, che resistevano invano sperando di veder giunger milizie di parte loro, e l'astuzia sua, non sarebbe riuscito ad aver in mano sua questo punto strategico, il cui possesso avea non piccolo valore politico.

La resa di Monselice, bruttata dalla perfidia del Carrarese, era l'ultimo passo verso la ricostituzione territoriale degli antichi

(1) Biblioteca Marciana in Venezia, codice Zanetti, latini CCCXCIV, membr. del sec. XIV, c. 13 *t*.

domini padovani sotto un nuovo governo: con essa Padova ed il suo distretto riprendevano il carattere di un libero Stato nazionale, con un assetto definitivo: l'ultimo atto politico ha dato unità allo Stato ed il popolo tutto ne è esultante. In questo istante la vecchia potenza popolare risorge per portare il proprio assenso all'opera del signore: l'Unione delle arti, che altri volle vedere già da tempo scomparsa, di nuovo raccoglie ora le sue forze ed anche se non ha più quella fierezza d'altri tempi e si rivolge al signore *humiliter*, *supliciter*, perchè *dignetur providere ac mandare cum effectu*, tuttavia apparisce siccome un istituto che ancora può esercitare qualche atto politico. In verità i tempi son mutati ed anche la funzione dell'istituto è mutata, riducendosi all'esercizio di quella funzione pel cui fine era sorto: poichè, giova notarlo, esso non era politico; se la politica entrò nel suo ambito, lo fu solo per poter esercitare pieno ed integro il suo ufficio, quando l'organizzazione del lavoro non avea avuto quelle garanzie, raggiunte le quali una funzione politica in un istituto, in cui non c'entrava, sarebbe stato un non-senso (1). Ecco perchè l'atto, che ora l'Unione compie, non può nè si deve considerare come una negazione della tradizione passata, anzi ne è l'integrazione, perchè è un esplicito riconoscimento dello sviluppo sociale, offrendoci una prova di più per dimostrare che fra la signoria e l'organizzazione accentrata nel massimo suo istituto non c'è opposizione, bensì pieno assentimento.

La solenne processione si trasforma dunque in una dimostrazione politica della più alta importanza; la resa di Monselice, dopo un ventennio di servitù straniera, chiude il breve periodo, ma laborioso, di preparazione del nuovo governo; lo Stato non s'era prima impersonificato in nessuna istituzione stabile e certa: l'organismo statale passa attraverso ad una serie di avvenimenti, che spostano troppo spesso l'equilibrio delle energie lottanti; si complica sotto l'influenza di opposte tendenze convergenti da territori stranieri, fino a che sotto il dominio di queste

(1) Accenniamo qui solo di sfuggita a tale questione, sulla quale ritorneremo in altro tempo discutendo l'argomento con quell'ampiezza che si richiede, poichè a questo proposito noi la pensiamo ben diversamente dal Roberti (op. cit., p. 54 sgg.): solo avanziamo questa conclusione, che non è affatto arbitraria, per meglio chiarire quanto diciamo.

si fissa in qualche cosa di stabile e concreto; il giorno di S. Ludovico, giorno in cui Monselice s'arrese, diventa la festa nazionale della città e della signoria, il cui governo di lì comincia indisturbato ed ormai ben organizzato e saldamente compaginato nella persona di un concittadino, che come tale rappresenta l'organismo nazionale di fronte alla dominazione straniera.

DOCUMENTO

In Christi nomine Amen. Anno eiusdem nativitatis millesimo tricentesimo trigesimo octavo, indictione sexta, die mercurei decimo nono mensis augusti Padue, in comuni palacio, in camara fratalee notariorum civitatis Padue, existentibus gastaldionibus dicte fratalee dominis Johanne de Rampis, Betino a Sancto Blaxio ****** domini Oliverii de Montesilice et Thomaxio Bardelino gastaldionibus fratalee notariorum et existente sindico dicte fratalee Andrea domini Pelegrini de Arena. Dicti gastaldiones una cum pluribus de melioribus dicte fratalee pro leticia recuperacionis terre Montissilicis providerunt secundum formam conscilii magistri Marchi Chalchaterre, qui consuluit quod eligantur duo sapientes pro quarterio, qui esse debeant cum domino Johanne a Sancta Cruce, qui providere debeant circha victoriam et pro victoria sive lèticia terre Montissilicis, qui dominus Iohannes a Sancta Cruce cum infrascriptis sapientibus electis providerunt una cum gastaldionibus predictis, quod unio fratalearum civitatis Padue congregetur et habeatur circha predicta cum sapientibus de suis frataleis eligendis per ipsos gastaldiones fratalearum et secundum voluntatem ipsorum procedatur et fiat.

Nomina sapientum sunt hec
Magister Marcus Chalchaterra
Dominus Abanellus de Abano
Dominus Michael de Maceria
Dominus Henrigetus de Ambroxino
Dominus Iohannes de Radicibus
Dominus Franciscus de Baçalariis.

Die veneris vigesimoprimo mensis augusti. Facta proposicione sive proposta per dominum Thomaxium Bardelinum gastaldionem fratalee notariorum civitatis Padue super suprascripto conscilio dicti domini Marchi et sapientum supradictorum in congregacione unionis fratalearum et gastaldionum dicte civitatis et sapientum ipsorum per dictos gastaldiones electos, qui fuerunt numero centum quinquaginta septem, placuit omnibus, exceptis quinquaginta duobus, quod supra predictis procedatur

et fiat secundum conscilium domini Aleardi de Baxiliis. ser Thomaxii Bardelini et magistri Alberti de Citadella, qui ser Thomaxius et magister Albertus fuerunt concordes cum dicto domino Aleardo, cuius conscilii dicti domini Aleardi inferius continetur.

Dominus Aleardus de Baxiliis pro se et sociis suis electus ad utilitatem consuluit, quod ex parte tocius unionis fratalearum populi Padue exponatur nostro domino, quod, si ei placebit, videntur conveniens eis, quod ex ipsius et dominorum potestatis ancianorum et gastaldionum tocius unionis requireretur et rogaretur dominus vicarius domini episcopi Padue et dominus archipresbiter ecclesie maioris civitatis Padue, quod sibi placeat congregari facere totum clerum civitatis Padue tam religiosorum quam non et ordinare, quam cicius fieri poterit, quod cum omni reverencia vadant in processione ab ecclesia maiore usque ad ecclesiam beati Prosdocimi, quae est in comuni palacio, et de inde ad eclesias beati Antonii confessoris et beati Lodoyci et sancte Iustine et redire ad dictam eclesiam maiorem et per dominos gastaldiones quindecim eligantur duodecim sapientes de frataleis, inter quos sit dominus Iohannes a Sancta Cruce, qui cum beneplacito et consensu domini providere et ordinare possint et debeant quidquid crediderint convenire esse faciendum pro tempore presente et pro futuris temporibus in honorem et reverenciam dei et beati Lodoyci et tocius curie celestis et in memoriam gaudii et exultacionis comunis Padue pro recuperatione terre Montissilicis et provisiones per eos habeant firmitatem et debeant, modis quibuscumque melius fieri poterit, executioni mandari quod dictum festum beati Lodoyci semper debeat celebrari in perpetuum omni anno in dicto die dicti festi et quod staciones debeant stare clause eo die.

Nomina sapientum sunt hec

d. Aleardus de Basiliis	m. Franciscus cerdo
d. Iohannes a Sancta Cruce	m. Laurencius Taupa
ser Paduanus negociator	m. Aldigerius aurifex
m. Albertus de Citadella	m. Çambonus casalinus
m. Nicolaus Marchese	ser Malatesta a Ferro
ser Paduanus de Villa	m. Chançi pinctor

m. Antonius coreçarius a Sancto Bartolameo.

Eodem die et loco et congregacione tocius unionis et gastaldionum fratalearum civitatis Padue more solito congregato reformatum fuit in conscilio tocius unionis fratalearum civitatis Padue, quod humiliter suplicetur nostro domino, quod dignetur providere ac mandare cum effectu, quod unum statutum fiat de novo et scribatur in volumine statutorum sub rubrica de feriis et festivitatibus celebrandis sub hac forma.

Potestate nobili viro domino Marino Faletro de Veneciis, Padue honorabili potestate millesimo tricentesimo trigesimo octavo, indictione sexta. Statuimus et ordinamus ad nostri domini Iesu Christi et beatissime sue matris Marie Virginis gloriose et beati confessoris Lodoyci archiepiscopi et omnium sanctorum curie celestis reverenciam et honorem, quod per dominum potestatem Padue, qui nunc est et qui pro tempore fuerit, simul cum omnibus suis iudicibus et militibus seu sociis et dominis ancianis et iudicibus atque officialibus omnibus de sua curia et domini gastaldiones et homines universi fratalearum civitatis Padue in octava beati Lodoyci pro anno presenti et de cetero annuatim in die sui festi solempniter celebrandi per clerum et populum Padue sicut festantur populi hora misse, in quibus festo et qua hora terra Montissilicis restituta et tradita fuit divina gratia nostro magnifico et potenti domino domino Ubertino de Chararia, commendabili capitaneo et domino generali civitatis et districtus Padue, et ipsi comuni Padue, que occupata fuerat longis temporibus per tiranicam pravitatem, ire debeant annuatim in reverenti processione ad ecclesiam beati Antonii confessoris et ibi offerre ad altare beati Lodoyci in ea constructum singulos convenientes doplerios vel cereos solvendos dominis potestate et predictis omnibus eum associare debentibus pro comune Padue et dominis gastaldionibus atque hominibus fratalearum per ipsos more processionis, que fieri convenit ad festum beati Antonii vel eius octave, ea condicione quod quilibet ire et solvere teneatur solum cum illa fratalea, cum qua solet ire ad faciendum ancianos et gastaldiones et sit precisum statuto aliquo non obstante.

Ego Iacobus quondam domini Çensari sacri palacii notarius, qui habito Padue in quarterio pontis Altinatis, centenario Arene et contracta sancti Bartolamei, existens notarius fratalee notoriorum et tocius capituli hec bona fide scripsi.

Toscano " áschero " ed affini.

Nota di ATTILIO LEVI.

FONTI E SIGLE

Lessici: italiano (Tommaseo-Bellini), sardo (Porru, Spano), bresciano (Melchiori, Rosa), parmigiano (Malaspina), bolognese (Coronedi-Berti), milanese (Cherubini), piemontese (Pipino, Zalli, Ponza, Sant'Albino, Gavuzzi), spagnuolo (Accademia), catalano (Labernia), portoghese (Marques), provenzale (Mistral), ant. francese (Godefroy).

Diez = *Etymologisches Wörterbuch der romanischen Sprachen.* IV Ausgabe, Bonn 1878 (La 5ª ed. del 1887 non mi fu accessibile: ma la numerazione delle pagine è la stessa).

Körting = *Lateinisch-romanisches Wörterbuch.* II Ausgabe, Paderborn 1901.

Meyer-Lübke, *R. S.* = *Grammatik der romanischen Sprachen.* Leipzig 1890-94.

Salvioni, *F. M.* = *Fonetica del dialetto moderno della città di Milano.* Torino 1884.

AG. = *Archivio glottologico italiano.*

I moderni sono quasi concordi nel reputare che appartengano alla stessa famiglia le voci seguenti: sen. pistoi. lucch. *áschero*, *áscaro, áscara* " desiderio pungente — voglia capricciosa — ribrezzo ", ant. sen. *scarezzo*, sen. fior. *scareggio* " schifo ", *scareggioso* " schifoso " — bologn. bresc. *ascher*, bresc. *ascara* " desiderio pungente (a Bol.) — spavento, ribrezzo (a Br.) ", parm. bresc. *ascher* " duro, difficile ", parm. regg. *ascra* " rincrescimento " — ant. lomb. *ascharo* " schifo ", *ascoroso, ascharoso* " schifoso ", *ascharezzo* " immondezza ", mil. *scarós* " schifiltoso " — piem. *scör* " schifo ", *scarós*, variante *scros* " schifoso ", monf. *scarere* " porcheria " — sard. mer. *ascu* " nausea ", mer. *ascosu* " nauseante ", mer. log. *ascherosu* " id. " — cat. sp. ptg. *asco* " nausea, schifo ", asp. *ascoroso, ascoso* " nauseante ", *ascosidad* " immondezza ", nsp. *asqueroso* " stomachevole ", *asquerosidad* " immondezza ", *asquear* " stomacare " — ant. fr. *askeror*, *ascor*,

ascre " ripugnanza ", *ascreus* " ripugnante ". Cfr. Diez 426. Caix, *Studi di etimologia italiana e romanza*, Firenze 1878, num. 166. Wiese, *Zeitschr. f. rom. Phil.*, XI, 554 sg. Körting, num. 385, 387. Meyer-Lübke, *RS.*, I. 32. Gaston Paris, *Romania*, XXXI, 355. Salvioni, *AG.* XII, 388 sg.

Nota. Il Caix, l. c., menziona ancora un sic. *ascu*, che è ignoto al Biundi e al Traina, e qui recapita sard. log. *áscamu* " nausea ", che mi sembra piuttosto posverbale di log. *ascamare* " nauseare ": e in questo (in attesa di spiegazion più sicura) vedrei un blat. **examare*, log. **isamare* (analogo ad it. *disamare*) foneticamente e semasiologicamente contaminato con srd. *ascu*, sp. *asquear*. — Il Wiese, l. c., adduce pure un umbr. picen. *asco*, che non m'è dato di riscontrare, e un bol. *scarore* " prudore ", il quale manca alla Coronedi-Berti, e che ad ogni modo non sembra spettare qui: ove realmente esistesse, vi si potrebbe scorgere un derivato di lat. *eschăra*, it. *éscara* " crosta ", se il carattere di voce dotta, che ha quest'ultima, non lasciasse dubbiosi sulla possibilità d'una derivazion popolare. — Con cat. *asco* il Guarnerio, *AG.* IX. 357, collega l'algh. *ascarugia*, singolare collettivo significante " i piccoli grappoli, che sogliono sfuggire a' vendemmiatori ": ma non mi riesce di afferrare il nesso logico fra i due concetti. Inoltre, dalla pronunzia d'una popolana algherese, che ebbi l'opportunità d'interrogare, m'è parso che la voce suoni *scarugia* come pure che *scarugiá* suoni il verbo affine, che significa " togliere i detti grappoli ". Per il che altra potrebbe esser l'origine. — Il Salvioni, *AG.* XII. 389 nota 1ª in calce, vuole dalla famiglia disgiungere piem. *scör* (mentre di questo ben vede il rapporto con fr. *écœurer*): e sembra inclini a scorgere il primitivo dell'intiero gruppo nell'agen. *ascha*. Ma codesta voce nel componimento poetico, in cui si riscontra, rima con *teriacha*: epperò (notava già il Flechia, *AG.* VIII. 327) è " d'incerta lezione e significato ". Nè, dato che qui pertenga, mi par escluso che possa essere riflesso genovese (forse inesattamente trascritto) dell'*ascharo* lombardo. — Il Malaspina non registra parm. *ascra*, sibbene *dascra*, ch'egli spiega " amara " illustrandola colla frase *saver dascra* " riuscir amara una cosa ": error manifesto, come dimostra l'identica locuzion reggiana *saver d'ascra* (cfr. P. Viani, *Dizionario di pretesi francesismi*, Firenze 1858, I. 141 sg.). — Il Meyer-Lübke, *RS.* II. 399, cita un afr. *ascrous*, che non potei rintracciare. — A piem. *scros* s'accompagnano *scrosás*, *scrosón*, *scroséri* " sudicione ", *scrosaría* " sudiciume ": e tutti quanti son disusati a' dì nostri, per quel che mi consta. Su esso *scros* poi (senza voler dare soverchio peso alla somiglianza sua con l'afr. *ascrous* testè ricordato) è da notarsi che difficilmente è semplice sincope di *scarós*, poichè *a* in tal condizione è ben resistente nel nostro dialetto.

***

Di queste voci, due, la toscana e la spagnuola, furono già variamente etimologizzate.

Tosc. *aschero*, vocabolo assai antico (è in S. Caterina da Siena), esercitò più volte (ma non felicemente, mi pare) l'acume de' men recenti nostri filologi. Da ἐσχαρόω " copro di croste „ lo desumeva il Gigli, *Vocabolario cateriniano*, s. v. [come da ἐσχάρα " crosta di piaga „ il Viani, *Pretesi francesismi*. I. 142, traeva sen. *scareggio*]: da ἀσκαρίς " verme intestinale „ il Muratori (cfr. Viani, *ibidem*). E il Tommaseo ne scriveva s. v.: " forse " suono imitativo, come *aspero* e simili; forse affine al senso di " *est* da *edo*, giacchè il dolore mangia il cuore „.

Quanto all'*asco* iberico, primo (ch'io sappia) il Covarruvias lo trasse da αἶσχος " vergogna „: cfr. il Diz. dell'Ac. sp., ed. 1ª, s. v., ove si preferisce veder nella voce una base onomatopeica, che riproduce il rumor di chi rece. Spiegazione, della quale non par meglio fondata quella del *Diccionario* stesso, ed. 13ª, s. v., secondo cui *asco* risale a lat. *vescus* " debole, sottile „. Ma al vecchio etimologo spagnuolo s'accostano i più, sebbene con lievi divergenze individuali. Per es. il Diez, l. c., ad αἶσχος sostituisce il sostantivo gotico *aiviski*, che ha uguale accezione: ma la cosa in fondo è la stessa, poichè αἶσχος ed *aiviski* sono una sola e medesima voce, almeno giusta il Fick, *Vergleich. Wörterbuch der idg. Sprachen*, 4ª ed., Göttingen 1894, vol. I, p. 345 sg. Dal canto suo il Caix, l. c., per *aschero* in quanto significa " ribrezzo, schifo „ s'attiene al Diez: ma in quanto significa " desiderio vivo „ lo trae (assenziente il Salvioni, *AG*. XIV. 205) da quella base germanica, da cui discende ad es. ingl. *to ask* " dimandare „. Infine il Wiese, l. c., ritorna senz'altro al greco, cioè ad αἶσχος e ad αἶσχρός (con accento ritratto).

Ora (per tacer dell'altre al tutto improbabili) le spiegazioni varie, che in sostanza fanno capo ad αἶσχος, non appagano, specialmente sotto il rispetto semasiologico, poichè troppo difficile ad ammettersi sembra il trapasso dal concetto di " vergogna „ a quello di " schifo „. Perciò presento un'ipotesi, che credo nuova, senza tuttavia dissimularmi che, poggiando essa in alcune sue parti su postulati, ad altro non può aspirare che ad offrire un qualche grado di verosimiglianza.

***

A parer mio, l'etimo comune è un derivato di *cor, cordis*, cioè un blat. **excorare*, la cui esistenza si può inferire da afr. *escœurer*, nfr. *écœurer*, e dal quale i parlanti estrassero un posverbale, che si ha in prov. *escor* " schifo „ e piem. *scör* " id. „.

Ma *scör* non è l'unica forma del vocabolo piemontese: ve n'è un'altra ignota a' lessici del dialetto, per dimostrar la quale debbo toccar brevemente d'un fenomeno generale, a cui si collega la variante pedemontana. E chiedo venia, se mi soffermerò su cose risapute: ma dovendo accennare ad una proprietà del mio dialetto, della quale ad altri (ch'io sappia) non occorse di trattare, mi sembra che mi incomba obbligo di mostrare come essa rientri nel sistema del fonetismo romanzo.

Com'è noto, già nel latino volgare (cfr. Stolz, *Lat. Gramm.*, III Auflage, München 1900, p. 53) dinanzi ad *s* + consonante si sviluppò (direi, ad analogia de' numerosi composti con *ex* ed *in*) un *e* (*i*), il quale, come semplice elemento eufonico, doveva essere privo d'individualità ed essere perciò esposto a' più svariati influssi fonetici e morfologici. Dipoi con codesto *e* inorganico si confuse l'*e* etimologico in simile od ugual condizione e ne assunse la natura: quindi sì l'uno che l'altro divennero suoni evanescenti, " entità irrazionali „ (come definiva l'*e* di *ex* l'Ascoli, *AG*. III. 446), e si ridussero a servire alle opportunità fonetiche. Così, là, dove (come in Francia, Provenza, Catalogna e per connessione nella restante Spagna) la frequenza dell'uscita consonantica rendeva opportuno l'inizio vocalico, l'uno e l'altro *e* rimasero (es. fr. *étendre*: *école*, sp. *esponer*: *estudio*), e non solo rimasero, ma si estesero fuori della lor propria sede (es. fr. *écouter*, sp. *escuchar, esconder, escuro*). Per contro là, dove (come in Italia) la frequenza dell'uscita vocalica rendeva tollerabile l'inizio policonsonantico, codesto *e* ridottosi ad *i* per attenuamento ed analogia (es. *ispingere, istrada*: *istoria*) rimase (nell'uso più corretto) dopo voce uscente in consonante, si dileguò dopo voce uscente in vocale.

Tale la condizione presente, quale negl'idiomi saliti a dignità ufficiale e letteraria fu creata dall'azione delle classi colte combinata colla tendenza regolarizzatrice del linguaggio. Ma accanto

a questa, che è la norma, v'è una divergenza, la quale meglio appalesa la natura irrazionale di codesto *e* iniziale, ed è quel suo passaggio in *a* così largamente attestato: agen. *aspose* (Flechia, *AG*. X. 146 sg.), ant. ast. *ansprità* " spiritato „, *astrassín* " strascico „ (Giacomino, *AG*. XV. 411 no. 1 in calce, 422), lomb. *aspert*-afr. *asté*; prov. *astimo*, *ascolo* (Meyer-Lübke, *RS*. I. 294) — asp. *ascribir*, nsp. *aspaviento*. Nel qual passaggio v'ha forse un fenomeno fonetico e morfologico ad un tempo, vale a dire fonetico, in quanto codesto *e* dotato per la natura sua di scarsa resistenza in taluni casi si pareggiò alla vocale seguente, altrove, cioè nelle parlate inclini alla protesi dell'*a*, seguì o soggiacque a tale tendenza; — morfologico, in quanto l'*a*, vivo come preposizione, bene spesso dovette avere il sopravvento sull'*e* venuto meno come voce indipendente.

Ora, nel caso presente il piemontese si comporta a un dipresso come il toscano, cioè di regola sopprime l'*e* iniziale dopo uscita vocalica, ma lo conserva dopo uscita consonantica. [Di regola, dico, perchè pur nelle condizioni suddette la soppressione può avverarsi per altre cause, cioè l'andatura rapida e concitata del discorso, l'accento della frase ecc.]. Soltanto (e qui per certo esercita la sua azione l'*a* protetico caro a' dialetti dell'Italia settentrionale: cfr. Ascoli, *AG*. VIII. 104, Salvioni, *AG*. IX. 205, Parodi, *AG*. XV. 2) il suono, con cui il piemontese riproduce quest'*e* iniziale, non è un *e* chiaro e netto, ma un fonema indistinto, che oscilla fra l'*e* e l'*a*, e tende più all'uno che all'altro a seconda delle regioni e delle classi sociali (per es., raffrontata ad altre terre piemontesi, Torino inclina notabilmente a' suoni chiusi e tenui, ma questa tendenza è meno spiccata negl'infimi strati della popolazione) e sovratutto, direi, a seconda de' suoni attigui (per es. l'*a* di preferenza apparisce, ove segua sillaba, che racchiuda vocale di timbro uguale o simile).

Ciò posto, il fatto, che con tutte le restrizioni suindicate, credo di poter affermare, benchè se ne cerchi invano la traccia ne' lessici, è questo: Nelle voci, che cominciano con *e* + *s* + cons., il piemontese non pratica costantemente l'aferesi; ma accanto alla forma aferetica (es. *sgiai* " ribrezzo „, *scopáss* " scappellotto „, *spos* " sposo „) esiste la forma piena con *e* (*a*), che si ha sempre quando preceda consonante (ad es., per citare il caso più frequente, allorchè a sostantivi siffatti venga preposto l'articolo

indeterminato, piem. *n* " uno „). Donde consegue che accanto a *scör* " schifo „ il piemontese possiede (come il provenzale) un *escör*, *ascör* o (come per maggiore perspicuità preferirei scrivere) *ascoeur*.

Ora in questo piem. *ascoeur* (che non contrassegno d'asterisco, perchè è forma reale ed esistente) io vedrei il capostipite di tutta la famiglia italo-spagnuola. E così traccerei la via da esso tenuta nelle sue migrazioni.

Piem. *ascoeur* passò dapprima in Lombardia: e qui i dati geografici concordano colla cronologia e colla fonetica. Infatti 1° la Lombardia è regione attigua al Piemonte; 2° in Lombardia sono attestate le più antiche voci, che mi sembrano qui pertinenti; 3° *ascoeur* sarebbe al tutto conforme al fonetismo lombardo (cfr. Salvioni, *FM.* 69 sg.): perciò, se, come credo, lo si riscontra colà modificato, dovrà dirsi non originario, ma mutuato e modificato nel trapasso dall'una all'altra regione. [Si potrà osservare che la voce è pure nel prov. *escor* summentovato: ma, ammesso il mutuo da parte della Lombardia, mi par più ovvio pensare al vicino Piemonte che non alla Provenza lontana].

Ora, il mutamento, che suppongo avvenuto nella migrazion della voce, è il ritrarsi dell'accento dal tema al prefisso: il quale spostamento (non infrequente, sovratutto nelle voci mutuate) potè avverarsi vuoi perchè il lombardo sia meno del piemontese incline all'ossitonía, vuoi perchè, l'*a* iniziale occultando l'etimo, i parlanti lombardi abbiano trasferito l'accento su quella, che lor pareva la base della parola. La quale, divenuta parossitona, doveva necessariamente perdere il dittongamento della vocal radicale: perciò piem. *ascoeur* si mutò in un alomb. **áscor*, di cui è, parmi, la traccia nell'*ascoroso*, che si ha in Bonvesin da Riva (cfr. Diez 426), e non è quindi falsa grafia, come vuole il Wiese, l. c., ma formazione regolare e legittima.

Qui è forse il punto debole della mia argomentazione: ma, se mi si concede la possibilità dell'alomb. **áscor* (il quale, come s'è visto, non è destituito di fondamento), la restante dimostrazione è agevole, poichè in tutte l'altre forme non si ha che la normale attuazione delle leggi fonetiche.

Come da mil. *legor* " lepre „ si ha *legher* (cfr. Salvioni *FM.* 137), così da **ascor* si ebbe *ascher*, che è a Brescia, Parma, Bologna e manca a Milano, ma vi dovette essere, poichè l'alomb.

ascharo (col derivato *ascharoso*, che si ha pure in Bonvesin da Riva, *Il libro delle tre scritture*, ed. De Bartholomeis, Roma 1901, p. 53, v. 754) lo presuppone e ne deriva, sì e come mil. *básgiar* " specie di bastone „ deriva da *básgier* (cfr. Salvioni, *FM.* 106). Da *ascharo* poi venne femm. *ascara* con mutamento di genere favorito forse dall'*a* iniziale, in questo senso che a' parlanti, qualora vi premettesser l'articolo (determinato od indeterminato), poteva parere che l'*a* iniziale appartenesse all'articolo anzichè al sostantivo e quindi che questo fosse di genere femminile. *Ascara* poscia si ridusse a parm. regg. *ascra*, com'era da aspettarsi ne' dialetti emiliani così inclini alla sincope.

In questa guisa la voce compì la serie delle sue trasformazioni nell'ambito delle parlate dell'Italia settentrionale, e di là si diffuse in varia direzione.

I. Così in piem. *scarós* (raffrontato a mil. *scarós*) e monf. *scarere* mi par che s'abbia l'antica voce piemontese tornata in patria ma con travestimento lombardo.

II. Similmente, al Settentrione nostro deve secondo ogni verosimiglianza la Toscana il suo *aschero (ascaro, ascara)*. Nel quale non è punto necessario (e in ciò m'accordo col Wiese, l. c., pur dissentendone quanto richiede la diversità della mossa iniziale) non è punto necessario, dico, di scorgere, come fa il Caix, l. c., due temi diversi, perchè ha i sensi diversi di " brama viva — capriccio — ribrezzo „. Si ha qui un procedimento semasiologico al tutto concepibile. Il senso fondamentale è quello di " schifo, avversione „. Ma le avversioni sono per lo più istintive e ben di rado hanno un fondamento di ragione: perciò i parlanti per un'associazione d'idee suggerita dall'esperienza naturalmente passarono dal concetto di " avversione „ a quello di " capriccio „. Il capriccio poi può esplicarsi in senso negativo quanto in senso positivo, cioè come ripugnanza non meno che come inclinazione: di qui il concetto di " brama viva, smania „.

Ed anche ant. sen. *scarezzo*, sen. fior. *scareggio* sembrano avere il loro esemplare in alomb. *aschareçço*. Tuttavia non crederei che per entrambi si possa pensare al mutuo immediato e diretto, sibbene che diverso sia il rapporto loro.

Infatti: l'italiano non possiede un suff. *-eggio* vero e proprio, e i numerosi sostantivi che paiono formati con questo elemento (quelli cioè, in cui tale uscita non appartiene parzialmente al

tema, come sarebbe ad es. *remeggio*), son tutti posverbali di verbi in *-eggiare* (es. *maneggio, saccheggio, motteggio*: cfr. Meyer-Lübke, *RS.* II. 447): nè pare che *scareggio* possa collocarsi altrove che in questa categoria. D'altra parte, *aschareçço* consuona e collima troppo esattamente con alomb. *bruteçço* " sudiciume " (*AG.* XII. 392) perchè sia facile ritenerlo formazione diversa. Ora *bruteçço* è posverbale di alomb. *bruteçar* " insudiciare ", in cui *-eçar* è riflesso di *-igiare*: cfr. alomb. *amoreçar* = it. *amoreggiare* e vedi Salvioni, *AG.* XIV. 243 sg. Pare adunque che concordemente sì l'antica voce lombarda come la fiorentino-senese traggano a postulare un nordico **ascharigiare*, che ancora in questa sua fase migrò in Toscana, e, mentre in patria dava normalmente un **aschareçar*, donde *aschareçço*, parallelamente e indipendentemente dava nella nuova sede uno **scareggiare*, donde *scareggio*.

Per contro esemplato direttamente su *aschareçço* sembra ant. sen. *scarezzo*, voce isolata (rispetto alla quale resta pure a vedersi se non sia semplicemente falsa grafia). Infatti, data l'ipotesi nostra, *scarezzo* non può riportarsi nè a *scareggio* nè ad altra sua forma anteriore, tanto più che dall'esito *-gi-* il senese non aborre anche in età ben antica (cfr. ant. sen. *canpegiare* " campeggiare ": Hirsch, *Zeitschr. f. rom. Phil.*, IX. 558).

III. Passando al gruppo iberico, asp. *ascoroso* (già disusato nel sec. XVIII: cfr. Diz. dell'Acc., ed. 1ª, s. v.) appare portato in Ispagna da' dominî lombardi, sia che lo si raffronti all'*ascoroso* di Bonvesin, sia che si consideri ch'esso è un derivato, di cui manca la base alla Spagna, mentre in *ascharo* l'ha la Lombardia. E di questa voce antica è, direi, mera variante fonetica nsp. *asqueroso*: cfr., quali esempî di trapasso analogo, sp. *hermoso*: lat. *formosus*, sp. *redondo*: lat. *rotundus*, e vedi Pidal, *Gram. hist. esp.*, Madrid 1904, p. 41. [Diversamente il Meyer-Lübke, *RS.* II. 399].

Quanto poi ad *asco* (che Spagna diede verosimilmente all'altre genti iberiche, e dal quale derivano *asquear, ascoso*), vi scorgerei semplicemente uno pseudo-primitivo, che i parlanti spagnuoli estrassero dal mutuato *ascoroso*, di cui non sentivano l'etimo ed ignoravan la base: vi scorgerei cioè una di quelle formazioni, che i Tedeschi dicono *Rückbildungen* (cfr. Meyer-Lübke, *RS.* II. 400 sg.) e che ad analogia de' posverbali (se mi fosse lecito di proporre un termine nuovo) chiamerei *posnominali*.

IV. Viceversa (come già videro il Porru e lo Spano) si possono senza esitanza dichiarar spagnolismi i sardi *ascu*, *ascosu*, *ascherosu*, se si ricorda quanta parte del lessico di quell'idioma sia desunta di Spagna.

V. Per ultimo, dato l'etimo qui proposto, afr. *ascre* altro non può essere che il riflesso di it. *aschero*: del quale paiono derivazioni galliche *askeror* e *ascreus*. Per contro *ascor* secondo ogni verosimiglianza rispecchia il prov. *escor*, giacchè la mancanza del dittongo nella vocale del tema rende improbabile (se pur non esclude) che la voce sia originaria di Francia.

Febbraio 1906.

Relazione sulla memoria del Dr. Dino Muratore: *L'imperatore Carlo IV nelle terre sabaude nel 1365 e il Vicariato imperiale del Conte Verde.*

Le relazioni tra Amedeo VI e Carlo IV di Lussemburgo non vennero fino ad ora sottoposte ad accurato e completo esame. Il Dr. Muratore se ne occupa, specialmente per quanto riguarda l'anno 1365, che segna un momento decisivo in questa serie di avvenimenti, imperciocchè fu allora che l'imperatore concesse al signore savoino il titolo di vicario imperiale. Anche negli anni precedenti Carlo IV gli si era dimostrato favorevole: anzi degnissimo di nota è il privilegio largito da quel monarca il 21 luglio 1356, in forza del quale Amedeo VI otteneva il diritto di giudizio sulle appellazioni imperiali.

Carlo IV nel 1365 si recò ad Avignone, attraversando la Savoia. Addì 11 maggio sostò a Chambéry, dove la corte savoina lo ricevette con oneste accoglienze. Il giorno successivo gli prestò il dovuto atto di omaggio, e fu in tale occasione che l'imperatore concesse al Conte Verde il Vicariato imperiale.

Carlo IV e Amedeo mossero quindi verso Avignone. Quivi il corteo giunse addì 23 maggio. Al convegno di Avignone si trattò della lega contro le Compagnie di ventura e della spedizione in favore di Giovanni V Paleologo, seriamente minacciato dai Turchi. Colà, addì 2 giugno, Amedeo VI ottenne il diploma per la fondazione dell'Università di Ginevra, ma gli eventi successivi non furono favorevoli a quel progetto, e il diploma rimase lettera morta. Il principe savoino accompagnò poscia Carlo IV ad Arles, dove si recava per ricevere la corona di quel piccolo, ma importante reame.

Interessanti notizie raccoglie il Dr. Muratore anche sul viaggio di ritorno, fatto da Carlo IV, viaggio che finora era noto appena imperfettissimamente da quel poco che ne dicono le cronache. Sulla fede sicura dei documenti, il Muratore segue l'imperatore a Ginevra, ad Evian, al Santuario di S. Maurizio

di Agauno, a Berna. Il 26 giugno l'imperatore e Amedeo VI si separarono; quegli proseguì il viaggio verso la Germania, questi ritornò alle sue terre.

Già nel viaggio attraverso la Svizzera, si cominciarono a manifestare le prime difficoltà circa l'attuazione della concessione del vicariato imperiale al signore savoino. Le gravi questioni si sollevarono in seguito, durante la spedizione di Amedeo VI in Oriente (1366-67) da parte dei vescovi di Ginevra, di Sion e di Losanna. Anche Urbano V accampò eccezioni. Carlo IV fu perplesso a lungo, ora ritirò, ora riconfermò la concessione. In fin dei conti il Vicariato imperiale non recò, nel fatto, al conte savoino quei vantaggi ch'egli se ne augurava.

La Memoria del Dr. Muratore è condotta sulle fonti, e in particolar modo su inediti documenti d'archivio. Alcuni di questi documenti egli aggiunge in fine alla sua dissertazione.

A parere dei sottoscritti questo lavoro, composto con serietà d'intenti e con larghezza di preparazione, merita di esser letto alla Classe, come quello che getta nuova luce tanto sulla storia savoina, quanto su quella di Carlo IV.

E. Ferrero
C. Cipolla, *relatore*.

L'Accademico Segretario
Rodolfo Renier.

Torino, Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi.

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 25 Febbraio 1906.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: GRASSI, JADANZA, NACCARI, SPEZIA, FUSARI, MORERA, SEGRE, FOÀ, MOSSO, GUARESCHI, PARONA, MATTIROLO e CAMERANO Segretario.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Il Presidente comunica:

1° Il telegramma di ringraziamento alla Classe inviato da S. E. il Ministro BOSELLI per i rallegramenti che la Classe gli aveva inviato;

2° la lettera che per la stessa ragione S. E. il Ministro BOSELLI ha inviato alla Classe di scienze morali.

Il Presidente presenta quindi l'opuscolo inviato in dono all'Accademia dal Socio straniero R. HELMERT: *Generalleutnant Dr. Oscar Schreiber*.

Il Socio SPEZIA presenta in dono all'Accademia, a nome dell'autore Dr. Giuseppe PIOLTI, la nota: *Sull'alterazione della Lherzolite di Val della Torre*.

Il Socio FOÀ presenta in dono all'Accademia, i lavori dell'Istituto d'anatomia patologica da lui stesso diretto.

Vengono presentate per l' inserzione negli *Atti* le note seguenti:

1° Roccati Dr. Alessandro, *Rodonite di Chiaves e di altre località delle Valli di Lanzo;*

2° Id., *Micrognanito con inclusi di gneiss del colle Brocan (Valle del Gesso delle Rovine)*, dal Socio Spezia;

3° Ubaldo Barbieri, *Di un confronto fra la espressione di Helmert e quella di Pizzetti, pel potenziale della gravità,* dal Socio Jadanza;

4° *Sulla attrazione degli strati ellissoidali e sulle funzioni armoniche ellissoidali,* nota del Socio G. Morera.

LETTURE

Rodonite di Chiaves e di altre località delle Valli di Lanzo.

Nota del Dott. ALESSANDRO ROCCATI
Assistente alla R. Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri di Torino.

L'esistenza di minerali di manganese, e specialmente di *manganite* e di *braunite,* nelle Valli di Lanzo è nota da gran tempo e diversi autori già ne hanno fatto menzione. Così il Jervis (1) indica la presenza di questi minerali alla borgata Fucine presso Viù, a Monastero di Lanzo, al Monte San Vittore (Balangero) ed al Monte Vacarezza (Coassolo), il quale ultimo giacimento deve essere in rapporto con quello importante di Corio Canavese, pure indicato da Jervis. Clavarino (2) indica la presenza di miniere di manganese nel territorio di Groscavallo, ove io ebbi pure a raccogliere la *manganite*; la *rodocrosite* è menzionata da Jervis alla Balma della Resta presso Mondrone e fu trovata erratica da Cantù (3) nel torrente Stura presso Ala.

A queste località posso aggiungere il territorio di Ala (del quale trovai campioni di *braunite* con *manganite* nella ricca collezione della Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri), e, per ricerche mie personali, diversi punti di Comuni di Ceres, Chiaves e Monastero. I giacimenti manganesiferi di Chiaves e Monastero

(1) *I tesori sotterranei d'Italia,* Parte 1ª. Torino, Loescher, 1873.

(2) *Saggio di corografia delle Valli di Lanzo.* Torino, 1867.

(3) *Note sur une nouvelle Mine de Manganèse à Ala,* “ Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino „ (1829), vol. XXXIII.

furono pure recentemente indicati da Sacco (1) e da Fino (2), il quale ultimo autore ne fa anzi rilevare la ricchezza ed accenna come vi si tentarono estrazioni a più riprese e posso aggiungere che tali estrazioni furono riprese in questi ultimi anni.

Tutti questi giacimenti sono collegati con la formazione delle *pietre verdi* di Gastaldi, come risulta dalla recentissima carta dell'Ing. E. Mattirolo (3).

Finora però la presenza della *rodonite* nelle Valli di Lanzo non era stata ancora indicata che da Fino (4), il quale nel 1882 descrisse ed analizzò detto minerale da lui trovato nelle vicinanze di Viù.

Il minerale studiato da Fino non era stato trovato in posto, ma in ciottoli di diverse dimensioni in un ruscello vicino alla borgata Biolay, presso la strada che da Viù conduce al Colle di San Giovanni. L'autore nota che per quante ricerche abbia fatto non gli riuscì di trovare la *rodonite* in posto, per cui, escludendo che si potesse trattare di frantumi d'un qualche masso morenico proveniente dal massiccio del Civrari, egli ammise l'origine da filoncelli schiacciati tra il limitare del forte banco di micaschisto che attraversa la valle in quel punto, ed il banco di roccia anfibolica volgente a poco a poco in pretto serpentino. Quest'opinione del Fino mi pare avvalorata dal fatto che si hanno affioramenti di minerali di manganese con *rodonite* presso Villar Dora e cioè appunto sul versante opposto della catena divisoria fra la Valle di Susa e la Valle di Viù.

Dopo il lavoro di Fino non fu più menzionata la *rodonite* in Val di Lanzo e giustamente l'autore (5) faceva rilevare la rarità di questo minerale. Però visitando in questi ultimi mesi il territorio di Monastero e di Chiaves, ebbi occasione di

(1) *Lenti grafitiche nella Zona delle Pietre Verdi in Val di Lanzo*, " Atti R. Acc. delle Sc. di Torino ", vol. XXXIX, 1904.

(2) *Notizie mineralogiche sulle Valli di Lanzo*, in *Le Valli di Lanzo (Alpi Graie)*. Edizione fatta per cura del C. A. I. Sezione di Torino. Torino, Paravia, 1904.

(3) *Schiarimenti sulla carta geo-litologica delle Valli di Lanzo*, in *Le Valli di Lanzo*, ut supra.

(4) *Sulla Rodonite di Viù*, " Atti R. Acc. delle Sc. di Tor. ", XVIII, 1882.

(5) Loc. cit.

rilevare alcuni punti ove, insieme alla *braunite* già sopra indicata, la *rodonite* esiste in posto e con una certa abbondanza. Questi giacimenti sono in due zone distinte: La prima zona corrisponde alla località detta Caselle e precisamente tra l'abitato ed il Monte Meina ove ne esistono due affioramenti in forma di filoni situati in roccie gneissiche fortemente sollevate e comprese fra due lenti di serpentino. Dei due affioramenti (che s'incontrano lungo la strada mulattiera fra Chiaves e Sant'Ignazio) quello più a valle, e che dista poche diecine di metri dall'altro, ha estensione e sviluppo maggiori. In entrambi i luoghi la *rodonite* è associata alla *braunite*.

La seconda zona comprende pure filoni di *braunite* con *rodonite* e si trova oltrepassato il Comune di Chiaves, presso la località detta Croce di Chiaves; si tratta pure di una formazione gneissica a strati fortemente sollevati e che passa alla prasinite verso il Monte Garnè ed ai calceschisti verso Chiaves. Per una descrizione stratigrafica più completa credo utile di rimandare al lavoro già citato di Sacco (1).

In seguito al rinvenimento di questo giacimento di *rodonite* mi venne il dubbio che questo minerale potesse esistere con maggior frequenza di quanto si credesse e che non fosse stato indicato prima forse per il fatto che, sempre associato alla braunite e rivestito da uno strato nero esterno dovuto a prodotti di alterazione, difficilmente poteva esser riconosciuto. Ricercando allora fra l'abbondante materiale del Museo geo-mineralogico della Scuola degli Ingegneri potei convincermi di esser nel vero, poichè, osservando e frantumando campioni di minerali di manganese, trovai la rodonite in esemplari provenienti da Ceres, Ala, Balangero, Coassolo e Viù. Di questa ultima località esiste nella collezione Cossa un discreto blocco formato di rodonite e braunite, il quale, mancando indicazioni più particolareggiate, suppongo possa provenire dalla località indicata dal Fino nel lavoro citato.

In questa nota mi limito però essenzialmente alla descrizione della *rodonite* di Chiaves, dando soltanto un cenno di quella delle altre località.

---

(1) *Lenti grafitiche nella Zona delle Pietre Verdi, ecc.* Lavoro citato.

Come ho detto sopra, nelle diverse zone di Chiaves la *rodonite* forma, associata alla braunite, dei filoni di spessore variabile da 5 a 10 cm. circa. Generalmente si ha come una ganga costituita dalla braunite e nella parte mediana la rodonite; in altri punti il filone è tutto di braunite, esistendo nell'interno nuclei o piccoli accentramenti di rodonite; raramente poi la rodonite è sola ed allora essa si presenta avvolta da uno strato superficiale pulverulento di color nero e che deve considerarsi come un prodotto di alterazione.

Non trovai in alcun punto la rodonite in cristalli distinti, ma sempre in masse cristalline formate da lamelle di 3 a 4 mm. di diametro, facilmente sfaldabili, il cui colore è da rosso a roseo con lucentezza vitreo-perlacea.

Nelle sezioni sottili il suo color roseo diventadebolissimo, tendendo a divenire incoloro, e la massa risulta formata da un aggregato di lamelle in cui son ben visibili le traccie di sfaldatura secondo 110 e 001. Analogamente a quanto riferisce Fino per la rodonite di Viù, quella di Chiaves non presenta alcuna traccia di pleocroismo; i colori d'interferenza sono vivissimi e si ha talora notevole dispersione.

Il peso specifico è uguale a 3,59.

Per l'analisi chimica seguii il metodo già usato da Colomba (1); cioè, dopo disaggregato il minerale col carbonato sodico potassico, usai come decomponente anzichè l'acido cloridrico il solforico, siccome più conveniente.

I risultati dell'analisi furono i seguenti:

SiO_2	43,18
MnO	53,25
FeO	0,67
CaO	1,33
MgO	1,02
	99,45

che portano alla formola $MnSiO_3$, cioè ad un metasilicato di manganese, in cui parte del manganese è sostituito da Fe, Ca, Mg.

(1) *Rodonite cristallizzata di St. Marcel (Val d'Aosta)*, " Atti R. Acc. delle Sc. di Torino ", XXXIX, 1904.

Confrontando questi dati con quelli ottenuti da Fino si vede che la rodonite di Chiaves ha composizione che si scosta alquanto da quella della rodonite di Viù. Infatti Fino trovò:

SiO_2	44,31	44,24
MnO	48,77	48,64
FeO	1,53	1,48
CaO	4,44	4,57
Perdita	1,25	1,23
	100,30	100,16

Le differenze devono in parte provenire dal fatto che la rodonite di Viù si trovava in stato incipiente di alterazione e dall'esservi commiste piccole quantità di carbonato di calcio.

Riporto pure i risultati ottenuti nell'analisi di rodonite di Saint-Marcel in Val d'Aosta, ove il minerale si trova in condizioni di giacitura analoghe.

Ebelmen trovò: (1)

SiO_2	46,37
MnO	47,38
CaO	5,48
	99,23

e Colomba (2):

SiO_2	46,71
MnO	47,73
CaO	5,41
	99,85

La rodonite dovrebbe contenere (Dana (3)):

SiO_2 45,9 MnO 54,1

Ora confrontando i risultati della mia analisi con quelli delle analisi riportate più sopra, come anche con quelle indicate da

(1) *Recherches sur les produits de la décomposition des espèces minérales de la famille des silicates*, " Annales des Mines ", 4e série, 7, p. 3 (1845).

(2) Loc. cit.

(3) *System of Mineralogy*, 1892, p. 380.

Dana, si vede che, fra tutte, la rodonite di Chiaves è quella che più si avvicina alla tipica, tanto più se si tien conto che, siccome rileva l'osservazione del minerale al microscopio, frammezzo alla rodonite sono contenuti alcuni granuli di calcite, ai quali è probabilmente dovuta in parte la piccola quantità di calce che indica l'analisi.

La patina nera che ricopre superficialmente la rodonite formandovi come un mantello terroso è evidentemente un prodotto di alterazione, poichè al microscopio, con fenomeno analogo a quello indicato da Ebelmen per la rodonite dei terreni cristallini di Algeri (1), si può osservare il passaggio dall'uno all'altro minerale in modo che da lamine di pura rodonite si passa gradatamente ad altre in cui compariscono scarsi punti neri che i vanno facendo sempre più abbondanti fin o a gremire del tutto le lamine stesse. Il minerale nero scaldato in tubo chiuso svolge abbondante acqua e con acido cloridrico svolge cloro, lasciando un leggero residuo di silice gelatinosa, analogamente a quanto trovarono Fino per il prodotto d'alterazione della rodonite di Viù e Ebelmen per quella d'Algeri.

Si ha pure un altro tipo comune di alterazione; in questo la rodonite, pure mantenendo la sua struttura lamellare e le linee di geminazione, cambia colore, passando gradualmente dal roseo al giallo scuro, al bianco; trattata con acido cloridrico dà allora una discreta effervescenza. Esaminando il minerale al microscopio si vede che le lamine di rodonite tendono a trasformarsi in calcite e rodocrosite, che si trovano inoltre sparse in granuli frammezzo a quelli della rodonite alterata, insieme pure a del quarzo granulare che deve provenire dalla concentrazione della silice del silicato. Alterazione analoga si ritrova pure nella rodonite di St-Marcel.

Alcuni dei filoni della seconda zona del giacimento di Caselle e di quella della Croce di Chiaves presentano un aspetto ed una composizione caratteristica e mi sembrano degni di particolare menzione.

Si ha cioè una zona mediana di color grigio chiaro con una ganga di braunite che localmente può anche infiltrarsi nella massa grigia. Uno di questi filoni proveniente dalla località

(1) *Recherches sur les produits de la décomposition, etc.*, loc. cit.

Caselle è regolarissimo; misura uno spessore di circa 8 cm. di cui 6 rappresentati dalla sostanza grigia, mentre la braunite della ganga con regolarità singolare misura uno spessore di circa 1 cm. per parte. Non potei determinare la lunghezza di questo filone che si perde sotto il terreno coltivato presso la strada mulattiera che da Sant'Ignazio va a Chiaves.

Credetti dapprima che si trattasse di un caso d'alterazione della rodonite in filone, ma l'esame microscopico mi rivelò una composizione affatto diversa che negli altri casi; infatti la massa grigia del filone risulta da un'associazione finamente granulare di *rodonite* e di *quarzo*, quest'ultimo con abbondanti inclusioni di *zircone* in piccoli cristalli prismatici per lo più nettamente terminati dalle faccie dell'ottaedro.

La rodonite presenta la struttura lamellare solita ad incontrarsi negli altri filoni e vi sono ben visibili le linee di sfaldatura secondo 110 e 001; dette lamine o sono incolori e limpide, oppure appaiono torbide con presenza nell'interno di minuti granuli opachi che ritengo dovuti a braunite; di più le lamine alterate sono circondate tutte all'intorno da un'aureola di un materiale torbido, opaco, che in parte dev'esser costituito da carbonato di calce; infatti da saggi eseguiti sul materiale grigio del filone ottenne 68,14 % di silice (cifra che si spiega con l'abbondanza del quarzo) e 4,72 % di calce; d'altronde trattando le sezioni sottili con acido cloridrico si vede una distinta effervescenza nelle zone torbide intorno alle lamine di rodonite. La percentuale del manganese nel materiale del filoncello oscilla fra 16 e 19 %.

Mi venne il dubbio che si potesse trattare di una speciale alterazione di filoni di rodonite ove la silice, come nell'altro caso sopra indicato, si sarebbe separata e depositata in forma di quarzo; ma la freschezza dei componenti in molti punti del filone e la presenza delle inclusioni di zircone nel quarzo, mi fanno ritenere che si tratti veramente di una speciale associazione di minerali che vennero ad occupare alcune delle litoclasi della roccia insieme agli altri minerali di manganese.

Aggiungo per terminare alcuni dati sulla rodonite delle altre località delle Valli di Lanzo a cui ho accennato in principio della presente nota:

Rodonite di Viù. I campioni esistenti nella collezione della

Scuola d'Applicazione degli Ingegneri e appartenenti alla collezione Cossa, sono costituiti da braunite e rodonite; questa è freschissima e sana; ha struttura lamellare con facile sfaldatura, color roseo e lucentezza perlacea. Si tratta di braunite con nell'interno la rodonite in noduli, oppure masse di rodonite con nuclei di braunite; un grosso frammento è di rodonite coperta all'esterno dal solito prodotto nero di alterazione.

Rodonite di Ceres. È pure associata alla braunite; la rodonite forma piccoli accentramenti col solito aspetto lamellare. È parzialmente alterata con il tipo di alterazione sopra descritto; le lamine cioè prendono color giallo e al microscopio si osserva la presenza frammezzo alla rodonite di calcite e quarzo.

Rodonite di Ala. Trattasi pure di braunite con piccole vene o accentramenti lenticolari di rodonite, però quasi completamente alterata e di colore giallo.

Rodonite di Coassolo e Balangero. In queste località si ha manganite o braunite con ganga di quarzo e piccoli accentramenti di rodonite in lamine rosee o bruno chiaro.

Gabinetto di Geologia della R. Scuola d'Applicazione
degli Ingegneri di Torino. Febbraio 1906.

Microgranito con inclusi di gneiss del Colle Brocan (Valle del Gesso delle Rovine).

Nota del Dott. ALESSANDRO ROCCATI
Assist. alla R. Scuola d'Applicaz. per gli Ingegn. di Torino.

(Con una Tavola).

Ho già indicato in precedenti lavori (1) l'esistenza di molteplici roccie filoniane che formano dicchi dello spessore variabile da qualche decimetro a parecchi metri nei gneiss che costituiscono la Serra dell'Argentera nelle Alpi Marittime.

Di queste roccie intrusive, specialmente aplite e micrografanito, si hanno appunto parecchi affioramenti nella valle delle Rovine e nel bacino terminale di questa, cioè nella regione del lago Brocan e in modo particolare verso il colle omonimo e nella catena che chiude il bacino del lago a sud e ovest e che comprende le cime di Balma Ghilié, Brocan, Brocanet, Bastione, Baus, ecc.

Uno di questi dicchi di microgranito, della potenza di parecchi metri, viene appunto ad affiorare nella depressione che forma il colle Brocan (2889 m.) fra la valle del Gesso delle Rovine e il vallone del Gesso della Valletta, e costituisce in parte la costiera dirupata che forma la cima del Bastione (3084 m.).

Tale dicco mi pare degno di particolare menzione non tanto per la composizione della roccia in sè, che non ha caratteri dissimili da quelli degli altri dicchi di microgranito della regione, quanto per il fatto che esso contiene dei caratteristici inclusi di

(1) *Ricerche petrografiche sulle Valli del Gesso: Valle delle Rovine, Serra dell'Argentera, Valli di S. Giacomo,* " Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino ", XXXVIII (1903), XXXIX (1904), XL (1905).

gneiss, fenomeno questo che non mi fu dato osservare in nessun altro punto della Serra dell'Argentera.

Questi inclusi sono a struttura schistosa molto regolare e molto evidente ed hanno i loro componenti macrocristallini, per cui spiccano nettamente nella roccia filoniana che li include, la quale è assolutamente afanitica con una tinta bianca o grigiastra omogenea.

Gli inclusi non sembrano essere molto abbondanti e soltanto tre ne potei osservare e ancora non in posto, bensì in blocchi del microgranito alla base del dicco nel detrito di falda, proveniente dallo sgretolarsi della roccia per azione del gelo e disgelo che profondamente si fa sentire sulle nude roccie che costituiscono l'alto vallone delle Rovine.

Noterò anzi a questo proposito che l'alterazione è molto più profonda nelle roccie filoniane che non nel gneiss, cosicchè parecchi corridoi e canaloni limitanti le cime della costiera del Bastione sono scavati in tali roccie che si riducono superficialmente in una massa terrosa, incoerente, che rende alquanto difficile l'accesso.

Gli inclusi di gneiss nei blocchi che potei esaminare hanno forma molto irregolare e le dimensioni maggiori del più voluminoso sono di 30 centimetri per 20; questo incluso è rappresentato nella figura 1, ove esso è ridotto ad un terzo della grandezza naturale.

Dalla fig. 1 si può rilevare come per lo più il contatto fra le due roccie sia ben netto, senza formazione di contatto fra incluso e includente e che soltanto in qualche punto osservisi l'esistenza come di una salbanda molto ridotta, della cui natura mi occuperò in seguito, dopo aver data una sommaria descrizione del micrgranito e del gneiss incluso.

Micrgranito. — Come ho detto sopra, questa roccia ha grana finissima, tanto da comparire quasi come una roccia semplice ed ha color bianco latteo su cui spiccano in nero delle lamelle di biotite, che però in molti punti mancano del tutto; il colore è sovente alla superficie giallognolo per inquinazione di limonite.

Caratteristica è nel micrognanito una facile divisibilità in lastre di vario spessore a superficie affatto regolare, fenomeno

questo che già ebbi ad indicare per roccie consimili del lago delle Rovine (1); tale divisibilità si manifesta in direzione parallela agli spunti del dicco.

Questo dividersi della roccia non sembra provenire da una disposizione speciale dei componenti, poichè la struttura è nettamente quella granulare delle roccie intrusive; essa si manifesta già naturalmente nello sgretolarsi della massa sotto l'azione degli agenti meteorici e si può provocare facilmente percuotendo col martello i frammenti alquanto voluminosi della roccia.

Ritengo che la divisibilità accennata del microgranito possa derivare da fenomeni di contrazione nella massa al momento della solidificazione, formandosi così delle zone di minor aderenza analogamente a quanto succede nella formazione delle *fessure di raffreddamento* ammessa da Von Groddeck (2) per certi giacimenti filoniani.

Componenti del microgranito sono i seguenti:

Quarzo, prevalente assai sugli altri minerali; esso si presenta in forma di granuli irregolari, sovente con un orlo pure di quarzo finamente granulare di seconda formazione.

Contiene inclusioni di *biotite* in finissime lamelle e di *zircone* affatto incoloro; questo è in abbondanti cristallini ben distinti formati da un primo quadrato con un ottaedro.

Altre inclusioni incolori, abbondanti, sono però di tal minutezza da non permettere una precisa determinazione anche con il più forte ingrandimento. Non di rado nel quarzo si osservano infiltrazioni di *limonite* che dànno luogo a finissime dentriti.

Ortosio, in granuli irregolari analoghi a quelli del quarzo; ordinariamente non è geminato e soltanto eccezionalmente si notano geminati secondo la legge di Karlsbad. Contiene frequenti ed anche voluminose inclusioni di quarzo, fatto questo che si verifica anche negli altri feldspati della roccia. Notasi talvolta nell'interno degli individui un nucleo torbido dovuto ad incipiente caolinizzazione; frequenti sono le minutissime inclusioni incolore indicate già per il quarzo e che, almeno in parte, sembrano potersi riferire ad *apatite*. Infatti mentre non potei deter-

---

(1) *Ricerche petrografiche, ecc. (Valle delle Rovine)*, loc. cit.

(2) *Traité des gîtes métallifères.* Paris, Dunod, 1884, pag. 268-432.

minare direttamente questo minerale, ottenni però la reazione del fosforo, trattando la polvere della roccia con acido nitrico e facendo un saggio microchimico con il molibdato ammonico.

Oligoclasio, è il feldspato relativamente più abbondante ed i suoi individui hanno contorno cristallino per lo più abbastanza distinto. Costante vi è la geminazione polisintetica con legge dell'albite finamente ripetuta, a cui si aggiunge raramente quella con legge di Karlsbad e più raramente ancora quella del periclino per lo più appena accennata.

In qualche punto della roccia fra i componenti a maggiori dimensioni esiste come un magma a struttura granulare minutissima, nel quale oltre a quarzo, ortosio e oligoclasio notasi pure l'esistenza di un altro feldspato triclino i cui caratteri accennano ad una basicità maggiore; infatti mentre l'estinzione dell'oligoclasio ha una media di 2° e 3°, nella seconda varietà raggiunge fin 14° e 15°.

Microclino in rari granuli a dimensioni però maggiori di quelle degli altri feldspati.

Muscovite discretamente abbondante in minutissime lamelle variamente aggregate, incolore o leggermente giallognole per incipiente alterazione.

In alcuni punti del filone si ha diminuzione nella quantità della muscovite fino a quasi totale scomparire di essa, avendosi così passaggio dal micrognanito ad aplite.

Biotite in scarse lamine più voluminose di quelle di muscovite; ha color bruno intenso ed è fortemente pleocroica; frequente ne è l'alterazione in limonite.

In prossimità della biotite si osservano delle zone più o meno estese formate da limonite che proviene dall'alterazione di *ematite* e *pirite*, che in qualche caso si possono ancora vedere inalterate.

Gneiss incluso. — Il gneiss, che costituisce gli inclusi del microgranito, ha struttura schistosa molto regolare in causa della regolare disposizione della biotite, la quale forma straterelli di alcuni millimetri alternanti con strati da un quarto a mezzo centimetro, rappresentanti delle zone ove la mica o manca del tutto od è molto scarsa. I componenti poi hanno tal grossezza che si possono agevolmente distinguere ad occhio nudo.

Trattasi di roccia essenzialmente non dissimile dai gneiss a biotite e clorite che costituiscono la zona ove affiorano i dicchi, ma è notevole il fatto, sulla cui importanza ritornerò in seguito, che mentre il gneiss in posto presenta più o meno profonda la struttura cataclastica (1), tale struttura manca affatto nel gneiss degli inclusi.

Componenti del gneiss sono:

Quarzo, abbondantissimo, in granuli irregolari variamente fessurati; esso forma il componente prevalente nelle zone comprese fra gli straterelli a biotite. Contiene inclusioni di *biotite* e di *zircone*.

Ortosio pure granulare, ma molto meno abbondante del quarzo; esso non è mai geminato e presenta in molti individui ben evidente la *struttura vermicolare* (Michel Lévy), che ho descritta appunto nei feldspati, e specialmente nell'ortosio, delle roccie del massiccio della Serra dell'Argentera.

Contiene abbondanti inclusioni granulari di *quarzo*, altre cristalline di *zircone*, più raramente di feldspato triclino.

Plagioclasio, prevale in quantità sull'ortosio: notevole è il fatto che mentre questo è in assai buon stato di conservazione, gli individui di feldspato triclino sono sempre profondamente alterati. Tale alterazione consiste in un fenomeno di caolinizzazione che porta l'intorbidimento completo della massa del minerale, nel quale solo più confusamente si osservano in alcuni punti le linee finamente ripetute della solita geminazione polisintetica; lo stato di alterazione del plagioclasio però non ne permette una determinazione precisa.

Contiene inclusioni di quarzo analoghe a quelle dell'ortosio.

Biotite, abbondantissima e la cui disposizione regolare in straterelli si può osservare nella fig. 1ª. Della biotite si hanno due varietà, poichè se ne osservano lamine brune ed altre di color verde scuro; le prime hanno pleocroismo molto forte, le verdi invece appena sensibile; queste ultime sono molto più abbondanti delle prime.

Frequente è l'alterazione della biotite in un minerale di natura cloritosa di color giallo verde a verde sporco più o meno

---

(1) *Ricerche petrografiche, ecc. (Valle delle Rovine)*, loc. cit.

intenso e con debole e frequentemente nessuna azione sulla luce polarizzata.

Nell'alterazione della biotite sembra esservi stata concentrazione del ferro; difatti le lamine sono più o meno scolorite e vi si osservano abbondantissime inclusioni di magnetite, che mancano nella biotite non alterata; tale magnetite è alla sua volta limonitizzata.

Nelle lamine di biotite che stanno nell'immediato contatto del gneiss con il micrognanito è notevole la presenza di abbondante *ilmenite* che si mostra sotto forma di finissimi aghi intrecciati, che, come si vede nella fig. 2, gremiscono l'interno della mica.

Frammezzo alla biotite si osservano pure prismi allungati di *sillimanite* incolora, con le caratteristiche traccie di sfaldature normali all'allungamento.

Tutta la roccia contiene discreta quantità di *apatite*.

Contatto fra il microgranito e il gneiss. — Come risulta chiaramente dalla figura 1ª, il contatto fra l'incluso gneissico e il granito includente è nettissimo e si ha distacco evidente fra le due roccie senza che vi appaia l'esistenza di una formazione di contatto; soltanto in alcuni punti si osserva una zona di pochi millimetri costituita da quarzo minutamente granulare e da un' associazione di granuli di quarzo e plagioclasio, che però al microscopio non appare differente dalla massa del microgranito. L'unico accenno ad una formazione di contatto sarebbe la presenza della ilmenite e della sillimanite sopra indicata, qualora per la ilmenite non si voglia ammettere la sua esistenza anche in precedenza nella roccia stata inclusa. Ad ogni modo si può affermare che o non vi fu reazione o questa fu di poco rilievo fra i frammenti della roccia e il magma fluido che li inglobò.

Questo fenomeno di contatto senza traccia di metamorfismo si osserva pure fra il gneiss in posto ed il dicco che lo attraversa ed anche in questo caso è nettissimo il distacco fra le due roccie: in alcuni punti anzi manca l'aderenza e si osservano piccole druse di cristalli di quarzo con clorite.

L'aderenza ad ogni modo fra le due roccie è sempre minima; basta un urto un po' forte, per esempio un colpo di martello,

perchè avvenga il distacco nel piano di contatto; il fenomeno si manifesta analogamente tra i frammenti di gneiss incluso ed il microgranito. Credo che questo fatto si possa spiegare con fenomeni di contrazione nella massa magmica al momento della sua consolidazione, nel modo che sopra ho indicato per la divisione in lastre della roccia del dicco.

La mancanza di formazioni di contatto fra il gneiss e le roccie intrusive filoniane si osserva si può dire costantemente nei molteplici casi di dicchi di granito, microgranito, microgranulite, aplite, ecc., che esistono in tutta la regione del vallone delle Rovine.

Soltanto in rari casi si ha formazione di minerali nuovi nel contatto immediato fra la roccia che forma le pareti e quella del filone; così ho indicato (1) nella parete sinistra del lago delle Rovine un grosso dicco di aplite, in cui la roccia nel contatto con il gneiss è ricchissima di minuti granati e lunghi prismi di sillimanite.

La mancanza di una reazione chimica fra le due roccie mi pare si possa spiegare ammettendo che la massa fluida la quale si faceva strada attraverso al gneiss, pur avendo una temperatura tale da mantenere la roccia almeno allo stato pastoso, ciò nondimeno non avrebbe avuto nè temperatura nè tempo sufficienti per determinare una reazione fra le due roccie, reazione resa difficile ancora più dalla analoga composizione del gneiss e del microgranito. Che un fenomeno analogo si possa esser verificato fra gli inclusi gneissici e la roccia includente risulterebbe, oltre che dai caratteri petrografici sopra indicati, anche dal fatto che i frammenti di gneiss, abbastanza irregolari di forma e con spigoli vivi, sono come modellati dalla roccia filoniana che li incluse e che si adagiò su di essi senza modificarli in alcun modo.

Interessante ma di difficile spiegazione mi sembra il fatto della mancanza di struttura cataclastica nei frammenti di gneiss inclusi nel microgranito, mentre questo carattere strutturale si riscontra normalmente nella stessa roccia in posto.

Anzitutto è oscuro il fenomeno che abbia provocata la comparsa della struttura cataclastica nei gneiss della Serra dell'Ar-

---

(1) *Ricerche petrografiche, ecc. (Valle delle Rovine)*, loc. cit.

gentera, ammenochè non si ammetta che sia stata conseguenza dei movimenti e spostamenti che le roccie gneissiche hanno subìto in conseguenza della venuta a giorno dell'immenso dicco granitico che, formando il gruppo del Vallasco, si estende, secondo le ricerche di Franchi (1), per un' estensione di 15 chilometri e concomitanti del quale sarebbero forse i molteplici filoni di roccie intrusive (microgranito, aplite, microgranulite, ecc.) che esistono nella regione. Questa concomitanza assoluta non si può però ammettere per il fatto che in alcuni dicchi la roccia filoniana ha struttura cataclastica analoga a quella del gneiss, mentre non la presenta in altri, come sarebbe appunto nel microgranito che forma l'oggetto della presente nota. Sembra migliore il supporre che i primi dicchi già esistessero nel gneiss quando questo subì le azioni meccaniche che in esso portarono la struttura cataclastica, mentre per gli altri si potrebbe ammettere contemporaneità coll'eruzione granitica, benchè in alcuni punti anche il granito del Vallasco presenti tale struttura, come ebbe ad osservare il Franchi. A combattere l'ipotesi della contemporaneità della comparsa delle varie roccie intrusive sta anche il fatto che alcuni dicchi appaiono aver subìto uno spostamento dalla loro posizione primitiva, per cui mentre gli strati gneissici sono raddrizzati, le roccie filoniane si presentano disposte orizzontalmente, come si può osservare bene alla base del Gelas presso il Colle delle Finestre. Dove invece i dicchi attraversano verticalmente la serie dei gneiss essi sarebbero posteriori ai movimenti orogenici che hanno spostati i gneiss, e ciò spiegherebbe la mancanza in essi di struttura cataclastica.

Ora tornando agli inclusi, la mancanza di struttura cataclastica nel gneiss che li costituisce può spiegarsi, supponendo l'intrusione del microgranito nel gneiss dopo che questo già aveva assunta la struttura cataclastica, con l'ammettere che i frammenti inglobati provengano dalla parte più profonda dei banchi gneissici ove non esisterebbe tale struttura. Questa ipotesi potrebbe anche spiegare le leggere diversità mineralogiche che esistono fra il gneiss degli inclusi e quello della roccia in posto nella vicinanza del dicco.

(1) *Relazione sui principali risultati del rilevamento geologico nelle Alpi Marittime eseguito nelle campagne 1891-92-93*, " Boll. R. Com. Geologico ", anno 1894, n. 3.

Fig. 1ª

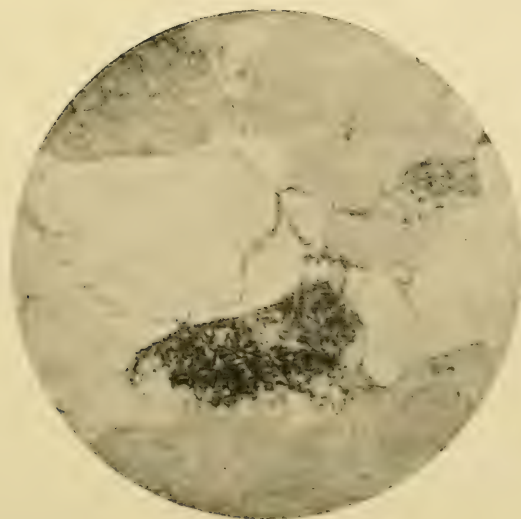



Fig. 2ª

Ad ogni modo, senza volere insistere sulla spiegazione del fenomeno, mi tengo pago dell'aver indicata la presenza degli inclusi nelle roccie filoniane della regione del lago Brocan, fenomeno che se non sembra comune nella Serra dell'Argentera, si ripete però in altri punti della catena alpina, come ad esempio nel gruppo del Gran Paradiso, ove, da una comunicazione verbale dell'Ing. E. Mattirolo, appresi ritrovarsi inclusi simili ai descritti in roccie intrusive analoghe.

Laboratorio di Geologia della R. Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri di Torino. Gennaio 1906.

Di un confronto fra la espressione di Helmert e quella di Pizzetti, pel potenziale della gravità.

Nota di UBALDO BARBIERI.

A pag. 77 del 2° volume del suo trattato di Geodesia, Helmert considera il potenziale della gravità terrestre sotto la seguente forma:

$$(1)\qquad M = \frac{Mk^2}{r}\left\{1 + \frac{k}{2r^2}(1 - 3\,\mathrm{sen}^2\varphi) + \frac{\omega^2 r^3}{2Mk^2}\cos^2\varphi + \right.$$
$$\left. + \frac{D}{r^4}\left(\mathrm{sen}^4\varphi - \frac{6}{7}\,\mathrm{sen}^2\varphi + \frac{3}{35}\right)\right\},$$

dove i simboli hanno i noti significati che qui è inutile richiamare. I due termini che seguono l'unità fra le graffe, debbono considerarsi come piccoli di 1° ordine, ed il terzo come piccolo di 2° ordine.

Questo sviluppo presuppone già un'ipotesi restrittiva nella distribuzione della massa, cioè che risultino uguali i momenti d'inerzia rispetto agli assi principali giacenti nel piano equatoriale.

Lo sviluppo, però, è valido solo all'esterno di una sfera includente tutte le masse; l'estensione della sua validità fino alla superficie terrestre, esige una particolare livellazione della massa terrestre, o, come anche diremo, una speciale idealizzazione nella sua distribuzione.

Fatta questa ulteriore supposizione, Helmert determina le costanti della (1) e la forma dello sferoide terrestre, supponendo dati il raggio equatoriale a, la velocità di rotazione ω.

e la forza di gravità per ogni punto dello sferoide, secondo la relazione sperimentale:

$$g = g_a(1 + \beta \operatorname{sen}^2\varphi). \tag{2}$$

Posto:

$$\alpha = \frac{a-b}{a} \quad \beta = \frac{g_p - g_a}{g_a} \quad \gamma = \frac{\omega^2 a}{g_a} \quad \delta = \frac{D}{a^4},$$

le formole che risolvono il problema entro l'approssimazione del 2° ordine sono:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{3K}{2a^2} &= 2\gamma - \beta - 2\alpha^2 + \frac{3}{4}\gamma^2 + \frac{3}{7}\delta \\ \frac{\omega^2 a^3}{Mk^2} &= \gamma(1 + \gamma - \beta) \\ \alpha + \beta &= \frac{5}{2}\gamma - \alpha\left(\alpha + \frac{1}{2}\gamma\right) + \frac{2}{7}\delta \\ \alpha &= \frac{3K}{2a^2}(1 + \alpha) + \frac{\gamma}{2}\left(1 - \frac{3}{2}\gamma\right) \end{aligned} \right.$$

(Vedi Helmert, pag. 78, 79, 83).

Da queste formole si ricaveranno cioè le costanti:

$$Mk^2, \ K, \ D \text{ ed } \alpha$$

e la curva meridiana dello sferoide avrà per equazione:

$$r = a \left\{ 1 - [\alpha(1 + \beta - \alpha) + \delta] \operatorname{sen}^2\varphi + [\alpha(\beta - \alpha) + \delta] \operatorname{sen}^2\varphi \right\}.$$

Viceversa, si possono supporre dati i semiassi a e b dello sferoide, attribuendo ad essi, p. es. le dimensioni di Bessel. Aggiungendo come dato ulteriore la gravità g_a all'equatore, la risoluzione delle medesime equazioni (3), condurrà alla determinazione delle costanti:

$$Mk^2, \ K, \ D \text{ e } \beta.$$

Il valore di β sostituito nella (2) definirà il modo di variazione della gravità alla superficie dello sferoide, in conseguenza di quella particolare distribuzione della massa che si è dovuta supporre, per potere attribuire allo sferoide i semiassi dati a e b.

In una Nota pubblicata nel 1894 (*), il prof. Pizzetti determinava, basandosi su di un noto teorema di Stokes, l'espressione rigorosa per il potenziale della gravità su di un punto esterno, nell' ipotesi che una delle superficie di livello rispetto alla gravità terrestre, comprendente tutte le masse, sia un ellissoide di rotazione, con l'asse minore coincidente con quello della rotazione diurna, e che egli chiama *ellissoide fondamentale.*

Questa espressione è la seguente:

$$U=\left(M+\frac{2}{3}\pi\rho a^2 b\right)\frac{\operatorname{arctg}\mathsf{E}}{(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}}-\frac{2\pi\rho a^2 b}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}(\mathsf{E}-\operatorname{arctg}\mathsf{E})z^2- \tag{4}$$

$$-\frac{\pi\rho a^2 b}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\operatorname{arctg}\mathsf{E}-\frac{\mathsf{E}}{1+\mathsf{E}^2}\right)(x^2+y^2)+\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2),$$

dove:

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\omega^2}{2\pi k^2\rho}&=\frac{3+\epsilon^2}{\epsilon^3}\operatorname{arctg}\epsilon-\frac{3}{\epsilon^2}\\ \epsilon&=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2}}\\ \mathsf{E}&=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2+\lambda}}\end{aligned}\right. \tag{5}$$

e λ la maggior radice dell'equazione:

$$\frac{z^2}{b^2+\lambda}+\frac{x^2+y^2}{a^2+\lambda}=1. \tag{6}$$

L'espressione esatta della gravità alla superficie dell'ellissoide risulta data dall'equazione:

$$\left\{\begin{aligned}&g\sqrt{1+\epsilon^2\cos^2\varphi}=\frac{Mk^2}{a^2}(1+\epsilon^2\cos^2\varphi)+\\ &\qquad+\frac{\omega^2 aB}{\sqrt{1+\epsilon^2}}\left(1-\frac{3+\epsilon^2}{2}\cos^2\varphi\right)-\omega^2 a\cos^2\varphi\sqrt{1+\epsilon^2}\\ &\text{ove}\\ &\qquad B=\frac{2(1+\epsilon^2)(\epsilon-\operatorname{arctg}\epsilon)-\frac{2}{3}\epsilon^3}{(3+\epsilon^2)\operatorname{arctg}\epsilon-2\epsilon}.\end{aligned}\right. \tag{7}$$

(*) " Rendiconti dell'Accad. dei Lincei ", vol. III, 1° sem. 1894. — Vedi anche: " Rendic. del Circolo matem. di Palermo ", t. XIV, 1900.

Anche qui, supponendo il Geoide identificabile con un ellissoide di rotazione, avente, p. es., le dimensioni di Bessel, il campo di validità delle formole, non può estendersi fino ad esso, poichè si verrebbe ad escludere gran parte delle masse continentali, e quindi verrebbe a mancare una delle condizioni poste a base nella deduzione delle formole.

Volendo fare questa estensione, sarà d'uopo immaginare riportate tali masse entro la superficie dell'ellissoide, e supporre una tale distribuzione ideale, che la superficie dell'ellissoide stesso, si conservi sempre di livello.

Fatte queste supposizioni, è facile vedere come il potenziale all'esterno dell'ellissoide terrestre sia completamente determinato quando, insieme ai semiassi a e b, sia data la gravità all'equatore.

Infatti, posto nelle (5), (6) e (7):

$$z = 0 \qquad x^2 + y^2 = a^2 \qquad g = g_a \qquad \varphi = 0\,,$$

le equazioni risultanti determinano le due costanti:

$$Mk^2, \qquad k^2\rho,$$

e quindi, in virtù delle espressioni (5) e (6), resta interamente determinata la espressione (4) del potenziale.

La (7) esprimerà allora il modo di variazione della gravità sul Geoide supposto di forma ellissoidica, a differenza della (2), che rappresenta la gravità sullo sferoide.

La differenza nella distribuzione dei valori di g nei due casi, potrà dare un'idea della influenza delle due diverse idealizzazioni delle masse, necessarie per rendere valide le due formole (1) e (4).

Lo scostamento fra le superficie di livello all'esterno delle quali si considerano i due sviluppi (sferoide ed ellissoide, concentrici, coassiali, aventi i medesimi semiassi a e b) venne già determinato da Helmert (pag. 80) nella formola:

$$r_S - r_E = \frac{1}{4}\, a \left\{ \alpha \left(\frac{5}{2}\, \alpha - \beta \right) - \delta \right\} \mathrm{sen}^2 2\varphi + \ldots;$$

Esso è massimo per $\varphi = 45°$, e coi valori delle costanti rispondenti ai dati sperimentali, questo valor massimo ammonta a circa 19^m.

Come il prof. Pizzetti ha mostrato nella sua Nota del 1900, precedentemente citata, le due formole (1) e (4) rientrano l'una nell'altra, quando in entrambe si tenga soltanto conto dei termini del 1° ordine.

Volendo avere un nuovo raffronto, abbiamo pensato di applicarle al calcolo delle dimensioni della superficie di livello limite, di quella superficie cioè, per cui è nulla la gravità all'equatore (*): in questa determinazione abbiamo spinto l'approssimazione fino al 2° ordine incluso. Le dimensioni della superficie limite, così calcolate per doppia via, risultano fra loro in buonissimo accordo, quasi coincidenti.

Che dovessero risultare poco differenti, ciò era prevedibile, atteso il debole scostamento che lo sferoide di livello presenta da un ellissoide di uguale schiacciamento: tuttavia non si poteva certo asserire l'accordo in quella misura in cui è risultato. Ne viene così, in pari tempo, dimostrato quanto le due idealizzazioni di massa necessarie alla validità delle due formole, si accostino l'una all'altra, e come, nel fatto, la formola di Pizzetti equivalga quella dianzi citata di Helmert, almeno nell'ordine di approssimazione da noi tenuto, e per le distanze considerate.

Si consideri dunque la (1); derivando in essa rispetto ad r, indicando con a_1 il semiasse equatoriale della superficie di livello limite, e ponendo $\operatorname{sen}\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$, si avrà per la determinazione di a_1 l'equazione seguente:

$$0 = 1 + \frac{3K}{2a_1^2} - \frac{\omega^2 a_1^3}{Mk^2} + \frac{3}{7}\frac{D}{a_1^4}.$$

Indicando, come precedentemente, con a il semiasse equatoriale dello sferoide terrestre, la precedente equazione si può scrivere:

$$\frac{\omega^2 a^3}{Mk^2}\left(\frac{a_1}{a}\right)^3 = 1 + \frac{3K}{2a^2}\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 + \frac{3}{7}\frac{D}{a^4}\left(\frac{a}{a_1}\right)^4; \tag{8}$$

questa equazione, risolta per successive approssimazioni, noti che sieno i suoi coefficienti, ci darà il valore di a_1.

(*) Questo calcolo è già fatto in via approssimata nel 2° volume dell'opera di Helmert, pag. 100, sulla formola (1) arrestata al 1° ordine.

Questi coefficienti, come già si disse, si deducono dalle (3): risolvendo infatti questo sistema, nell'ipotesi che siano dati a, b, la velocità angolare $\omega = \frac{2\pi}{86164,09}$ e la gravità all'equatore:

$$g_a = 9,78046^{m}$$

(valore che corrisponde alla formola:

$$g = 9,78046\ (1 + 0,005302 \operatorname{sen}^2\varphi)$$

ottenuta da Helmert nel 1901), si ottiene:

$$\text{nel caso delle dimensioni di Bessel} \begin{cases} a = 6377397^{m} \\ b = 6356079^{m} \end{cases}$$

$$(9) \qquad \begin{array}{ll} \alpha = 0,00334274 & \gamma = 0,00346730 \\ \dfrac{3K}{2a^2} = 0,00160909 & \beta = 0,00530126 \\ \dfrac{\omega^2 a^3}{Mk^2} = 0,00346094 & \delta = -\ 0,00002547 \end{array}$$

$$\text{e nel caso delle dimensioni di Clarke} \begin{cases} a = 6378249^{m} \\ b = 6356615^{m} \end{cases}$$

$$(9^{bis}) \qquad \begin{array}{ll} \alpha = 0,00340752 & \gamma = 0,00346776 \\ \dfrac{3K}{2a^2} = 0,00167364 & \beta = 0,00523773 \\ \dfrac{\omega^2 a^3}{Mk^2} = 0,00346162 & \delta = -\ 0,00002324 \end{array}$$

Sostituendo questi valori nella (8), e risolvendola per successive approssimazioni si ottiene:

$$(10) \begin{cases} \text{per le dimensioni di Bessel } a_1 = 6,611103 . a = 42161600^{m} \\ \quad \text{"} \qquad \text{"} \qquad \text{Clarke } a_1 = 6,610673 . a = 42164500^{m} \end{cases}$$

Quanto al semiasse polare b_1, se si indica con U_1 il valore

che il primo membro della (1) assume nei punti della superficie limite, sarà evidentemente:

$$U_1 = \frac{Mk^2}{a_1}\left\{1 + \frac{K}{2a_1^2} + \frac{\omega^2 a_1^3}{2Mk^2} + \frac{3}{35}\,\frac{D}{a_1^4}\right\},$$

onde la (1) stessa potrà scriversi:

$$\frac{Mk^2}{a_1}\left\{1 + \frac{K}{2a_1^2} + \frac{\omega^2 a_1^3}{2Mk^2} + \frac{3}{35}\,\frac{D}{a_1^4}\right\} =$$

$$= \frac{Mk^2}{r}\left\{1 + \frac{K}{2r^2}(1 - 3\,\mathrm{sen}^2\varphi) + \frac{\omega^2 r^2}{2Mk^2}\cos^2\varphi + \frac{D}{r^4}\left(\mathrm{sen}^4\varphi - \frac{6}{7}\mathrm{sen}^2\varphi + \frac{3}{35}\right)\right\},$$

o anche, ponendo $\mathrm{sen}\,\varphi = 1$, $\cos\varphi = 0$, eseguendo i calcoli e le riduzioni necessarie:

$$\frac{8}{35}\,\mathfrak{d}\left(\frac{a}{a_1}\right)^4\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^5 - \frac{K}{a^2}\left(\frac{a}{a_1}\right)^2\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^3 + \frac{a_1}{b_1} - \frac{a_1}{Mk^2}\,U_1 = 0,$$

equazione del 5° grado, che ci determina il rapporto $\frac{a_1}{b_1}$.

Risolvendo ancor qui per successive approssimazioni, si ottiene:

$$(11)\quad \begin{cases} \text{Secondo le dimens. di Bessel } b_1 = 0{,}666616 . a_1 = 28105600^{\mathrm{m}} \\ \quad\text{„} \qquad\qquad \text{„} \qquad \text{Clarke } b_1 = 0{,}666614 . a_1 = 28107500^{\mathrm{m}}. \end{cases}$$

Consideriamo ora la espressione di Pizzetti:

$$(12)\quad U = \frac{k^2\left(M + \frac{2}{3}\pi\rho a^2 b\right)}{(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{arctg}\,\mathsf{E} - \frac{2k^2\pi\rho a^2 b}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}\,(\mathsf{E} - \mathrm{arctg}\,\mathsf{E})z^2 -$$

$$- \frac{k^2\pi\rho a^2 b}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\mathrm{arctg}\,\mathsf{E} - \frac{\mathsf{E}}{1 + \mathsf{E}^2}\right)(x^2 + y^2) + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2),$$

dove E, λ, ρ sono definiti dalle (5) e (6), quando si supponga conosciuto Mk^2 e $k^2\rho$.

Per i punti del piano equatoriale la (12) diviene:

$$(13)\quad U = \frac{k^2\left(M + \frac{2}{3}\pi\rho a^2 b\right)}{(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{arctg}\,\mathsf{E} - \frac{k^2\pi\rho a^2 b}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\mathrm{arctg}\,\mathsf{E} - \frac{\mathsf{E}}{1 + \mathsf{E}^2}\right)r^2 + \frac{\omega^2}{2}r^2.$$

dove:

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

e dove E, λ saranno definiti dalle nuove relazioni:

$$\frac{r^2}{a^2+\lambda} = 1 \qquad \mathsf{E} = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2+\lambda}}.$$

La derivata dell'espressione (13) di U, rispetto ad r, rappresenta la gravità nel piano equatoriale; per la superficie limite questa derivata è nulla, onde, eseguiti i calcoli ed alcune riduzioni, ed indicato con a_2 il semidiametro equatoriale di essa superficie, avremo per la determinazione di a_2 l'equazione seguente:

$$\frac{k^2\left(M+\frac{2}{3}\pi\rho a^2 b\right)}{a} \frac{1}{a_2\sqrt{\left(\frac{a_2}{a}\right)^2 - \frac{a^2-b^2}{a^2}}} +$$

$$+ k^2\pi\rho\,\frac{b}{a}\left(\frac{a^2}{a^2-b^2}\right)^{\frac{3}{2}} 2a_2 \operatorname{arctg} \frac{\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\left(\frac{a_2}{a}\right)^2 - \frac{a^2-b^2}{a^2}}} -$$

$$- 2k^2\pi\rho\,\frac{b}{a}\,\frac{a^2}{a^2-b^2}\,\frac{a_2}{\sqrt{\left(\frac{a_2}{a}\right)^2 - \frac{a^2-b^2}{a^2}}} - \omega^2 a_2 = 0.$$

Come si disse, a e b rappresentano i due semiassi dell'ellissoide fondamentale; assumendo come tale l'ellissoide terrestre, e indicandone con e l'eccentricità, l'equazione precedente potrà ancora scriversi:

$$\frac{k^2\left(M+\frac{2}{3}\pi\rho a^2 b\right)}{a} \frac{1}{a_2\sqrt{\left(\frac{a_2}{a}\right)^2 - e^2}} +$$

$$+ \frac{k^2\pi\rho\sqrt{1-e^2}}{e^3}\, 2a_2 \operatorname{arctg} \frac{e}{\sqrt{\left(\frac{a_2}{2}\right)^2 - e^2}} -$$

$$- \frac{2k^2\pi\sqrt{1-e^2}}{e^2}\,\frac{a_2}{\sqrt{\left(\frac{a_2}{a}\right)^2 - e^2}} - \omega^2 a_2 = 0.$$

Posto:

$$\xi^2 = \left(\frac{a_2}{a}\right)^2 - e^2$$

avremo ancora, riducendo:

$$\frac{k^2\left(M + \frac{2}{3}\pi\rho a^2 b\right)}{a^3} - 2k^2\pi\rho\sqrt{1-e^2} + 2k^2\pi\rho\frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3}\xi(e^2+\xi^2)\operatorname{arctg}\frac{e}{\xi} -$$

$$- \frac{2k^2\pi\rho\sqrt{1-e^2}}{e^2}\xi^2 - \omega^2\xi(e^2+\xi^2) = 0.$$

Scriveremo per semplicità quest' equazione nella maniera seguente:

$$A + B\xi(\xi^2 + e^2)\operatorname{arctg}\frac{e}{\xi} + C\xi^2 - \omega^2\xi(\xi^2+e^2) = 0; \tag{16}$$

allora è facile vedere che, fatte le posizioni:

$$m = \frac{A}{e^2}, \quad n = C - \frac{A}{e^2}, \quad \mathsf{E}_1 = \frac{e}{\xi},$$

dove E_1 risulta il valor di E all'equatore della superficie limite, quest'ultima equazione potrà ancora scriversi:

$$eB\operatorname{arctg}\mathsf{E}_1 + m\mathsf{E}_1 + n\frac{\mathsf{E}_1}{1+\mathsf{E}_1^2} - e\omega^2 = 0. \tag{17}$$

A questa relazione rigorosa dovrà soddisfare E_1, e perciò a_2, semidiametro equatoriale della superficie di livello estrema, di cui E_1 è funzione.

Per risolvere con approssimazione la (17) è però necessario ricorrere agli sviluppi in serie.

Sviluppando $\operatorname{arctg}\mathsf{E}_1$ ed $\frac{1}{1+\mathsf{E}_1^2}$, e arrestandoci ai termini in E_1^3 inclusi, avremo:

$$eB\left(\mathsf{E}_1 - \frac{\mathsf{E}_1^3}{3}\right) + m\mathsf{E}_1 + n\mathsf{E}_1(1-\mathsf{E}_1^2) - e\omega^2 = 0,$$

da cui, semplificando:

$$\mathsf{E}_1^3\left(\frac{eB}{3} + n\right) - \mathsf{E}_1(m+n+eB) + e\omega^2 = 0.$$

Sostituendo alle lettere le espressioni che esse rappresentano, si vede subito che il coefficiente del 2° termine è nullo; onde E_1 è la radice reale dell'equazione del 3° grado binomia:

$$E_1^3\left(\frac{eB}{3}+n\right)+e\omega^2=0; \tag{18}$$

cioè:

$$E_1=\frac{ae\omega}{\sqrt[3]{Mk^2\omega}}. \tag{18'}$$

Ponendo per E_1 il suo valore:

$$E_1=\frac{e}{\xi}=\frac{e}{\sqrt{\left(\frac{a_2}{a}\right)^2-e^2}},$$

avremo:

$$\left(\frac{a_2}{a}\right)^2=\left(\frac{Mk^2}{\omega^2a^3}\right)^{\frac{2}{3}}+e^2,$$

ossia:

$$\frac{a_2}{a}\left\{\left(\frac{Mk^2}{\omega^2a^3}\right)^{\frac{2}{3}}+e^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{19}$$

Perchè questa relazione ci permetta effettivamente la deduzione di a_2, occorrerà determinare la quantità $\frac{Mk^2}{\omega^2a^3}$.

Come già fu detto in principio, essa si ricaverà in base ai dati sperimentali con l'aiuto delle formole (7), di cui la prima ci definisce il modo di variazione della gravità alla superficie del Geoide, supposto di forma ellissoidica.

Dalle due formole anzidette, posto $\varphi=0$, $g=g_a$, sarà facile ricavare:

$$\frac{Mk^2}{\omega^2a^3}=\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}}\left(\frac{g_a}{\omega^2a}+\frac{3}{14}\epsilon^2+\frac{3}{2}\right), \tag{20}$$

essendo:

$$\epsilon^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$$

$$g_a=9{,}78046,$$

ed essendo la (20), in conformità a quanto precede, approssimata fino al 2° ordine incluso.

Attribuendo all'ellissoide terrestre, che noi abbiamo assunto come ellissoide fondamentale, le dimensioni degli ellissoidi di Bessel e di Clarke, si ottiene rispettivamente:

$$(21)\qquad \begin{cases} \dfrac{Mk^2}{\omega^2 a^3} = 288{,}941258 \\ \\ \dfrac{Mk^2}{\omega^2 a^3} = 288{,}884121, \end{cases}$$

ed in corrispondenza di questi valori, dalla (19), per il semiasse equatoriale della superficie di livello limite:

$$(22)\qquad \begin{cases} \text{secondo le dimens. di Bessel } a_2 = a\,.\,6{,}611546 = 42164500^{\mathrm{m}} \\ \qquad\text{"}\qquad\qquad\text{"}\qquad \text{Clarke } a_2 = a\,.\,6{,}611120 = 42167300^{\mathrm{m}}. \end{cases}$$

Proponiamoci di determinare ora sulla (12) il semiasse polare b_2 della superficie di livello limite.

Porremo per semplicità la (12) sotto la forma seguente:

$$(23)\qquad U = A \operatorname{arctg} \mathsf{E} - B(\mathsf{E} - \operatorname{arctg} \mathsf{E})z^2 -$$
$$- C\left(\operatorname{arctg} \mathsf{E} - \frac{\mathsf{E}}{1+\mathsf{E}^2}\right)(x^2+y^2) + \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2);$$

introducendo le quantità E_1 ed a_2, e facendo $z = 0$, questa espressione ci fornisce il valore U_1 del potenziale della gravità per la superficie limite, che potremo ancora scrivere:

$$U_1 = A \operatorname{arctg} \mathsf{E}_1 - C \operatorname{arctg} \mathsf{E}_1 \,.\, a_2^2 + \frac{C\mathsf{E}_1}{1+\mathsf{E}_1{}^2}\, a_2^2 + \frac{\omega^2}{2}\, a_2^2;$$

ponendo ancora:

$$\operatorname{sen} \theta_1 = \frac{ae}{a_2}$$

otterremo infine:

$$(24)\qquad U_1 = \theta_1(A - Ca_2^2) + Ca^2e^2 \operatorname{cotg} \theta_1 + \frac{\omega^2}{2}\, a_2^2,$$

formola abbastanza comoda per il calcolo della costante U_1, mentre l'equazione della superficie limite si scriverà:

$$U_1 = A \operatorname{arctg} \mathsf{E} - B(\mathsf{E} - \operatorname{arctg} \mathsf{E})z^2 -$$
$$- C\left(\operatorname{arctg} \mathsf{E} - \frac{\mathsf{E}}{1+\mathsf{E}^2}\right)(x^2+y^2) + \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2).$$

Facendo in questa $x^2 + y^2 = 0$, la z diviene il semiasse minore b_2, e allora indicando con E_2 il valore di E nel polo dell'anzidetta superficie, ne verrà:

$$U_1 = A \operatorname{arctg} \mathsf{E}_2 - B(\mathsf{E}_2 - \operatorname{arctg} \mathsf{E}_2) b_2^2;$$

è facile vedere che risulta:

$$\mathsf{E}_2 = \frac{ae}{b_2},$$

avremo quindi, per la determinazione di b_2, la seguente equazione rigorosa:

$$(25) \qquad (A + Bb_2^2) \operatorname{arctg} \frac{ae}{b_2} - Baeb_2 = U_1,$$

ove per U_1 andrà inteso sostituito il valore dato dalla (24).

Ponendo $\frac{1}{\eta} = \frac{ae}{b_2}$ $\left(\text{si noti che } \frac{1}{\eta} \text{ risulta minore di } \frac{e}{4}\right)$, sviluppando in serie arctg, ed arrestando lo sviluppo ai termini nella 3ª potenza inclusi, la (25) diviene:

$$A \frac{1}{\eta} - \frac{A}{3} \frac{1}{\eta^3} - B \frac{a^2e^2}{3} \frac{1}{\eta} = U_1;$$

onde avremo infine, per determinare b_2, la seguente equazione del 3° grado:

$$(26) \qquad 3U_1\eta^3 + (Ba^2e^2 - 3A)\eta^2 + A = 0.$$

Resta a calcolare il valore numerico di U_1 e degli altri coefficienti.

Trasformiamo, innanzitutto, l'espressione di U_1.

Dalla relazione:

$$\frac{\omega^2}{2\pi k^2 \rho} = \frac{3 + \epsilon^2}{\epsilon^3} \operatorname{arctg} \epsilon - \frac{3}{\epsilon^2},$$

sviluppando in serie arctg, e calcolando ϵ dalla:

$$\epsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{e^2}{1 - e^2},$$

sarà facile ricavare:

$$\rho = \tau \frac{\omega^2}{\pi k \epsilon^2},$$

essendo τ un coefficiente numerico, suscettibile di essere calcolato con quell'approssimazione che si vorrà.

Tenendo allora altresì conto della relazione:

$$\left(\frac{Mk^2}{\omega^2 a^3}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{e}{E_1^2},$$

che segue subito dalla (18'), i coefficienti della (24) si potranno, dopo breve calcolo, esprimere così:

$$A - Ca_2^2 = \frac{\omega^2}{e}\left(\frac{a^2e^2}{E_1^3} - \frac{1}{3}\frac{ab\tau}{\epsilon^2} - \frac{ab\tau}{E_1^2\epsilon^2}\right)$$

$$Ca^2e^2 = \frac{\omega^2}{e}\frac{ab\tau}{\epsilon^2};$$

onde l'espressione di U_1 diverrà:

$$(27)\quad U_1 = \theta_1 \frac{\omega^2}{e}\left(\frac{a^2e^3}{E_1^3} - \frac{1}{3}\frac{ab\tau}{\epsilon^2} - \frac{ab\tau}{E_1^2\epsilon^2}\right) + \frac{\omega^2}{e}\frac{ab\tau}{\epsilon^2}\operatorname{cotg}\theta_1 + \frac{\omega^2}{2}a_2^2.$$

Gli altri due coefficienti che compaiono nella (26) si possono subito determinare, e si ottiene:

$$A = \frac{k^2M}{ae} + \frac{2}{3}k^2\pi\rho\frac{ab}{e}, \qquad Ba^2e^2 - 3A = -\frac{3k^2M}{ae}.$$

Sostituendo questi valori, ed eziandio l'espressione (27) di U_1 nella (26) sarà facile, dopo alcune semplificazioni, ridurre la (26) stessa alla forma seguente:

$$3\eta^3\left\{\theta_1\left[\frac{a^2e^2}{E_1^3} - \frac{ab\tau}{\epsilon^2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{E_1^2}\right)\right] + \frac{ab\tau}{\epsilon^2}\operatorname{cotg}\theta_1 + \frac{a_2^2e}{2}\right\} -$$

$$-\eta^2\frac{3a^2e^2}{E_1^3} + \left(\frac{a^2e^3}{E_1^3} + \frac{2}{3}\frac{ab\tau}{\epsilon^2}\right) = 0.$$

Infine, tenuto conto che:

$$\epsilon^2 = \frac{e^2}{1-e^2}.$$

la precedente equazione, divisa per $3a^2$, diverrà:

$$(28)\quad \eta^3 \left\{ \theta_1 \left[\frac{e^3}{E_1^3} - \tau \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{e^2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{E_1^2} \right) \right] + \tau \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{e^2} \operatorname{cotg} \theta_1 + \frac{e}{2} \left(\frac{a_2}{a} \right)^2 \right\} -$$
$$- \frac{e^3}{E_1^3} \eta^2 + \frac{1}{3} \left[\frac{e^3}{E_1^3} + \frac{2}{3} \tau \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{e^2} \right] = 0.$$

Questa è l'equazione che determina il semiasse polare b_2; il calcolo dei suoi coefficienti, per quanto voglia essere accurato, non presenta difficoltà alcuna.

Tenendo i valori relativi all' ellissoide di Bessel, la (28) diviene:

$$5{,}35578\eta^3 - 288{,}941258\eta^2 + 158{,}47365 = 0;$$

risolvendola per approssimazione si trova:

$$\eta = 53{,}9393;$$

ne risulta:

$$(29)\qquad b_2 = 28103100^{\text{m}}.$$

Tenendo, invece, i valori relativi all'ellissoide di Clarke, la (28) stessa diviene:

$$5{,}40648\eta^3 - 288{,}88412\eta^2 + 157{,}27041 = 0,$$

da cui:

$$\eta = 53{,}4228;$$

si trova in corrispondenza:

$$(30)\qquad b_2 = 28105600^{\text{m}}.$$

Ricordando così i valori (10) e (11), abbiamo il quadro seguente:

Semiasse equatoriale della superficie limite.

Per le dimensioni di Bessel	Per le dimensioni di Clarke	
$a_1 = 42161600^m$	$a_1 = 42164500^m$	secondo Helmert
$a_2 = 42164500^m$	$a_2 = 42167300^m$	" Pizzetti
$a_1 - a_2 = - \quad 2900^m$	$a_1 - a_2 = - \quad 2800^m$	

Semiasse polare della superficie limite.

$b_1 = 28105600^m$	$b_1 = 28107500^m$	secondo Helmert
$b_2 = 28103100^m$	$b_2 = 28105600^m$	" Pizzetti
$b_1 - b_2 = + \quad 2500^m$	$b_1 - b_2 = + \quad 1900^m$	

Da questo specchio si vede come le differenze fra i valori dei due semiassi, ottenuti con i due metodi, siano assai esigue, rispetto alle dimensioni dei semiassi stessi; la differenza maggiore 2900^m, rappresenta circa $\frac{1}{15000}$ del semiasse equatoriale.

Se ne può quindi concludere che le due formule considerate fino alle quantità del 2° ordine incluso si equivalgono per distanze dalla superficie terrestre, uguali alle dimensioni della superficie di livello limite; le quali dimensioni, se in sè stesse sono rilevanti, divengono ben discrete rispetto al raggio terrestre (il semiasse polare è poco più di quattro raggi terrestri).

Tenuto conto delle dimensioni dei due semiassi, l'accordo risulta poi maggiore per il semiasse equatoriale, come era facilmente prevedibile.

Come si accennò in principio, il calcolo delle dimensioni della superficie limite è fatto, in via approssimata, nel trattato di Helmert, sulla formola da lui impiegata per il potenziale della gravità terrestre, arrestata ai termini del 1° ordine.

Ivi si mostra come la superficie di livello in discorso, presenti uno spigolo all'equatore, e si determina l'angolo che le due tangenti alla sezione meridiana, ugualmente inclinate ma in verso contrario, sul raggio equatoriale, formano ivi con questo stesso: detto angolo risulta uguale a 60°.

Proponiamoci la medesima ricerca sulla formola del prof. Pizzetti, come ulteriore controllo agli sviluppi analitici precedenti.

L'equazione che si ottiene uguagliando l'espressione (23) di U ad una costante, cioè:

$$(31)\quad A \operatorname{arctg} \mathsf{E} - B(\mathsf{E} - \operatorname{arctg} \mathsf{E}) z^2 - C\left(\operatorname{arctg} \mathsf{E} - \frac{\mathsf{E}}{1+\mathsf{E}^2}\right) r^2 + \frac{\omega^2}{2} r^2 = \text{cost},$$

dove con r si è indicato il raggio del parallelo, e la funzione E si intende espressa per z ed r, mediante le relazioni:

$$(32)\qquad \mathsf{E} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + \lambda}} \qquad \frac{z^2}{b^2 + \lambda} + \frac{r^2}{a^2 + \lambda} = 1,$$

ci rappresenta la sezione meridiana di una superficie di livello qualunque.

La tangente trigonometrica dell'angolo formato dalla tangente alla curva meridiana col raggio equatoriale, è data da:

$$\frac{dz}{dr} = -\frac{\dfrac{\partial U}{\partial r}}{\dfrac{\partial U}{\partial z}}.$$

Formando queste due derivate in base alle equazioni (31) e (32) si ottiene:

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{A}{1+\mathsf{E}^2}\frac{\partial \mathsf{E}}{\partial r} - Bz^2\left(\frac{\partial \mathsf{E}}{\partial r} - \frac{1}{1+\mathsf{E}^2}\frac{\partial \mathsf{E}}{\partial r}\right) - 2rC\left(\operatorname{arctg} \mathsf{E} - \frac{\mathsf{E}}{1+\mathsf{E}^2}\right) -$$

$$- Cr^2\left[\frac{1}{1+\mathsf{E}^2}\frac{\partial \mathsf{E}}{\partial r} - \frac{1-\mathsf{E}^2}{(1+\mathsf{E}^2)^2}\frac{\partial \mathsf{E}}{\partial r}\right] + \frac{\omega^2}{2} r$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{A}{1+\mathsf{E}^2}\frac{\partial \mathsf{E}}{\partial z} - B\left[2z(\mathsf{E} - \operatorname{arctg} \mathsf{E}) + z^2\left(\frac{\partial \mathsf{E}}{\partial z} - \frac{1}{1+\mathsf{E}^2}\frac{\partial \mathsf{E}}{\partial z}\right)\right] -$$

$$- Cr^2\left[\frac{1}{1+\mathsf{E}^2}\frac{\partial \mathsf{E}}{\partial z} - \frac{1-\mathsf{E}^2}{(1+\mathsf{E}^2)^2}\frac{\partial \mathsf{E}}{\partial z}\right] = 0;$$

essendo:

$$\frac{\partial \mathsf{E}}{\partial r} = -r\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + \lambda}} \; \frac{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)}{z^2(a^2+\lambda)^2 + r^2(b^2+\lambda)^2},$$

$$\frac{\partial \mathsf{E}}{\partial z} = -z\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + \lambda}} \; \frac{(a^2+\lambda)^2}{z^2(a^2+\lambda)^2 + r^2(b^2+\lambda)^2}.$$

Queste equazioni mostrano che all'equatore si ha sempre $\frac{\partial U}{\partial z} = 0$, qualunque sia la superficie di livello, il che significa che la curva meridiana incontra sempre ad angolo retto il raggio equatoriale, come del resto poteva prevedersi, dovendo la tangente risultar normale alla direzione della forza.

Per la superficie limite si ha ancora $\frac{\partial U}{\partial r} = 0$ per ipotesi: la curva meridiana presenta dunque all'equatore un punto singolare.

Per decidere ulteriormente sulla singolarità della curva, bisogna allora, com'è noto, ricorrere all'equazione di 2° grado:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)_1 \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial r}\right)_1 \frac{dz}{dr} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right)_1 = 0, \tag{33}$$

ove si sono contrassegnati con l'indice 1 i valori delle derivate nel punto considerato.

Eseguendo i calcoli e le riduzioni opportune, si vede che $\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial r}$ risulta nulla, e che le due radici dell'equazione, le quali saranno perciò uguali e di segno contrario, risultano reali.

La singolarità sarà così costituita da un punto doppio; vi saranno due tangenti, ugualmente inclinate e in verso contrario, rispetto al raggio equatoriale.

La forma che l'equazione precedente assume coi simboli da noi adoperati, è la seguente:

$$\left\{ \frac{e^3}{E_1^3} + 4\tau \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{e^2} \left(\frac{1}{E_1^2} - \frac{1}{3} - \frac{\theta_1}{E_1^3} \right) \right\} \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 -$$

$$- \left\{ \frac{e^3}{E_1^3} \left(3 - \frac{a^2 e^2}{a_1^2} \right) + \frac{2\tau(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{e^3} \frac{a^2 e^2}{3 a_1^2} + \frac{1}{E_1^2} - \frac{1}{3} - \frac{\theta_1}{E_1^3} \right) \right\} = 0.$$

Sostituendo i valori relativi ai due ellissoidi di Bessel e di Clarke risulta che l'inclinazione in discorso è:

Per le dimensioni di Bessel $\alpha = 59°52'$
" " Clarke $\alpha = 60°00'$

in accordo col valore di Helmert.

Roma, 17 febbraio 1906.

Sulla attrazione degli strati ellissoidali e sulle funzioni armoniche ellissoidali.

Nota del Socio GIACINTO MORERA.

§ I. — Consideriamo l'ellissoide di equazione:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{1}$$

Questa equazione risulta identicamente soddisfatta ponendo:

$$x=a\,\mathrm{sen}\theta\cos\omega,\quad y=b\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\omega,\quad z=c\cos\theta; \tag{2}$$

sicchè facendo variare θ da 0 a π e ω da 0 a 2π il punto (x, y, z) prende tutte le possibili posizioni sull'ellissoide.

Data ad arbitrio sull'ellissoide una funzione Π colla trasformazione (2) essa si converte in una funzione φ, data sulla sfera Σ di raggio 1, e questa si può sviluppare in una serie di funzioni sferiche:

$$\varphi=\varphi_0+\varphi_1+\varphi_2+\dots$$

ove, com'è ben noto:

$$\varphi_n=\frac{2n+1}{4\pi}\int\varphi(\theta',\omega')P_n(\cos\psi)\,d\Sigma',$$

$$\cos\psi=\cos\theta\cos\theta'+\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\theta'\cos(\omega-\omega'),$$

e P_n indica il polinomio di Legendre dell'n$^{\text{mo}}$ ordine.

Ma si può scrivere:

$$\cos\psi=\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\theta'\cos\omega\cos\omega'+\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\theta'\,\mathrm{sen}\omega\,\mathrm{sen}\omega'+\cos\theta\cos\theta',$$

sicchè ponendo:

$$x'=a\,\mathrm{sen}\theta'\cos\omega',\quad y'=b\,\mathrm{sen}\theta'\,\mathrm{sen}\omega',\quad z'=c\cos\theta', \tag{2'}$$

si ha:

$$\cos\psi = \frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2}.$$

Inoltre, considerate θ e ω come coordinate curvilinee sull'ellissoide e detto dS il corrispondente elemento superficiale, si ha:

$$dS = \sqrt{\left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,\omega)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,\omega)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\omega)}\right]^2} . \, d\theta\, d\omega.$$

Fatto il calcolo per mezzo delle (2) il radicale risulta uguale a

$$abc\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}.$$

D'altra parte

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} = \operatorname{sen}\theta; \quad \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\omega = d\Sigma;$$

dunque:

$$dS = \frac{abc}{P}\, d\Sigma, \quad P = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}},$$

formula nota.

Se diciamo Π_n quella funzione in cui si converte la φ_n quando in luogo delle variabili ausiliarie θ, ω si introducono per mezzo delle (2) le coordinate x, y, z, sarà:

$$\Pi_n = \frac{2n+1}{4\pi abc}\int \Pi(x', y', z')\, P_n\left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2}\right) P' dS',$$

ove P' indica la perpendicolare calata dal centro dell'ellissoide sul piano tangente, condotto per l'elemento dS', e l'integrazione va estesa a tutta la superficie dell'ellissoide. Abbiamo così uno sviluppo di una funzione Π data sull'ellissoide in una serie di polinomii:

$$\Pi = \Pi_0 + \Pi_1 + \dots$$

sviluppo che è legittimo qualora la Π soddisfi a certe late condizioni che furono stabilite da Dirichlet e da Dini (*).

(*) Cfr. C. Neumann, *Ueber die nach, Kreis-, Kugel-, und Cylinder-Functionen fortschreitenden Entwickelungen* (Leipzig, 1881).

Consideriamo lo sviluppo di un'altra funzione χ, parimenti data sull'ellissoide:

$$\chi = \chi_0 + \chi_1 + \ldots;$$

sarà:

$$\int \Pi_n \chi \,.\, PdS = \frac{2n+1}{4\pi abc} \int \Pi(x',y',z')\, P'dS' \int \chi P_n\left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2}\right) PdS =$$
$$= \int \chi_n \Pi \,.\, PdS\,,$$

dunque:

$$\int (\Pi_n \chi - \chi_n \Pi)\, PdS = 0.$$

Questa relazione riassume le note proprietà integrali delle funzioni sferiche. Così assunto $\chi = \chi_{n'}$, se n è differente da n', sarà $\chi_n = 0$, e quindi:

$$\int \Pi_n \chi_{n'} \,.\, PdS = 0.$$

§ II. — Sviluppiamo in serie di polinomii l'inversa della distanza fra un punto fisso qualunque (x, y, z) ed un punto (x', y', z'), mobile sull'ellissoide. Avremo:

$$\chi_n = \frac{2n+1}{4\pi abc} \int \frac{P_n\left(\frac{x'x''}{a^2} + \frac{y'y''}{b^2} + \frac{z'z''}{c^2}\right)}{\sqrt{(x''-x)^2 + (y''-y)^2 + (z''-z)^2}}\, P''dS''.$$

Adunque χ_n è la funzione potenziale dello strato ellissoidale di densità:

$$h_n = \frac{2n+1}{4\pi abc}\, P \,.\, P_n\left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2}\right).$$

Vedremo fra breve che questa funzione potenziale si può subito esprimere colle armoniche ellissoidali considerate nella mia memoria *Sulla attrazione degli ellissoidi* (" Mem. della R. Acc. delle Scienze di Torino ", Serie II, Vol. LV) con che a mio credere viene fatto un passo importante nella teoria delle armoniche stesse. Trovato lo sviluppo della funzione

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}} = \frac{1}{r} = \chi_0 + \chi_1 + \ldots.$$

avremo immediatamente lo sviluppo della funzione potenziale dello strato ellissoidale di densità $P.\Pi$, giacchè:

$$\int \frac{\Pi_n}{r} P' dS' = \int \Pi \chi_n P' dS'.$$

Così lo sviluppo della funzione potenziale dello strato ellissoidale uniforme si avrà ponendo: $\Pi = \frac{1}{P'}$, e cioè sarà:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int \chi_n \, dS'.$$

§ III. — Si ponga:

$$\mu = 1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}, \quad \mathfrak{R}(s) = \sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}$$

e si indichi con s_0 lo zero, ovvero la maggior radice dell'equazione $\mu = 0$, secondochè il punto (x, y, z) è interno, oppure esterno all'ellissoide:

$$\mu_0 \equiv 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Ciò posto, la funzione

$$V = \pi abc \sum_{p,q,r} \alpha_{p,q,r} \frac{\partial^n}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r} \int_{s_0}^{\infty} \frac{\mu^n ds}{\mathfrak{R}(s)} \qquad (p+q+r=n) \tag{3}$$

è la funzione potenziale dello strato di densità:

$$h = -(-2)^{n-1} n! \, P . \sum_{p,q,r} \alpha_{p,q,r} \left(\frac{x}{a^2}\right)^p \left(\frac{y}{b^2}\right)^q \left(\frac{z}{c^2}\right)^r, \tag{4}$$

e del corpo ellissoidico di densità:

$$k = n \sum_{p,q,r} \alpha_{p,q,r} \frac{\partial^n \mu_0^{n-1}}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r} \ (*).$$

(*) Vedi il § 7 della mia Memoria già citata.

Posto:

$$\nu = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2},$$

quest'ultima espressione si può trasformare come segue (*):

$$k = \frac{n}{\nu - 1} \sum_{p',q',r'} \left\{ \frac{p'+1 . p'+2}{a^2} \alpha_{p'+2,q',r'} + \frac{q'+1 . q'+2}{b^2} \alpha_{p',q'+2,r'} + \frac{r'+1 . r'+2}{c^2} \alpha_{p',q',r'+2} \right\}$$

$$\times \frac{\partial^{n-2}(1-\nu)^{n-1}}{\partial x^{p'} \partial y^{q'} \partial z^{r'}}, \qquad (p'+q'+r'=n-2).$$

Se ora si pone:

$$Q = \sum_{p,q,r} \alpha_{p,q,r} \left(\frac{x}{a}\right)^p \left(\frac{y}{b}\right)^q \left(\frac{z}{c}\right)^r,$$

si vede subito che il coefficiente in parentesi è quello che moltiplica $\left(\frac{x}{a}\right)^{p'} \left(\frac{y}{b}\right)^{q'} \left(\frac{z}{c}\right)^{r'}$ nella espressione di $\Delta_2 Q$: se dunque Q è un polinomio armonico, omogeneo del grado n, sarà $k=0$ ed allora V è la funzione potenziale dello strato ellissoidale di densità h data dalla (4).

Abbiamo adunque il seguente TEOREMA:

In corrispondenza ad ogni polinomio armonico, omogeneo di grado n, Q(x, y, z) *si ha l'armonica ellissoidale:*

$$\pi abc\, Q\left(a\frac{\partial}{\partial x}, b\frac{\partial}{\partial y}, c\frac{\partial}{\partial z}\right) \int_{s_0}^{\infty} \frac{\mu^n ds}{\mathfrak{R}(s)},$$

che è la funzione potenziale dello strato di densità:

$$h = -(-2)^{n-1} . n! \, P . Q\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right).$$

§ IV. — Consideriamo il seguente polinomio armonico fondamentale:

$$Q_n(x, y, z) = \rho^n \rho'^n P_n\left(\frac{xx' + yy' + zz'}{\rho\rho'}\right),$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \rho' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

(*) Vedi il § 18 della mia Memoria

Poniamo qui invece di x', y', z' rispettivamente: $\frac{x'}{a}$, $\frac{y'}{b}$, $\frac{z'}{c}$ e riguardiamo x', y', z' come coordinate di un punto sovra l'ellissoide fondamentale:

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1.$$

Coll'uso del precedente teorema si ottiene immediatamente la funzione potenziale dello strato di densità:

$$-(-2)^{n-1}n!\,P\,.\,P_n\left(\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}\right).$$

Infatti essendo:

$$P_n(\xi)=\frac{1.3...2n-1}{n!}\left(\xi^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\xi^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}\xi^{n-4}...\right),$$

posto $\frac{x'}{a}$, $\frac{y'}{b}$, $\frac{z'}{c}$ rispettivamente in luogo di x', y', z', si ha:

$$Q_n(x,y,z)=\frac{1.3...2n-1}{n!}\left[\left(\frac{xx'}{a}+\frac{yy'}{b}+\frac{zz'}{c}\right)^n-\right.$$
$$\left.-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\left(\frac{xx'}{a}+\frac{yy'}{b}+\frac{zz'}{c}\right)^{n-2}\rho^2+\dots\right]$$

e per conseguenza la funzione potenziale voluta è:

$$\frac{1.3...2n-1}{n!}\pi abc\left[\left(x'\frac{\partial}{\partial x}+y'\frac{\partial}{\partial y}+z'\frac{\partial}{\partial z}\right)^n-\right.$$
$$-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\left(x'\frac{\partial}{\partial x}+y'\frac{\partial}{\partial y}+z'\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-2}\left(a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+b^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+c^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+...$$
$$+\frac{(-1)^r n\,.\,n-1\,...\,n-2r+1}{2^r.r!2n-1.2n-3...2n-2r+1}\left(x'\frac{\partial}{\partial x}+y'\frac{\partial}{\partial y}+z'\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-2r}\times$$
$$\left.\times\left(a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+b^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+c^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^r+\dots\right]\int_{s_0}^{\infty}\frac{\mu^n ds}{\Re(s)}.$$

Giungiamo così (§ II) allo *sviluppo fondamentale:*

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{r}=\chi_0+\chi_1+...\chi_n+...,\\&\chi_n=-\frac{1.3...2n+1}{(-2)^{n+1}(n!)^2}\left[\left(x'\frac{\partial}{\partial x}+...\right)^n-\right.\\&\left.-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\left(x'\frac{\partial}{\partial x}+...\right)^{n-2}\left(a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+...\right)+...\right]\int_{s_0}^{\infty}\frac{\mu^n ds}{\Re(s)}.\end{aligned}\right.$$

È facile vedere come si modifica questo sviluppo quando il punto (x', y', z') anzichè sull'ellissoide fondamentale si trova sovra un'ellissoide omofocale qualsiasi, di parametro s_0'.

Di qui in particolare segue che ogni armonica ellissoidale è sempre sviluppabile in una serie di armoniche elementari del tipo:

$$\frac{\partial^{p+q+r}}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r} \int_{s_0}^{\infty} \frac{\mu^{p+q+r} ds}{\mathfrak{R}(s)}.$$

Col procedimento spiegato al § I siasi trovato lo sviluppo della funzione Π in serie di polinomi:

$$\Pi = \Pi_0 + \Pi_1 + \ldots.$$

$$\Pi_n(x, y, z) = \varphi_n(\theta, \omega) \equiv \Pi_n(a\,\text{sen}\theta\cos\omega,\ b\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\omega,\ c\cos\theta).$$

Si ponga:

$$\Xi = \rho\,\text{sen}\theta\cos\omega,\ \eta = \rho\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\omega,\ \xi = \rho\cos\theta,$$

$$\rho = \sqrt{\Xi^2 + \eta^2 + \zeta^2};$$

com'è ben noto la funzione $\rho^n\varphi_n$ si converte in un polinomio armonico, omogeneo del grado n:

$$Q_n(\xi, \eta, \zeta) = \rho^n \varphi_n\ (*).$$

Per mezzo di questo polinomio si ottiene immediatamente la funzione potenziale dello strato di densità: $P.\Pi_n$.

Infatti la funzione

$$Q_n\left(a\frac{\partial}{\partial x},\ b\frac{\partial}{\partial y},\ c\frac{\partial}{\partial z}\right) \int_{s_0}^{\infty} \frac{\mu^n ds}{\mathfrak{R}(s)}$$

è pel teorema dimostrato la funzione potenziale dello strato di densità:

$$h = -(-2)^{n-1} n!\, P.Q_n\left(\frac{x}{a},\ \frac{y}{b},\ \frac{z}{c}\right) = -(-2)^{n-1}.n!\, P.\Pi_n.$$

(*) Cfr. p. es. Kirchhoff, *Vorl. über Electrität und Magnetismus*, p. 47-48. Qui conviene ritenere che ogni φ_n sia posta sotto forma di una funzione intera, omogenea, di grado n, dei tre argomenti: $\text{sen}\theta\cos\omega$, $\text{sen}\theta\,\text{sen}\omega$, $\cos\theta$. Allora ogni Π_n è un polinomio, omogeneo, del grado n, in x, y, z.

§ V. — Nella determinazione delle funzioni potenziali degli ellissoidi e degli strati ellissoidali è utile aver sott'occhio alcune identità delle quali ora ci occuperemo.

Dalla relazione identica:

$$(x^2 - k^2)^n = x^{2n} - nx^{2n-2}k^2 + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{2n-4}k^4 - \dots$$
$$- (-1)^n nx^2k^{2n-2} + (-1)^n k^{2n},$$

cambiando n in $n+s$ e derivando $2s$ volte rispetto ad x si ottiene per $\frac{d^{2s}(x^2-k^2)^{n+s}}{dx^{2s}}$ una espressione omogenea del grado n in x^2 e k^2. Sicchè fatto $s=0, 1, 2, \dots, n, n+1$, si ha un sistema di $n+2$ equazioni, lineari in x^{2n}, $x^{2n-2}k^2$, ..., x^2k^{2n-2}, k^{2n}, fra le quali eliminando queste quantità si ottiene:

$$\frac{d^{2n+2}(x^2-k^2)^{2n+1}}{dx^{2n+2}} = \alpha_0 \frac{d^{2n}(x^2-k^2)^{2n}}{dx^{2n}} + \alpha_1 \frac{d^{2n-2}(x^2-k^2)^{2n-1}}{dx^{2n-2}} + \dots$$
$$+ \alpha_s \frac{d^{2n-2s}(x^2-k^2)^{2n-s}}{dx^{2n-2s}} + \dots + \alpha_n (x^2-k^2)^n,$$

ove le α sono coefficienti numerici, dipendenti cioè dal solo intero n.

Sempre collo stesso procedimento, partendo dalla derivata della nostra identità iniziale si ottiene:

$$\frac{d^{2n+1}(x^2-k^2)^{2n}}{dx^{2n+1}} = \alpha_0 \frac{d^{2n-1}(x^2-k^2)^{2n-1}}{dx^{2n-1}} + \dots + \alpha_s \frac{d^{2(n-s)-1}(x^2-k^2)^{2n-s-1}}{dx^{2(n-s)-1}} +$$
$$+ \dots + \alpha_{n-1} \frac{d(x^2-k^2)^n}{dx}.$$

Le formule ottenute si possono compendiare nell'unica:

$$(5) \qquad \frac{d^n(x^2-k^2)^{n-1}}{dx^n} = \sum_{s=0}^{s_n} \alpha_s \frac{d^{n-2-2s}(x^2-k^2)^{n-2-s}}{dx^{n-2-2s}},$$

ov'è da assumersi $s_n = \frac{n-2}{2}$, oppure $s_n = \frac{n-3}{2}$, secondochè n è pari, ovvero impari.

I coefficienti α_s si possono successivamente determinare osservando che se i due membri della (5) si moltiplicano per $x^{n-2-2s}dx$

e si integra fra $-k$ e $+k$, al secondo membro riescono nulli tutti i termini che corrispondono ai valori $0, 1, \ldots, s'-1$ dell'indice s.

Sieno x_0, y_0, z_0 tre indeterminate e si indichi con D l'operazione derivatoria $x_0 \frac{\partial}{\partial x} + y_0 \frac{\partial}{\partial y} + z_0 \frac{\partial}{\partial z}$: allora col processo indicato nel § 18 della mia Memoria *Sull'attrazione degli ellissoidi*, dalla precedente identità si deduce tosto la seguente:

$$(5') \quad D^n(\nu - 1)^{n-1} = \alpha_0 \nu_0 D^{n-2}(\nu - 1)^{n-2} + \alpha_1 \nu_0^2 D^{n-4}(\nu - 1)^{n-3} + \ldots$$
$$+ \alpha_s \nu_0^{s+1} D^{n-2-2s}(\nu - 1)^{n-2-s} + \ldots \quad .$$

Con questa si forma subito la funzione potenziale dell'ellissoide di densità:

$$D^n \mu_0^{n-1} \quad (\mu_0 = 1 - \nu)$$

e quindi si conclude ovviamente, in base a quanto ho esposto al § 7 della mia citata Memoria, che *lo strato ellissoidale di densità:*

$$h = -(-2)^{n-1} n!\, P. \left(\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} \right)^n$$

ha per funzione potenziale:

$$V = \pi abc \Big[D^n \int \frac{\mu^n ds}{\Re(s)} + \frac{n}{n-1} \alpha_0 \nu_0 D^{n-2} \int \frac{\mu^{n-1} ds}{\Re(s)} - \frac{n}{n-2} \alpha_1 \nu_0^2 D^{n-4} \int \frac{\mu^{n-2} ds}{\Re(s)}$$
$$+ \ldots + (-1)^s \frac{n}{n-2-s+1} \alpha_s \nu_0^{s+1} D^{n-2-2s} \int \frac{\mu^{n-2-s+1} ds}{\Re(s)} + \ldots \Big].$$

In queste formule è manifestamente lecito di interpretare i prodotti $x_0^p\, y_0^q\, z_0^r$ come simboli di costanti qualsiasi $\alpha_{p,q,r}$: sicchè con ciò abbiamo effettivamente formata la funzione potenziale dello strato avente per densità il prodotto, per la distanza fra il centro e il piano tangente all'ellissoide, di una funzione intera, omogenea, del grado n^mo^ nelle coordinate.

Se non che qui tale funzione non è esibita in quella forma che assegnai come tipica delle armoniche ellissoidali: il passaggio alla forma tipica si opera ovviamente per mezzo di un'altra identità che conviene impiegare insieme alla (5').

§ VI. — Posto

$$\delta \equiv a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

si trova subito:

$$\delta \mu_0^n = -2n(2n+1)\mu_0^{n-1} + 4n(n-1)\mu_0^{n-2};$$

sicchè, cambiando n in $n+1$, si ha di qui:

$$\mu_0^n = \frac{2n}{2n+3}\mu_0^{n-1} - \frac{\delta \mu_0^{n+1}}{2(n+1)(2n+3)}. \tag{6}$$

Applichiamo a ciascun termine del secondo membro la stessa trasformazione; si ottiene:

$$\mu_0^n = \frac{4.n.n-1}{2n+1.2n+3}\mu_0^{n-2} - \frac{2\delta\mu_0^n}{2n+1.2n+5} + \frac{\delta^2\mu_0^{n+2}}{4.n+1.n+2.2n+3.2n+5}.$$

Continuando collo stesso procedimento si giunge alla relazione:

$$\mu_0^n = \beta_{s0}\mu_0^{n-s} + \beta_{s1}\delta\mu_0^{n-s+2} + \beta_{s2}\delta^2\mu_0^{n-s+4} + \ldots + \beta_{s,s}\delta^s\mu_0^{n+s}, \tag{6'}$$

ove le β sono coefficienti numerici, dipendenti dagli interi n ed s.

In particolare si ha:

$$\mu_0^n = \beta_0 + \beta_1\delta\mu_0^2 + \beta_2\delta^2\mu_0^4 + \ldots + \beta_n\delta^n\mu_0^{2n};$$

sicchè la funzione potenziale dell'ellissoide di densità μ_0^n si può scrivere:

$$\pi abc \left\{ \beta_0 \int \frac{\mu ds}{\Re(s)} + \frac{\beta_1}{3}\delta \int \frac{\mu^3 ds}{\Re(s)} + \frac{\beta_2}{5}\delta^2 \int \frac{\mu^5 ds}{\Re(s)} + \ldots \right\}.$$

Analogamente, essendo $m<n$, si ha:

$$D^m\mu_0^n = D^m \left\{ \beta_{n-m,0}\mu_0^m + \beta_{n-m,1}\delta\mu_0^{m+2} + \ldots + \beta_{n-m,n-m}\delta^{n-m}\mu_0^{2n-m} \right\},$$

per conseguenza la funzione potenziale dell'ellissoide di densità $D^m\mu_0^n$ si può scrivere:

$$\frac{\beta_{n-m,0}}{m+1}D^m\int\frac{\mu^{m+1}ds}{\Re(s)} + \frac{\beta_{n-m,1}}{m+3}D^m\delta\int\frac{\mu^{m+3}ds}{\Re(s)} + \ldots + \frac{\beta_{n-m,n-m}}{2n-m+1}D^m\delta^{n-m}\int\frac{\mu^{2n-m+1}ds}{\Re(s)}.$$

Da ultimo noterò ancora che, mercè la formula (6), la funzione potenziale dell'ellissoide di densità

$$k=\frac{\partial^n \mu_0^n}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r} \qquad (p+q+r=n),$$

si può porre sotto la forma:

$$\pi abc \left\{ \frac{2}{2n+3}\frac{\partial^n}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}\int \frac{\mu^n ds}{\Re(s)} - \frac{\delta}{2(n+1)(n+2)(2n+3)}\frac{\partial^n}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}\int \frac{\mu^{n-2} ds}{\Re(s)} \right\}:$$

si verifica subito infatti che la densità del corrispondente strato superficiale è nulla.

§ VII. — Come risulta dal § 9 della mia Memoria più volte ricordata lo strato ellissoidale di densità:

$$h=\frac{2.(-2)^n (n+2)!}{P}\left(\frac{x_0 x}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}+\frac{z_0 z}{c^2}\right)^n$$

esercita all'esterno la stessa attrazione dell'ellissoide di densità:

$$k=-(n+2)D^n \Delta_2 \mu_0^{n+1}.$$

Indichiamo con Δ_2^0 l'operazione $\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_0^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_0^2}$, cambiando nella (5') la n in $n+2$ e applicandovi l'operazione Δ_2^0 si ottiene facilmente (*):

$$\begin{aligned}
(n+1)(n+2).D^n\Delta_2(\nu-1)^{n+1} &= 2\alpha_0\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)D^n(\nu-1)^n+\\
&+n(n-1)\alpha_0\nu_0 D^{n-2}\Delta_2(\nu-1)^n+\\
&+4n\alpha_0\left(\frac{x_0}{a^2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{y_0}{b^2}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{z_0}{c^2}\frac{\partial}{\partial z}\right)D^{n-1}(\nu-1)^n+\dots\\
&+\alpha_s\left\{4s(s+1)\nu_0^{s-1}\left(\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}\right)+\right.\\
&\left.+2(s+1)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\nu_0^s\right\}D^{n-2s}(\nu-1)^{n-s}+\\
&+(n-2s)(n-2s+1)\alpha_s\nu_0^{s+1}D^{n-2-2s}\Delta_2(\nu-1)^{n-s}+\\
&+4(s+1)(n-2s)\alpha_s\nu_0^s\left(\frac{x_0}{a^2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{y_0}{b^2}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{z_0}{c^2}\frac{\partial}{\partial z}\right)D^{n-2s-1}(\nu-1)^{n-s}+\dots .
\end{aligned}$$

(*) Si tenga presente l'identità simbolica:

$$\Delta_2^0 D^n \equiv n(n-1)D^{n-2}\Delta_2.$$

Con questa identità si può scrivere immediatamente la funzione potenziale dell'ellissoide di densità k; a quest'ultima aggiungendo:

$$\pi abc \, . \, \Delta_2 D^n \int_{s_0}^{\infty} \frac{\mu^{n+2} ds}{\mathfrak{R}(s)} \, ,$$

si ottiene la funzione potenziale dello strato di densità h.

(Continua).

L'Accademico Segretario
LORENZO CAMERANO.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 4 Marzo 1906.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA.

Sono presenti i Soci: Ferrero, Direttore della Classe, Rossi, Manno, Carle, Cipolla, Brusa, Allievo, Carutti, Pizzi, Savio, De Sanctis e Renier Segretario.

Si approva l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 18 febbraio 1906.

Il Presidente legge una lettera con cui S. E. Boselli, Ministro dell'Istruzione Pubblica, ringrazia la Classe per gli auguri trasmessigli.

È letta una lettera dell'Avv. Razetti con cui egli informa che la domestica del rimpianto Socio Pezzi, avendo rinvenuti i manoscritti delle opere dell'illustre defunto, li offre in dono all'Accademia. La Classe accetta il dono ed incarica il Presidente di porgere i suoi ringraziamenti alla legataria e all'Avv. Razetti. Il Socio Renier dice di aver saputo che una parte degli spogli ed appunti glottologici del Socio Pezzi trovasi presso la Direzione del Cottolengo e ritiene che non sarebbe difficile riunirli agli altri manoscritti per serbarli presso l'Accademia. Accogliendo la proposta, il Presidente incarica il Direttore della Classe Socio Ferrero ed i Soci Manno e Savio di fare presso l'Opera del Cottolengo le pratiche opportune.

Il Sindaco di Torino, in risposta al voto formulato dalla Classe perchè non venisse rimossa dalla Chiesa della Madonna di Campagna la lapide posta sulla sepoltura del maresciallo francese de Marcin, comunica la lettera che in proposito gli rispose il Comitato per la commemorazione bicentenaria del 1706. Tale risposta non appaga il Socio FERRERO, Direttore della Classe, il quale vi rileva alcune inesattezze di fatto ed osserva che se anche si vuol conservare la lapide antica, s'intende dal Comitato togliere dal luogo ove si trovano le ossa del maresciallo e depositarle altrove con una iscrizione nuova e poco felice. Egli propone quindi che la Classe insista acciocchè sulla tomba del maresciallo de Marcin non figuri altra lapide fuorchè quella fattavi apporre da Vittorio Amedeo II. La Classe unanime approva.

D'ufficio è presentato un opuscolo del Socio corrispondente Giuseppe BIÀDEGO, *Dante e l'Umanesimo veronese*, Venezia, 1905.

Il Socio DE SANCTIS incaricato col Socio SAVIO di riferire intorno alla monografia del Prof. Paolo UBALDI, *Il Dialogo storico di Palladio,* legge la relazione che compare negli *Atti*. Approvata la relazione a voti palesi, la Classe, con pienezza di voti secreti, delibera l'inserzione dello studio del Prof. UBALDI nelle *Memorie* accademiche.

LETTURE

Relazione intorno alla memoria del Dott. Paolo Ubaldi: *Appunti sul " Dialogo storico di Palladio "*.

Il dott. Paolo Ubaldi, che si è già occupato diligentemente di uno degli episodi più importanti della vita di S. Giovanni Crisostomo nello scritto su " La sinodo *ad Quercum* " edita nel vol. LII delle Memorie di quest'Accademia, ha studiato nel lavoro su cui abbiamo l'onore di riferire ai colleghi il dialogo storico di Palladio, che è una delle fonti più importanti per gli ultimi anni del Crisostomo. Quasi ignota è la persona di questo Palladio, e neppure sicura, per quanto appaia probabile, è la sua identificazione con l'autore di quello scritto preziosissimo per la conoscenza del più antico monachismo che è noto col nome di " Storia Lausiaca ". Ben meritava il dialogo di Palladio, finora tanto poco studiato, di trovare chi come l'Ubaldi lo illustrasse accuratamente. L'Ubaldi, dato del dialogo un succoso riassunto, si ferma a mettere in luce le reminiscenze platoniche e le altre reminiscenze classiche che vi si rinvengono. E questa è la parte più interessante forse del lavoro: perchè l'Ubaldi riesce a dimostrare che Palladio ha avuto costantemente innanzi a sè l'esemplare del Fedone e nel narrare le ultime vicende del Crisostomo ha più d'una volta imitato lo stile e il colorito del racconto platonico delle ultime vicende di Socrate. Certo non può dirsi, nè l'Autore stesso vorrebbe forse asserirlo, che tutti i raffronti da lui fatti con Platone e con altri classici siano egualmente calzanti e dimostrativi: tutti però sono acuti e degni di studio. Ed è pur notevole l'esame minuto che l'A. fa delle peculiarità della lingua e dello stile di Palladio, paragonandolo co' suoi contemporanei e in particolare con S. Giovanni Crisostomo. Egli si occupa della pittura dei caratteri, della solennità delle espressioni, del parlar figurato, della vivezza del

concepire, della frequenza delle sentenze, dei giuochi di parola, della formazione del periodo, della grammatica e del lessico di Palladio: ed enumera ad esempio le parole nuove usate da Palladio, alcune delle quali non registrate fin qui in nessun vocabolario greco. Così egli dà un buon contributo filologico agli studî sulla patristica greca, e prepara materiali che saranno assai utili a chi voglia riprendere in esame la questione dei rapporti tra il " Dialogo storico „ e la " Storia Lausiaca „ per tentarne una soluzione definitiva. Al tempo stesso non manca qua e là l'A. di accennare, sia pure incidentalmente, al valore del dialogo come fonte storica e alle riserve che son forse da fare su qualche giudizio e su qualche espressione di Palladio. Tutta la memoria dell'Ubaldi è del resto condotta con severità di metodo scientifico.

Per queste ragioni la Commissione propone che sia ammessa alla lettura nella Classe.

F. Savio.
G. De Sanctis, *relatore.*

L'Accademico Segretario
Rodolfo Renier.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza dell'11 Marzo 1906.

PRESIDENZA DEL PROF. CAV. ANDREA NACCARI

SOCIO ANZIANO DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: Jadanza, Fileti, Spezia, Morera, Segre, Somigliana, Guareschi, Parona, Mattirolo, Foà, Fusari e Camerano Segretario.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Il Presidente annunzia la morte del Socio corrispondente Samuele Pierpon Langley e pronunzia le seguenti parole di vivo compianto per la perdita dell'illustre fisico:

Il prof. Samuele Pierpont Langley nacque a Roxbury presso Boston nel 1834. Egli acquistò grande rinomanza tra i fisici per le sue esperienze sulla misura dell'energia termica spettante alle varie radiazioni dello spettro. Sostituì a tal uopo nel 1881 alla pila termoelettrica del Melloni uno strumento, cui diede il nome di bolometro, fondato sul fatto che una variazione di temperatura altera la resistenza elettrica d'un filo metallico. Congiungendo questo strumento con un galvanometro sensibilissimo egli potè ottenere un grado di sensibilità che non era stato mai raggiunto ed estendere grandemente la conoscenza della parte ultrarossa dello spettro solare. Esaminò pure gli spettri di corpi solidi portati a temperature diverse per determinare la distribuzione dell'energia negli spettri stessi. Applicò

anche il suo apparecchio allo studio delle radiazioni lunari e dell'assorbimento atmosferico e alla determinazione della costante solare.

Come astronomo prese parte alle osservazioni spettroscopiche di parecchie eclissi solari ed eseguì disegni accuratissimi della superficie solare.

Fu per molti anni direttore dell'importante osservatorio di Allegheny.

Dedicò lungo studio al problema dell'aeronautica, ma le sue esperienze furono sempre eseguite con modelli.

Fu operoso segretario dell'Istituto Smithsoniano. Gli Stati Uniti perdono in lui uno dei più valenti e più riputati loro scienziati.

La Classe in seguito alla morte del Socio corrispondente LANGLEY, su proposta del Presidente all'unanimità propone venga delegato a rappresentare l'Accademia alle feste bicentenarie che si celebreranno in Philadelphia in onore di Beniamino FRANKLIN dalla " American Philosophical Society „ il Socio corrispondente Simone NEWCOMB.

Il Presidente presenta la pubblicazione intitolata: *Ricordo della costruzione del Policlinico Umberto I (anno 1902)*, inviato in dono dal Ministero dell'Istruzione Pubblica; ed il libro: *Prinzipien der generellen Morphologie der Organismen,* del Socio straniero Ernesto HAECKEL, inviato in dono dall'Autore.

Vengono presentate per l'inserzione negli *Atti* le note seguenti:

1° *Sulla attrazione degli strati ellissoidi e sulle funzioni armoniche ellissoidali*, del Socio MORERA;

2° Prof. Piero GIACOSA, *Se Pietro [Ansolino] da Eboli possa considerarsi medico della scuola di Salerno*, dal Socio CAMERANO.

Il Socio CAMERANO presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* il suo lavoro intitolato: *Ricerche intorno allo stambecco delle Alpi*. Parte I. La Classe con votazione segreta alla unanimità approva la stampa di detto lavoro.

LETTURE

Sulla attrazione degli strati ellissoidi e sulle funzioni armoniche ellissoidali.

Nota del Socio GIACINTO MORERA.

(Contin. e fine. Vedi pag. 520).

§ VIII. — Sia $Q_n(\xi, \eta, \zeta)$ un polinomio armonico, omogeneo, del grado n^{mo}; la funzione potenziale dello strato di densità:

$$h_n = P \, . \, Q_n\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right)$$

si può immediatamente formare come ho mostrato nel § III di questo lavoro (*). Essa è una funzione U_n che all' interno dell'ellissoide è razionale, intera del grado n^{mo} o, più precisamente, è formata da parti omogenee dei gradi n, $n-2$, $n-4$ ecc.

In corrispondenza ad un altro polinomio armonico $Q'_{n'}(\xi, \eta, \zeta)$, omogeneo, del grado n', avremo per funzione potenziale dello strato ellissoidale di densità:

$$h'_{n'} = P \, . \, Q'_{n'}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right)$$

un'altra armonica ellissoidale $U'_{n'}$.

Per una notissima proprietà delle funzioni potenziali si ha:

$$\int U_n Q'_{n'}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right) PdS = \int U_{n'}' \, Q_n\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right) PdS,$$

ove l'integrazione va estesa a tutta la superficie S dell'ellissoide.

Si ponga:

$$x = a \operatorname{sen}\theta \cos\omega, \quad y = b \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\omega, \quad z = c \cos\omega:$$

'ellissoide viene così rappresentato sulla sfera Σ di raggio uno, e detto $d\Sigma$ l'elemento della sfera che corrisponde all'elemento dS dell'ellissoide, si ha:

$$PdS = abc d\Sigma.$$

(*) " Atti dell'Accademia ", disp. 8ª, di questo volume.

Con questa trasformazione Q_n, $Q_{n'}$ si convertono in due funzioni sferiche φ_n, $\varphi'_{n'}$ degli ordini n e n' e la relazione precedente diviene:

$$\int U_n(a \operatorname{sen}\theta \cos\omega, \ldots)\varphi'_{n'} d\Sigma = \int U'_{n'}(a \operatorname{sen}\theta \cos\omega, \ldots)\varphi_n d\Sigma.$$

Orbene, se $n' > n$ il primo integrale riesce nullo, mentre è nullo il secondo se $n > n'$; sicchè $\int U_n h'_{n'} dS$ è diverso da zero solo quando $n = n'$. Inoltre si ha:

$$\int U_n h_n' \, dS = \int U_n' h_n dS.$$

Indichiamo con:

$$Q_n^{(0)}, Q_n^{(1)}, \ldots \ldots . Q_n^{(2n)}$$

$2n + 1$ polinomii armonici, omogenei, del grado n, fra loro indipendenti.

Posto sovra l'ellissoide:

$$h_n^{(i)} = P Q_n^{(i)}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, 2n),$$

denotiamo con $U_n^{(i)}$ la funzione potenziale dello strato di densità $h_n^{(i)}$.

Qualsivoglia armonica ellissoidale è sviluppabile in una serie della forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{2n} \alpha_n^{(i)} U_n^{(i)},$$

ove le α indicano delle costanti. Ci proponiamo di determinare le α in guisa che lo sviluppo precedente rappresenti l'armonica che sull'ellissoide assume i valori di una funzione f, data ad arbitrio sull'ellissoide stesso.

Si ponga:

$$A_{ij}^{(n)} = \int U_n^{(i)} h_n^{(j)} dS = \int U_n^{(j)} h_n^{(i)} dS = A_{ji}^{(n)}.$$

Tenuto presente quanto poc'anzi abbiamo veduto, si ha:

$$\int f Q_n^{(i)}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right) P dS = \sum_{j=0}^{2n} \alpha_n^{(j)} A_{ij}^{(n)} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, 2n).$$

Orbene, è facile riconoscere che queste $2n+1$ equazioni lineari determinano univocamente i coefficienti $\alpha_n^{(i)}$, ossia che il determinante A_n formato colle $A_{ij}^{(n)}$ è sempre diverso da zero.

Consideriamo infatti la distribuzione di densità:

$$h = P\sum_{i=0}^{2n}\alpha_n^{(i)}\,Q_n^{(i)}\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b},\frac{z}{c}\right) = \sum_{i=0}^{2n}\alpha_n^{(i)}\,h_n^{(i)},$$

ove le $\alpha_n^{(i)}$ indicano delle costanti indeterminate; la sua funzione potenziale è:

$$U = \sum_{j=0}^{2n}\alpha_n^{(j)}\,U_n^{(j)}.$$

Il potenziale di questa distribuzione è:

$$W = \frac{1}{2}\int U h\,dS = \frac{1}{2}\sum_i\sum_j \alpha_n^{(i)}\alpha_n^{(j)}A_{ij}^{(n)} = \frac{1}{8\pi}\int_\infty \Delta_1 U\,.\,d\tau,$$

ma essendo W essenzialmente positiva la W è una forma quadratica nelle α essenzialmente positiva e per ciò il suo discriminante, che è A_n, non può essere nullo.

Se si tien presente poi che una forma quadratica essenzialmente positiva si può con infinite trasformazioni lineari ridurre ad una somma di quadrati, concludiamo il seguente TEOREMA.

I $2n+1$ polinomii armonici: $Q_n^{(i)}$ $(i=0, 1, 2, \ldots, 2n)$ si possono sempre scegliere in guisa che risultino nulle tutte le $A_{ij}^{(n)}$ con indici i e j differenti.

Scelti in tal guisa i polinomii Q, il procedimento d'integrazione sopra indicato somministra isolatamente i coefficienti α.

§ IX. — Usando per le funzioni di Lamé le solite segnature, quali sono per es. quelle impiegate dal Poincaré nei capitoli VI e VII delle sue lezioni sulle " Figures d'équilibre d'une masse fluide „ (Paris, 1902), è noto che $R_i S_i^{(0)} M_i N_i$, $R_i^{(0)} S_i M_i N_i$ danno, rispettivamente all'interno ed all'esterno dell'ellissoide di parametro ρ_0, la funzione potenziale dello strato di densità:

$$h_i = \alpha_i P\,.\,M_i N_i\,. \qquad P = \sqrt{\frac{(\rho_0^2-a^2)(\rho_0^2-b^2)(\rho_0^2-c^2)}{(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)}}\,.$$

ove: α_i indica una costante, e P come prima la distanza fra il centro ed il piano tangente all'ellissoide, ma i semiassi di questo sono ora: $\sqrt{\rho_0^2 - a^2}$, $\sqrt{\rho_0^2 - b^2}$, $\sqrt{\rho_0^2 - c^2}$.

D'altra parte, quando l'ellissoide si rappresenta sulla sfera di raggio uno mercè la trasformazione indicata, il prodotto MN si converte in una funzione sferica $\varphi_n(\theta, \omega)$ dell'ordine n^{mo} (*), denotando con n l'ordine del prodotto di Lamé RMN.

Quindi, chiamando come prima a, b, c i semiassi dell'ellissoide, si ha:

$$h_i = P \, . \, Q_n^{(i)}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a}\right),$$

ove $Q_n^{(i)}$ designa un polinomio armonico, omogeneo del grado n^{mo}.

Le funzioni di Lamé appartengono adunque alla classe delle nostre armoniche ellissoidali. Esse sono caratterizzate, come ha mostrato il prof. Somigliana (**), della proprietà che sull'ellissoide risulta:

$$\frac{\partial U_i}{\partial n} = \gamma_i \, . \, P \, . \, U_i,$$

ove: n indica la direzione della normale interna, e γ_i una costante che muta da un prodotto di Lamé all'altro; dando così luogo alle relazioni:

$$\int U_i U_j P dS = 0 \qquad (i \neq j).$$

(*) Cfr. Heine, *Handbuch der Kugelfunctionen*, vol. I, pag. 354 (2ª ediz.).

(**) *Sul problema della temperatura nell'ellissoide*, “Annali di Matematica”, Serie II, tomo XXIV.

Se Pietro [Ansolino] da Eboli possa considerarsi medico della scuola di Salerno.

Nota di PIERO GIACOSA.

Pietro [Ansolino] da Eboli è generalmente considerato come un medico e dal De Renzi è collocato senz'altro nell'elenco dei Maestri Salernitani (1): a lui si associa recentemente il Rota nella prefazione al poema *De rebus Siculis* (2); egli non esita anzi a dichiarare che a Salerno ebbe la laurea in medicina, benchè sarebbe difficile lo stabilire se veramente Salerno in quel tempo conferisse la laurea.

Tali attribuzioni poggiano soltanto su induzioni: delle quali le più fondate si riferiscono alla produzione letteraria di Pietro da Eboli: egli, si dice, ha scritto un'opera di argomento medico, sui bagni di Pozzuoli: nel suo poema sulle vicende di Sicilia sono passi che hanno attinenza alla medicina. Dunque era medico. Se non che la legittimità di tale affermazione appare sempre minore quanto più si studia la produzione letteraria di P. da E. in relazione a quella medica del tempo e alla sua posizione: di guisa che gli argomenti principali addotti a farlo ritenere come medico finiscono per perdere gran parte del loro valore.

Esaminiamo anzi tutto i documenti in cui si fa menzione del poeta: in essi egli compare sempre col titolo di *magister* ed una volta con quello di *versificator*: ora il titolo di *magister* non era esclusivo dei medici, anzi si dava a chi fosse cultore o esercitasse le arti liberali, ad ecclesiastici, a giudici, a maestri:

(1) *Collectio Salernitana*, vol. I, p. 288, Napoli, 1852 e *Storia documentata della Scuola medica di Salerno*, II ediz., p. 409, Napoli, 1857.

(2) *Rer. ital. script.*, Città di Castello, Lapi, V, 31, p. 1, 1904, pag. XXI. Rimando a questa memoria per i documenti relativi a P. da E. di cui è menzione più sotto; le citazioni del poema di P. da E. si riferiscono tutte a questa edizione, quando non c'è indicazione in nota.

per i medici si usava sempre il titolo di dottore o di medico. Il trattato delle febbri di M° Ferrario da me pubblicato (1) termina con quattro versi, di cui il primo dice:

Doctoris prisci Ferrari dogmate cure
Sunt hic descripte....;

lo stesso Pietro da Eboli parlando di M° Ursone nel suo poema *De rebus siculis* dice:

Egregius doctor et vir pietatis amicus
Explicuit causas talibus Urso michi (2).

Quanto all'appellativo di *medicus* esso si trova così regolarmente usato nei documenti (3) salernitani ad accompagnare il nome rispettivo, che la sua omissione negli atti che si riferiscono a P. da E. è già una forte prova contro l'attribuzione che vogliasi dargli di tale qualità; sarebbe davvero curioso che mentre lo si battezza col titolo inusitato di *versificator*, non si indicasse la sua qualità principale di medico (4). A proposito di questo appellativo di *versificator* è da notarsi che nel documento nel quale comparisce ha la sua ragion d'essere, perchè giustifica il dono conferitogli dall'Imp. Enrico; è certo che il molino di Albiscenda è stato dato a P. da Eboli facitore di versi, dimostrandosi che l'Imperatore aveva benissimo accolto l'appello del poeta che nella dedica dei *Balnea puteolana* si trova così chiaramente espresso:

Ebolei vatis Cesar reminiscere vestri.

Se, come il Rota suppone (5), P. da E. fosse stato medico di Corte, l'atto di larghezza imperiale avrebbe certo menzionato questa sua benemerenza.

I dubbii sulla legittimità dell'attribuzione di medico a Pietro

(1) *Magistri Salernitani nondum editi*, p. 64.

(2) Loc. cit., v. 214, 215.

(3) De Renzi, *St. doc.*, doc. 22-31, 33, 34, 37, 45-49 (in questo, contemp. di P. da Eboli il medico è anche chiamato *magister*), 51-54.

(4) Rota, loc. cit., pag. xx, doc. del 1220.

(5) Loc. cit., nota ai vv. 252-253, p. 40.

da Eboli che sorgono dalla critica dei documenti che lo riguardano, sono rafforzati, come dissi, dall'esame della sua produzione letteraria. Cominciamo dall'argomento principale. Pietro da Eboli scrisse un poema di argomento medico sui bagni di Pozzuoli: dunque egli era medico.

Non contesterò punto che Pietro da Eboli sia l'autore dei *Balnea puteolana*; questo punto è ormai fuor di dubbio in base ai codici; dei quali uno assai importante (1) fu da me illustrato. Bensì esaminerò se il fatto di aver egli scritto o versificato (che è ancora la parola più adatta non solo per il ricorso storico col documento citato, ma per la natura della sua produzione) sulle virtù di alcune sorgenti minerali basti a poterlo credere medico, contro alla testimonianza dei documenti. Di scrittori di cose mediche che non furono medici, o che per lo meno non sono accettati come tali da tutti, se ne possono citare molti: Catone, Plinio, e sopratutto, il grandissimo Celso, l'autore del più perfetto trattato di medicina che possegga la letteratura latina; e se noi avessimo di Dante conservato il solo canto venticinquesimo del *Purgatorio*, forse non esiteremmo a chiamarlo medico. Quando si può dimostrare che l'autore di un'opera di argomento medico ha tratto l'opera stessa da altre anteriori senza nulla aggiungere di suo; quando poi nella forma da lui data al rifacimento vi siano segni di imperizia e di insufficiente dottrina; quando manchi ogni accenno alla professione di medico esercitata dall'autore stesso, sopratutto allorchè questo cenno avrebbe potuto essere utile all'autore per conferire autorità alle proprie affermazioni, allora non si può più dalla scelta dell'argomento indurre la professione dell'uomo. Tutte queste circostanze possono esaminarsi nell'opera di Pietro da Eboli.

I bagni di Pozzuoli sono descritti in un trattato anteriore al poema di Pietro, al quale il poeta ha attinto tutto ciò che è di argomento medico, variando solo e parafrasando quanto gli era necessario per la forma metrica, ed aggiungendo particolari tratti o da una visita sulla località, o da tradizioni che conferivano al suo scritto maggior lustro poetico.

Il trattato a cui accenno si trova nel codice della biblioteca

(1) *Mag. Sal. n. e.* pag. 397 e Atlante che riproduce tutte le miniature del Cod. Aug., n. 1474.

Angelica, n° 1502 (v. 3. 9), codice che e per i caratteri suoi paleografici e per il complesso dei testi che racchiude deve assegnarsi al sec. XII.

Per i particolari del ms. rimando ai *Magistri salernitani nondum editi*, dove a pag. 333 si trova riprodotto l'intiero testo. In esso si legge che Giovanni medico figlio di Gregorio medico (*medici* notisi, non *magistri*) ha voluto con questi pochi cenni riparare alla perdita di certe inscrizioni in cui erano descritti gli usi medici delle terme di Pozzuoli (1).

Ne risulta che neppure questo trattato è originale (2); ma finora è il più antico che conosciamo sull'argomento, ed anteriore a Pietro da Eboli; il che fa cadere l'affermazione del De Renzi (3) che non si abbia cognizione di libri anteriori ad Alcadino (P. da E.) che abbiano descritto così minutamente quei bagni: il poeta stesso coi versi:

Tam loca quam vires quam nomina pene sepulta
Tertius euboicis iste reformat aquis,

dà a vedere che il suo è un rifacimento da fonti anteriori. Ora deve osservarsi che la parte medica del poema di P. da E. è in alcuni punti calcata sul testo del medico Giovanni, in altri è meno pedissequa, ma pur sempre inspirata ad esso. Questo vale naturalmente per gli argomenti comuni, poichè in tutti questi trattati dei bagni di Pozzuoli non si trova mai uniformità, trovandosi descritti alcuni bagni in alcuni testi, che in altri mancano (4).

Perchè appaia bene la relazione che vi è fra i due testi, metterò in raffronto alcuni brani. Il testo dei *Balnea puteolana* è quello del *De Balneis*, Venezia, Giunta, 1553.

---

(1) Cfr. la lettera del cancelliere Corrado di Querfurt in *Script. rer. Brunswicensium* di Leibnitz, vol. II, p. 695.

(2) V. in *Mag. Sal. n. e.*, p. 337 il capitolo " Suppede Domini (subvenit " homini): *secundum dicta auctorum* stomachum purgat „ e l'altro " Balneum " Trajani imperatoris: *secundum dicta antiquorum et eorum experientias et* " *expositiones* „.

(3) *St. docum.*, p. 417.

(4) Neanche i ms. che abbiamo del poema sui bagni di P. da E. concordano fra loro e colla trascrizione in prosa di Elisio.

Giovanni (1).	Pietro da Eboli.
Item balnea de foris criptis que sunt in litore maris in insule niside oris veniunt ibi per occultos meatus ad predicta balnea sulphurea et jam dictam bullam. Dulcia sunt ista lavacra et perficiunt ad debilitatem stomaci et jecoris vitium et lentis et magnis febribus et tussientibus. Sunt autem contraria ydropicis quia omnis dulcis aqua dissolvit et omnis aqua salsa restringit. Lavacra vero salsa contrariosa habentibus vitium pulmonum. Sed ista jam dicta dulcia magnam medelam conferunt.	*Lympha foris cryptae juxta maris edita litus* *A stomacho pellit debilitatis onus* *Sed nocet ydropicis, cum sit dulcissima potu* *Vim consumendi non habet, inde nocet.* *Leniter ignitos assumpta refrigerat artus.* *Pulmonem lesum sanat et inde jecur.* *Pectoris antidotum, tussi medicamen amicum.* *Desiccata febris caumate, membra rigat.* *Ipsa per occultos telluris ducta meatus* *Subvenit aegrotis, est quibus aegra cutis.* *Ut dicunt veteres (satis est mirabile dictu)* *Ipsa Foris cryptae Bulla ministrat aquam.*

Delle acque del bagno *Cantarellum* Giovanni dice che: *contraria tamen sunt lateribus* e Pietro da Eboli: *Usus aque lateri continuatus obest.*

Il resto relativo all'efficacia nelle ulceri e nelle ferite è pure comune ai due testi.

Il *Fons Ciceronis* è pure sostanzialmente identico: Giovanni in fine dice: *Interim cavendum est ne frigus intret unde calor exit, et dum corpus calefit non bibat;* e P. da E. parafrasa: *In sudore madens fugiat pro tempore frigus. Nec potum sumat, dum sua membra calent.*

Nel *Tripergule* Giovanni accenna che qui erano le porte d'Averno che Cristo ha infrante, e lo stesso ripete il poeta. Giovanni dice: *utile est illis qui multum sudant*, e Pietro: *Utilis unda satis nimium sudantibus.*

Sudatorium.

Giovanni.	Pietro.
...lacus qui dicitur sudatorium de quo tollitur aqua que in cantaro missa per semetipsam fit calida in predicto sudatorio.	*Ante domum lacus est ranis plenusque colubris* . . . . *in ipso* *Quovis apposita est, vase tepescit aqua.*

(1) Ho corretto il testo, che nella edizione dei *Mag. Sal. n. e.* è stato dato colla grafia originale.

Nel bagno *Silvana*, P. da E. si limita a parlare della sua efficacia nelle malattie delle donne e nella sterilità, tacendo delle altre virtù che Giovanni enumera.

I bagni di *Tritoli* e *Culme* sono messi in un capitolo solo da Giovanni, mentre P. da E. vi dedica due strofe; ma tutto quanto si riferisce all'azione terapeutica nei versi di Pietro è tratto da Giovanni.

Gibborosum: delle proprietà che Giovanni enumera solo alcune sono versificate da Pietro da Eboli, il quale qui torna ad inserire un distico della strofa del *Balneum Ciceronis.* Invece la coincidenza è strettissima del *B. Astrunis* o *Struni*; come si può scorgere dal paragone:

GIOVANNI.	PIETRO DA EBOLI.
Calcantidem idem Struni et alii dicunt Gavone; dentibus et faucibus et maxime qui loqui non possunt et uvolis et inflationi pulmonis et qui frigidum habent corpus et qui fastidium patiuntur; seu et oculorum vitiis. Salubriores sunt si bibatur ibi adrianum vel ygia greca.	*Dentibus a Strunis prodest, quos rheuma relaxat* *Hoc redit ad solitum, si cadat uva locum,* *Faucibus apta satis, branchos ex rheumate passis* *Et laesis oculis haec aqua praestat opem.* *Pulmonem recreat, quem tussis anhela fatigat* *Inflammat corpus, cui dominatur aqua.* *Incitat os dapibus, stomachi fastidia tollet* *Aufert in multis rheumatis omne malum* *Pigritiem tollit membrorum, pectora lenit* *Vocis ad obsequium gutturis aptat iter.* *Saepius unde solet morbis occasio nasci* *Ne fluat a summo vertice phlegma vetat.*

In *Pugillum* è pure una ricorrenza di un termine tecnico: Giovanni dice: *probatum est..... ad pondus ani et ad solutionem ventris*, e Pietro parafrasa *Ani tollit onus, ventrem cessare solutum Cogit.*

In *Palombaria*, *Brancule* e *Suppede Domini* si hanno le stesse evidenti affinità: in *Petroleo* esse sono poi ancora maggiori; il poeta traduce passo passo il medico. Invece il *Balneum Caesaris* del poeta trova piuttosto il suo prototipo nel *B. de Silice* di Giovanni.

Deve notarsi che di suo P. da E. non aggiunge se non una descrizione topografica più accurata dei singoli bagni, che il medico Giovanni omette quasi sempre, limitandosi a scarsi accenni.

Ma si è detto che la prova che il poeta era pure medico si ha nell'accenno che egli fa a guarigioni. Di questi accenni se

ne trovano qua e là nel poemetto; ma essi non provano altro se non che egli assistette a qualche guarigione, e qualunque profano di medicina reduce dalle acque racconta guarigioni nello stesso modo. Nessun accenno si ha a malati mandati da lui a curarsi: sono amici e conoscenti che hanno detto a lui i vantaggi ricevuti. Ecco del resto il testo di questi cenni:

— *Quamplures vidi calidam potare petrosos*
In quibus urina post lapidosa fuit (B. de Petra).
— *Vidi egomet maiora fide, qui venerat orbus*
Discussis tenebris rettulit inde pedem
Tinnabant aures, remeavit sanus utraque;
Cepit et auditum qui modo surdus erat (B. Sanctae Luciae).
— *Vidi ego cui fuerat quondam manus arida dextra*
Nec poterat positos tollere ad ora cibos
Viribus huius aquae parvo post tempore sanam
Huc illuc laetum vertere saepe manum (B. de Cruce).
— *Hoc bene contestor, quidam cum mingere vellet*
Evomit lapides virga coacta duos (B. Sancti Georgii).
— *Quod proprio vidi lumine, testor ego.*
Aridus hujus aque baculis advectus amicis
Discessit baculi nulla ope sanus egens (B. Pugilli).

Per una curiosa combinazione, dei bagni per i quali il poeta crede opportuno aggiungere la testimonianza propria, uno solo, il *Pugillum* si trova nel ms. di Giovanni che conosciamo.

Un altro rilievo è da farsi; che cioè il nostro autore nei termini che adopera talora è improprio e incerto, talora anche errato: così la frase che ricorre in due strofe: *duros mollire lacertos,* e l'altra *arida manus* e *aridus* sono molto vaghe e poetiche; la parola *chymos* che adopera in *Sudatorium* per tradurre i *malos humores* del testo di Giovanni è impropria, poichè chimo era presso gli antichi ogni umore del corpo di cui siamo costituiti e senza essere per sè nè buono nè cattivo (1) nel *B. Petrolei* dove il medico Giovanni dice: *qui crassi sunt per urinam mirabiliter extenuat, vagas cogitationes de corde detergit,*

(1) Cfr. Galeno, *De usu Partium*, I, p. 136. Ven. Juntas 1551.

melancoliam dissolvit et totum corpus multum calefacit, Pietro da Eboli traduce:

> *Extenuat crassos, et tristes reddit ovantes*
> *Exhilarat maestos, cor bene reddit ovans*,

mostrando così ch'egli ha frainteso il significato della parola *melancolia* che qui significa uno dei quattro umori e propriamente quello della bile nera. Anche la citazione di Galeno messa da Pietro nel *Balneum Speluncae* non parla in favore della sua coltura medica, poichè negli scritti di Galeno non si trova fatta menzione delle acque puteolane.

Tuttavia non difettava al poeta una conoscenza dei termini medici e anche delle dottrine: egli sostituisce alla parola *febris cotidiana* di Giovanni (in *Balneum Brancule*) la corrispondente *amphimerina*; e pare accennare alle teoriche ippocratiche di patologia generale quando dice:

> *Saepius unde solet morbis occasio nasci*
> *Ne fluat a summo vertice, phlegma vetat.*

quantunque l'espressione non sia ben chiara, poichè il flegma fluisce sempre dal cervello, ma è solo causa di mali quando, invece d'essere secreto dal naso, discende ai polmoni.

In complesso adunque non può vedersi nell'opera di Pietro da Eboli nulla che autorizzi a rappresentarcelo come dotato di cognizioni mediche pari a quelle dei dottori del tempo suo e non può trarsi dal poema sui bagni di Pozzuoli altra conclusione se non questa: che P. da E. possedeva qualche nozione di medicina nè più nè meno che le persone colte di qualsiasi epoca (1).

---

(1) La dedica del poema *De balneis* ha due versi, che il Rota ha omessi; essi sono:

> *Si placet annales veterum lege Cesar avorum*
> *Pauper in augusto nemo poeta fuit.*

L'interpretazione del primo può essere di due sorta; o colle parole *annales veterum avorum* si allude a quelle notizie sui bagni di Pozzuoli di cui parlano Pietro stesso e il medico Giovanni e il cancelliere Corrado, notizie che si troverebbero riprodotte nel poema stesso che ne era come il succo; oppure, e questa ipotesi mi pare meno forzata, il poema è stato offerto a

Veniamo ora al poema *De rebus Siculis*: non vi mancano accenni alla medicina; il più importante il consulto di Ursone su cui tornerò. Vi si trova la descrizione della febbre da cui è colpito l'imperatore Arrigo VI e che lo costringe ad abbandonare l'assedio di Napoli: l'autore descrive i sintomi di un accesso di terzana che è sul declinare, cioè il polso tranquillo, il sudore e il sopore; cose queste che tutto il mondo sa, senza esser medico. Ecco le parole che pronuncia Arrigo:

v. 477: *Sum bene, ne timeas, tercia febris abest*
Fer sub veste manum, pulsum perpende quietum
Spes est de vita, quod mea membra madent;

e voleva continuare, ma il sonno lo prende; l'arcivescovo di Salerno, medico, che lo visitava, si rassicura sul suo stato:

v. 485: *Nam sopor et sudor signa salutis erant.*

La terzana qui è chiamata *tercia febris* e più oltre alla particola XIX, v. 521 *tritea*, termine greco inusitato dagli scrittori di medicina che la chiamavano *tertiana*; il termine *hemitriteus* designava quella che ora diremmo terzana doppia.

Noterò ancora la cura della podagra col sangue umano caldo; è un sistema che l'autore rimprovera a Matteo d'Ajello, in due passi del poema:

v. 164: *Ipse ego, triste pedes quotiens sinthoma perurit*
Non hominum dubito sanguinis esse reus,

e

v. 995: *Sepe laboranti cum nil succurrere possit*
Umano tepuit sanguine gutta pedum.

Federico II, come già altri ha sostenuto (Rota alla pag. XXVII non s'accosta a questa opinione), dal poeta, che lo esorta a leggere i due precedenti, l'uno in onore del padre Enrico VI, l'altro dell'avo Barbarossa. I due versi seguenti:

De tribus ad dominum tertius iste venit
Cesaris ad laudem tres scripsimus ecce libellos

non contraddicono a questa interpretazione poichè le parole *Dominus* e *Cesar* designano l'autorità che permane anche mutandosi le persone: nè vi contraddice il desiderio espresso nei versi che seguono dal poeta, che s'augurava di campare beato dei favori imperiali tanto da scrivere ancora sul figlio di Federico II.

Egli vi accenna anche quando parla di Elia Gesualdo, anche esso podagroso, e obbligato a farsi portare a braccia, perchè non faceva uso del metodo di cura di Matteo:

v. 669: *Sanguine non hominum didicit lenire dolorem*
Nec sapit antidotum, seve Mathee, tuum.

Questo metodo di cura ricorda quello della lebbra che diede origine alla leggenda messa in versi da Longfellow nella *Golden legend.* Anche in questi passi nulla che possa obbligare a credere che il poeta fosse medico.

Ed ora veniamo a quello che dissi il passo più importante del poema avente attinenza alla medicina e costituisce l'argomento della particola VIII. È una dissertazione sulle cause che fecero di re Tancredi una creatura meschina e mal sviluppata. Il modo con cui l'argomento è trattato sente delle dottrine fisiologiche dell'epoca e può a prima vista indurre a credere che l'autore fosse veramente un medico e uscisse da quella scuola salernitana che in quei tempi era stimata la più celebre, quantunque la fama andasse già declinando.

Se non che, mettendo questo capitolo in relazione col resto del poema, e pensando all'acrimonia, all'accanimento che il poeta dimostra contro Tancredi e i suoi seguaci, e allo zelo con cui cerca in ogni occasione di mettersi in vista presso l'imperatore, non si comprende come egli non abbia di sua propria scienza edificato contro Tancredi tutto quel viluppo di contumelie fisiologiche che dovevano avvilirlo, e come abbia stimato di aver ricorso ad un altro per risolvere un problema che doveva essere in grado di risolvere da sè. Se pure gli fosse tornato opportuno convalidare la propria opinione coll'autorità d'un maestro di medicina noto come Ursone, egli avrebbe certo dato prima il proprio avviso e non avrebbe senz'altro confessato la propria impotenza a schiarire il mistero:

Hoc ego dum dubia meditarer mente profundum
Que res nature dimidiasset opus
Egregius doctor et vir pietatis amicus
Explicuit causas talibus Urso michi.

Questi versi, a parer mio, sono la prova maggiore che il poeta non era medico; se lo fosse stato non avrebbe certo confessato d'aver tanto meditato su un problema che le dottrine dell'epoca lo mettevano benissimo in grado di risolvere; e avrebbe parlato d'Ursone come di un suo collega, o se si vuole d'un suo insegnante; invece lo chiama dottore (e non *magister*) e amico. E questi argomenti sono ancora rafforzati dalla tavola annessa alla particola, la quale (se anche non voglia ammettersi di mano stessa di Pietro da Eboli o disegnata sotto la sua sorveglianza), è certo eseguita in un' epoca molto prossima alla redazione del poema da chi conosceva bene i personaggi che vi compaiono. Ebbene in questa tavola Ursone appare seduto in cattedra, vestito di cappa dottorale, col libro in mano a maggiormente accertare il suo carattere, mentre il poeta è in piedi in attitudine di chi interroga, in abito corto, senza alcun segno della sua qualità di medico; il costume suo è identico a quello dei borghesi di Palermo che compariscono in varie tavole: cito sopratutto quelle delle part. II, III, IV, V. Il Rota anzi dichiara senz' altro che il poeta che sta davanti a Ursone ha la chierica, il che non mi pare abbastanza evidente dall'esame della tavola fototipica.

Quanto al maestro Ursone, il cui nome era già noto e anzi ci giunse circondato da una aureola di fama di sottile investigatore di casi dubbii è probabile che esso sia lo stesso medico di cui scopersi un trattato nel cod. 1481 della biblioteca angelica, e pubblicai nei miei *Magistri Salernitani.*

Agli argomenti che sono venuto esponendo, il poema che stiamo esaminando ne offre un altro ancora che fu già messo in rilievo da altri; il disprezzo cioè con cui il poeta parla di Salerno, il nessun accenno che si fa della Scuola medica nè nel poema nè nelle illustrazioni; solo una volta nel discorso che l'arcivescovo di Salerno fa ai concittadini perchè si persuadano ad implorare la clemenza dell'Imperatore che vuole distruggere

(1) Ho già esposto in un altro luogo (*Mag. Sal. nond. ed.*, p. 342), quale è la mia opinione rispetto alle relazioni che correvano fra i maestri salernitani e i bagni di Pozzuoli; si comprende facilmente, come nel fatto dell'avere Pietro da Eboli illustrato quelle acque, io scorga un argomento di più a non metterlo fra i medici Salernitani.

Salerno (*merito depopulanda,* dice il poeta alle part. XXXVI, v. 1148) la città è chiamata *phisica terra*, e questo appellativo orgoglioso messo in bocca a gente umiliata e supplichevole accresce ancora la vergogna dell'atto. Di medici oltre ad Ursone il poeta ci presenta un Girardus che riconosce la benignità della terzana dell'Imperatore (part. XVII, v. 482) e che è pure rappresentato nella tavola relativa in atto di agitare un ventaglio per rinfrescare il volto imperiale; questi non è detto che sia salernitano, ed anzi introduce i messi di Salerno presso il re malato: era il medico addetto alla persona di Enrico VI. Quanto ai medici che sono a Palermo alla corte di Tancredi essi sono arabi: uno è *Achino medicus* che alla illustrazione della part. II sta esaminando l'orina; un altro daccanto sta ventolando il volto di Guglielmo ammalato, e pare porti un turbante (1).

Le illustrazioni del poema sono per la storia della medicina molto preziose; vi si vede la scena del parto di Tancredi; la rappresentazione di una pecora che abortisce; l'estrazione di freccie infisse nelle carni con due infermiere che assistono; l'esame dell'orina; il bagno nel sangue di un moro sgozzato; il gottoso sostenuto da due aiuti; i medici che assistono l'ammalato e gli fanno vento.

Fra gli ostaggi richiesti alla città di Salerno dall'Imperatore, uno veste il costume saraceno; nella rappresentazione delle scene che accadono a Salerno vi sono sempre personaggi che portano una sorta di turbante. Prova questa che la popolazione araba fosse ancora abbondante in quelle regioni. A Palermo naturalmente i personaggi arabi sono assai più abbondanti.

L'illustrazione delle particole XXIV, dove è rappresentato il viaggio di Costanza da Salerno a Messina, mostra nel mare alcuni animali fra cui sono chiaramente rappresentati polpi e meduse; il che conferma quanto dissi nella mia illustrazione al canto 25° del *Purgatorio*, dove interpretai la parola fungo marino come significante la nostra medusa (2).

Sarebbe interessante poter paragonare queste illustrazioni con quelle dei *Balnea Puteolana* nel codice dell'Angelica n° 1474,

(1) Il Rota crede che questo personaggio sia una donna.

(2) Giacosa, *Il canto XXV del Purgatorio*, " Rassegna Nazionale ", 16 luglio 1905.

le quali furono da me tutte pubblicate nell'Atlante dell'opera *Magistri Salernitani nondum editi*. Queste ultime sono eseguite con una tecnica accurata, i fondi sono dorati, i colori dati in paste, i contorni primitivi a penna invisibili; le illustrazioni del poema *de rebus Siculis* sono invece più trascurate, i contorni visibili, i colori tinteggiati; ma sebbene non altrettanto diligentate hanno un maggior pregio di spontaneità, sono abbozzi che rivelano meglio l'artista. È impossibile in base a semplici riproduzioni fototipiche, per quanto accurate, stabilire se le miniature dei due poemi siano della stessa mano, ma vi è in alcuni particolari di paese, sopratutto nel modo con cui sono rappresentati i monti e gli alberi, una innegabile rassomiglianza che mi indurrebbe ad adottare un simile parere.

L'Accademico Segretario
LORENZO CAMERANO.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 18 Marzo 1906.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Ferrero, Direttore della Classe, Manno, Allievo, Savio e Renier, Segretario. — È scusata l'assenza del Vice Presidente Boselli e dei Soci Rossi, Brusa, Carutti e Ruffini.

L'atto verbale dell'adunanza precedente, 4 marzo 1906, è approvato.

A nome del Socio Graf, il Segretario presenta una Memoria del Dott. Augusto Beccaria: *I biografi di maestro Cecco d'Ascoli e le fonti per la sua storia e per la sua leggenda.*

Il Presidente designa a riferirne i Soci Graf e Renier.

L'Accademico Segretario
Rodolfo Renier.

Torino, Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 25 Marzo 1906.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: SALVADORI, Direttore della Classe, FILETI, JADANZA, NACCARI, SPEZIA, GUIDI, SOMIGLIANA, MORERA, SEGRE, FOÀ, GRASSI, GUARESCHI, MATTIROLO, PARONA e CAMERANO Segretario.

Si legge e si approva il verbale dell'adunanza precedente.

Il Presidente comunica:

1° Lettera di invito al Congresso internazionale di Antropologia e Archeologia preistorica a Monaco. Se qualche Socio si recherà a detto Congresso la Classe gli affiderà il mandato di rappresentarla; in ogni caso si dà mandato alla presidenza di provvedere in proposito.

2° Lista di sottoscrizione promossa dalla Società Storica Tortonese per erigere un ricordo marmoreo al Prof. Tito CARBONE. La lista verrà depositata in Segreteria a disposizione dei Soci.

Il Presidente presenta in dono all'Accademia, da parte dell'Autore Socio corrispondente, Prof. Francesco BASSANI l'opuscolo: *In memoria di Leopoldo Pilla.*

Il Socio Mattirolo presenta in dono all'Accademia la sua Nota intitolata: *Prima contribuzione allo studio della flora ipogea del Portogallo.*

Vengono presentate per la stampa negli *Atti* le Note seguenti:

1° Dott. G. Negri: *Sulla flora briologica della penisola Sorrentina*, dal Socio Mattirolo;

2° T. Boggio: *Sulla deformazione di una sfera elastica isotropa*, dal Socio Somigliana;

3° Dott. G. Ponzio: *Sulla formola di costituzione della " 1, 2-dinitrosonaftalina "*, dal Socio Fileti.

LETTURE

Sulla Flora briologica della Penisola Sorrentina.

Nota del Dr. GIOVANNI NEGRI
Assistente all'Istituto Botanico di Torino.

I materiali di cui mi son servito per la redazione di questa nota sono stati raccolti da me nei mesi di dicembre e di aprile degli anni 1903 e 1904 coll'intento di studiare la vegetazione briologica della Penisola Sorrentina nei suoi elementi costitutivi e nella sua probabile origine. Mancatami l'occasione di dare alle ricerche iniziate l'estensione propostami, credo tuttavia opportuno pubblicare i dati rilevati e le considerazioni suggeritemi dallo studio della collezione fatta e dallo spoglio delle pubblicazioni accennanti a muschi raccolti nella regione in discorso.

Topograficamente la Penisola Sorrentina (1) è perfettamente circoscritta: a settentrione dal limite della pianura Vesuviana, da Nocera dei Pagani a Castellammare, e dal littorale, fra Castellammare e Sorrento; ad occidente dal littorale fra la punta di Sorrento e quella della Campanella; a mezzogiorno sempre dal lido fra la punta della Campanella e Vietri; ed infine ad oriente dalla valle di Cava de' Tirreni fra Cava e Nocera. Orograficamente vi si possono distinguere da oriente ad occidente tre gruppi montuosi. Il primo, fra la valle di Cava ed il colle di Chiunzi (685 m.), comprende le cime di M. Pertuso (1136 m.), M. Sant'Angelo di Cava (1130 m.), M. Cerreto (1315 m.), M. Cervellano (1204 m.); il secondo, dal colle di Chiunzi al valico di S. Maria a Castello, è il più importante e raggiunge con M. Sant'Angelo a Tre Pizzi (m. 1443), l'altezza massima della catena; il terzo, che si protende fino alla Punta della Campanella, gradatamente

(1) Per maggiori indicazioni sulla Penisola Sorrentina, cfr.: Campanile V., *La catena dei Lattarii*, " Ann. della sez. di Roma del Club alpino italiano ", vol. III, anni 1888-91. — Böse E., *Contributo alla geologia della Penisola di Sorrento*, " Atti della R. Acc. delle scienze fis. e mat. di Napoli ", vol. VIII, ser. II, n. 8. Vedasi anche per Capri: Béguinot A., *La vegetazione delle isole ponziane e napoletane*, " Annali di Botanica ", vol. III, fasc. 3. Roma, 1905.

scendendo da M. Comune (877 m.) a M. Tore di Sorrento (540 m.) e M. S. Costanzo (488 m.). Prolungamento geologico della penisola è l'isola di Capri, separata da P. della Campanella da un braccio di mare di 5 km. (Bocca Piccola) e raggiungente, colle sue due cuspidi di M. Tiberio e di M. Solaro, rispettivamente m. 340 e m. 585 s. l. m. Una catena adunque notevolmente elevata, con direzione presso a poco da E. N. E. a O. S. O., una lunghezza misurata da M. S. Angelo di Cava a M. Solaro in linea retta di circa 52 km. ed una larghezza massima di circa 13 km. Il sistema è profondamente inciso da frequenti burroni scoscesi e da alcune vallette o piccoli bacini: sul versante napoletano (N. N. O.) il bacino di Pimonte, compreso fra un contrafforte di M. Cerreto ed il bastione di M. Faito che si stacca da M. Sant' Angelo, declive verso Castellammare; ed il piano fra Meta e Sorrento; sul versante Amalfitano (S. S. E.) la val Tramonti, la più importante del gruppo compresa fra M. Pertuso e M. Cerreto e della lunghezza di una diecina di km. fra colle di Chiunzi e Majori; più il bacino di Agerola, opposto a quello di Pimonte, pressochè pianeggiante e situato ad un' altezza di ca. 700 m. Infine ancora il piano di Anacapri lentamente declive dalla borgata (ca. 400 m.) verso il mare.

Per quanto si riferisce alla costituzione geologica, i terreni più antichi della Penisola Sorrentina sono rappresentati da una dolomite triasica grigiastra, calcare magnesiaco non effervescente sotto l'azione dell'acido cloridrico, la quale, comparsa in vicinanza di Amalfi, continua lungo le falde occidentali di M. Cerreto fino alla torre di Chiunzi, formando la base dei monti che circondano la val Tramonti, gira a S. di M. Pertuso e passando per Nocera, si espande a formare gran parte dei monti compresi fra Pellazzano ed il mare. Sopra questa dolomite s'adagia dappertutto il cretaceo rappresentato da calcari grigio-azzurrognoli con intercalazione di calcare cristallino e di dolomite bruna e nera. Esso è limitato in una parte, dalla linea di Amalfi, C. Campanella, P. Carena (Capri), P. Vilareta (Capri), Sorrento, Castellammare, Nocera; e nell'altra dal limite descritto della dolomite triasica. Ne esistono poi lembi nel mezzo del territorio occupato dal trias, a sud di M. Pertuso allo Spagnuolo, alla Bucata, a M. Falerio, S. Liberatore, ecc. Ancora sopra la creta in alcuni punti della regione s'incontrano terreni terziari sotto forma di

arenarie, di marne, di argille (ad occidente della linea Amalfi-Castellammare e precisamente a sud-ovest di Sorrento); ed infine nelle maggiori depressioni si trova in gran copia accumulato il tufo trachitico, proveniente dai Campi Flegrei, il quale offre alla vegetazione un substrato eminentemente diverso dagli accennati prima. — Quanto a Capri, l'impalcatura dell'isola è costituita da calcari comparsi fra il giurese ed il cretaceo inferiore. In qualche punto, come nella depressione fra M. Solaro ed il colle di Castiglione, ai calcari si sovrappongono marne, arenarie ed argille eoceniche; e, negli avvallamenti, anche depositi tufacei di trasporto, raggiungenti in qualche punto una potenza di parecchi metri. Alle falde di M. Solaro, oltre al tufo, trovansi masse incoerenti di pomice, lapilli e ceneri vulcaniche, e qua e là nell'isola, breccie quaternarie analoghe ad altre riscontrabili anche nella penisola sorrentina e che debbono considerarsi come detriti postpliocenici di pendio.

Questa semplice esposizione mostra come, non ostante il grande predominio delle roccie calcari nella penisola di Sorrento, fatto di notevole importanza edafica in una regione prettamente vulcanica, e che permette di considerarla come uno sperone dell'Appennino, al quale la legano strettissimi nessi non solo orografici e geologici, ma anche floristici, si possa supporvi la presenza di colonie di piante calcifughe, e ciò in base alla constatazione degli accennati abbondanti depositi tufacei ricoprenti l'impalcatura rocciosa originaria. — Del resto, quantunque nel presente lavoro io debba rivolgere un' attenzione particolare alla peculiare azione dei sali di calcio, per quanto ha riguardo all'influenza del substrato sulla vegetazione briologica, osservazioni continuate da varii anni ed in località molto varie, mi conducono ad associarmi alle idee espresse in una recente memoria del Dr. Gola; doversi cioè nello studio della distribuzione delle specie dare particolare importanza " più che alla struttura fisica ed alla natura chimica dei terreni e delle soluzioni che li imbevono, alla concentrazione ed al coefficiente isotonico delle soluzioni stesse; avendo così di mira non tanto quello che le radici possono assorbire, ma le condizioni che son fatte al funzionamento del sistema assorbente " (1). — I muschi, in quanto

---

(1) GOLA G., *Studi sui rapporti fra la distribuzione delle piante e la co-*

utilizzano uno strato molto sottile e superficiale del terreno, risentono assai più delle piante vascolari, l'influenza di mutazioni anche assai circoscritte e temporanee nella costituzione fisico-chimica del substrato. Sono notevoli a questo riguardo le osservazioni riferite da Brizi (1), a proposito della vegetazione briologica del Lazio. La piccolissima porzione di terreno sfruttata da ogni singolo individuo e la varietà stessa delle combinazioni possibili in seno alle differenti stazioni (tronchi degli alberi su suolo calcare, muri su terreni silicei) rendono agevole e frequente la costituzione di colonie eterotopiche, le quali del resto possono anche esser dovute ad alterazioni dirette e molto superficiali e limitate di qualunque substrato. L'importanza di questa considerazione appare particolarmente notevole in fatto di ricerche briogeografiche, se si tien conto della facilità e dello speciale modo di diffusione di queste piante le quali trovano, per esempio, un attivissimo mezzo di dispersione delle spore nel vento, agente di disseminazione per lo più molto strettamente circoscritta nelle fanerogame.

Avvertenze analoghe debbono essere tenute presenti nell'apprezzamento dell'influenza del clima: tanto piccole possono essere le stazioni che rendono possibile l'esistenza di singole briofite anche se circondate da un ambiente inadatto, tanto breve è la vita di molte specie, che il concorso delle circostanze favorevoli su di uno spazio e per un tempo così limitato può verificarsi con una certa facilità e frequenza. Ora, la regione in discorso presenta un clima di tipo prettamente mediterraneo, cioè temperato-caldo, notevolmente secco e con una differenza poco pronunciata fra le medie invernali ed estive. Ma una tale condizione

---

stituzione fisico-chimica del suolo, " Ann. di Bot. ", vol. III, fasc. 3, Roma, 1905. Per quanto riguarda la nomenclatura, credo utile riferirmi alla giustificazione che ne dà l'egregio Autore: " Poichè la caratteristica principale dei terreni impregnati di soluzioni assai diluite, consiste nelle proprietà colloidali di alcuni componenti, mentre nei terreni a soluzioni fortemente concentrate, le proprietà cristalloidali di altri componenti esercitano una influenza preponderante, io propongo il nome di piante *gelicole* per quelle abitanti i terreni del primo tipo, e *alicole* per quelle degli altri terreni ". Cfr. Gola, op. cit., pag. 512.

(1) Brizi U., *Studi sulla flora briologica del Lazio,* " Malpighia ", a. XI, Genova, 1897, pp. 364-370.

di clima s'estende molto diversamente sui pendii dei monti sorrentini in corrispondenza dei varî punti della catena e si arresta in ogni caso al disopra d'un certo limite altitudinare. A proposito del quale noterò come il Grisebach (1) fissi alla zona delle piante sempreverdi nell'Italia meridionale un limite inferiore (metri 389) a quello verificato in Provenza ed in Liguria (m. 422-500). L'estensione stabilita da Boulay (2) di m. 800 sul versante sud, m. 700 sul versante nord dei monti del mezzogiorno della Francia ai muschi mediterranei dovrebbe quindi essere qui ridotta, quando non si tenesse conto che si tratta di una diramazione dell'Appennino isolata dalla catena principale e sorgente direttamente dal mare che la circonda quasi completamente. Il Béguinot (3) infatti, nelle isole dell'arcipelago Napoletano e Ponziano ha trovato molto alto il confine della regione mediterranea; così pure il Brizi (4), a proposito della flora del Lazio indica fra le specie caratteristiche delle due prime zone altitudinari che nel loro assieme abbracciano i primi 700 m. s. l. m. molte forme prettamente mediterranee. Nel caso speciale della penisola Sorrentina non è possibile accettare un confine superiore uniforme anche limitatamente ad ogni versante. Così a Capri, piccola, arida, circondata dal mare e quasi sprovvista di vegetazione arborea, le forme mediterranee salgono sino alle vette tanto che poco sotto alla cima di M. Solaro (a ca. 520 m.) e sul versante settentrionale ho raccolto *Ceratodon chloropus* ed *Eurhynchium meridionale.* D'altra parte l'orientazione stessa della penisola e la sua natura calcare fanno sì che sui suoi due versanti si debbano verificare differenze notevolissime. Sul pendio Napoletano, rivolto a N. N. E. e nella valle di Cava la presenza di specie mediterranee è effettivamente limitata fra i 300 ed i 400 m. s. l. m., almeno laddove il suolo è rivestito da un mantello boscoso (Quisisana. *Leucodon sciuroides* var. *morensis*, *Eurhynchium circinnatum*). Sul versante Salernitano invece la ripidezza, l'esposizione (S. S. E.) e la natura calcare del suolo, meno

(1) Grisebach A., *La végétation du Globe* (trad. Tchihatchef). I, pp. 377-379. Paris, 1875.

(2) Boulay N., *Muscinées de la France.* I. *Généralités*, p. LXXXVIII. Paris, 1884.

(3) Béguinot A., op. cit., passim.

(4) Brizi U., op. cit., pp. 379-383.

protetto da vegetazione arborea e quindi esposto a forte insolazione e forte irradiazione notturna, ed assai povero d'acqua, concordano nel facilitare alle specie mediterranee l'ascesa del pendio. In val Tramonti il *Leucodon sciuroides* var. *morensis* e la *Funaria convexa* raggiungono l'uno il colle di Chiunzi (m. 685), l'altra quasi il colle fra M. S. Angelo e Montagnone (ca. 850 m.) e lo *Scleropodium illecebrum*, un' altezza di ca. 800 m. sui fianchi di M. Pertuso. Sullo stesso M. S. Angelo qualche specie, salita lungo i pendii meglio esposti, viene a mescolarsi nelle stazioni cacuminali colle poche specie montane (*Eurhynchium circinnatum sterile!* ca. 1000 m.)

L'importante contingente di forme submontane e montane, che si ritrova nel catalogo che segue, è poi dovuto all'elevatezza della catena ed alla sua connessione col prossimo Appennino dal quale del resto non le giungono unicamente specie calcicole. Gli estesi boschi che rivestono il pendio occidentale e settentrionale di M. S. Angelo dai 300 fino ai 1100 m. offrono un ambiente abbastanza vario (Conca di Quisisana, bosco di latifoglie di tipo misto ad elementi mediterranei in alcuni punti molto ridotti e con immigrazione di elementi montani dalle zone più elevate; Piano di Faito, bosco di faggi e di conifere); ed un suolo sufficientemente ricco di *humus* per ridurre di molto l'azione del terreno calcare.

Ho già del resto accennato ai tufi che in altri punti del versante settentrionale-orientale della catena, offrono un substrato relativamente fresco, atto allo sviluppo di specie gelicole. Anche questo è da considerarsi come un fattore d'immigrazione nella florula briologica del distretto di tipi submontani e montani, spesso gelicoli, in ogni caso microtermi; tanto più se si tien conto anche di altri elementi; l'azione del maestrale per esempio, che durante l'estate incontrando il versante settentrionale dei monti Stabiani, contribuisce a correggere la secchezza del clima: ed il loro rivestimento di vegetazione arborea che, favorito dalle circostanze suesposte, diventa a sua volta benefico alla vegetazione dei muschi, proteggendo lo stato igrometrico dell'aria da repentini squilibrii, il suolo dall'insolazione e dall'eccessiva irradiazione notturna ed invernale e mantenendo permanente una certa umidità negli strati superficiali del terreno.

La notevole elevazione della catena non giunge del resto a

determinare la costituzione di una vera florula briologica montana. Durante l'inverno la neve compare frequentemente sulle vette più elevate; e del resto è naturale presupporre, in rapporto con 1300-1400 m. di elevazione, una notevole diminuzione della temperatura media ed un aumento nelle precipitazioni atmosferiche di tutte le stagioni. Ma si tratta di montagne calcaree dirupate, denudate nelle loro porzioni più elevate, in corrispondenza delle quali l'acqua non s'arresta alla superficie del suolo, e la roccia sgretolandosi per degradazione meteorica, forma un terriccio di piccolo spessore e molto facilmente disseccabile. In tali condizioni, come avviene anche per le fanerogame, soltanto in qualche stazione privilegiata possono mantenersi specie di tipo montano. Nella regione in discorso è nota sotto questo rapporto la fontana dell' Acquasanta sotto la vetta di M. S. Angelo. Dalle stazioni più elevate poi, qualche specie scende in regioni più basse laddove condizioni speciali le permettano di vivere ed anche di prosperare. Segno con * tali specie nella enumerazione che segue, comprendente le forme montane, note sin' ora, della regione: *Gymnostomum rupestre*, *Dicranum Starkei* *, *Distichium capillaceum*, *Tortella tortuosa*, *Orthotrichum leiocarpum*, *Encalypta contorta* *, *Mniobryum albicans* *, *Mnium punctatum* *, *Philonotis fontana*, *Pteriginandrum filiforme*, *Brachythecium plumosum* *. A questi si potrebbe aggiungere la *Bartramia Oederi* raccolta da parecchi osservatori sul prossimo M. Vergine, e che assai probabilmente ricerche ulteriori permetteranno di scoprire anche sulle roccie calcari della penisola Sorrentina.

Per l'incontro un largo sviluppo ha la vegetazione submontana, ciò che si spiega colle speciali condizioni di ambiente su cui mi sono esteso. Dedotte infatti le specie ubiquiste, le forme montane citate e le mediterranee, delle quali faccio seguire l'elenco, le forme submontane comprendono ancora un buon terzo delle specie attualmente note, delle quali parte passa qua e là, ma in condizioni di prosperità minore, nella zona inferiore, nello stesso modo che da questa si diffondono sporadicamente verso l'altro le specie più tolleranti di un clima meno secco.

Quanto alle specie mediterranee esse sono essenzialmente le seguenti: (ho segnato con * le forme accennate capaci di adattarsi alle stazioni più secche e calde della zona submontana):

Gymnostomum calcareum *, *Weisia crispata* *, *Ceratodon chloropus*, *Didymodon tophaceus*, *Trichostomum crispulum*, *T. mutabile*, *Timmiella anomala*, *T. barbula*, *Crossidium squamigerum* *, *Tortula marginata*, *Barbula vinealis* var. *cylindrica* *, *Fissidens crassipes* *, *Grimmia orbicularis* *, *Enthostodon Templetoni*, *E. curvisetus*, *Funaria mediterranea* *, *F. convexa*, *Mniobryum carneum* *, *M. albicans* v. *angustifolium* *. *Bryum torquescens* *, *B. atropurpureum* *, *B. Donianum*, *Leucodon sciuroides* var. *morensis*, *Leptodon Smithii* *, *Neckera Besseri*, *Scleropodium illecebrum* *, *Eurhynchium circinnatum*, *E. meridionale*, *E. praelongum* v. *rigidum* *, *E. megapolitanum* v. *meridionalis*, *Rhynchostegium rusciforme* v. *inundatum* *f. meridionale*, *Rhynchostegiella tenella f. meridionalis*.

Un interesse speciale presenta il comportamento delle singole specie per rapporto al calcare; su 116 specie e varietà elencate, infatti, 21 sono calcicole esclusive, 26 calcicole preferenti, 29 indifferenti, 19 calcifughe tolleranti, 20 calcifughe esclusive. Prevale nettamente la tolleranza pel calcare nelle specie mediterranee (19 calcifile contro 13 calcifughe ed indifferenti): fra le montane sono in prevalenza le calcifughe (8 contro 3); predominano chiaramente le calcifughe e le indifferenti nella flora submontana. Delle 39 calcifughe, una dozzina soltanto sono arboricole. Finalmente osservo che, volendo classificare le specie soltanto in *alicole* e *gelicole* (Gola), indipendentemente dalla considerazione che il sale sciolto e libero nei liquidi circolanti nel terreno sia o no un sale di calcio, anche una gran parte delle 29 specie indifferenti vanno ad aumentare il numero delle alicole, crescendo esse o nei ruderi, o su margine di strada, o sulle carbonaie (*Tortula convoluta*, *Funaria hygrometrica* indifferentemente sulla malta dei muri e sulle carbonaie), ecc.

Do ora l'enumerazione delle specie raccolte da me (!) o citate nella letteratura (1): ed indico colle sigle *C*, *Cp*, *I*, *Cft*, *Cf*, le specie rispettivamente calcicole esclusive, e preferenti, indifferenti, calcifughe tolleranti, calcifughe esclusive.

---

(1) Cfr. GIORDANO C., *Pugillus Muscorum in agro neapolitano lectorum*, " Atti Soc. Critt. italiana ", vol. II, 1879. Milano. — BRIZI U., *Note di briologia italiana*, " Malpighia ", anno IX. Genova, 1890. — GIORDANO C., *Nuova contribuzione di Muschi meridionali*, *Add. ad Pugillum etc.*, " Bull. Soc. Botanica italiana ", anno 1892. Firenze. — ARCANGELI G., *Muscinee raccolte di recente nell' Italia meridionale*, " Bull. Soc. Bot. italiana ", anno 1892. Firenze.

Acrocarpi.

1. ***Gymnostomum rupestre*** Schleich 1807.
Capri (Giordano) (*Cft.*).

2. ***G. calcareum*** Br. germ. 1823.
Meta di Sorrento (Fienga). Argine delle vigne a Capri (Giordano, VI, 1906). Muri a Gragnano (! ca. m. 150, IV, 1903). Muri umidi della Villa di Quisisana (! ca. m. 300, IV, 1903) (*C.*).

3. ***Gyroweisia tenuis*** (Schrad) Schpr. 1896.
Muri a Gragnano (! ca. m. 150, IV, 1903). Tufo nel bosco sopra Quisisana (! ca. 330 m., XII, 1903) (*I.*).

4. ***Weisia viridula*** (L.) Hedw. 1781.
Sui tufi e sui muricciuoli a Gragnano (! ca. m. 150, IV, 1903). Id. in Val Tramonti presso Campinola (! ca. m. 412, XII, 1903) (*Cft.*).

5. ***W. crispata*** (Br. germ.) Jur. 1882.
Per terra a Capri presso Anacapri (! ca. m. 250, IV, 1904 (*C.*).

6. ***Dicranoweisia cirrhata*** (L.) Lindb. 1864.
Per terra nei boschi presso Cava de' Tirreni nel vallone Contrappone (! ca. m. 300, XII 1903) (*Cf.*).

7. ***Eucladium verticillatum*** (L.) Br. eur. 1846.
Gragnano, grotta nelle rupi calcaree costantemente umide passati i mulini (Giordano). Cava de' Tirreni nella grotta di Bonnay (Giordano, Cesati). Roccie umide alla sorgente dell'Acquasanta nel M. S. Angelo (Arcangeli, VIII, 1891) (*C.*).

8. ***Dicranella varia*** (Hedw.) Schpr. 1855.
Argini e margine dei campi a Quisisana (Giordano). Suolo dei boschi sopra Cava de' Tirreni nel vallone Contrappone (! ca. 300 m., XII, 1903) (*Cft.*).

9. ***Dicranum Starkei*** Web e Mohr 1807.
Rupi nei boschi dei Monti Lattarii (sterile. Giordano) (*Cf.*).

10. ***D. scoparium*** (L.) Hedw. 1782.
Rupi calcaree umide dei Monti Lattarii (Giordano) (*Cft.*).

11. ***Ceratodon chloropus*** Brid. 1826.
Pendii di M. Solaro sopra Anacapri (! ca. m. 520, IV, 1903) (*Cft.*).

12. ***Leptotrichum flexicaule*** (Schleich) Hampe 1847.

Monte S. Angelo all'Acquasanta (Arcangeli, sterile, VIII, 1891) (*C.*).

13. ***Distichium capillaceum*** (Sw.) Br. eur. 1846.

Monte Sant'Angelo all'Acquasanta, rupi calcaree bagnate da uno stillicidio (Giordano). Idem (Arcangeli, fr., VIII, 1891) (*C.*).

14. ***Didymodon rubellus*** (Hoffm.) Br. eur. 1846.

Gragnano, presso i mulini, sui muri e le rupi calcaree (Giordano) (*C.*).

15. ***D. luridus*** Hornsch 1826.

Gragnano, ai mulini, sui muri e le rupi calcaree (Giordano) (*Cp.*).

16. ***D. tophaceus*** (Brid.) Jur. 1882.

Argini argillosi dei campi in Val Tramonti sopra Campinola (! ca. 450 m., XII, 1903) (*C.*).

17. ***Trichostomum crispulum*** Bruch. 1829.

Roccie calcaree umide in Val di Gragnano (Giordano). Boschi di M. Faito sul suolo (! ca. 370 m., IX, 1903). Boschi di Cava de' Tirreni, id. (! ca. 300 m., XII, 1903) (*Cp.*).

18. ***T. mutabile*** Br. eur.

M. S. Angelo presso l'Acquasanta (Arcangeli, VII, 1891). Boschi di M. Faito (! ca. m. 500, IV, 1903). Capri sul terreno nella macchia sopra Marina Grande (! ca. 50 m., IV, 1903) (*Cp.*).

19. ***Timmiella anomala*** (Br. eur.) Limpr. 1890.

Vigne lungo la strada di Gragnano, raro (Giordano) (*Cp.*).

20. ***T. barbula*** (Schwaegr.) Limpr. 1890.

Terreno e muri a Quisisana (Giordano). A Gragnano (Giordano). Macchia sopra Marina Grande di Capri, sul suolo (! ca. 100 m., IV, 1904). Muricciuoli sopra Anacapri (! ca. 460 m., IV, 1903). Muri a Gragnano (! ca. 150 m., IV, 1903). Muri degli orti a Castellammare (! ca. 50 m., XII, 1903) (*Cp.*).

21. ***Aloina ambigua*** (Br. eur.) Limpr. 1890.

Argini dei campi in Val Tramonti a Campinola (! ca. 410 m., XII, 1903) (*I.*).

22. ***Crossidium squamigerum*** (Viv.) Jur. 1882.

Vietri presso il mare, su roccie calcaree (Giordano). Id. sentiero che sale al M. Faito da Castellammare (Giordano) (*C.*).

23. ***Barbula unguiculata*** (Huds) Hedw. 1782.

Argini dei campi sopra Cava de' Tirreni (! ca. 200 m., XII, 1903) (*I.*).

24. ***B. fallax*** Hedw. 1787.

Sul terreno a Gragnano nel rio (! ca. 150 m., IV, 1903) (*I.*).

25. ***B. vinealis*** Brid. 1826, var. ***cylindrica*** (Tayl.) Boul.

A Gragnano colla precedente (! ca. 150 m., IV, 1903) (*Cft.*).

26. ***B. convoluta*** Hedw. 1787.

Margini umidi dei viottoli nei boschi sopra Quisisana (! ca. 350 m., XII, 1903) e nei boschi presso Pimonte (! ca. 400 m., IV, 1903) (*I.*).

27. ***Tortella tortuosa*** (L.) Limpr. 1890.

Monte Sant'Angelo all'Acquasanta sulle roccie calcaree (Arcangeli, sterile, VIII, 1901) (*Cp.*).

28. ***Tortula muralis*** (L.) Hedw. 1782.

Muri di Campinola in Val Tramonti (! ca. m. 412, XII, 1903). Muri a Capri (! ca. 100 m., IV, 1904). Id. presso al M. di Tiberio nei campi (! ca. 300 m., II, 1904) (*I.*).

Var. ***incana*** Schpr.

Muri e massi in Val Tramonti presso Campinola (! ca. m. 420, XII, 1903). Id. a Gragnano (! ca. m. 150, IV, 1903). Sulla terra secca e ciottolosa a Capri sotto al paese (! ca. 60 m., IV, 1904) (*C.*).

29. ***T. marginata*** (Br. eur.) Spr. 1895.

Muri a Gragnano (! ca. 150 m., IV, 1903). Id. a Castellammare (! ca. ? m., IV, 1903). Id. a Capri nel paese (! ca. 100 m., IV, 1904). Id. sotto M. di Tiberio (! ca. 300 m., IV, 1904) (*I.*).

30. ***T. subulata*** (L.) Hedw. 1782.

Tronchi nei boschi di Quisisana (Giordano) (*I.*).

Non ho raccolta questa specie. Ritengo però probabile trattarsi della var. *integrifolia* Boulay, asserendo questo autore che il tipo non penetra nella regione mediterranea dove è sostituito dalla varietà calcicola preferente. I due esemplari di *T. subulata* provenienti dalla regione mediterranea e pubblicati nell'*Herb. critt. it.* (I. n. 317, colle di Serino presso Genova, Gennari, e II, n. 510, M. Sette Fratelli nella Sardegna meridionale, Canepa) appartengono entrambi alla citata var. *integrifolia*.

31. ***T. laevipila*** (Brid. 1819) De Not. 1862.

Trovasi in luoghi aprici e caldi a Quisisana (Giordano) (*Cf.*).

32. ***T. montana*** (N. v. E.) Lindb. 1879.

Pimonte sui muri (! 407 m., IV, 1904). Id. sui monti calcari (! 430 m. ca., IV, 1903). Val Tramonti, sotto il Montagnone, sui massi calcari (! ca. m. 900, XII, 1903). M. Solaro sui massi calcari (! ca. 550 m., IV, 1903) (*C.*).

33. ***T. ruralis*** (L.) Ehrh. 1792.

Rupi calcaree presso Lettere (fr. Giordano). Monti di Castellammare (Giordano) (*I.*).

34. ***Fissidens pusillus*** (Wils.) Milde 1879.

Boschi di Quisisana sul terreno umido (! ca. 350 m., IV, 1903) (*Cp.*).

35. ***F. crassipes*** Wils. 1849.

Attaccato alle pietre, nei ruscelli scendenti da M. Faito nei boschi (! ca. 500 m., IV, 1903) (*Cp.?*).

36. ***F. decipiens*** De Not. 1863.

Sul suolo umido nei boschi sopra Quisisana (! ca. 350 m., XII, 1903). Id. nel vallone Contrappone sopra Cava de' Tirreni (! ca. 400 m., XII, 1903). Id. sul pendio del Montagnone in Val Tramonti (! ca. 800 m., XII, 1903) (*Cp.*).

37. ***F. taxifolius*** (L.) Hedw. 1782.

Terreno argilloso sopra Quisisana nei boschi (! ca. 350 m., st. XII, 1903) (*Cft.*).

38. ***Schistidium apocarpum*** (L.) Br. eur. 1845.

Monti Stabiani sulle rupi calcàree (Giordano). Rupi calcari di M. S. Angelo presso l'Acquasanta (fr. Arcangeli, VIII, 1891). Rupi calcaree nei boschi di M. Faito (! ca. 600 m., IV, 1903). Muricciuoli a Quisisana (! ca. 300 m., IV, 1903). Id. a Pimonte (! ca. 400 m., IV, 1903). Rupi calcari nei castagneti del vallone Contrappone sopra Cava de' Tirreni (! ca. 600 m., XII, 1903). Id. a M. Pertuso (! ca. 1100 m., XII, 1903). Id. alla Torre di Chiunzi (! m. 685, XII, 1903). Numerose forme di passaggio alle varietà *gracilis* Nees H. e *piligerum* De Not. (*I.*).

Var. ***piligerum*** De Not.

Monti Stabiani (Pasquali, Giordano) (*I.*).

39. ***Grimmia orbicularis*** Bruch. 1844.
Rupi calcaree apriche dei Monti Stabiani (Pasquali, Cesati, Giordano). Id. nei boschi di M. Faito (! ca. m. 600, IV, 1903) (*C.*).

40. ***G. pulvinata*** (L.) Smith 1807.
Roccie e muri nei monti Stabiani (Giordano). Roccie calcaree di M. S. Angelo presso l'Acquasanta (Arcangeli, fr., VIII, 1890). Muri a Pimonte (! ca. 400 m., IV, 1903). Roccie nei boschi di M. Faito (! ca. 500 m., IV, 1903). Muri a Quisisana (! ca. 300 m., XII, 1903). Rupi in Val Tramonti sotto al Montagnone (! ca. 700 m., XII, 1903). I numerosi esemplari raccolti presentano tutte le variazioni possibili dal punto di vista delle dimensioni e compattezza dei cuscinetti. colore giallastro, verdognolo o bruno, lunghezza del pelo apicale delle foglie (*I.*).

Var. ***longipila*** Schpr.
Rupi calcaree nei boschi di Val Tramonti presso il Montagnone (! ca. 900 m., XII, 1903). Id. in quelli di M. Faito (! ca. 600 m., IV, 1903) (*Cp.*).

41. ***Zigodon viridissimus*** (Dicks.) Brown 1819.
Tronchi nei boschi di Quisisana (! ca. m. 350, IV, 1903) (*Cf.*).

42. ***Orthotrichum anomalum*** (Hedw.) 1788. Var. ***saxatile*** Milde.
M. S. Angelo di Castellammare (Arcangeli, VIII, 1891). Sopra Vico Equense (Biondi, fr., VIII, 1891). Massi calcari nelle macchie sotto al Montagnone (! ca. 900 m., XII, 1903) (*C.*).

43. ***O. cupulatum*** Hoffm. 1796.
Monti Lattarii sopra Castellammare sulle rupi calcaree (Giordano. V, VI?). Sui muricciuoli campestri sopra Pimonte (! ca. 450 m., IV, 1903) (*C.*).

44. ***O. diaphanum*** (Gmel.) Schrad 1794.
Tronchi degli alberi a Cava de' Tirreni (! ca. 260 m., XII, 1903) (*Cf.*).
Forma contratta, corta, caratteristica della regione mediterranea, che, secondo Boulay, deve essere considerata come il tipo.

45. ***O. Schimperi*** Hammer 1852.
Sui tronchi a Quisisana sopra Stabia (Giordano) (*Cf.*).

46. ***O. affine*** Schrad 1894.
M. Sant'Angelo sopra il piano di Faito (Arcangeli, fr., VIII, 1891).
Secondo Venturi si tratterebbe di una forma di passaggio all'*Ort. fastigiatum*. La determinazione però è sicura (Cfr. Arcangeli, op. cit.) (*Cf.*).

47. ***O. Schawii*** Wils 1864.

Monte Sant'Angelo all'Acquasanta sui tronchi (Martelli, fr., VIII, 1901) (*Cf.*).

48. ***O. leiocarpum*** Br. eur. 1827.

Monte Sant'Angelo di Castellammare, presso il piano di Faito, sui faggi (Arcangeli, Martelli, Biondi, VIII, 1891) (*Cf.*).

49. ***Encalypta vulgaris*** (Hedw.) Hoffm. 1795.

Rupi calcaree nei monti Stabiani (Giordano). M. Sant'Angelo all'Acquasanta sempre in roccie calcari (Arcangeli, fr., VIII, 1901). Boschi di M. Faito sul terreno (! ca. 400 m., IV, 1903). Muricciuoli sopra Pimonte (! ca. 450 m., 1903) (*C.*).

50. ***E. contorta*** (Wulf.) Lindb. 1863.

Monti Lattarii sopra Castellammare alla fonte Acqua dei Porci (Giordano). Cava dei Tirreni sulle rupi calcaree nei boschi e presso il Monastero della Trinità (*C.*).

51. ***Entosthodon Templetoni*** (Sm.) Schwgr. 1823.

Lungo la via da Castellammare a Sorrento (Giordano) (*Cf.*).

52. ***E. curvisetus*** (Schwaegr) C. Mull. 1848.

Gragnano, sulle rupi calcaree presso i mulini (Giordano) (*I.*)

53. ***Funaria mediterranea*** Lindb. 1863.

Piede dei monti Stabiani a Castellammare e Vico Equense (Giordano) (*C.*).

54. ***F. convexa*** Spruce 1849.

Muri dell'abitato della borgata di Capri (! ca. 100 m., IV, 1904). Muri in Val Tramonti presso Campinola (! ca. 400 m., XII, 1904) (*I.*).

55. ***F. hygrometrica*** (L.) Sibth. 1794.

M. S. Angelo sul terreno (Arcangeli, VIII, 1892). Muri in Val Tramonti sopra Campinola (! ca. 500 m., XII, 1903). Id. a Pimonte (! ca. 400 m., IV, 1903) (*I.*).

Var. ***calvescens*** (Schwaegr.) Brenv.

Terriccio lungo la strada fra Capri ed Anacapri (! ca. 200 m., IV, 1903). Id. sotto M. di Tiberio (! ca. 300 m., IV, 1904) (*Cp.*).

56. ***Mniobryum carneum*** (L.) Limp.

Terriccio umido lungo la via di Quisisana, ed a Vico Equense (Giordano). Id. nei boschi di M. Faito (! qua e là, fra 350 e 600 m., 1903 e 1904) (*Cft.*).

57. ***Mn. albicans*** Limpr.

Aderente alle pietre bagnate di un ruscello nel bosco sotto Monte Faito (! ca. m. 400, IV, 1903) (*Cft.*).

Var. ***angustifolium*** n. var.

Differt a typo coespitibus flaccidioribus, statura humiliore (8-10 mm.) cauliculis basi tantum dilute rufescentibus, foliis angustioribus cellulis laxioribus instructis, pedunculo flavido basi rubricante.

Muri umidi ed ombreggiati della villa di Quisisana sopra Castellammare (! ca. 300 m., IV, 1903) (*Cp.* ?).

N. Boulay (*Muscinées de France*, p. 275) aveva già accennato all'esistenza di forme assai gracili di *Mn. albicans* nella zona submontana, e tale è appunto la forma raccolta da me nei boschi di Monte Faito. Sembrandomi tuttavia che gli esemplari di Quisisana si distinguessero assai bene dal tipo pel complesso dei caratteri surriferiti, ho ricorso al competente e cortese consiglio del Dr. G. Roth di Laubach e ne ho avuta confermata come legittima la nuova varietà. Mi è grato anzi porgergli qui i ringraziamenti più sentiti.

58. ***Bryum torquescens*** Br. eur. 1839.

Terreno al piede degli alberi e dei muri a Quisisana (Giordano). Capri, sul terreno nella macchia presso Marina Grande (! ca. 100 m., IV, 1904). Id. sui muricciuoli ad Anacapri (ca. 460 m., IV, 1903). Muricciuoli nei boschi di Quisisana (! ca. m. 320, IV, 1903). Id. in Val Tramonti, presso Campinola (! ca. 400 m., XII, 1903) (*C.*).

I miei esemplari appartengono alla forma *ortophylla* Bott. (Cfr. BOTTINI, *Sulla flora briologica dell'Arcipelago Toscano*, " Bull. Società Bot. Italiana ", 1902, p. 184).

59. ***Br. atropurpureum*** Br. eur.

Muricciuoli sopra Marina Grande (! ca. 50 m., IV, 1903) (*Cp.*).

Var. ***dolioloides*** Solms-Laubach.

Sui muri a Pimonte (! ca. 400 m., IV, 1903) (*Cp.*).

60. ***Br. murale*** Wils 1869.

Muri campestri a Vietri sul mare (Arcangeli, VIII, 1901). Id. in Val Tramonti presso Campinola (! ca. 450 m., XII, 1903) (*C.*).

61. ***Br. Donianum*** Grew. 1828.

Per terra a Quisisana (Terracciano) (*Cp.*).

62. ***Br. pseudotriquetrum*** Schwgr. 1816.

Boschi di M. Faito sopra Quisisana sul suolo umido (! ca. 500 m., XII, 1903) (*Cp.*).

63. ***Mnium serratum*** Schrad. 1791.

Boschi di M. Faito sopra Quisisana sul suolo umido (! ca. 500 m., IV, 1903) (*Cp.*).

64. ***Mn. undulatum*** (L.) Weis 1770.

Sul suolo umido erboso nei boschi dei monti Stabiani (Giordano)(*I.*).

65. ***Mn. affine*** Bland. 1804.

Boschi di Quisisana sul suolo umido (! ca. 350 m., XII, 1903, ster., IV, 1904, fert.). Id. presso Pimonte (! ca. 400 m., fertile, IV, 1903) (*Cft.*).

66. ***Mn. stellare*** Reich. 1778.

Boschi di M. Faito sul suolo umido (! ca. 350 m., IV, 1903) (*I.*).

67. ***Mn. punctatum*** (L.) Hedw. 1782.

Boschi di M. Faito sul suolo umido (! ca. 500 m., IV, 1903) (*Cf.*).

68. ***Philonotis fontana*** (L.) Brid. 1827.

Sotto ai ponti della strada di Amalfi, a Vietri di Salerno (Giordano, Pedicino). Gragnano, presso i mulini (Giordano) (*Cft.*).

69. ***Catharinaea undulata*** (L.) Web. et Mohr 1803.

Margine dei boschi di Quisisana (*Cft.*).

70. ***C. angustata*** Brid. 1819.

Boschi presso Cava de' Tirreni sul terreno tufaceo (! ca. 260 m., XII, 1903 (*Cft.*).

71. ***Pogonatum aloides*** (Hedw.) P. Beauv. 1805.

Monti Stabiani (Giordano). Boschi presso Pimonte, sul suolo (! ca. 400 m., IV, 1903). Boschi presso Cava de' Tirreni, sul suolo argilloso (! ca. 240 m., XII, 1903) (*Cft.*).

Pleurocarpi.

72. ***Leucodon sciuroides*** (L.) Schwgr. 1816.

Sui tronchi nei M. Lattarii (Giordano). Id. all'Acquasanta di M. S. Angelo (Arcangeli, VIII, 1901) (*Cf.*).

Var. ***morensis*** (Schwaegr.) De Not.

Sui tronchi nei boschi di Quisisana (! ca. 330 m., IV, 1903). Id. presso la torre di Chiunzi in Val Tramonti (la nota forma a rami squarrosi) (! ca. 600 m., XII, 1903) (*Cf.*).

73. ***Leptodon Smithii*** (Diks.) Mohr 1803.

Sui tronchi a Cava de' Tirreni (! ca. m. 230, XII, 1903). Id. presso la torre di Chiunzi in Val Tramonti (! ca. 600 m., XII, 1903) (*Cf.*).

74. ***Neckera crispa*** (L.) Hedw. 1782.

Rupi calcaree ombreggiate nei M. Lattarii sopra Castellammare (Giordano). Sul suolo a M. Faito (Arcangeli, VIII, 1891) (*I.*).

75. ***N. Besseri*** (Lob.) Fur. 186 .

Castellammare (Pirotta, VIII, 1885) (*Cp.*).

76. ***Pterigynandrum filiforme*** (Timm.) Hedw. 1793.

M. S. Angelo presso l'Acquasanta (Arcangeli, ster., VIII, 1891) (*Cf.*).

77. ***Pylaisia polyantha*** (Schreb.) Briol. eur. 1851.

Tronchi degli alberi a Quisisana (Giordano) (*Cf.*).

78. ***Homalothecium sericeum*** (L.) Br. eur. 1851.

Sui tronchi all'Acquasanta di M. Sant' Angelo (Arcangeli, fert., VIII, 1891). Boschi di M. Faito, alla base dei tronchi (! ca. 600 m., IV, 1903) (*I.*).

79. ***Brachytecium plumosum*** (Sw.) Br. eur. 1853.

Rupi calcaree umide in Val di Gragnano e Castellammare (Giordano) (*Cf.*).

80. ***Br. velutinum*** (L.) Br. eur. 1853.

Sulle roccie dell'Acquasanta a M. S. Angelo (Arcangeli, fr., VIII, 1901. Forma avvicinantesi al *Br. trachypodium*) (*I.*).

Var. ***condensatum*** Br. eur.

Muricciuoli nei boschi presso Pimonte (! ca. 400 m., IV, 1903) (*Cp.*).

81. ***Br. rutabulum*** (L.) Br. eur. 1853.

Var. ***densum*** Br. eur.

Terreno argilloso nei boschi del vallone Contrappone sopra Cava de' Tirreni (! ca. 300 m., XII, 1903) (*I.*).

Var. ***flavescens*** Br. eur.

Argini erbosi secchi sotto Pimonte lungo la strada di Gragnano (! ca. 350 m., IV, 1903) (*Cp.*).

Var. ***robustum*** Br. eur.

Boschi di M. Faito sopra Quisisana (! ca. 500 m., IV, 1904) (*I.*).

82. ***Scleropodium illecebrum*** (Schwaegr.) Br. eur. 1853.

Boschi di Quisisana (Giordano). Boschi di M. Faito (! ca. 400 m., IV, 1903). Macchia sul pendio di M. Pertuso verso Val Tramonti (! ca. 800 m., XII, 1903, fr.) (*Cf.*).

83. ***Eurhynchium circinnatum*** (Brid.) Br. eur. 1854.

Sul terreno a M. S. Angelo sopra il piano di Faito (Arcangeli, ster., VIII, 1891). Terreno secco in luoghi cespugliosi presso Pimonte = forma *sylvaticum* Brizi (op. cit.) (! ca. 420 m., IV, 1903). Muri ombreggiati nei boschi di Quisisana = forma *ruderale* Brizi (id.) (! ca. 300 m., IV, 1903) (*Cp.*).

84. ***E. striatum*** (Schreb.) Schimp. 1856.

Boschi di M. Faito nel terreno (! ca. 700 m., XII, 1903). Id. del vallone Contrappone sopra Cava de' Tirreni (! ca. 400 m., XII, 1903). Forma *giganteum* Brizi (l. cit.) (*I.*).

85. ***E. meridionale*** (Schpr.) De Not. 1863.

Roccie calcari dei luoghi montani e sassosi sui fianchi di Monte Faito sino ad una certa altezza, e sopra Quisisana, Gragnano, Cava de' Tirreni e Vietri (Terracciano). Sui massi calcarei sul pendio di M. Solaro verso Anacapri (! ca. 520 m., IV, 1903, fr.) (*C.*).

86. ***E. pumilum*** (Wils.) Schpr. 1856.

Muricciuoli umidi e base dei tronchi nel bosco di M. Faito (! ca. 400 m., IV, 1903) (*Cft.*).

87. ***E. speciosum*** (Brid.) Milde 1869.

Sul suolo nei boschi di Quisisana (! ca. m. 350, IV, 1903) (*I.*).

88. ***E. Stokesii*** (Turn.) Br. eur. 1854.

Piede degli alberi nei boschi sopra Quisisana (! ca. 350 m., XII, 1903) (*Cft.*).

89. ***E. praelongum*** (L. Br. eur. 1854. Var. ***rigidum*** Boulay.

Boschi di Pimonte sul suolo (! ca. 400 m., IV, 1903) (*C.*).

90. ***Rhynchostegium megapolitanum*** (Brid.) Br. eur. 1852. Var. ***meridionale*** Schimp.

Boschi di Quisisana sui muricciuoli (! ca. 320 m., IV, 1903) = forma *rutabuloideum* Brizi (op. cit.) (*I.*).

91. ***Rh. confertum*** (Dicks) Br. eur. 1852.

Boschi presso Pimonte sui muricciuoli a secco lungo le viottole (! ca. 400 m., IV, 1903). Id. nel vallone di Contrappone sopra Cava de' Tirreni (! ca. 350 m., XII, 1903) = forma *decipiens* Brizi (*Cft.*).

92. ***Rh. rusciforme*** (Neck.) Br. eur. 1852.

Presso Vietri di Salerno sotto i ponti della strada di Amalfi (Pedicino, Giordano). Gragnano, nei canali dei mulini (Giordano). Fontane di Faito sui monti Lattarii (Giordano) (*Cft.*).

Var. ***inundatum*** Br. eur. f. ***meridionale*** Boulay.

Ruscelli nei boschi di M. Faito aderente alle pietre sommerse (! ca. 400 m., XII, 1901) (*Cft.*).

93. ***Rhynchostegiella tenella*** (Dicks) Limpr. 1857.

Base dei muri e terreno calcare sopra Marina Grande a Capri (! ca. 50-100 m., IV, 1903 e 1904) = forma *meridionalis* Boulay? La nervatura raggiunge quasi l'apice delle foglie, invece d'arrestarsi verso la metà, ma Boulay *(Musc. de France)* annette poco valore a questo carattere: gli altri dati concordano perfettamente. Muri nei boschi presso Pimonte (! ca. 400 m., IV, 1903) (*Cp.*).

94. ***Cratoneuron commutatum*** (Hedw.) Roth.

Presso Vietri di Salerno sotto ai ponti e lungo i ruscelli (Giordano). A Gragnano (id.). M. S. Angelo (id.). Roccie dell'Acquasanta a M. S. Angelo (Arcangeli, ster., VIII, 1891) (*C.*).

95. ***Plagiothecium Bottinii*** (Breidl.) Roth.

Per terra a Castellammare (Giordano, Pirotta) (*Cf.*).

96. ***Drepanium cupressiforme*** (L.) Roth.

M. Sant'Angelo presso l'Acquasanta (Arcangeli, VIII, 1891).

Var. ***elatum*** Schpr.

Suolo nei boschi secchi di M. Pendolo (! ca. 500 m., IV, 1903) (*Cp.*).

Var. ***imbricatum*** Boul.

Tronchi nei boschi sopra Quisisana (! ca. 350 m., IV, 1903) (*Cp.*).

Var. ***tectorum*** Schpr.

Roccie calcaree nei boschi del vallone Contrappone sopra Cava de' Tirreni (! ca. 500 m., XII, 1903). Id. a M. Pertuso, versante di Val Tramonti (! ca. m. 1000, XII, 1903) (*I.*).

Var. ***ericetorum*** Schimp.

Macchie sotto il Montagnone, sul versante di Val Tramonti (! ca. 800 m., XII, 1903) (*I.*).

Var. ***filiforme*** Brid.

Tronchi nei boschi di M. Faito (! ca. 600 m., IV, 1903). Id. nel vallone Contrappone sopra Cava de' Tirreni (! ca. 400 m., XII, 1903) (*Cf.*).

97. ***Ctenidium molluscum*** (Hedw.) Mott. 1879.

Copioso e sempre sterile sulle rupi calcaree presso Gragnano (Giordano). Roccie nella faggeta dell' Acquasanta a M. S. Angelo (Arcangeli, ster., VIII, 1891). Boschi di Pimonte sul suolo (! ca. 400 m., fert., IV, 1903) (*Cp.*).

Var. ***gracile*** Boulay.

Boschi di M. Faito sul suolo (! ca. 400 m., IV, 1903). Id. presso Pimonte (! ca. 400 m., IV, 1903). Id. nel vallone Contrappone sopra Cava de' Tirreni (! ca. 800 m., XII, 1903). Fra la Torre di Chiunzi e Pagani nelle macchie sopra la Torretta, sul suolo erboso (! ca. 300 m., XII, 1903) (*Cp.*).

98. ***Hypnum purum*** L. 1763.

Fra la Torre di Chiunzi e Pagani sopra La Torretta sul suolo erboso (! ca. 300 m., XII, 1903, ster.). Boschi di M. Faito (! ca. 600 m., XII, 1903, fert.) (*I.*).

99. ***Thamnium alopecurum*** (L.) Br. eur. 1852.

Rupi calcaree lungo un rio che scende da Quisisana nel bosco di M. Faito: luoghi ombrosi umidi (! ca. 400 m., IV, 1903, fertile = forma *procerrimum* Brizi (op. cit.) (*I.*).

Torino, Istituto Botanico, gennaio 1906.

Sulla deformazione di una sfera elastica isotropa.

Nota di TOMMASO BOGGIO, a Genova.

Uno dei problemi più interessanti della teoria matematica dell'Elasticità, è senza dubbio quello della deformazione di una sfera, o, come caso particolare, di un suolo elastico isotropo, per dati spostamenti o tensioni superficiali.

Esso è stato trattato da varii Autori con metodi svariatissimi, che, qual più, qual meno, sono ispirati al concetto di assumere come note certe funzioni incognite, che si determinano poi dopo aver soddisfatto alle condizioni in superficie.

A questo riguardo il Cesàro nella sua *Introduzione alla teoria matematica dell'Elasticità* (Torino, a. 1894), dopo aver esposta la soluzione del problema del suolo isotropo col metodo Betti-Cerruti, ne dà un'altra basata sul principio di " riguardare provvisoriamente come nota la dilatazione cubica θ, calcolare poi gli spostamenti e dedurne l'espressione di θ: questa funzione si trova così isolata in una relazione che serve a determinarla " (*).

Però l'estrinsecazione di questo principio, che è indubbiamente il più naturale ed ovvio, può farsi in differenti modi: quello che espongo in questa Nota mi pare il più semplice. Ritenuta provvisoriamente come nota la dilatazione cubica θ, gli spostamenti vengono espressi da formole nelle quali la θ figura sotto segni di quadratura (intesi in senso stretto); perciò è immediata la deduzione di un'equazione differenziale che determina completamente la funzione θ: nel caso della sfera si ha un'equazione differenziale ordinaria lineare di 1° o di 2° ordine.

Invece nei calcoli sviluppati dal Cesàro per il suolo isotropo, e in quelli del Tedone (**) per il suolo e per la sfera isotropa,

---

(*) Cesàro, op. cit., pag. 120.

(**) Tedone, *Saggio di una teoria generale delle equazioni dell'equilibrio elastico per un corpo isotropo*, Memoria I (" Annali di Matem. ", serie III, tomo VIII, a. 1903).

la dilatazione cubica comparisce in integrali di superficie, ciò che rende più malagevole il calcolo di essa.

Inoltre conviene osservare che il metodo che qui adopero nel caso in cui sono date le tensioni superficiali, non differisce (salvo qualche ovvia modificazione) da quello relativo al caso in cui sono dati gli spostamenti superficiali, e permette di arrivare in modo facile e diretto alle formole definitive esprimenti gli spostamenti in funzione dei dati del problema.

Col metodo del Prof. Almansi (*) occorre invece considerare certe equazioni differenziali a cui soddisfano le componenti delle tensioni interne.

1. — Sia S lo spazio racchiuso da una superficie sferica σ, di raggio R, nel centro della quale porremo l'origine delle coordinate.

Osserviamo allora che la funzione F, regolare in S, che soddisfa alle equazioni:

$$(1) \qquad \Delta_2 F = \frac{du}{dx}, \quad (\text{in } S) \qquad \left(\Delta_2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}\right)$$

$$(2) \qquad F = f, \quad (\text{su } \sigma)$$

ove u è una funzione armonica in S, ed f una funzione data nei punti di σ, è espressa dalla formola:

$$(3) \qquad F = F' - \frac{1}{4}(R^2 - \rho^2)\frac{d}{dx}\left[\rho^{-\frac{1}{2}}\int_0^\rho \rho^{-\frac{1}{2}} u \, d\rho\right],$$

in cui F' indica la funzione armonica in S e che su σ coincide con f, e ρ è il raggio vettore, che parte dall'origine.

Questa formola si ottiene ponendo:

$$F = F' + (R^2 - \rho^2)\varphi,$$

ove φ è una funzione armonica da determinarsi. Così risulta

(*) Almansi, *Sulla deformazione della sfera elastica* (" Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino ", serie II, tomo XLVII, a. 1897).

già soddisfatta la (2); sostituendo poi nella (1) si ricava facilmente:

$$(4) \qquad \varphi = -\frac{1}{4}\rho^{-\frac{3}{2}}\int_0^\rho \rho^{-\frac{1}{2}}\frac{du}{dx}d\rho = -\frac{1}{4}\frac{d}{dx}\left[\rho^{-\frac{1}{2}}\int_0^\rho \rho^{-\frac{1}{2}} u d\rho\right],$$

donde segue la (3).

2. — Supponiamo ora che lo spazio sferico S sia occupato da un corpo elastico isotropo, non soggetto a forze di massa.

Si tratta di determinare la deformazione di S conoscendo la deformazione subìta dalla superficie σ. Denotando con ξ, η, ζ le componenti dello spostamento di un punto qualunque di S, dovranno essere soddisfatte, in S, le equazioni indefinite:

$$(5) \qquad \begin{cases} \Delta_2\xi = -\dfrac{1}{1-2m}\dfrac{d\theta}{dx} \\ \Delta_2\eta = -\dfrac{1}{1-2m}\dfrac{d\theta}{dy} \\ \Delta_2\zeta = -\dfrac{1}{1-2m}\dfrac{d\theta}{dz} \end{cases}$$

ove m è una costante, e

$$(6) \qquad \theta = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}.$$

Nei punti di σ avremo poi:

$$(7) \qquad \xi = f_1, \quad \eta = f_2, \quad \zeta = f_3,$$

essendo f_1, f_2, f_3 date funzioni dei punti di σ.

Supponendo, per un momento, nota la dilatazione θ, le (5), (7) sono della stessa forma delle (1), (2), perciò applicando la (3) si ha:

$$(8) \qquad \begin{cases} \xi = \xi' + \dfrac{R^2-\rho^2}{4\mu}\dfrac{d}{dx}\left[\rho^{-\frac{1}{2}}\displaystyle\int_0^\rho \rho^{-\frac{1}{2}}\theta d\rho\right] \\ \eta = \eta' + \dfrac{R^2-\rho^2}{4\mu}\dfrac{d}{dy}\left[\rho^{-\frac{1}{2}}\displaystyle\int_0^\rho \rho^{-\frac{1}{2}}\theta d\rho\right] \\ \zeta = \zeta' + \dfrac{R^2-\rho^2}{4\mu}\dfrac{d}{dz}\left[\rho^{-\frac{1}{2}}\displaystyle\int_0^\rho \rho^{-\frac{1}{2}}\theta d\rho\right], \end{cases}$$

ove ξ', η', ζ' indicano le funzioni armoniche in S e che su σ prendono rispettivamente i valori f_1, f_2, f_3, e $\mu = 1 - 2m$.

Per determinare la funzione armonica θ sostituiamo i valori (8) nella (6) e avremo:

$$\frac{3-4m}{2\mu}\theta = \Phi + \frac{1}{4\mu}\left[\rho^{-\frac{1}{2}}\int_0^\rho \rho^{-\frac{1}{2}}\theta d\rho\right], \tag{9}$$

avendo posto:

$$\Phi = \frac{d\xi'}{dx} + \frac{d\eta'}{dy} + \frac{d\zeta'}{dz}.$$

Moltiplicando la (9) per $\rho^{\frac{1}{2}}$, poi derivando rispetto a ρ e ponendo: $c = \frac{1-2m}{3-4m}$, si ha:

$$c\left(\frac{3-4m}{2\mu}\theta - \Phi\right) + \rho\frac{d}{d\rho}\left(\frac{3-4m}{2\mu}\theta - \Phi\right) = \frac{1}{2(3-4m)}\Phi;$$

la costante m è compresa tra 0 e $\frac{1}{2}$, dunque $c > 0$, perciò dall'equazione precedente si ricava:

$$\frac{3-4m}{2\mu}\theta - \Phi = \frac{1}{2(3-4m)}\rho^{-c}\int_0^\rho \rho^{c-1}\Phi d\rho,$$

quindi dalla (9):

$$\frac{1}{4\mu}\left[\rho^{-\frac{1}{2}}\int_0^\rho \rho^{-\frac{1}{2}}\theta d\rho\right] = \frac{1}{2(3-4m)}\rho^{-c}\int_0^\rho \rho^{c-1}\Phi d\rho.$$

Sostituendo nelle (8) si ha:

$$\xi = \xi' + \frac{R^2-\rho^2}{2(3-4m)}\frac{d}{dx}\left[\rho^{-c}\int_0^\rho \rho^{c-1}\Phi d\rho\right],$$

od ancora:

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \xi' + \frac{R^2-\rho^2}{2(3-4m)}\rho^{-c-1}\int_0^\rho \rho^c \frac{d\Phi}{dx} d\rho \\ \eta &= \eta' + \frac{R^2-\rho^2}{2(3-4m)}\rho^{-c-1}\int_0^\rho \rho^c \frac{d\Phi}{dy} d\rho \\ \zeta &= \zeta' + \frac{R^2-\rho^2}{2(3-4m)}\rho^{-c-1}\int_0^\rho \rho^c \frac{d\Phi}{dz} d\rho, \end{aligned}\right.$$

e queste formole risolvono il problema proposto.

3. — Per determinare la deformazione della sfera S, quando in superficie sono date le tensioni, anzichè gli spostamenti, conviene considerare dapprima la funzione F, regolare in S, che soddisfa alle equazioni:

$$\Delta_2 F = \frac{du}{dx}, \quad (\text{in } S) \tag{10}$$

$$\frac{dF}{d\rho} = f, \quad (\text{su } \sigma) \tag{11}$$

u, f avendo lo stesso significato che nel § 1.

Si può porre:

$$F = \varphi_0 + (R^2 - \rho^2)\varphi,$$

ove φ_0, φ sono funzioni armoniche da determinarsi. Sostituendo nella (10), che è identica alla (1), si deduce che la φ sarà ancora data dalla (4).

Si ha poi:

$$\rho \frac{dF}{d\rho} = \rho \frac{d\varphi_0}{d\rho} - 2\rho^2\varphi + (R^2 - \rho^2)\rho \frac{d\varphi}{d\rho}, \tag{12}$$

perciò, osservando la (11):

$$\rho \frac{d\varphi_0}{d\rho} = 2R^2\varphi + Rf, \quad (\text{su } \sigma).$$

A quest'equazione, valida nei punti di σ, si può sostituire quest'altra, valida in tutto S:

$$\rho \frac{d\varphi_0}{d\rho} = 2R^2\varphi + RF',$$

essendo F' la funzione armonica in S e che su σ coincide con f.

Sostituendo nella (12) avremo:

$$\rho \frac{dF}{d\rho} = RF' + (R^2 - \rho^2)\left(2\varphi + \rho \frac{d\varphi}{d\rho}\right),$$

cioè adoperando la (4):

$$\rho \frac{dF}{d\rho} = RF' - \frac{1}{4}(R^2 - \rho^2)\frac{d}{dx}\left[u + \frac{1}{2}\rho^{-\frac{1}{2}}\int_0^\rho \rho^{-\frac{1}{2}} u \, d\rho\right] \tag{13}$$

formola che ci sarà assai utile.

4. — Cerchiamo ora la deformazione della sfera S, supponendo di conoscere per ogni punto di σ le componenti F_x, F_y, F_z della tensione, che dovranno soddisfare alle condizioni:

$$(14)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_\sigma F_x d\sigma = \int_\sigma F_y d\sigma = \int_\sigma F_z d\sigma = 0 \\ &\int_\sigma (yF_x - xF_y) d\sigma = \int_\sigma (zF_y - yF_z) d\sigma = \int_\sigma (xF_z - zF_x) d\sigma = 0 , \end{aligned} \right.$$

che sono necessarie affinchè la sfera, supposta rigida, sia in equilibrio.

Le componenti ξ, η, ζ dello spostamento dovranno soddisfare, nei punti di S, alle equazioni indefinite (5), che possono pure scriversi:

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1-m}{\mu}\frac{d\theta}{dx} + \frac{d\omega_2}{dz} - \frac{d\omega_3}{dy} = 0 \\ &\frac{1-m}{\mu}\frac{d\theta}{dy} + \frac{d\omega_3}{dx} - \frac{d\omega_1}{dz} = 0 \\ &\frac{1-m}{\mu}\frac{d\theta}{dz} + \frac{d\omega_1}{dy} - \frac{d\omega_2}{dx} = 0 , \end{aligned} \right.$$

avendo denotato con $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ le componenti della rotazione della particella, cioè:

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} &\omega_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz}\right) \\ &\omega_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx}\right) \\ &\omega_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy}\right) . \end{aligned} \right.$$

Nei punti di σ dovranno essere verificate le equazioni ai limiti:

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{d\xi}{dn} + \frac{m}{\mu}\theta\frac{dx}{dn} + \omega_3\frac{dy}{dn} - \omega_2\frac{dz}{dn} = -\alpha F_x \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \right.$$

ove α è una costante ed n è la normale a σ diretta all'interno di S; osservando che per la sfera si ha:

$$\frac{dx}{dn} = -\frac{x}{R}, \quad \frac{dy}{dn} = -\frac{y}{R}, \quad \frac{dz}{dn} = -\frac{z}{R},$$

le equazioni precedenti potranno scriversi:

$$(17) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\xi}{d\rho} &= \alpha F_x - \frac{1}{R}\left(\frac{m}{\mu} x\theta + y\omega_3 - z\omega_2\right) \\ \frac{d\eta}{d\rho} &= \alpha F_y - \frac{1}{R}\left(\frac{m}{\mu} y\theta + z\omega_1 - x\omega_3\right) \\ \frac{d\zeta}{d\rho} &= \alpha F_z - \frac{1}{R}\left(\frac{m}{\mu} z\theta + x\omega_2 - y\omega_1\right). \end{aligned} \right.$$

5. — Per determinare le funzioni ξ, η, ζ basta procedere come nel § 2. Supponendo perciò già conosciute le funzioni armoniche $\theta, \omega_1, \omega_2, \omega_3$, le (5), (17) sono della stessa forma delle (10), (11), perciò applicando la (13) si ha:

$$(18) \quad \rho \frac{d\xi}{d\rho} = \alpha\varphi_1 - \psi_1 + \frac{R^2 - \rho^2}{4\mu} \frac{d}{dx}\left[\theta + \frac{1}{2}\rho^{-\frac{1}{2}} \int_0^\rho \rho^{-\frac{1}{2}} \theta d\rho\right],$$

e due analoghe per η, ζ; in essa φ_1, ψ_1 indicano le funzioni armoniche in S e che nei punti di σ coincidono rispettivamente con:

$$RF_x, \quad \left(\frac{m}{\mu} x\theta + y\omega_3 - z\omega_2\right).$$

Osservando che mediante le (15) si ha:

$$\Delta_2\left(\frac{m}{\mu} x\theta + y\omega_3 - z\omega_2\right) = \frac{2}{\mu}\frac{d\theta}{dx},$$

risulta applicando la (3):

$$\frac{m}{\mu} x\theta + y\omega_3 - z\omega_2 = \psi_1 - \frac{R^2 - \rho^2}{2\mu} \frac{d}{dx}\left[\rho^{-\frac{1}{2}} \int_0^\rho \rho^{-\frac{1}{2}} \theta d\rho\right],$$

e sostituendo nella (18) e analoghe:

$$(19)\quad\begin{cases}\rho\dfrac{d\xi}{d\rho}=\alpha\varphi_1-\left(\dfrac{m}{\mu}x\theta+y\omega_3-z\omega_2\right)+\dfrac{R^2-\rho^2}{4\mu}\dfrac{d}{dx}\left[\theta-\dfrac{3}{2}\rho^{-\frac{1}{2}}\int_0^\rho\rho^{-\frac{1}{2}}\theta d\rho\right]\\ \rho\dfrac{d\eta}{d\rho}=\alpha\varphi_2-\left(\dfrac{m}{\mu}y\theta+z\omega_1-x\omega_3\right)+\dfrac{R^2-\rho^2}{4\mu}\dfrac{d}{dy}\left[\theta-\dfrac{3}{2}\rho^{-\frac{1}{2}}\int_0^\rho\rho^{-\frac{1}{2}}\theta d\rho\right]\\ \rho\dfrac{d\zeta}{d\rho}=\alpha\varphi_3-\left(\dfrac{m}{\mu}z\theta+x\omega_2-y\omega_1\right)+\dfrac{R^2-\rho^2}{4\mu}\dfrac{d}{dz}\left[\theta-\dfrac{3}{2}\rho^{-\frac{1}{2}}\int_0^\rho\rho^{-\frac{1}{2}}\theta d\rho\right],\end{cases}$$

e queste formole sono le corrispondenti delle (8).

Per ottenere ora la funzione armonica θ sostituiamo i valori (19) nella formola seguente, che si verifica subito mediante la (6):

$$\rho\frac{d\theta}{d\rho}+\theta=\frac{d}{dx}\left(\rho\frac{d\xi}{d\rho}\right)+\frac{d}{dy}\left(\rho\frac{d\eta}{d\rho}\right)+\frac{d}{dz}\left(\rho\frac{d\zeta}{d}\right),$$

e avremo:

$$(20)\quad\frac{1+2m}{2\mu}\theta+\frac{1}{2\mu}\rho\frac{d\theta}{d\rho}=\alpha\Phi+\frac{1}{4\mu}\left[\theta-\frac{3}{2}\rho^{-\frac{1}{2}}\int_0^\rho\rho^{-\frac{1}{2}}\theta d\rho\right],$$

ove:

$$\Phi=\frac{d\varphi_1}{dx}+\frac{d\varphi_2}{dy}+\frac{d\varphi_3}{dz}.$$

Sostituendo nelle (19) si ha perciò:

$$(21)\quad\begin{cases}\rho\dfrac{d\xi}{d\rho}=\alpha\varphi_1-\left(\dfrac{m}{\mu}x\theta+y\omega_3-z\omega_2\right)+(R^2-\rho^2)\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{1+2m}{2\mu}\theta+\dfrac{1}{2\mu}\rho\dfrac{d\theta}{d\rho}-\alpha\Phi\right]\\ \rho\dfrac{d\eta}{d\rho}=\alpha\varphi_2-\left(\dfrac{m}{\mu}y\theta+z\omega_1-x\omega_3\right)+(R^2-\rho^2)\dfrac{d}{dy}\left[\dfrac{1+2m}{2\mu}\theta+\dfrac{1}{2\mu}\rho\dfrac{d\theta}{d\rho}-\alpha\Phi\right]\\ \rho\dfrac{d\zeta}{d\rho}=\alpha\varphi_3-\left(\dfrac{m}{\mu}z\theta+x\omega_2-y\omega_1\right)+(R^2-\rho^2)\dfrac{d}{dz}\left[\dfrac{1+2m}{2\mu}\theta+\dfrac{1}{2\mu}\rho\dfrac{d\theta}{d\rho}-\alpha\Phi\right].\end{cases}$$

Moltiplicando la (20) per $\rho^{\frac{1}{2}}$ e poi derivando rispetto a ρ si ha:

$$(1+m)\theta+2(1+m)\rho\frac{d\theta}{d\rho}+\rho^2\frac{d^2\theta}{d\rho^2}=\alpha(1-2m)\left(\Phi+\rho\frac{d\Phi}{d\rho}\right),$$

equazione differenziale ordinaria di 2° ordine, da cui si può ricavare la θ.

Essendo così nota la θ, cerchiamo le funzioni armoniche $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Sostituendo i valori (21) nella formola seguente, che si verifica subito mediante le (16):

$$\rho \frac{d\omega_1}{d\rho} + \omega_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dy}\left(\rho \frac{d\zeta}{d\rho}\right) - \frac{d}{dz}\left(\rho \frac{d\eta}{d\rho}\right)\right],$$

si ha:

$$\rho \frac{d\omega_1}{d\rho} = \alpha\left(\frac{d\varphi_3}{dy} - \frac{d\varphi_2}{dz}\right) + \frac{1+m}{\mu}\left(z \frac{d\theta}{dy} - y \frac{d\theta}{dz}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\mu}\left[z \frac{d}{dy}\left(\rho \frac{d\theta}{d\rho}\right) - y \frac{d}{dz}\left(\rho \frac{d\theta}{d\rho}\right)\right] - 2\left(z \frac{d\Phi}{dy} - y \frac{d\Phi}{dz}\right),$$

perciò con una quadratura si ottiene ω_1; e similmente si hanno ω_2, ω_3.

Dopo ciò le (21) con un'altra quadratura ci dànno le funzioni ξ, η, ζ, colle quali il problema proposto è risoluto.

Tenendo conto delle (14) si conclude che le espressioni risultanti per ξ, η, ζ sono finite e continue anche per $\rho = 0$.

Eseguendo effettivamente le predette quadrature si arriva alle formole definitive che esprimono le funzioni ξ, η, ζ sotto la forma loro data dal Prof. Lauricella (*).

Osservazione. — Il precedente metodo d'integrazione è applicabile al caso del suolo elastico isotropo (anche per i problemi misti), al cerchio, ecc.

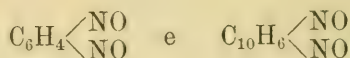
Genova, Febbraio 1906.

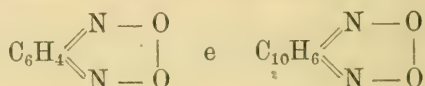
(*) Lauricella, *Sulla deformazione di una sfera elastica isotropa per date tensioni in superficie* („ Nuovo Cimento „, serie V, vol. V, Gennaio 1903).

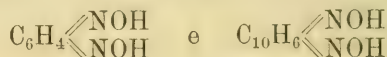
Sulla formola di costituzione della "1,2-dinitrosonaftalina".

Nota del Dr. GIACOMO PONZIO.

Secondo alcuni chimici i cosidetti dinitrosobenzoli e dinitrosonaftaline

$$C_6H_4\langle{}^{NO}_{NO} \quad e \quad C_{10}H_6\langle{}^{NO}_{NO}$$

devono esser considerati come i perossidi

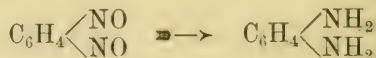
$$C_6H_4\langle{}^{N-O}_{N-O} \quad e \quad C_{10}H_6\langle{}^{N-O}_{N-O}$$

delle corrispondenti chinon- e naftochinondiossime

$$C_6H_4\langle{}^{NOH}_{NOH} \quad e \quad C_{10}H_6\langle{}^{NOH}_{NOH}$$

e ciò in conseguenza del modo di formazione di tali composti, i quali risultano, analogamente ai veri perossidi degli α-dichetoni, per ossidazione delle rispettive diossime.

Manca per altro una prova diretta che parli in favore della formola di perossido, anzi, mentre, come ha dimostrato Angeli (1), i perossidi degli α-dichetoni ridotti con stagno e acido cloridrico dànno i furazani corrispondenti:

$$\begin{matrix} -C=N-O \\ | \qquad\quad | \\ -C=N-O \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} -C=N\diagdown \\ | \qquad\quad O \\ -C=N\diagup \end{matrix}$$

i dinitrosobenzoli assoggettati allo stesso trattamento dànno le diamine:

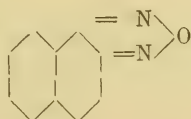
$$C_6H_4\langle{}^{NO}_{NO} \longrightarrow C_6H_4\langle{}^{NH_2}_{NH_2}$$

(1) Gazz. Chim. Ital. *22*, II, 473 (1892).

Ed in realtà Nietzki e Kehrmann (1) ottennero dal p-dinitrosobenzolo la p-fenilendiamina, Zincke e Schwarz (2) dall'o-dinitrosobenzolo la o-fenilendiamina, e siccome comportamento analogo presentano i dinitrosotoluoli e i dinitrosoxiloli (loc. cit.), così questi ultimi chimici preferiscono per detti composti la formola di dinitrosoderivati a quella di perossidi, senza però escludere questa in modo assoluto.

Avendo recentemente trovato un metodo molto semplice di preparazione della cosidetta 1,2-dinitrosonaftalina (3), ho creduto opportuno di fare qualche esperienza per stabilire quale delle due formole:

—N=O —N=O   =N—O, =N—O

si dovesse assegnare a detto composto. E malgrado che Koreff (4), il quale pel primo l'ha ottenuto, asserisca non essere in alcun modo riducibile, io ho trovato che nelle condizioni indicate da Angeli (loc. cit.) la " 1,2-dinitrosonaftalina " è facilmente trasformata in naftofurazano

=N, =N > O

La formazione di quest'ultimo (che si può considerare come un'anidride interna della diossima $C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup NOH\\ \diagdown NOH\end{matrix}$, dalla quale infatti risulta per eliminazione di una molecola di acqua) dimostra in modo evidente la costituzione della cosidetta 1,2-dinitrosonaftalina la quale si deve perciò ritenere come il *perossido della β-naftochinondiossima* $C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup N-O\\ \diagdown N-O\end{matrix}$.

---

(1) Berichte *20*, 615 (1887).
(2) Annalen *307*, 28 (1899).
(3) Atti 1905-906, vol. XLI.
(4) Berichte *19*, 182 (1886).

Non credo tuttavia che le conclusioni alle quali sono arrivato per questo caso particolare si debbano estendere ai derivati del benzolo ai quali ho sopra accennato, perchè, come ho già detto, non si sono potuti ottenere da questi i furazani corrispondenti. Inoltre, malgrado l'analogia del modo di formazione, ritengo che si debba fare una distinzione fra la costituzione dei p-dinitroso- e quella degli o-dinitrosoderivati: infatti in questi ultimi, nei quali i due gruppi sono in posizione orto, può facilmente costituirsi un legame fra gli atomi di ossigeno, mentre che nei primi, i quali contengono i gruppi in posizione para, tale unione difficilmente potrebbe avvenire.

Mi sembra infine che la facilità colla quale i p-dinitrosoderivati si ossidano nei corrispondenti p-dinitroidrocarburi e l'impossibilità di ossidare gli o-derivati debbano pur esser prese in considerazione.

Secondo Koreff (loc. cit.) il perossido della diossima del β-naftochinone $C_{10}H_6\begin{matrix} \diagup N-O \\ \quad\;\; | \\ \diagdown N-O \end{matrix}$ resiste all' azione riducente del sodio e alcool, del cloruro stannoso e alcool, del cloruro stannoso e acido cloridrico e non si può nitrare neppure a caldo con acido nitrico in soluzione acetica. Operando in condizioni opportune ho potuto invece facilmente ridurlo e nitrarlo.

Riduzione con stagno e acido cloridrico. — Gr. 5 di perossido si sospendono in 200 cc. di acido cloridrico concentrato e si trattano con stagno, scaldando per qualche ora a 60°-70°. Dopo raffreddamento si raccoglie la sostanza indisciolta, la si lava con acido cloridrico concentrato e quando è ben asciutta la si riscalda con eteri di petrolio, nei quali si scioglie per la maggior parte. Dalla soluzione petrolica si separano col raffreddamento splendidi aghi bianchi fusibili a 78° ed aventi tutte le proprietà del *naftofurazano* $C_{10}H_6\begin{matrix} \diagup N \diagdown \\ \diagdown N \diagup \end{matrix}O$ già descritto da Goldschmid e Schmidt (1).

(1) Berichte *17*, 216, 803, 2067 (1884).

Gr. 0,1315 di sostanza fornirono cc. 19 di azoto ($H_0 = 727,99$ $t = 13°$), ossia gr. 0,021615.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{10}H_6N_2O$
Azoto	16,43	16,47

La parte insolubile in eteri di petrolio si scioglie in poca acqua e si precipita di nuovo con acido cloridrico concentrato. Si ottengono così laminette leggermente rosee che seccate nel vuoto su idrato potassico si riconoscono per *cloridrato di 1,2-naftilendiamina* $C_{10}H_6\langle^{NH_2}_{NH_2} . 2HCl$.

Gr. 0,1959 di sostanza richiesero 17 cc. di idrato sodico $\frac{N}{10}$.

Cioè su cento parti:

	trovato	calc. per $C_{10}H_6(NH_2)_2.(HCl)_2$
Acido cloridrico	31,67	31,60

Azione dell'acido nitrico. — Gr. 2 di perossido si sciolgono in gr. 40 di acido solforico concentrato e si trattano a poco a poco con gr. 4,5 di acido nitrico $d = 1,52$ sciolto in gr. 12 di acido solforico, raffreddando in ghiaccio. Si scalda in seguito per qualche minuto a 40°-50°, quindi si versa in acqua e ghiaccio. Si ottiene così il *dinitroderivato del perossido della β-naftochinondiossima* $C_{10}H_4(NO_2)_2N_2O_2$ il quale cristallizzato dall'acido acetico glaciale si presenta in prismetti gialli fusibili a 212°.

Gr. 0,0819 di sostanza fornirono cc. 14,5 di azoto ($H_0 = 732,86$ $t = 13°$), ossia gr. 0,016607.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{10}H_4N_4O_6$
Azoto	20,27	20,29

È insolubile anche a caldo in alcool, etere, cloroformio, benzol; discretamente solubile nell'acetato di etile e nell'acido nitrico. È solubile negli alcali con colorazione rossa.

Torino - Istituto Chimico della R^a Università.
Marzo 1906.

L'Accademico Segretario
LORENZO CAMERANO.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 1° Aprile 1906.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Ferrero, Direttore della Classe, Rossi, Manno, Cipolla, Brusa, Allievo, Carutti, Pizzi, Chironi, Savio e Renier Segretario.

L'atto verbale dell'adunanza precedente, 18 marzo 1906, è approvato.

Il Presidente comunica l'invito a partecipare al XIII° Congresso internazionale d'Antropologia e d'Archeologia preistoriche, che si terrà prossimamente a Monaco (Principato). Su proposta del Direttore della Classe, Socio Ferrero, si inviterà a rappresentare l'Accademia il Socio corrispondente Prof. Pigorini, quando egli si rechi al Congresso.

Il Direttore della Classe Ferrero offre un opuscolo del Prof. Giuseppe Bargilli, *La Dragonessa*, Roma, Voghera, 1906.

Per l'inserzione negli *Atti* sono presentati:

1° dal Socio Allievo un suo scritto intitolato: *John Stuart Blackie ed il suo opuscolo " L'educazione di sè stesso "*;

2° dal Socio Renier una Nota documentata del Socio corrispondente Giuseppe Biàdego, *Michele Sanmicheli e il palazzo de' Lavezola.*

LETTURE

John Stuart Blackie ed il suo opuscolo *" L'educazione di sè stesso ".*

Nota del Socio GIUSEPPE ALLIEVO.

L'educazione di sè stesso (intellettuale, fisica e morale) — Consigli ai giovani, per John STUART BLACKIE, professore all'Università di Edimburgo.

Il titolo generale di quest'operetta potrebbe a tutta prima far credere che l'autore abbia inteso di discorrere in tutti i suoi punti l'ampia materia per guisa da presentarcene una teoria scientifica; ma la restrizione *Consigli ai giovani* da lui medesimo apposta al titolo del suo lavoro ben mostra che tale non fu il suo intendimento. Egli porta nello studio del suo argomento un ingegno sagace e fine osservatore dei fatti, una copia di eletta dottrina, un dovizioso corredo di cognizioni attinte da una illuminata esperienza e dalla lunga pratica del suo insegnamento, ma non si eleva mai alle alte idealità della scienza, a quelle questioni trascendentali, che superano la sfera dell'esperienza ed in cui si scandagliano le supreme ragioni dell'arte educativa. Giacchè l'autore dettando il suo libro ebbe soltanto in animo di porgere *consigli alla gioventù*, s'intende da ciò, che l'educazione di se stesso, della quale imprese a discorrere, non è quell'educazione continuata, che l'uomo, già uscito di gioventù e maturo di età prosegue a dare a se medesimo, bensì l'educazione del primo periodo propria dell'età adolescente e giovanile, e giustamente anche questa prima educazione viene da lui appellata educazione di sè, perchè l'alunno è il primo fattore della propria educazione.

Questo concetto pedagogico, che cioè l'alunno è il primo, sebbene non l'unico fattore della sua educazione, scaturisce spontaneo dal genio medesimo del popolo inglese. *Il governo di sè*, ecco la frase universalmente ripetuta presso quella nazione, la quale tiene in altissimo conto l'indipendenza della persona nel

governo esteriore della vita. L'autore si mostra figlio della sua nazione e del suo secolo: proclamando il governo di sè, l'indipendenza della persona, egli è logicamente condotto a riguardare l'educazione anche giovanile, siccome l'educazione di se medesimo, affinchè formi l'uomo, che sa governare se stesso. Però proclamando l'indipendenza della persona, il governo personale di sè, egli non intende punto una libertà assoluta, sciolta da ogni freno, che trascorra sino alla licenza, giacchè egli riconosce il principio morale e religioso siccome superiore alla nostra individualità personale e vuole ad esso subordinata la nostra libertà siccome a sua norma direttiva, riconosce al di sopra della ragione umana circoscritta da limiti la ragione infinita divina che regge e governa l'universo e l'umanità. Quindi discorrendo dell'educazione di se stesso egli tiene sempre davanti al pensiero il principio sovrumano e divino e cita qua e là passi della sacra scrittura in conferma delle sue opinioni.

I giovani, a cui l'autore rivolge i suoi consigli, appartengono alle famiglie agiate, borghesi, aristocratiche, ed il suo libro non giova punto per l'educazione di quell'immensa parte di popolo, che forma le classi operaie, educazione che è un imperioso bisogno, anzi una estrema necessità nel presente ordinamento sociale. Egli continua in ciò la tradizione e lo spirito del suo connazionale Giovanni Locke, autore dell'opera *Dell'educazione de' fanciulli.*

L'opuscolo è diviso in tre parti, che trattano successivamente della educazione intellettuale, della fisica e della morale. La prima parte ha per oggetto la coltura delle facoltà intellettive e degli studi corrispondenti. L'autore esordisce con alcune considerazioni intorno ai libri considerati come strumenti di coltura. Egli non mette punto in dubbio il loro valore pedagogico; ma è di avviso che a' dì nostri se ne sia esagerata l'importanza anche nella sfera dell'insegnamento. In sua sentenza i libri sono meri strumenti di coltura, ma non mai naturali e prime fonti di educazione; aiutano la conoscenza, ma non la creano. " Le vere ed originali sorgenti della conoscenza non sono i libri, ma la vita medesima, l'esperienza, il pensiero, il sentimento, l'azione personale. La vera conoscenza debbe avere vive radici nel fondo medesimo del pensiero „. A me pare che l'autore non abbia chiarito a sufficienza e determinato con tutta esattezza il

valore pedagogico dei libri. Certamente l'attività del pensiero, la virtù delle potenze intellettive è la madre del conoscere; senza di essa non solo i libri tornano indarno, ma tutte le altre fonti di cognizione rimangono chiuse. Se non si sente la vita, se non ci troviamo in intimo contatto colla realtà, non è possibile la vera conoscenza delle cose. Ma non è sotto questo aspetto che va misurato il còmpito educativo dei libri. Si deve ricercare se ed in quali casi e sino a qual segno giovino al pensiero, perchè nella sua attività generi la conoscenza e progredisca nella via del sapere. L'autore paragona i libri al telescopio ed al microscopio, la cui utilità non deve indurci a sdegnare o trascurare i nostri proprii occhi. Accetto il paragone, ma ne inferisco una conseguenza affatto diversa. A percepire gli oggetti di estrema piccolezza o remotissimi nello spazio il microscopio ed il telescopio sono talmente necessarii, nonchè utili, che senza di essi l'occhio non li vedrebbe nè punto, nè poco. Il medesimo vuolsi intendere dei libri: essi in alcuni casi sono l'unica ed esclusiva fonte di cognizioni. A ragion d'esempio, la conoscenza de' fatti storici si attinge per necessità assoluta dai libri, e non da veruna di quelle, che l'autore denomina sorgenti originarie e reali del conoscere; non dalla vita nostra presente, non dall'esperienza personale, non dal sentimento soggettivo, non dal puro pensiero, non dalla nostra azione individuale. Similmente gli studi grammaticali, linguistici, filologici, matematici non si compiono senza libri. Nello studio medesimo dell'uomo interiore, come pure nella contemplazione della circostante natura, certi fenomeni e le loro cagioni ci rimarrebbero affatto ignoti, se non facessimo tesoro dei lavori di profondi psicologi e di grandi osservatori della natura; anche qui vale il detto: quattro occhi vedono meglio e più che due soli. La storia poi registra casi, in cui la lettura di un libro rivelò ad un'anima il secreto della sua vocazione: così fu di Malebranche, che alla lettura di Cartesio si sentì filosofo e divenne poi il più gran metafisico della Francia del suo secolo.

Dopo ciò l'autore discorre della coltura delle singole facoltà intellettuali, e primamente della osservazione sensibile esteriore. Le discipline naturali ei riguarda siccome il vero punto di mossa degli studi giovanili, essendochè insegnano al fanciullo a conoscere ciò che vede, ed a vedere ciò, che altrimenti gli sfuggi-

rebbe, nè soltanto gli forniscono un corredo di cognizioni svariatissime, ma ammaestrano altresì il suo senso visivo. Però una grave lacuna lascia l'autore su questo punto; egli non ha avvertito, che l'osservazione non ha soltanto per suo oggetto il mondo esteriore della natura, ma altresì il mondo interiore dell'anima, e che questa osservazione psicologica va accuratamente coltivata sin dalla puerizia, siccome quella, che torna sommamente necessaria alla educazione di se medesimo.

L'osservazione, anche accompagnata da conveniente attenzione, ci pone sott'occhio tale e tanta moltiplicità di oggetti, che il pensiero si perderebbe in mezzo alla loro varietà infinita, se non gli soccorresse un filo conduttore, che lo guidasse in tale labirinto. Di qui la classificazione, altra facoltà intellettiva, la quale fa tesoro dei risultati dell'osservazione e ne assicura il successo. La classificazione riposa sull'unità di disegno, che la ragione divina ha impresso in tutto l'universo, ed ha appunto per ufficio di ricercare quest'unità investigando i punti di somiglianza, che collegano insieme le cose apparentemente più disparate, e raggruppandole così in gruppi determinati, ossia in classi, quali sono i generi e le specie. Classificare vuol dire appunto collocare ciascuna cosa a suo posto, secondo l'ordine naturale, che essa ha verso tutte le altre. Così il giovane acquista l'abitudine di collegare fra di loro le cose mediante il vincolo delle loro affinità naturali; ed a questo, che è lo scopo della classificazione, egli perviene accoppiando un'ampia e comprensiva veduta dell'insieme coll'osservazione minuta delle proprietà speciali. Discorrendo della classificazione l'autore avrebbe potuto innalzarsi ad altre più elevate considerazioni metafisiche dettate dalla natura dell'argomento. La ragione infatti ricercando le rassomiglianze e le differenze fra le cose a fine di comporle in classi e gruppi distinti, scorge da un lato che le cose anche più affini non si rassomigliano mai tanto da identificarsi e confondersi l'una coll'altra, dall'altro che le cose anche più discrepanti non differiscono mai tanto da non avere più fra di loro nessun punto di contatto. La rassomiglianza non è mai un'identità; la differenza non è mai una separazione assoluta. Due foglie del medesimo albero, per quantunque perfettamente simili nella loro esteriore apparenza, non sono tuttavia un'unica ed identica foglia. Lo spirito e la materia, per quantunque profondamente differenti, sono

entrambi sostanze, e l'uno sull'altra operano mutuamente. Ora abbracciamo insieme in un solo concetto supremo le rassomiglianze e le differenze delle cose, e ci si presenterà alla mente questo gran principio metafisico, che l'universo tutto quanto, riguardato sia nel suo insieme, sia in ciascuna delle sue parti, è una varietà nell'unità; la varietà è data dalla differenza tra le cose, l'unità dalle loro rassomiglianze: la classificazione è il lavoro ordinatore del pensiero, che compone la varietà ad unità. È bene qui avvertire la diversa indole degli ingegni su questo riguardo. Alcune menti sono meglio disposte per natura e più propense a notare la rassomiglianza degli oggetti, e se ne compiacciono talvolta oltre misura sino a perdere di vista le differenze, che le accompagnano; altre per lo contrario scrutano le più recondite dissomiglianze sino a disconoscere quanto vi ha di comune negli esseri, a negare ad esempio ogni punto di contatto, ogni vincolo attivo tra l'anima ed il corpo nell'uomo. Di queste diverse tempre di ingegni deve tener conto l'educatore a fine di emendarne i difetti, prevenirne i traviamenti, rinforzarne le buone doti, essendochè la coltura della classificazione contribuisce assai a formarne il pensiero retto ed ordinato nel suo procedere.

L'autore passa ad un'altra facoltà intellettiva, che sovrasta alle due precedenti, pigliando da queste i materiali per costruire un edificio tutto suo proprio, ed è il ragionamento. Lo spirito umano non si sta pago di avere osservati i fatti della natura e di averli classificati secondo il loro ordine intrinseco, ma vuole conoscere il perchè siano così e non altramente. Egli appella ragionamento questa facoltà, che cerca le ragioni spiegative delle cose realmente esistenti: quindi questa facoltà viene da lui intesa non nel senso ordinario e comune di tale vocabolo, ma in un senso più elevato, siccome quella, che ha per oggetto la causalità e la finalità delle cose, il mondo ideale, il mondo della pura ragione, mentre l'osservazione e la classificazione hanno per oggetto il mondo della realtà e della natura, il mondo dei fatti e degli esseri.

L'anima umana, avverte l'autore, essendo una emanazione di quel pensiero creatore, che ha costrutto l'universo sopra una unità di tipo, si sente anch'essa profondamente una, e la ragione umana, originando dalla ragione divina, è naturalmente portata a cercare la cagione ed il fine di ogni fenomeno per compren-

dere l'universo nella sua unità. Però il giovane, nell'esercitare questa facoltà, proceda circospetto e guardingo a fine di non attribuire ad un fatto una cagione, che non è la sua, scambiando il fortuito e l'accidente col costante e necessario. Ad acquistare l'abitudine di un ragionare corretto egli consiglia ai giovani di consacrare sei mesi di studio alla pratica pressochè esclusiva delle matematiche, ma tosto soggiunge, che se da queste discipline si impara a distinguere le conseguenze fatali e necessarie delle premesse stabilite, e quindi a conoscere i veri rapporti di causalità, tuttavia non bastano all'uopo, perchè nel campo della vita pratica noi ci troviamo di fronte a fatti mutabili, a forze variabili, a mille influenze perturbatrici e complesse, di cui non si possono calcolare con matematica esattezza i rapporti di causalità. Anch'io convengo, che il culto delle matematiche non sarà mai la norma direttiva della vita, e la ragione parmi sia riposta in ciò, che i fatti umani sono governati dalla legge della libertà, mentre i teoremi matematici sono dominati dalla legge inflessibile della necessità, che trascina il pensiero da un principio alle sue conseguenze.

L'autore consiglia gli studi della logica e della metafisica siccome i più acconci alla coltura del ragionamento. Intimo certamente è il rapporto, che passa tra la logica ed il ragionamento, essendochè essa viene generalmente considerata siccome la scienza e l'arte del ragionare; ma le idee dell'autore su questo punto vanno soggette a gravissima discussione. Secondo la sua opinione, la logica torna assai utile al giovane, il quale già siasi avvezzato a pensare ed a parlare, perchè da essa egli impara a scomporre l'organismo de' suoi atti intellettuali, a riconoscere il processo de' suoi ragionamenti, a connettere giustamente le sue idee. La logica riesce indispensabile a scoprire l'errore e smascherare il sofisma; ma è una scienza di pura forma e non di sostanza, insegna a trarre da un principio giuste conseguenze, ma non si cura punto della verità o della falsità di quel principio; detta le leggi, a cui la nostra intelligenza deve conformare i suoi ragionamenti, affinchè le nostre idee, i nostri pensieri siano coerenti fra di loro, ma non ci apprende se e quando essi siano veri, cioè conformi alla realtà delle cose pensate: la verità è affatto estranea al suo còmpito. Quindi la logica non formerà mai i grandi pensatori, non vivifica, non feconda il pen-

siero; lo studio delle regole logiche non trasformerà mai uno spirito limitato e povero in una vasta intelligenza.

L'autore segue su questo punto la dottrina del suo illustre connazionale Guglielmo Hamilton, professore di logica e metafisica nell'Università scozzese di Edimburgo, il quale aveva pubblicato nel 1833 un opuscolo critico inteso a dimostrare, che la logica è una scienza meramente formale, che cioè è esclusivamente rivolta a regolare le forme ossia i modi del pensiero e non si occupa punto della verità o falsità delle proporzioni in riguardo alle cose conosciute. È noto che Kant introducendo una scissione innaturale tra la forma e la materia, già aveva concepita e trattata la logica siccome una scienza esclusivamente formale; e così la intesero non pochi filosofi in Germania ed in Inghilterra; ma questa dottrina non regge alla critica.

Una logica meramente ed essenzialmente formale si chiarisce insussistente, sia riguardata in se stessa, sia considerata nelle sue conseguenze. Infatti la logica riguardata nella sua essenziale natura è la maestra del pensare, è la scienza e l'arte del ragionare. Ora è cosa innegabile, che noi non pensiamo unicamente per pensare, non ragioniamo pel solo scopo di ragionare, bensì per conoscere la verità: il pensiero ed il ragionamento non sono fine a se stessi, ma mezzo alla scoperta del vero. L'intelligenza nostra è ordinata per natura alla verità. La logica essendo una scienza tutta in servizio dell'intelligenza, debbe avere per ufficio suo proprio di studiare e dettare le leggi, che guidano il processo de' nostri pensieri e ragionamenti alla scoperta ed al possesso della verità: tale è la sua natura. Quindi si fa manifesto, che una logica esclusivamente formale, affatto incurante della verità, urta contro il fine medesimo del pensare e del ragionare, contraddice alla natura medesima dell'intelligenza. Che se riguardiamo la logica formale nelle sue conseguenze, scorgiamo che essa diventa uno strumento pericoloso, un'arma a due tagli, che può essere egualmente impugnata per difendere la verità e l'errore ad un modo. Ci si dice che il suo studio giova assai perchè il giovane acquista l'abitudine di mantenersi coerente ne' suoi pensieri. Buona cosa è certamente la coerenza del pensare, ma importa assai più la verità, ed è dalla loro verità che si misura il valore delle nostre idee. La coerenza de' pensieri disgiunta dalla verità perde ogni pregio, come nella vita

pratica la irremovibile saldezza nei nostri propositi disgiunta dall'onestà e dalla ragione non è costanza lodevole di carattere, ma coccintaggine, caparbietà, ostinazione. L'autore dice la logica indispensabile a scoprire l'errore e smascherare il sofisma; ma io avverto che la logica dell'errore presuppone la logica della verità; e quanto ai sofismi, una logica tutta formale è dessa appunto, che forma que' grandi sofisti, i quali ragionano per la libidine di ragionare; pronti a difendere qualunque causa secondo il loro tornaconto, a discutere di checchessia in servigio delle passioni e dello spirito di parte. La logica per se sola, sentenzia l'autore, non farà mai un gran pensatore: e ne convengo anch'io, essendochè i grandi pensatori li fa la natura, e non la logica, nè verun'altra scienza qualsiasi; ma soggiungo contro di lui, che gli errori, in cui essi incorrono, sono grandi errori, epperciò abbisognano della logica assai più che le intelligenze mediocri e limitate. Non è raro il caso di vedere un illustre e potente pensatore mettersi in urto colla logica e mostrarsi incoerente ai proprii principii: così un positivista ti nega ricisamente la libertà del volere e riduce l'essere umano ad un complesso di fenomeni senza un io sostanziale, a cui appartengono, e poi ti parla con serietà dell'educazione morale e dell'importanza di formare il carattere dell'alunno, mentre la logica non gliel consente. La logica, ad esercitare sulla coltura del pensiero quella salutare efficacia, che è richiesta dalla sua vera natura, debbe accoppiare allo studio delle forme intellettuali quello della verità, ossia della corrispondenza del pensiero colla cosa pensata. Con ciò non intendiamo certo di significare, che essa debba occuparsi dei diversi ordini delle cose pensabili, invadendo la cerchia delle singole scienze particolari, bensì deve tenersi nel campo delle questioni generali, discutendo que' punti, che riguardano la natura della verità, la sua difesa contro lo scetticismo, il suo criterio, la norma direttiva del processo della mente alla verità.

Altro mezzo di coltura del ragionamento, proposto dall'autore, è lo studio della metafisica, siccome quello, che ci porta a riconoscere i limiti irremovibili delle nostre facoltà e ci rende famigliari quelle grandi verità fondamentali, su cui riposa ogni altra scienza. La ragione umana, sorpassando i fenomeni speciali proprii delle singole scienze particolari, ricerca l'intimo

fondo delle cose e contempla le leggi universali direttive di tutto il creato, che sono l'espressione della ragione medesima di Dio, la quale può essa sola spiegarci l'universo. Epperò l'autore concepisce la metafisica siccome la scienza della ragione cosmica assoluta per quanto è accessibile alla ragione umana individuale e limitata. Ripudiando il positivismo dominante presso i suoi connazionali, egli esorta i giovani a studiare la metafisica per non lasciarsi trascinare dal predominio degli studi naturali alla follia dell'*esteriorità* delle cose, come se le scienze fisiche fossero la sola sorgente della conoscenza e l'induzione l'unico processo del pensiero, mentre le verità fondamentali, da cui pendono le altre scienze, si affermano da se medesime prima di ogni induzione.

L'autore non solo riconosce i limiti della ragione umana di fronte alla ragione divina ed alla immensità del mondo metafisico, ma mostra anche su questo punto un concetto ammisurato e giusto. Poichè anche i positivisti ammettono i limiti della nostra potenza conoscitiva, ma affermano che la nostra ragione è circoscritta alla conoscenza de' fenomeni, ossia delle cose quali appariscono esteriormente, quali si mostrano di fatto nelle loro continue mutazioni, e non va più in là, ignora il loro intimo fondo, la loro realtà sostanziale, l'essenza immutabile ed assoluta, che si nasconde sotto le qualità mutabili e passeggiere; epperò essi negano la metafisica quale scienza della realtà sostanziale delle cose. Per contro l'autore concede alla ragione umana la virtù di sollevarsi al di sopra della conoscenza fenomenica degli esseri e penetrare sino nella loro interiorità ed essenza, ma segna i suoi limiti in ciò, che essa non varrà mai a comprendere tutto l'immenso mondo metafisico delle essenze delle cose, quale lo comprende in modo assoluto e perfetto la mente divina. La ragione umana sovrasta al mondo dei fenomeni e delle mutevoli apparenze, ma infinitamente sottostà alla ragione divina. Noi conosciamo ad esempio non solo i fenomeni fisiologici e mentali, che si manifestano nell'essere umano, ma la sua duplice natura sostanziale, spirito e materia, sebbene di queste due contrarie sostanze non ci venga mai fatto di comporci in mente una conoscenza di tutto punto perfetta. Ecco il perchè l'autore dopo di avere dichiarato, che la metafisica è la scienza della ragione cosmica assoluta, aggiunge questa

restrizione limitativa: “ in quanto è accessibile alla ragione umana individuale e limitata „.

Dal ragionamento l'autore passa a dire dell'immaginazione. Intorno al valore di questa facoltà ed alla importanza della sua coltura non tutti consentono i psicologi ed i pedagogisti, pel diverso concetto, che se ne sono formati. Poichè chi la contempla sotto un aspetto particolare ed esclusivo, e chi sotto un altro, mentre la sua natura è assai complessa, e si mostra assai diversa nell'uomo e nella donna, come pure nelle diverse età della vita. Il fanciulletto già immagina il dimani di una lieta festa domestica: è l'immaginazione incipiente, che già prende parte alle vicende della vita. Il romanziere crea colla sua fantasia un mondo di avventure e lo popola di figure umane che si muovono intorno al protagonista: è l'immaginazione fatta potente ed inventrice, che compone un ideale e lo incarna. Il vecchio vede scolorirsi davanti al suo spirito le immagini degli avvenimenti passati e delle cose presenti: è l'immaginazione spossata, esinanita, che si ritira davanti al mondo della nuda realtà. Similmente si dà una immaginazione calma, ordinata e potente ad un tempo, che conforta la ragione nel lavorìo delle sue fredde speculazioni, che sorregge il pensiero e lo aiuta a formarsi delle cose idee vive, limpide, animate; ed altra sfrenata, battagliera, che porta il disordine e lo scompiglio in mezzo a tutte le altre potenze; un'immaginazione elevata, che sublima ed idealizza la realtà senza punto rinnegarla, ed altra balzana ed eccentrica, che snatura e falsifica la realtà perdendosi nelle stranezze. In mezzo a tante svariatissime forme ed aspetti, che presenta l'immaginazione, non è a stupire se essa è diversamente apprezzata e giudicata dai diversi psicologi e pedagogisti.

Venendo al nostro autore, egli tiene questa facoltà in quel conto, che si merita, ed avvisa che l'immaginazione, quando sia governata dalla ragione, non solo non è nemica della scienza, ma ne è un potentissimo aiuto. A coltivare tale facoltà giova il mondo della storia e della realtà assai più che la lettura dei romanzi ed il mondo delle avventure fittizie e fantastiche. A tal uopo egli consiglia la lettura delle biografie degli uomini grandi, siccome quelle che posseggono una virtù educatrice assai migliore dei romanzi e forse di ogni più bella poesia. “ Mettete a profitto queste vite, grandi e saggie, per esercitare l'immagina-

zione, e voi ne trarrete un doppio frutto: voi apprenderete ad un medesimo tempo e nel modo più efficace sia quel che fu fatto, sia quel che avrebbe dovuto essere fatto. Però se intendete di recare questa facoltà al suo massimo esplicamento, non vi basti di spiegare piacevolmente innanzi ad essa nobili ed incorrotte figure: non aspettatevi energia di sorta da siffatta attitudine passiva. Occorre che l'immaginazione dell'alunno si impossessi di questi divini fantasmi, che le passano davanti; che non si tenga paga di averne raccolto uno sterile ed avido ricordo, bensì che acquisti la virtù di evocare davanti di sè l'intiero corteggio della storia nell'ordine reale, coi caratteri distintivi, gli atteggiamenti giusti, l'espressione esatta „.

L'autore passa a discorrere dell'immaginazione propriamente detta estetica, ed anche qui si diparte dalla dottrina dei positivisti, i quali riguardano la coltura delle potenze estetiche siccome accessoria e pressochè un fuor d'opera nel campo dell'educazione. Egli riguarda le belle arti non come ornamenti accessorii, ma come il più soave fiore di un'anima colta, ed il bello siccome il pascolo naturale di una sana immaginazione, siccome lo scopo di chiunque desidera tradurre in atto il gran fine dell'esistenza, giacchè l'uomo non vive di sole conoscenze; e quindi consiglia il giovine a studiare e contemplare quanto vi ha di bello in ogni ordine di cose, e lo esorta a pagare tributo di ammirazione a quanto gli si presenta di bello, di grande, di sublime in tutto l'universo, in tutta la realtà, astenendosi da una critica intempestiva e superba, che non sente più nè ammirazione, nè venerazione davanti a nessuna grande figura, e dapertutto cerca e trova difetti, tutto discute ed abbassa al suo livello, misura alla sua stregua.

L'autore non rigetta dalla educazione estetica il comico e l'umoristico accanto al bello, ma non gli concede che un'utilità affatto secondaria. Anche su questo punto egli la pensa dirittamente. Poichè la vita umana riguardata in se stessa e nella sua grande destinazione è sommamente seria e grave; ma in rispetto ai singoli individui, presenta anch'essa le sue miserie, che dànno luogo alla nota comica della vita. Ma il comico e l'umoristico va rivolto allo scopo di mettere in più spiccato contrasto quanto vi ha di bello, di grande, di elevato nella natura umana, sicchè l'alunno mai non perda di vista la gravità e la

serietà della vita, mai non trascorra sino a ridere di tutti e di tutto, o gettare lo scherno ed il sarcasmo su ogni più santa e nobile cosa, a riguardare l'umana esistenza siccome uno scherzo del cieco caso.

Due lacune io scorgo nella trattazione di questi argomenti. L'autore ha passato sotto silenzio gli studi classici come mezzo di coltura estetica. Similmente, essendosi proposto di porgere *consigli ai giovani*, ragion voleva, che l'autore avesse toccato altresì dell'intervento e dell'ufficio dell'immaginazione in quell'atto solenne, in cui il giovane, che sta per entrare nel gran mondo sociale libero di se medesimo, si forma l'ideale della sua vita rispondente alla propria vocazione.

Apprendere non giova, se non si ritiene l'appreso per mezzo della memoria, la quale abbisogna di una coltura speciale, perchè adempia il suo rilevantissimo ufficio. Discorrendo di quest'altra facoltà intellettiva, l'autore non divisa, come pure avrebbe potuto fare, gli studi speciali, che meglio contribuiscono al suo esercizio, quali sarebbero ad esempio la storia, la geografia, la lingua, e si sta pago di enumerare siccome condizioni pel felice successo della memoria le seguenti principali: 1° la vivacità e nettezza dell'impressione originale; 2° l'ordine e la classificazione; 3° la frequente ripetizione; 4° il concatenamento logico e razionale delle cause de' fatti; 5° i sistemi mnemotecnici, che però non vanno tenuti in gran conto, perchè si appoggiano su relazioni meramente artificiali; 6° le note scritte.

Dopo ciò, l'autore si fa ad illuminare il giovane intorno l'arte di rivestire i proprii pensieri di una forma leggiadra, elegante e robusta. Veramente questo punto avrebbe trovato il suo vero e proprio luogo là, dove si discorreva dell'educazione estetica. Egli consiglia i giovani di imparare il bello stile leggendo i capolavori de' grandi e nobili scrittori e cercando di far sue le forme elette, che vi incontrano, ma li avverte di tenersi lontani da ogni imitazione servile e di anteporre sempre la serietà e saggezza delle idee alla venustà della forma. Pur troppo ai giorni nostri l'educazione letteraria della gioventù italiana lascia da desiderare assai su questo punto. Non solo lo studio de' nostri grandi scrittori è o generalmente trascurato, o non governato da un giusto criterio; ma noi assistiamo ad una violenta scissione tra il pensiero e la parola, tra le scienze

e le lettere. Da un lato noi vediamo i dotti di professione trattare la loro scienza con una dicitura ruvida ed incolta, senza nè garbo nè grazia, senza quella correttezza di lingua e di stile, che pur si addice alla gravità del sapere. Dall'altro lato si corre dietro ad una forma artifiziata e convenzionale, che ben mostra la povertà del pensiero.

Lo scrivere in bello e corretto stile è avviamento al forbito ed eloquente parlare nelle pubbliche adunanze. I giovani inglesi, pei quali l'autore ha dettato il suo libro, possono essere dalla loro elevata condizione sociale chiamati col tempo ad arringare nel foro giudiziario o dalla tribuna parlamentare, a discutere gli interessi comuni nelle aule delle pubbliche amministrazioni. Perciò l'autore li aiuta di opportuni consigli, affinchè addestrandosi di buon'ora al facile e sicuro possesso della pubblica parola, non provino più tardi un certo qual imbarazzo o difficoltà nel trovare davanti ad un uditorio la vera forma del pensiero; difficoltà, alla quale mal si ripara portando presso di sè bell'e composto il discorso e leggendolo senza riguardo all'adunanza, che ci ascolta. Meditando intorno un determinato argomento, impari il giovane ad ordinare per bene i proprii pensieri, e facendo tesoro delle dispute scolastiche co' condiscepoli s'impratichisca nel padroneggiare le sue idee ed esprimerle con naturalezza e spontaneità di linguaggio. L'abilità così acquistata gli inspirerà una giusta confidenza nelle proprie forze, e franco e sicuro di sè alla pubblica presenza saprà dare al suo pensiero una forma chiara, semplice e corretta. Però questa libertà e franchezza di sè mai non diminuisca in lui quel sentimento di responsabilità, che è pur sempre un dovere in chi esercita colla sua parola una efficace influenza sull'animo dei suoi simili.

A questo punto l'autore ritorna sull'argomento della lettura dei libri, già discorso in sul primo esordire del suo opuscolo. Là egli mostrava di tenere in pochissimo conto il loro valore pedagogico; qui invece asserisce, che nello stato attuale della società i libri adempiono un rilevantissimo ufficio nell'educazione degli animi giovanili, e detta alcune norme relative alla loro scelta ed al loro uso. In mezzo alla sterminata caterva di libri egli consiglia la scelta di quelle auree grandi opere originali, che rimangono come vive sorgenti di grandi pensieri

e di nobili sentimenti. In fatto di studi religiosi, addita la Bibbia siccome l'unico libro, che basta essa sola alla più elevata e compiuta coltura cristiana, sicchè quand'anche si gittassero alle fiamme i milioni di volumi, che si pubblicarono intorno la teologia cristiana, il Cristianesimo rimarrebbe in ogni sua parte illeso insieme col Vangelo. In politica propone Aristotele, in matematica Newton, in filosofia Leibnitz, in teologia Cudwort, in poesia Shakespeare, in fisica Faraday. Veramente non tutti converranno con lui nel considerare siccome i sommi rappresentanti del pensiero umano gli autori da lui nominati. Ad esempio la politica di Aristotele è tutta quanta viziata da un deplorabilissimo principio: egli propugna la schiavitù personale, mentre il mondo politico moderno cristiano posa sul gran principio della libertà della persona e della dignità della natura umana. Così pure la storia segnala altri grandi pensatori, che pareggiano, se non superano quelli da lui nominati per la filosofia, la matematica, la fisica, la poesia: valgano per tutti Dante e Galilei.

Dopo i sommi autori, che lasciarono di sè un'impronta originale nella storia del pensiero umano, vengono in seconda schiera quelli, che resero un segnalato servigio al progresso del sapere dissipando colla potenza del loro ingegno funesti errori e deplorabili pregiudizi, che invalsero presso l'universale. Anche di questi egli consiglia la lettura, e cita Voltaire e David Hume. Veramente egli non si mostra troppo felice nella scelta dei nomi: anzi io lo direi affatto infelice su questo punto. Voltaire, malgrado i pregi ed il valore del suo ingegno, non è uno scrittore critico da proporre ai giovani: la sua è una critica dissolvente, e non edificante: le istituzioni e le dottrine, che non gli vanno a garbo, egli rigetta nel novero dei pregiudizi, e le combatte non colla serietà del ragionare e colla gravità degli argomenti, bensì coll'arma del ridicolo, e l'arma del ridicolo non è l'arma della ragione; onde l'Alfieri lo ha scolpito in quel suo verso “ Disinventore, ed inventor del nulla „. Quanto poi a David Hume, io crederei di rendere un pessimo servigio ai giovani non ancora addentrati nelle profondità filosofiche, ponendolo nelle loro mani come un maestro del retto e vero filosofare. Questo pensatore scozzese, assoggettando alla sua critica l'uomo ed il mondo, negò ogni valore ai principii più evidenti e fondamentali della ragione e riuscì ad uno scetticismo universale

sentenziando che tutta quanta la realtà, compresi noi medesimi, è una ingannevole illusione.

Il nostro autore non si arresta a questo punto. I grandi pensatori tengono le più alte sublimità del mondo del pensiero, ed il giovane non può ancora sollevarsi di botto fin là, ma gli occorre di leggere i libri di ordine inferiore e dalla lettura di questi attingere quelle cognizioni, che tornano indispensabili per intendere le menti sublimi ed originali. Anche di questi libri egli consiglia la lettura, purchè il giovane la accompagni col suo pensiero e non accolga da altri quel che può scoprire da sè. E qui si fa appunto a divisare il come le letture vogliono essere condotte. Esse vanno disposte secondo una unità di disegno e conformate ad un ordine cronologico per guisa che gli scrittori si leggano successivamente seguendo gli avvenimenti di secolo in secolo ed il loro storico sviluppo. Che se la mente del giovane provi una singolare attrattiva per un determinato periodo storico, ne faccia pure uno studio speciale, ma attento e compiuto, ed intorno ad esso, come punto centrale, raccolga e coordini le letture degli altri periodi storici, che vi si connettono, ma non proceda mai alla ventura e senza scopo determinato. A queste sue avvertenze mi pare bene si aggiunga quest'altra di non poco momento. I pensatori sommi ed originali vanno certamente letti con la dovuta ammirazione e con certo quale rispetto, ma ad un tempo con quella ragionevole libertà di pensiero, che è dettata dall'amore della verità, la quale sovrasta a tutti ed a tutto: anch'essi sono uomini, e gli errori, in cui possono cadere, sono grandi come il loro pensiero. Perciò il giovane proceda guardingo e circospetto, e rigetti senza esitanza quanto egli vede non essere conforme a verità.

Qui l'autore tocca molto opportunamente di quelle letture, che non riguardano più la coltura generale, ma sono affatto relative all'esercizio di quella professione ed a quel genere di vita, a cui si tende per natura. L'autore deplora, che a' dì nostri i giovani si abbandonino troppo presto e fuor di misura agli studi tecnici, ossia esclusivamente proprii della loro futura professione, non avvertendo che certe cognizioni, le quali oggi essi riguardano come vani ornamenti dello spirito, renderanno loro col tempo un rilevante servigio. Gli specialisti esclusivi, per quantunque valenti nella propria arte, sono spiriti miopi.

che non veggono al di là della propria loro cerchia, chiusi alla salutare influenza del gran mondo sociale, sicchè nelle gravi deliberazioni della vita appariscono talvolta meno che uomini ordinarii. Come riparo a questo esclusivo specialismo di studi l'autore consiglia la svariata convivenza sociale, i viaggi, la lettura de' grandi scrittori, segnatamente de' poeti e degli storici, i quali schiudono davanti l'intelligenza un orizzonte più ampio e svariato ed aprono il cuore ad una più larga simpatia sociale. Egli discorre delle letture professionali proprie dell'età giovanile; ma esse vanno proseguite anche nell'età matura, nel pieno esercizio della propria professione, e debbono quindi essere contemplate anche sotto questo secondo aspetto. È questo, a mio avviso, un argomento, che per il suo alto interesse sociale e per la sua importanza pedagogica merita di essere attentamente meditato di proposito deliberato e discusso in ogni suo punto. Se da un lato raffrontiamo l'immenso sviluppo dello scibile umano colla limitata apprensiva delle menti individuali, tosto ci si fa manifesta la necessità di una speciale divisione di studi per guisa che ciascuno consacri tutto il suo ingegno al culto particolare di quella disciplina e di quell'arte, a cui natura lo chiama. Se poi dall'altro lato si consideri, che le scienze e le arti tutte quante hanno fra di loro così stretti vincoli e tali intimi punti di contatto che a riuscire più che mediocri anche in una sola occorre intendersi un cotal poco anche delle altre, che le sono contermini od affini, si scorgerà di leggieri, che lo specialismo così detto degli studi e delle professioni liberali mai non debba essere esclusivo, bensì va sempre accompagnato da un conveniente grado di coltura generale. Discorso così l'argomento nella sua astratta generalità, farebbe poi di mestieri discendere ai particolari segnando i confini dei singoli studi speciali proprii di ciascuna delle scienze e delle arti professionali, quali sono la medicina, la magistratura, l'ingegneria, il magistero educativo e va discorrendo. Ristringendoci al punto, che ci tocca più da vicino e ci riguarda direttamente, tornerebbe conveniente disaminare entro quali limiti e con quale criterio si possa introdurre la specialità degli studi nella facoltà universitaria di filosofia e lettere ordinando le materie d'insegnamento in guisa che il giovane studioso ne esca ben bene versato nella propria disciplina, eppure fornito di generale coltura.

L'autore chiude questa prima parte del suo opuscolo toccando dello studio delle lingue. Egli non s' innalza a veruna considerazione generale intorno l'importanza pedagogica di questo studio ed alle sue attinenze colle altre discipline, ma espone senza più una serie di regole attinte dalla lunga ed illuminata pratica dell' insegnamento delle lingue straniere da lui professato nell'Università scozzese di Edimburgo. Nello studio di una lingua straniera esordire mediante l'opera di un buon maestro; ripetere ad alta voce il nuovo vocabolo dell'oggetto, che ci colpisce; imparare a mente le forme de' nomi e de' verbi da prima le più semplici ed uguali, poi via via le più complesse per ordine gradualmente progressivo, accoppiandovi proposizioni, frasi e periodi; congiungere insieme le regole cogli esempi, la teoria colla pratica, leggendo, parlando, scrivendo in guisa che vi si riscontrino le regole grammaticali secondochè porta l'occasione, e superando difficoltà sempre nuove a mano a mano, che si presentano; aggiungere come compimento a tutto questo la teoria dell'organismo del discorso contenuta nella grammatica generale della lingua, ecco in breve le norme da lui proposte al giovane per lo studio di una lingua straniera.

Dalla educazione intellettuale passa l'autore all'educazione fisica, alla quale consacra ben poche pagine del suo libro. Egli esordisce rilevando l'intimo rapporto, che collega insieme lo spirito ed il corpo nell'uomo, e quindi la sua attività intellettuale e la sanità fisica, e di qui arguisce giustamente il dovere, che ha l'alunno di vegliare sulla perfetta salute de' suoi muscoli e del suo sangue. L'età dell'alunno è un'età sacra allo studio, epperò pressochè condannata ad una vita sedentaria; però vuolsi tenere sempre vivo davanti alla mente questo principio, che ogni occupazione sedentaria, segnatamente se accompagnata da un intenso lavoro cerebrale, riesce più o meno malsana. Guidato da questo principio, l'autore si fa a proporre alcuni consigli a lui suggeriti dall'esperienza, a fine di conciliare lo studio col movimento corporeo e prevenire le funeste conseguenze delle abitudini sedentarie.

L'esercizio; ecco la prima ed essenzial condizione dello sviluppo dell'organismo e dell'equilibrio delle funzioni organiche. La vita è tutta moto, operosità, lavoro, e la sanità della vita non è altro che l'armoniosa attività dello spirito e del corpo,

come lo sviluppo ed il crescimento delle membra è l'esercizio abituale della forza vitale o vegetativa. L'esercizio esso solo può far circolare il sangue e mettere in moto i muscoli; epperò l'alunno consacri per lo meno due ore della giornata al libero movimento. Perchè rimanersene le lunghe ore immobile sopra una sedia attendendo allo studio? Anche passeggiando su e giù per la camera si può leggere e pensare; meglio ancora, se passeggiando all'aperta campagna. Volete preservarvi dalla malattia dei libri? Arruolatevi per un po' di tempo ad una compagnia di soldati volontarii, oppure salite in ferrovia od in piroscafo. Viaggiando, il movimento e le impressioni sempre nuove rinvigoriranno l'organismo, e ad un tempo lo spirito attingerà dall'osservazione della natura e dall'esperienza degli uomini cognizioni vive e vere, che dai soli libri non imparerà mai. A siffatti esercizi corporei si aggiungano la ginnastica, il canottaggio, la pesca, i giuochi, e fra questi il bigliardo, che sviluppa una prontezza di colpo d'occhio, una finezza di tatto, una sottigliezza di calcolo ammirabili, mentre gli scacchi sono tutt'altro che un passatempo, costringendo la mente ad uno studio riflessivo, ad un penoso esercizio cerebrale.

Passando dagli esercizi del corpo al nutrimento, sia esso sufficiente al bisogno, sostanzioso e vario, ma pur semplice. Nessuna lettura, nessuna seria discussione venga a turbare l'ora del cibo ed il tempo della digestione: il cervello e lo stomaco non possono adempiere nel medesimo istante le loro capitali funzioni: si danneggierebbero l'un l'altro. Nessuna bevanda fermentata; assai meglio l'acqua, liquido onesto, dice il proverbio, che non ha mai fatto un delinquente.

Quanto all'abitazione, non sia mai lungamente chiusa all'influenza benefica dell'atmosfera, o male arieggiata. Un'aria malsana e viziata da miasmi produce un sangue impuro e guasto, ed un sangue impuro corrompe l'organismo e si risolve in funeste malattie.

Il sonno è una necessità, è l'indispensabile riparatore delle forze perdute. Esso venga quando e quanto la natura lo chiama, si mantenga in giusta proporzione colle fatiche del giorno, non sia ritardato oltre misura, sacrificandolo a studi protratti sino a tarda notte, e nemmeno preceduto immediatamente da un faticoso lavoro mentale, bensì l'ultima occupazione della giornata

sia o leggiera e facile, o noiosa e soporifera. Anche i bagni e la frequenza degli stabilimenti idroterapici vanno annoverati fra i mezzi di igiene, che giovano assai a rinvigorire le membra ed a prevenire malattie.

Tali sono in iscorcio i consigli proposti dall'autore intorno l'educazione fisica. Egli apriva questo capitolo avvertendo l'intimo rapporto, che congiunge insieme lo spirito ed il corpo in una attivività comune, ed ora lo chiude ritornando sullo stesso concetto e suggellandolo con una giustissima riflessione. Lo spirito è desso, che deve vegliare sull'organismo corporeo, e soltanto una volontà retta e disciplinata vale ad assicurare al corpo il conveniente esercizio delle sue funzioni. Se l'organismo è il sostegno materiale dell'anima, questa ne è la forza motrice e direttiva. " Se vi sta a cuore la salute, siate buoni; se vi preme di essere buoni, siate saggi; se ci tenete alla saggezza, siate puri e pii: il timore di Dio è l' inizio della sapienza „. Con questo concetto, che compone ad armonia le due sostanze, onde consta l'essere umano, l'autore addentella l'educazione fisica da un lato coll'educazione intellettuale, dall'altro coll'educazione morale.

Questo capitolo dell'educazione morale è inspirato da un profondo ed illuminato sentimento del giusto, del buono e del divino. L'autore ripone il sommo dell'eccellenza e della dignità dell'uomo nella sua natura morale, e la riguarda siccome la forza motrice e direttiva di tutta la vita. Non vi ha pregio di mente o di corpo che pareggi la dignità morale, nè senza di essa si dà vera grandezza umana. Napoleone fu grande conquistatore, ma moralmente parlando visse e morì piccolo e povero: Byron fu grande poeta, ma visse schiavo di se medesimo. Non il denaro è cosa assolutamente ed unicamente necessaria, non la gloria, non la libertà, non la salute fisica, bensì la moralità del carattere. L'acquisto della virtù è arduo e costa sacrificii più che qualunque altra parte dell'umana coltura, ma appunto perciò essa è la più sublime delle perfezioni, il compimento dell'essere umano. " Dio ci ha largito l'immortalità della vita; sappiamo adunque vivere nobilmente „.

Con questa alta idea della virtù l'autore si fa a discorrere della coltura della facoltà morale; ma anzi tutto muove la questione, se e qual rapporto esista tra la moralità e la religiosità;

è la questione a' dì nostri vivamente agitata della morale indipendente, e che ricompare sotto altra forma nel campo della pedagogia. L'autore ammette, che un pensatore, anche non riconoscendo un Dio reggitore dell'universo, può vivere in società una vita onesta ed incolpabile, ma scorge nella morale di lui alcunchè di incompiuto, di anormale, di mostruoso, e gli atei appella semplici macchine ragionanti, del tutto sfornite di ogni nobile ispirazione. La ragion suprema della vita è Dio; epperò ogni grandezza e nobiltà vivente ha le sue sorgenti nell'ispirazione interiore, che viene da Dio.

Con questo elevato e giusto concetto della moralità l'autore si fa a chiamare a rassegna le virtù speciali, intorno il cui acquisto deggiono i giovani adoprarsi per tempo affinchè la loro vita risponda all'ideale divino; ed anzi ogni altra egli mette in mostra la virtù dell'obbedienza. Ma l'obbedire non è forse un sacrificare la libertà personale, quella libertà, che segnatamente a' dì nostri è universalmente esaltata ed è senza dubbio un preziosissimo bene umano? Qui l'autore cerca di chiarire il vero e preciso concetto della liberta a fine di conciliarla coll'obbedienza, ma non mi pare che abbia colto nel segno. Libero è veramente ogni essere, allorchè nell'esercizio delle proprie forze non patisce violenza o costringimento di sorta. " Così intesa la libertà (egli avverte) segna i limiti nel corso della vita e nulla più; traccia all'uomo la cerchia della sua azione, ma niente gli dice nè del suo còmpito, nè del modo di adempierlo. Al di là di questi confini, ogni azione riesce non alla libertà, ma ad una serie di restrizioni. Ogni regola è un limite; e siccome le regole non ce le imponiamo noi volontariamente e generalmente vi siamo condotti da altri e per il bene della società, consegue che se vi è caro di essere degna parte del corpo sociale, dovete anzi tutto imparare ad obbedire. Per certo l' individuo rimane indipendente nella propria cerchia, chè altramente verrebbe ridotto ad una mera macchina e spogliato della sua dignità umana; ma operando come parte della società, non può affrancarsi da que' legami, che giustamente vincolano i singoli individui e li compongono in un tutto saldo e definito „. In tutto questo ragionamento dell'autore io non iscorgo nè il giusto concetto della libertà e de' suoi limiti, nè la ragione, che giustifica l'obbedienza, e per conseguente non veggo la conciliazione dell'una coll'altra.

Anzi tutto sembra, che secondo la mente dell'autore la libertà non possa sussistere, se incontra dei limiti, che la ristringono; ma non ha avvertito, che sonvi limiti, che la offendono e la violentano, perchè le tolgono parte di quella sfera di attività, in cui ha diritto di esercitarsi in nome della legge morale. e sonvene altri, che la stessa legge morale le segna, perchè non trascorra in licenza: i primi sono senza dubbio inconciliabili colla libertà, i secondi non solo non la distruggono, ma le tornano necessarii. Questa inavvertenza lo portò all'erronea opinione, che la libertà sussiste soltanto nella cerchia del nostro operare individuale, perchè quivi non incontra restrizioni di sorta, e che essa scompare nella sfera del nostro operare sociale. perchè qui l'autorità umana ci impone una serie di limitazioni necessarie per l'unità del corpo sociale. Il vero si è, che in ogni esercizio della nostra attività sia individuale, sia sociale, alla nostra libertà sono sempre segnati dalla legge morale certi confini al di là de' quali *nequit consistere rectum*, e che questa legge morale sovrasta alla libertà nostra, egualmente che ad ogni autorità sociale. L'autore non si è sollevato sino al concetto di questa legge universale fondata sulla natura medesima delle cose; epperò non può ingenerare negli animi giovanili un saldo e ragionevole convincimento del dovere all'obbedienza. Dite ad un giovane: obbedisci al volere di chi comanda, perchè lo esige l'interesse comune e l'ordine, fondamento della convivenza sociale. Egli vi risponderà: se l'obbedienza mi costa il sacrificio della mia libertà, io non veggo ragione, per cui io debba obbedire: io rispetto l'autorità di chi comanda, ma intendo che sia altresì rispettata la mia libertà; e per altra parte un interesse comune, che esige il sacrificio della libertà di tutti e singoli gli individui, che compongono il corpo sociale, si risolve in un danno comune. Invece dite al giovane: la legge morale fondata sull'ordine dell'universo riconosce senza eccezione e sempre la tua libertà, e soltanto le segna i confini, oltre de' quali non sarebbe più libertà, ma licenza: la stessa legge morale ti obbliga di obbedire all'autorità sociale, ma impone ad un tempo a' superiori il dovere di rispettare la tua libertà morale e di obbedire anch'essi, al pari di te, ai precetti del giusto e dell'onesto. Allora il giovane scorgerà nella legge morale la ragione dell'obbedienza e la conciliazione dell'autorità, che comanda. colla libertà di chi obbedisce.

Un'altra virtù l'autore segnala ai giovani, la sincerità, esortandoli ad *essere* più che a *parere* ed a non parere più di quello, che si è, loro rammentando, che l'apparenza non può reggere a lungo contro la dura realtà, e che chi fa mostra di pregi, che non possiede, finirà per soccombere alla prova o mentisce alla società. Questa menzogna sociale, egli osserva, può originare o dalla pigrizia, o dalla vanità, o dalla vigliaccheria. Il giovane pigro mentisce al maestro presentandogli còmpiti, che non sono frutto della sua operosità mentale, o dandogli risposte, che non sono sue. La vanità lo porta a pretendere di sapere più assai di quanto sa realmente, ad esagerare i suoi meriti per guisa da ingenerare negli altri un'impressione superiore al loro valore. Per manco poi di coraggio morale il giovane non osa dir quel che pensa, e finisce col non osar di pensare ciò, che vorrebbe. Sonvi certamente de' casi, in cui prudenza consiglia di tacere; ma sonvi occasioni, in cui la verità va detta in faccia a chicchessia, e chi tace, è un vile.

A queste idee dell'autore mi par bene di aggiungere, che la virtù giovanile della sincerità va altresì riguardata in rapporto colla formazione del carattere morale, con cui ha una strettissima attinenza. Infatti il carattere importa essenzialmente tale un'armonica corrispondenza tra il nostro interno pensare e sentire ed il nostro esterno operare e parlare, che l'esteriorità della persona rispecchii limpidamente l'interiorità dell'anima, nel che dimora appunto la sincerità. Ma a mantenere questa coerenza tra le nostre credenze e le nostre azioni occorre una forza ed energia di volontà, che è anch'essa una nota essenziale del carattere morale; e questa volontà forte ed energica si rivela altresì nella sincerità, giacchè ci vuole coraggio per non mentire alla nostra coscienza, per manifestare schiettamente i nostri falli, che ci umiliano, per dire francamente la verità, anche quando ci costa sacrificii. A questo proposito non debbo passare sotto silenzio un punto assai rilevante, che riguarda la formazione del carattere morale. Platone nel terzo libro della sua *Repubblica* lasciò scritto, che ai reggitori di un popolo, non però a verun altro, è lecito il mentire e l'ingannare, per ragione dell'utile pubblico. Purtroppo questo immoralissimo pronunciato del greco filosofo vien praticato dai governanti di oggidì, che spudoratamente mentiscono alle genti

per ragione, dicono, di pubblico interesse, o, quel che è peggio, pel trionfo di consorterie politiche, o peggio ancora per sordido interesse personale. Ora, domando io, come mai potranno venire educati alla franchezza del carattere ed alla sincerità dell'operare giovani con sotto gli occhi reggitori dello Stato, i quali porgono di sè bruttissimo esempio di slealtà e di menzogna? Quando la corruzione viene dall'alto, la pubblica educazione è messa a durissima prova, essendochè l'autorità, quanto è più elevata, tanto più profonda esercita la sua influenza sugli animi giovanili.

Non siate oziosi giammai, ecco altro consiglio dell'autore ai giovani. *Lunga è l'arte*, scrisse Ippocrate, *breve la vita.* Chi sente la gravità e la serietà della vita, saprà ordinarla in guisa che a ciascuna ora della giornata sia assegnato il suo lavoro speciale, sicchè nessuna bricciola di tempo vada sciupata in vanità o sciocchezze. Un'operosità abbandonata alla ventura e sperperata in sensi opposti appena è che si differenzii da una oziosità assoluta. L'operosità della vita abbisogna di energia, che la aiuti ad espandersi ampia e potente, e l'energia vien meno agli spiriti angusti, che colla veduta corta d'una spanna non veggono più in là della loro cerchia professionale, non sanno elevarsi a nobili intraprese, nè inspirare amore e simpatia di sè.

La vita morale, osserva l'autore, ha principii elevati, che la inspirano, e principii ideali, che la dirigono. Amore e rispetto, ecco gl'ispiratori della vita nostra. L'amore dell'umanità illuminato dalla conoscenza è la poesia della vita, che rompe la gelida ed angusta cerchia delle simpatie esclusive e delle tendenze egoistiche, e dispone gli animi giovanili ad abbracciare nel loro operoso affetto tutti gli uomini, anche quelli, che militano in campo opposto al nostro, a riconoscere i meriti di tutti, anche degli avversari e dei nemici. Ma insieme coll'amore coltivate anche il rispetto e l'ammirazione. Il non provare meraviglia, nè ammirazione di nessuna sorta è argomento di insensibilità, o di indifferenza, o di egoismo, o di presunzione. Chi contempla il sublime ideale della nostra sovrana perfezione senza sentirsene compreso di ammirazione, non è invogliato ad imitarlo. Contemplare l'ordine dell'universo ed imitarlo, è secondo gli stoici il fine supremo dell'uomo; e l'autore commen-

tando questo pronunciato, osserva che ad imitar l'ordine occorre vederlo ed a vederlo fa d'uopo ammirarlo, e conchiude che il mal vezzo di spregiare, di abbassare uomini e cose accieca lo sguardo e spegne l'ammirazione. Amore adunque e rispetto ispirano la vita morale, ma essa ha pur bisogno di un principio, che la regoli, ed è la moderazione. È virtù questa, che va assai per tempo ed insistentemente consigliata ai giovani, siccome quelli, che dal bollore dell'età sono facilmente portati agli eccessi. Anche qui l'autore cita una frase scritturale: “ Non sapere più del bisognevole „ ; e ricorda (cosa del resto a tutti nota) che lo studio prolungato di troppo ed ingrato abbatte l'organismo.

Come ben si scorge, l'autore si tenne pago di rilevare il pregio della moderazione argomentandolo da' suoi salutari effetti; ma se si fosse innalzato a ricercare la ragion suprema di questa virtù, ne avrebbe ritrovato il fondamento nell'ordine, come l'eccesso, che è il suo opposto, si risolve essenzialmente nel disordine. Così intesa la moderazione, anzichè una virtù speciale, apparisce la forma universale di ogni virtù, perchè la legge morale è l'espressione dell'ordine universale. *Sii moderato,* viene a dire: non varcare il segno, che il giusto separa dall'ingiusto, l'onesto dal disonesto; non pretendere dalle tue forze più di quanto consente natura. Una potenza, che scatta fuori de' confini suoi proprii, è come torrente, che straripa; spreca se stessa e trascina con sè nello scompiglio tutte le altre. *Ne quid nimis, niente di troppo,* è antico adagio. Saper conservare il senso della misura è gran principio, che vale non solo nella nostra vita morale, ma nella educazione, nella scienza, nell'arte, nella politica, nella convivenza sociale, in ogni sfera della nostra attività. L'errore non è che una verità esagerata. Il furto è una proprietà, che eccede *il mio*, ed invade *il tuo*. Ogni buona istituzione traligna e decade, se varca i limiti segnati dal suo concetto originario.

Corona e compimento di tutte virtù è la perseveranza, essendochè alla meta finale non giunge chi si arresta a mezza via, bensì quegli soltanto, che tutta percorre punto per punto la misurata carriera. Quindi l'autore esorta i giovani a non retrocedere mai davanti ad una difficoltà, che loro contrasti il cammino, essendochè la grandezza di una difficoltà accenna alla

nobiltà di un'intrapresa, e soltanto ciò, che costa fatica, merita di essere condotto a compimento con mano ferma e volontà risoluta. A tal uopo egli ripete il notissimo detto, che nel mondo dell'azione *volere è potere*; ma su questo punto parmi avrebbe dovuto mettere in sull'avviso i giovani di non intendere tal detto come se il nostro potere tanto si stenda quanto il nostro volere, e si possa quanto si vuole. Il vero si è che volere è potere a condizione che si voglia soltanto quel che si può; e per di più non vuolsi dimenticare, che il punto sta nel *poter volere.*

Quali mezzi tornano più efficaci per giungere all'acquisto del valore morale? È questo l'ultimo punto, che l'autore discute nel termine del suo opuscolo. *L'energia nel bene,* ecco un pensiero, che egli vorrebbe impresso a caratteri indelebili nello spirito giovanile, siccome quello, che rivela la vera dignità della vita umana e ne spiega il vero significato. Ora questa energia non si acquista disputando intorno il bene o leggendo libri, che ne discorrano in forma di astratte speculazioni, bensì operando il bene ad ogni occasione, che si presenti, ed imparando così a vivere nobilmente. Il giovane giunto all'età matura, che per manco di forza morale non regge alle prime prove, infiacchirà ogni dì più e cadrà basso basso, mentre la volontà tanto più si rafforza nel bene, quanto più lotta vittoriosa contro gli ostacoli, che la cimentano.

L'autore ha sentenziato, che l'energia nel bene non si attinge dai libri, che discorrono della moralità astratta; ma ai suoi occhi evvi un gran libro, le cui sante parole egli vorrebbe fossero impresse nella memoria dei giovani, perchè ritraggono un alto ideale della vita sotto una forma energica e vivente. Questo è il libro divino della Bibbia; ed egli ne addita qua e là le pagine speciali, che forniscono al giovane l'alimento di una vita spirituale sempre più elevata ed un potente antidoto contro l'indifferentismo morale. E veramente il volume biblico ha inspirato profondi pensatori, sublimi artisti, grandi poeti e scrittori, ogni famiglia di eroi.

Siccome s'impara a vivere nobilmente operando nobilmente, così a diventar buono e forse grande occorre addimesticarci assai per tempo cogli uomini grandi e buoni imitandone gli esempi. Certamente non a tutti è dato di sollevarsi alla loro

sublime altezza; ma ognuno anche nella modesta cerchia della sua vita può fare alcunchè di simile e dar prova di virilità e persistenza nel bene. E poi il vero merito degli uomini non va misurato dal campo grandioso delle loro gesta o dalla risonanza del loro genio attraverso il mondo. “ Bene spesso il più sublime eroismo è quello, di cui meno si parla pubblicamente e che si compie nella più oscura sfera „. Tanto il giovane, quanto l'uomo fatto trovano nelle *Vite degli uomini illustri* di Plutarco gli elementi di ogni forza morale sotto la forma vivente dei più ricchi e più svariati esempi.

Rispecchiarsi nelle grandi figure, che lasciarono di sè nella storia un nome immortale, ed imitarne gli esempi, è già gran cosa; ma assai più avventurato è il giovane, che ha presente a sè la persona viva di un eroe convivendo o conversando con lui. Per poco che un'anima giovanile abbia dirittura d'intendimento e di cuore e sia aperta a sentimenti nobili e delicati, non può non provare in sè la celeste influenza dell'uomo moralmente grande, con cui si trova in personale rapporto, e che gli rivela le più sublimi altezze della natura umana. Ma poniamo pure che la buona ventura non vi abbia posto a contatto con veruna di queste anime grandi, sta però sempre in vostro potere io scegliere buoni compagni e scansare il contagio dei mali esempi. Giurate a voi medesimo di non stringervi mai con persone, che possono trascinarvi al male. Non vi ha piacere, che compensi la morale degradazione, che si patisce al contatto di esseri abbietti. Nessuna tolleranza pel vizio.

L'autore passa a toccare un punto, che a me pare di sommo rilievo, perchè da esso dipendono in gran parte le sorti del nostro perfezionamento morale, ed è lo scrutinio della propria coscienza, con cui rendiamo conto del nostro operare a Dio ed a noi medesimi. Egli consiglia ai giovani di consacrare alcune ore determinate della giornata all'esame interiore di se medesimi e ricorda loro il costume degli antichi pitagorici, i quali ogni sera prima di abbandonarsi al sonno riandavano con attento pensiero tutte le azioni della giornata. Intorno a questo argomento io reputo conveniente distinguere l'ideale del dovere, l'ideale degli uomini moralmente grandi, dalle azioni del nostro io, che lavora per conquistare quell'ideale. L'ideale è oggettivo, è distinto e superiore a noi, è alcunchè di sovrumano, di di-

vino, mentre le azioni sono nostre. Ora nell'esame di coscienza l'anima chiama a rassegna le proprie azioni, le ragguaglia coll'ideale, che le splende davanti alla mente, ne rileva se e quanto siasi avanzata verso quell'ideale, scopre i proprii difetti, si accende del desiderio del meglio ed impara a conoscere se stessa ed a progredire nel cammino del suo perfezionamento morale. Tale è il valore ed il significato di questo solitario ritiro dell'anima, che è l'esame di coscienza.

E qui mi si affaccia una domanda. L'autore profondamente crede ad un ideale sublime di perfezione, da cui dipende la dignità, la grandezza, la serietà della vita umana, e ripone il valore morale di ciascun uomo nel conformarsi il più che si può a quel tipo supremo. Ora io dimando: questo ideale, che a sè ci attrae col suo potente influsso, ci inspira il desiderio del meglio e ci innalza sempre più su, ha esso una esistenza oggettiva, fuori di noi, in uno spirito vivente, infinito, divino, reggitore dell'universo, oppure è niente più che un'astrazione del nostro pensiero, una fattura della nostra mente, a cui non corrisponde fuori di noi realtà di sorta? Secondo l'umanismo soggettivo ed il naturalismo è il nostro io, che ne' momenti di entusiasmo si crea in mente l'ideale della vita umana, poi lo riveste della realtà sua propria, lo vagheggia, lo contempla, lo adora come alcunchè di sovrumano e di vivente, mentre si risolve in una illusione soggettiva. Ma non così la pensa il nostro autore: per lui l'ideale informatore della nostra vita è il Dio vivente, poichè egli chiude le pagine del suo opuscolo parlando della preghiera; e pregare significa appunto “ imparare a mettere la volontà umana in armonia colla volontà divina, conservare umilmente quell'atteggiamento raccolto ed attento, che solo conviene alla creatura in faccia al suo creatore „. Sentenzia l'autore, che nella sfera della moralità non è punto vero il detto che *sapere è potere,* ed aggiunge che non è la scienza, ma la preghiera, che conferisce all'anima slancio e forza ispiratrice, che ci solleva in alto. Non mi pare che egli abbia rettamente concepito il rapporto tra la scienza e la preghiera, come se la prima fosse affatto impotente in ordine alla vita morale e religiosa ed affatto estranea alla seconda. Scienza e preghiera non si escludono, ma hanno un punto di contatto, in cui armonizzano. Poichè la nostra ragione speculativa non può

muovere un passo nell'intima contemplazione delle cose senza trovarsi avviluppata in un mistero, tantochè lo Spencer medesimo riconobbe l'ignoto siccome ultimo e finale termine dell'umano sapere. Quindi è che la vera scienza è umile e modesta, e riconoscendo i limiti dello spirito umano di fronte all'infinità dello Spirito divino, lo dispone a sottomettersi alla volontà suprema, provvida reggitrice dell'universo, e sotto questo riguardo si stringe in santo accordo colla preghiera.

Michele Sanmicheli e il Palazzo de' Lavezola.

Nota di GIUSEPPE BIÀDEGO Socio corrisp.

Il palazzo, che sul Lungadige Porta Vittoria a Verona eresse Michele Sanmicheli, fu in origine de' Lavezola. Nel 1579 Olimpia Lavezola maritavasi a un conte Alessandro Pompei; il palazzo passava in proprietà dei Pompei e vi restava fino al secolo scorso, quando un altro conte Alessandro, con testamento del 18 agosto 1833, ne legava la proprietà al Comune di Verona con la condizione di *usarne civilmente per porvi i monumenti di Belle Arti, Gallerie* ecc. (1); e v'aggiungeva il dono dei suoi quadri e delle sue stampe. Così ebbe origine e sede, degna dei tesori d'arte e d'antichità che racchiude, il Museo Civico di Verona.

Il bugnato del pianterreno senza cornicioni che lo intramezzino; le grandi finestre tonde del piano superiore con balaustri e mascheroni nella chiave degli archi, ma senz' altri ornamenti di frontoni e di cornici; le colonne doriche scanalate e fiancheggiate di pilastri negli angoli formano un tutt' insieme veramente considerabile, di semplicità, di nobiltà, di eleganza.

Chi fece fabbricare il palazzo? Alla domanda rispondono gli editori delle fabbriche di Michele Sanmicheli col nome di Alberto Lavezola, soggiungendo che nell'edificio non si ravvisa *veruna traccia d'imitazione d'antico e di moderno* (2). Di questa ultima opinione non è, a dir vero, un egregio amatore e illu-

---

(1) *Catalogo degli oggetti d'arte e d'antichità del Museo Civico di Verona.* Verona, 1865. V. la prefazione. — Biàdego, *Storia della Biblioteca Comunale di Verona con documenti e tavole statistiche.* Verona, 1892, p. 43.

(2) Ronzani e Luciolli, *Le fabbriche civili e militari di Michele Sanmicheli disegnate e incise.* Venezia, 1831, p. 19.

stratore della nostra storia artistica, il Burckhardt, che vi riscontra l'influenza esercitata dalla casa di Bramante (1). La stessa cosa ripete il Malaguzzi, che evidentemente non ha fatto altro che ricopiare il Burckhardt (2). La casa di Bramante, a Roma, poi casa di Raffaello, aveva il pianterreno formato di cinque archi. Ora questa particolarità dei cinque archi non è propria del palazzo Lavezola, ma invece di un altro edificio Sanmicheliano, cioè del palazzo Guastaverza, pure in Verona, nella piazza Vittorio Emanuele. Il Burckhardt confuse l'uno con l'altro, e così trasse in errore il Malaguzzi, che parla di cinque, anzichè, come sono realmente, di sette finestre del piano superiore.

Gli editori del Sanmicheli affermano inoltre, senza più, che il tempo della fondazione del palazzo Lavezola *coincide alla metà del secolo sedicesimo.*

È esatto questo?

È noto che Michele Sanmicheli fu a Roma di sedici anni appena, ove trovossi nella gloriosa compagnia del Bramante e del Sangallo, di Michelangelo e del Sansovino. In patria tornò soltanto nel 1527 e vi stette, se si deve giudicar dalle opere eseguite, quasi ininterrottamente, sino al 1535. Infatti è del 1527 il bastione delle Maddalene; sono del 1530 i bastioni di S. Francesco e del Corno; prima del 1532 il palazzo Canossa (Lodovico Canossa che lo ordinò, morì nel 1532); del 1535 la Porta Nuova. Dopo il 1535 troviamo il nostro architetto quasi sempre fuori di Verona; nel 1539 a Padova per l'erezione del bastione Cornaro; dal 1540 al 1541 a Venezia e in Levante; nel 1542 a Corfù e di nuovo a Venezia pel palazzo Cornaro; nel 1544 e 1547 ugualmente a Venezia pel Castello di S. Andrea e per le fortezze della terraferma; nel 1550 un' altra volta a Padova. Quantunque un lavoro diligente, completo sul Sanmicheli, un lavoro che segua passo passo l'opera multiforme e abbondante dell'architetto non sia ancora stato fatto, pure dai dati che abbiamo, con bastante sicurezza possiamo concludere che il palazzo Lavezola sorse o nel periodo di tempo che corre dal 1527 al 1535, o dopo il 1550. Anzi il Temanza, a cui dobbiamo la più diffusa, la più particolareggiata biografia non solo di Michele,

(1) Burckhardt, *Le Ciceron* traduit par A. Gérard. Paris, 1885, II, 238.
(2) Malaguzzi Valeri, *Degli stili nell'architettura*. Milano, Vallardi. p. 96.

ma anche di suo nipote Giovanni Girolamo, scrisse: " Gli anni che quinci [*dal 1550*] seguirono furono quelli della maggior quiete di Michele; ma quiete nemica dell'ozio. Io sono d'avviso che buona parte di quegli edifizi che per private persone e cavalieri ordinò nella sua Patria, sieno frutti di quella quiete d'animo che in così aggradevoli circostanze godeva..... In Verona ordinò la casa e la facciata de' Lavezoli, ora dei conti Pompei al ponte delle Navi verso la Vittoria..... " (1).

Il Temanza avvisò, e Ronzani e Luciolli senz'altro ritennero il palazzo sorto alla metà giusta del sedicesimo secolo. Forse è vero; ma non sarà fuor di luogo osservare che, constatato pur l'errore del Burckhardt rispetto agli archi attribuiti al palazzo Lavezola e che appartengono invece al palazzo Guastaverza, bisogna convenire che molta somiglianza di stile, nella semplicità delle finestre, nelle colonne scanalate, nella balaustrata del poggiolo esiste tra i due palazzi; che quindi se la casa di Bramante esercitò realmente un' influenza, l'osservazione vale tanto per l'uno quanto per l'altro palazzo. In questo caso sarebbe più logico porre l'erezione del palazzo Lavezola intorno al 1530, quando il Sanmicheli da poco era tornato da Roma e fresca doveva esser l'impressione esercitata sul suo intelletto da quello che aveva veduto e studiato, da quello che aveva appreso nella comunanza di vita e di pensiero coi grandi artisti che Roma vide adunarsi tra le sue mura in quel periodo straordinario di munificente fioritura artistica e letteraria.

Chi della famiglia Lavezola fece fabbricare il palazzo? quando il palazzo venne edificato? Le due domande s'incontrano e s'incrociano. Giorgio Vasari, dopo aver ricordato i palazzi Canossa e Bevilacqua, prosegue: " similmente fece [*il Sanmicheli*] in Verona la casa e facciata de' Lavezoli che fu molto lodata " (2). Quando parla del palazzo di Canossa, egli dice espressamente che fu fatto erigere dal conte Lodovico di Canossa, vescovo di Bayeux; qui parla semplicemente dei Lavezoli, senza nominare

(1) T. Temanza, *Vite dei più celebri architetti e scultori veneziani.* Venezia, 1778, p. 183.

(2) Vasari, *Le opere*, ediz. Milanesi. Firenze, 1881, VI, 358.

nessuno della famiglia. Il Vasari che non è quell'accozzatore e narratore di fanfaluche che qualche solitario vorrebbe, giudicando a naso, far credere che fosse, il Vasari è una fonte di specialissima importanza per il Sanmicheli. La sua vita dell'architetto veronese, di cui era amicissimo ed intimo, è delle ultime scritte. Non si legge nella prima edizione delle *Vite* pubblicatasi nel 1550; apparisce soltanto nella seconda e precisamente nel secondo ed ultimo volume della terza parte (1); e il passo sulla casa dei Lavezoli è tal quale nelle ulteriori edizioni.

Il Temanza, come abbiamo veduto, segue in tutto il Vasari. Perchè gli scrittori veronesi fanno il nome di Alberto Lavezola? su quali fondamenti s'appoggiano? e, quel che più importa, sono essi nel vero?

Nobile e ricca era la famiglia Lavezola. Quando Verona, dopo i rivolgimenti politici causati dalla lega di Cambrai, tornò sotto la Repubblica, un Albertino Lavezola fu dal Governo di Venezia chiamato a far parte del Consiglio cittadino (2). Questo Albertino fu padre del cav. Nicolò e del dott. Gianfrancesco.

Nicolò, il primogenito, era nato nel 1500 e figura nelle anagrafi, tanto del 1545 quanto del 1555, come capo della famiglia. Ebbe moglie; ma non figli legittimi: soltanto un figlio naturale, di nome Lodovico. Fu aggregato alla sesta muta del Consiglio dei XII nel 1539 (3); provveditore di Comune negli anni 1545, 1548, 1551 e 1558 (4); oratore a Venezia per diverse cause negli anni 1551, 1552 e 1553 (5); uno dei sei oratori eletti per congratularsi col nuovo doge Francesco Venier nel 1554 (6). Nel 1562 si trova ancora inscritto nelle liste dei Consiglieri; ma in quell'anno, anzi nel gennaio di quell'anno, era già morto (7).

(1) Firenze, Giunti, 1568, p. 513-23.

(2) Sanudo, *Diarii*, XXIV, 488.

(3) Ant. Arch. Ver., Arch. del Comune, Atti dei Consigli BB 16 *v*.

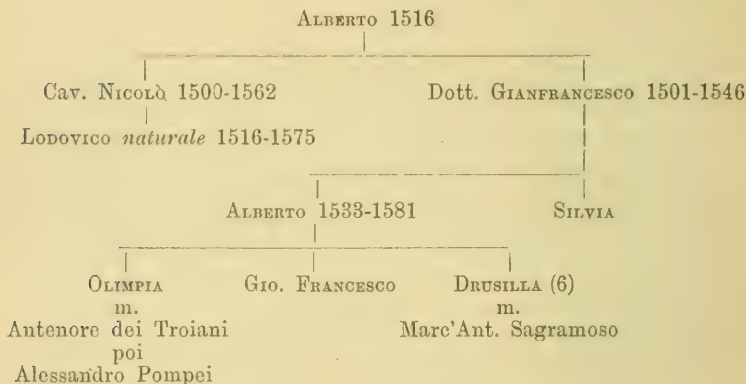
(4) Atti dei Consigli DD 48; FF 25 *v*; GG 29 *v*; II 139 *v*.

(5) Atti dei Consigli GG 1 *v*, 93 e 159 *v*.

(6) Atti dei Consigli HH 40 *v*.

(7) In un registro di entrata e uscita della Sagrestia di S. Maria della Scala (Ant. Arch. Ver.) nell'entrata del gennaio 1562 si legge: " Adì 19. R. " Per uno corpo sepolto alla Vittoria, fo un gientilhomo di Lavezoli, li fo

Gianfrancesco, nato nel 1501, ebbe moglie e due figli legittimi: Alberto e Silvia. Fu vicario della casa dei mercanti nel 1533 (1); aggregato alla prima muta del Consiglio dei XII nel 1534 (2); provveditore di Comune negli anni 1534 e 1539 (3); oratore a Venezia per cause diverse negli anni 1537 e 1540 (4). Morì probabilmente nel 1546. In principio dell'anno era di Consiglio. In fine è registrato tra gli uscenti e vacanti per l'anno 1547. Di lui parla con molta lode il Dal Pozzo negli elogi dei giudici avvocati di Verona (5).

Alberto, figlio di Gianfrancesco, nacque nel 1533: prese moglie a diciott'anni. Ebbe tre figli: Olimpia, Giovanni Francesco e Drusilla. Ecco un prospettino genealogico:

" fratti 22 con la †. In la torza soldi nove. Dette per candela m[ti] tre.
" L. 3: s. 5: d. 7. La campana s. 4: d. 6 „.

Questo gentiluomo dev'esser Nicolò. Ch'egli sia morto del 1562 risulta anche da una deliberazione del Consiglio del 14 settembre: " Pro nob. viro " Alberto Lavezola nepote et herede q. Mag.[ci] D. Nicolai Lavezolae equitis„ (KK. 193 *v*).

(1) Atti dei Consigli V 190.

(2) Atti dei Consigli Z 31 *v*.

(3) Atti dei Consigli Z 43 e BB 53.

(4) Atti dei Consigli AA 81 *v* e BB 99.

(5) Dal Pozzo, *Collegii Veronensis iudicum advocatorum elogia*. Veronae, 1563, p. 150-151.

(6) Le date di questo prospettino sono ricavate dalle due presenti ana-

***

Alberto cominciò a prender parte alla vita pubblica nel 1562 (l'anno nel quale morì suo zio Nicolò), quando fu aggregato al Consiglio nella giunta veneta dei XII (1). Nello stesso anno fu uno dei due provvisionatori dell'Adige (2) e uno dei diciotto governatori della Chiesa della Madonna di Campagna (3). Nel 1569 fu con altro oratore mandato a Venezia per una causa

grafi e dai documenti che rispetto ad Alberto registro nel paragrafo che segue. Ecco le anagrafi (Arch. del Comune).

Iª De S. Paulo 1545

Nicolò Lavezola		45
D. Gioanfranc° fratel dottor		44
Franc.ª madre di ssti		70
La molier de Nic.°		45
Lucia mugier de m. Gioanfr.°		30
Alberto	filioli de m. Gioanfr.°	12
Silvia	filioli de m. Gioanfr.°	11
Ludovigo naturale de Nic.°		29
Comin precetor de Alberto		24
Lorenzo	servitori	30
Thiberio	servitori	16
Bartholomio	servitori	22
Zuan Maria	servitori	35
Bernardin	servitori	45
Alex.°	servitori	28
Nadalin carater		28
Helena	massare	46
Paula	massare	22
Lucia	massare	20
Iac.ª	massare	60
Ant.ª et	massare	24
Un'altra	massare	23
Berchele gastaldo		40
Marieta sua mugier		32
Batt.ª boar		45
Domenego pegorar		44
Bartholomio pegorar		14
Hier.° vaccar		20

IIª Contratae S. Pauli 1555. Praesentati die martis 20 martii 1555.

M. Nicolò Lavezola Cavalier q. m. Alberto		55
D. Anna sua moglier		51
Ludovico suo fiol naturale		39
Cornelia fiola naturale de Ludovico		7
Franc.ª madre del ss.to		77
Lucia moier q. m. Zuan Fran.co fratel de m. Nicolò		40
Alberto suo fiolo		22
Antonia sua moglier		22
Olimpia	fioli	4
Zuan Francesco	fioli	3
Drusilla	fioli	1
Violante arleva del ss.to cavalier		12
Magdalena	massare	26
Zuana	massare	25
Anna	massare	22
Chat.ª	massare	18
Chatalineta	massare	16
Lucia	massare	13
Lorenzo vechio	servitori	50
Lorenzo	servitori	44
Bartholomio	servitori	32
Doria	servitori	28
Vicenzo	servitori	27
Bartholomio	servitori	24
Jacomo	servitori	12

(1) Atti dei Consigli KK 137 *v.*
(2) Atti dei Consigli KK 200 *v.*
(3) Atti dei Consigli KK 162 *v.*

contro Cologna per questioni d'estimo (1); nel 1571 fu uno dei due Provveditori di Comune (2); negli anni 1573, e 1580 fu dei sette Consiglieri dell'Ospitale di S. Giacomo e Lazzaro (3); nel 1574 fu uno dei due oratori mandati a Venezia per chiedere la diminuzione della carattata (cioè della somma accollata alla città e territorio per l'imposta sussidio) (4). Con lettera del 25 febbraio 1575, in occasione della morte di Lodovico Lavezola suo germano, chiese di finire l'ambasceria e tornare in patria; il che gli fu concesso dal Consiglio (5). Nel 1576 fu dei tre provveditori straordinari di Sanità (6). Nel 1577 fu uno dei due oratori aggiunti all'ambascieria mandata a Venezia per una causa concernente i beni comunali (7). Nel 1580 fu uno dei due oratori eletti per questioni annonarie. Ma sette giorni dopo, trovandosi egli fuori di provincia, gli fù sostituito un altro (8).

In una scrittura legale del 27 maggio 1680 si legge: “ Morto il sig. Nicolò, restò nel possesso civile dei beni il sud.° sig. Alberto [*Lavezola*], il quale nell'anno 1581, 12 settembre passò all'altra vita „ (9). Alberto passò dunque nel possesso dei beni civili soltanto nel 1562, l'anno in cui Nicolò moriva.

Alberto testò l'11 settembre 1581, il giorno prima della sua morte. Ordinò d'esser sepolto nella chiesa di S. Maria della Vittoria; lasciò trecento ducati per l'erezione d'una cappella nel chiostro od orto del monastero di S. Maria della Vittoria *prope Capellam maiorem dictae Ecclesiae*; dispose che tutti i suoi libri fossero passati all'Accademia Filarmonica; nominò usufruttuaria di tutta la sua sostanza la moglie Antonia Pellegrini: e lasciò eredi universali in parti uguali le sue due figlie: Olimpia, moglie prima di Antenore de Troiani, indi di Alessandro Pompei: Drusilla moglie di Marc'Antonio Sagramoso (10). Il figlio Gianfran-

---

(1) Atti dei Consigli MM 278 *v*.
(2) Atti dei Consigli NN 128.
(3) Atti dei Consigli NN 211 *v* e PP 170 *v*.
(4) Atti dei Consigli OO 69.
(5) Atti dei Consigli OO 84 *v*.
(6) Atti dei Consigli OO 152 *v*.
(7) Atti dei Consigli PP 7.
(8) Atti dei Consigli PP 176 *v* e 179.
(9) Ant. Arch. Ver. Rettori Veneti, processo 1424, 206, a carte 8 *v*.
(10) Vedi il testamento, in fine.

cesco era morto prima del padre. Nel 1583 (secondo l'estimo) la vedova Antonia viveva sola nella sua casa, in contrada di S. Paolo (1).

Alberto, che nacque nel 1533 e che nel 1550 aveva soli diciasette anni, non può aver ordinato il palazzo al Sanmicheli. Quando per la morte dello zio Nicolò avvenuta nel 1562, egli restò padrone di tutti i beni e divenne capo della famiglia, il Sanmicheli era morto da tre anni. Chi commise il palazzo non fu Alberto: fu, possiam dirlo con quasi certezza, Nicolò Lavezola.

Ma Alberto, buon letterato e uno dei primi ricercatori delle fonti dell'Ariosto, ha altro nome: e merita uno studio speciale che spero poter dare fra breve.

Testamento di Alberto Lavezola.

(Antichi Archivi Veronesi, *Atti dei Rettori Veneti*, n. 1424, n. 206. Copia del sec. XVII)

Ab actis q. D. Io. Andreae de Bonis not.
Testamentum Nob. D. Alberti de Lavezolis de S.to Paulo.

In Christi nomine, anno a nativitate eiusdem 1581 indictione 9, die Lunae XI mensis 7mbris, nocte antecedenti circa horam nonam, septem candellis accensis valde illuminantibus cameram infrascriptam, in quadam camera superiori prope salam domus habitationis infrascripti Mag.ci Domini Testatoris contratae S.ti Pauli, praesentibus Hieronymo de Bonis filio mei notarii infrascripti rogato in solidum cum me de omnibus et singulis infrascriptis publicum conficere testamentum videlicet quod alterum (*sic*) nostrum scribat et in publicam formam redigat, alter vero se subscribat iuxta formam legum et statutorum Communis Veronae, mag.ro Ambrosio pelizzario q. Andreae de Bertolis, Io. Maria et Io. Petro fratribus pelizzariis filiis D. Ambrosii, M.ro Augustino sel-

---

(1) Ant. Arch. Ver., Arch. del Comune, Anagrafe, " S. Paulus 26 maii 1583 Present. per Gasparem Todescum iuratum Contratae.

Anta uxor q. Nob. d. Alberti de Lavezolis. Annorum		40
Andrea regazzo		14
Antonio carozzer		30
Antonia	massare	40
Domenega	massare	30
Anna donzela		20

" Sta in casa sua: fu estimado il q. sig.or Albertho in S. Pollo ".

lario q. Dominici Perotti, Laurentio sutore q. Stephani Mecha, Francisco et Gutiono fratribus beccariis filiis M.ri Antonii Mariae Beccarii de Martinis omnibus de contrata S. Pauli Veronae asserentibus cognoscere infrascriptum Mag.cum D. Testatorem testibus idoneis, notis, adhibitis, rogatis et ad hoc specialiter convocatis.

Sapiens et Nob. D. ALBERTVS q. Egr. Iuris Utriusque Doctoris D. Jo. Francisci de Lavezolis de S.to Paulo Veronae, iacens in lecto sanus gratia Domini nostri Jhesu Christi mente et intellectu, sed corpore languens, volens alio modo de suis bonis disponere quam alias iam annis tribus in circa disposuisse asseruit in alio suo testamento in scriptis sigillato cum recognitione testium et subscriptionum in actis Egr. Virgilii Ragni notarii sive de veriori tempore, ad maiorem animi sui quietem et satisfactionem rebus suis consulendo statuit suum condere nuncupativum testamentum.

Quo prius anima sua Deo Optimo Maximo humiliter et devote commendata, cadaver suum sepeliri mandavit in eius sepultura in Ecclesia S.tae Mariae a Victoria Veronae cum exequiis arbitrio infrascriptorum haeredum suorum et uxoris et cum solitis officiis funeralibus in dicta Ecclesia primi, tertii, septimi, trigesimi et anniversarii, ac devotis missis S.ti Gregorii cum elemosina condigna pro salute animae suae.

Item ordinavit quod in termino annorum trium mortem statim subsecutorum ex introitibus suae facultatis, et ita iussit et mandavit, per infrascriptam eius Uxorem durante usufructu, sin autem per suos haeredes universales, expendantur ducati tercentum in fabricanda una Capella in claustro vel horto dicti Monasterii prope Capellam maiorem dictae Ecclesiae, ex opposito et consimilis alteri Capellae prope dictam Capellam magnam, arbitrio circa modum infrascriptae eius Uxoris et suorum haeredum infrascriptorum dummodo dicti ducati tercenti expendantur pro 3a parte singulis annis dictorum annorum trium et ad dictam Capellam sic construendam voluit et mandavit dictus D. Testator quod exequantur legata facta dicto Monasterio per q. Patrem et Avum paternum dicti D. Testatoris in suis testamentis, instrumentis et codicillis et observentur per haeredes universales infrascriptos omnia ordinata pro dicto Monasterio vel Capella in eo per Patrem et Avum dicti D. Testatoris. Cui etiam Monasterio S.tae Mariae a Victoria ultra praemissa dictus D. Testator iure legati reliquit et legavit alios ducatos centum de grossis 31 pro quoque in pecunia numerata dicto Monasterio semel dandos per suos haeredes infrascriptos quando ipsis haeredibus videbitur, sed interim infrascripta Domina Usufructuaria durante suo usufructu, et postea haeredes universales infrascripti, omni anno in festo S.ti Michaelis de mense 7mbris teneantur solvere dicto Monasterio ducatos sex donec exbursati fuerint dicti centum, qui investiantur per fratres dicti Monasterii ad

utile ipsius Monasterii cum obligatione per dictum Mag.cum D. Testatorem imposita dicto Monasterio et Ven. fratribus illius pro tempore existentibus, omni anno in dicta Ecclesia et die eius depositionis celebrare unum officium funerale in perpetuum pro salute animae dicti Mag.ci D. Testatoris.

Item ordinavit quod eius morte sequuta infrascripta D. Usufructuaria semel exhibere debeat vestimenta lugubria servituti domi suae prout videbitur et placuerit infrascriptae eius Uxori et haeredibus universalibus.

Omnes autem libros generis cuiuscunque in signum amoris reliquit iure legati Mag.cae Academiae Philarmonicae, ad eius utile, commoditatem et honorem ibi semper permansuros.

Egregio Francisco Mondellae q. D. Boninsignae de Pigna Veronae eius domestico iure legati et in signum benevolentiae suae erga eum reliquit et legavit illas petias terrarum pro quibus haeredes Nicolai Zontellae de Sorgata omni anno solvere tenentur dicto Mag.co D. Testatori ducatos duodecim cum pacto affrancandi cum ducatis tercentis in ratione quattuor pro centenario, sive prout in suis instrumentis una cum suo primo integro fictu.

Non immemor Nob. D. Antoniae filiae q. Nob. D. Jo. Baptistae de Peregrinis eius uxoris dilectissimae, iure legati et omni alio meliori modo quo potuit, reliquit et legavit dictae eius Uxori dotes suas iuxta tenorem suorum Instrumentorum dotalium, et ultra dotes omnes dictae eius Uxoris vestes auri, serici, pellium, panni lini et alii generis et omnes eius annulos aureos, perlas, iocalia, monilia et ornamenta quaecunque et cuiuslibet qualitatis personae suae ac etiam alios ducatos 500 de gr. 31 in pecunia numerata illi semel dandos per haeredes infrascriptos ex bonis dicti D. Testatoris quando dicta D. Antonia nolet uti infrascripto usufructu, vel cessaverit infrascriptus usufructus ex quavis causa; haec omnia in libera potestate et dispositione dictae eius Uxoris cum hac sola conditione quod decedente dicta D. Antonia eius uxore, dicti ducati 500 tantum deveniant ad infrascriptos suos haeredes universales et sic in dictis ducatis 500 dictae Uxori suae quandocunque decedenti dictus Mag.cus D. Testator substituit infrascriptas duas filias suas haeredes universales equaliter in capita vel earum praemortuarum filios in stirpem.

Item aggravavit dictam D. Antoniam Uxorem suam secuta morte d. Mag.ci D. Testatoris ad conficiendum inventarium omnium bonorum mobilium, creditorum, massaritiarum et suppellectilium Veronae et ruri generis cuiuscunque haereditatis dicti Mag.ci D. Testatoris et dictam Mag.cam D. Antoniam eius Uxorem, donec caste, oneste et vidualiter vixerit, dictus Mag.cus D. Testator reliquit et legavit dominam, patronam

et usufructuariam omnium et singulorum bonorum dicti inventarii et omnium et quorumcunque, aliorum bonorum stabilium, iurium et actionum generis cuiuscunque dicti Mag.ci D. Testatoris sine aliqua participatione facienda suis haeredibus universalibus infrascriptis, tam institutis quam substitutis ut infra, nolens eam teneri vel obligatam esse ad redendam rationem alicui de dicto suo usufructu neque fideiubendum de utendo vel fruendo arbitrio boni viri, a quibus omnibus et singulis et aliis quibuscunque ad quae de iure teneretur, eam donec ita caste et vidualiter vixerit, absolvit et liberavit.

Qua Domina Antonia Uxore sua decedente, vel nubente aut praemissis contrafaciente, cesset dictus usufructus et cum sua proprietate consolidatus libere deveniat ad suos haeredes universales infrascriptos equaliter et ut infra.

Verum si infrascripti haeredes instituti et substituti ut infra aut aliquis eorum durante dicto usufructu praefatam D. Antoniam Uxorem suam in dicto usufructu quovis modo vel causa molestaverit aut perturbaverit etiam in aliqua eius minima parte, tali casu et ex nunc prout ex tunc praefatus Mag.cus D. Testator ipsos sic molestantes unum vel plures ac eorum descendentes privavit et privat praesenti sua haereditate et omni eius commodo et beneficio et in parte et portione eorum molestantium instituit et substituit haeredes suos alios cohaeredes et eorum descendentes ordine infrascripto vocatos. Casu quo autem omnes sui universales haeredes in dicto usufructu aliqua causa vel in aliqua eius parte dictam Uxorem suam molestarent, omnes eos et suos descendentes ex nunc dictus D. Testator privavit et privat tota et integra praesenti sua haereditate eorumque loco instituit eius haeredem universalem Ven. Domum S.tae Misericordiae Veronae, salvo semper dicto usufructu ut supra praefatae eius Uxori, donec honeste et vidualiter vixerit modo predicto.

Item infrascriptis filiabus suis iure institutiones reliquit et legavit dotes suas iuxta tenorem instrumentorum dotalium ad quae relatio habeatur.

Item voluit et ordinavit, expresse mandavit dictus M.cus D. Testator quod, completo dicto usufructu dictae eius Uxoris, ex bonis dicti D. Testatoris fiat equalificatio dotium infrascriptarum filiarum suarum, quia infrascripta D. Olimpia minori dote fuit dotata quam infrascripta D. Drusilla et restum aliorum bonorum dividatur equaliter ut infra.

Item mandavit et expresse iussit dictus Mag.cus D. Testator quod eius morte secuta fieri debeat etiam inventarium omnium bonorum stabilium generis cuiuscunque cum suis pertinentiis, qualitatibus, quantitatibus et confinibus, registrandum vel citandum subtus hoc suum testamentum ut suum fideicommissum infrascriptum ullo unquam tempore

defraudare vel deminui non possit et etiam eius copiam praesentari Officio Registri ad perpetuam memoriam quorumcunque etc.

In omnibus autem aliis suis bonis mobilibus et immobilibus, iuribus et actionibus ac debitorum nominibus praesentibus et futuris generis cuiuscunque, ubicunque sint, iaceant et esse reperiantur et dicto Mag.^{co} et Sap.^{ti} D. Testatori quomodocunque et qualitercunque spectantibus et spectaturis, (salvo dicto usufructu et omnibus expressis ut supra et nominatis nec alio modo) suos sibi haeredes universales instituit et esse voluit Mag.^{cam} D. Olimpiam uxorem q. in primo matrimonio Nob. D. Antenoris de Troianis et nunc in 2do uxorem Mag.^{ci} Co. Alexandri de Pompeis et D. Drusillam uxorem Nob. D. Marci Antonii Sacramosii ambas filias suas praedilectas et omnes earum filios masculos natos et nascituros, etiam posthumos et ipsorum filiorum filios et descendentes et descendentium descendentes in infinitum ordine successivo semper masculos, legitimos et naturales omnes invicem instituendo et substituendo in omnibus casibus iuxta gradus prerogativam, vulgariter semper, pupillariter et per fideicommissum expressum et ipsas filias suas in capita et earum descendentes et descendentium descendentes in stirpem, ita quod omnia bona sua primo loco deveniant in dictis filiabus suis equaliter in capita et postea omnibus filiis masculis in stirpem et in eorum descendentes semper masculos legitimos et naturales de gradu in gradum in infinitum usque ad completam lineam dictarum filiarum suarum. Et si una ex dictis lineis masculinis compleretur ita quod ex ea aliquis masculus descendens legitimus ut supra non extaret, tali casu ultimo sic decedenti sine filiis masculis legitimis ut supra, dictus Mag.^{cus} D. Testator substituit vulgariter, pupillariter et per fideicommissum, ut supra, proximiores masculos legitimos et naturales alterius lineae praedictae et eorum descendentes masculos legitimos ut supra in infinitum semper per expressum fideicommissum modo praedicto.

Prohibens dictus M.^{cus} D. Testator dictis filiabus suis et earum descendentibus in infinitum et utrique earum et cuilibet earum omnem et quancunque detractionem vel extractionem legitimae, trebellianicae, falcidiae vel supplementi legitimae et cuiuslibet alterius quotae nam pro omnibus praemissis et quibuslibet detractionibus eisdem filiabus et descendentibus suis dictus M.^{cus} D. Testator iure institutionis ut supra et in sua libera potestate et dispositione ipsis filiabus suis vel praemortuarum filiis reliquit dictas dotes suas et omnia bona mobilia, suppellectilia, massaritias ac credita dicti D. Testatoris generis cuiuscunque inventarianda ut supra.

Nec non prohibuit et omnino vetuit dictis haeredibus suis institutis et substitutis ut supra in infinitum et cuilibet eorum quamlibet permutationem, donationem, venditionem, alienationem et obligationem generis

cuiuscunque bonorum stabilium praesentis haereditatis et cuiuslibet partis eorum ita quod remaneant et deveniant in omnes ut supra vocatos in infinitum sine aliqua deminutione. Et si omnes descendentes masculi legitimi dictarum filiarum suarum decederent, tali casu dictus Mag.cus D. Testator ultimo sic decedenti substituit proximiores agnatos masculos legitimos et naturales familiae dicti Mag.ci D. Testatoris et eorum descendentes et descendentium descendentes in infinitum semper masculos, legitimos et naturales, ut supra, vulgariter, pupillariter et per fideicommissum ut supra expressum et cum eisdem prohibitionibus de quibus supra, ad hoc quod bona sua conserventur modo praedicto in infinitum sine aliqua deminutione.

Demum dictus Mag.cus D. Testator ordinavit et iussit quod omnibus et singulis pauperibus quorum esset creditor ex quavis causa et pro qualibet summa nominandis et declarandis per eandem M.cam D. Antoniam Uxorem suam, haeredes universales suprascripti neque dicta eius Uxor usufructuaria nil petere possint imo eisdem debitoribus pauperibus sic ut supra per dictam D. Antoniam nominandis et declarandis ac cuilibet eorum, dictus Mag.cus D. Testator omne suum debitum remisit amore Dei eosque et quemlibet eorum ab ipsis debitis absolvit et liberavit.

Asserens dictus Mag.cus D. Testator etc.

Cassans, revocans et annullans omnes et singulas alias eius ultimas voluntates antea per eum quomodolibet factas ita ut sint nullius valoris et momenti etiam si in eis essent apposita verba derogatoria ultimis voluntatibus de quibus specifica mentio foret necessaria et nullam fidem mereantur in iudicio vel extra, volens etc.

Rogans ore proprio etc.

Verona, 20 marzo 1906.

L'Accademico Segretario
RODOLFO RENIER.

Torino, VINCENZO BONA, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi.

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza dell' 8 Aprile 1906.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: MORERA, SEGRE, GUARESCHI, PARONA, NACCARI, FUSARI, GUIDI e CAMERANO, Segretario.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Il Presidente annunzia la morte del Socio corrispondente Dott. Victor FATIO di Ginevra. Il Socio CAMERANO leggerà un cenno necrologico nella seduta ventura.

Il Presidente presenta in dono all'Accademia l'opera del Socio straniero Prof. HELMERT, intitolata: *Rapport sur les travaux du Bureau central de l'Association Géodésique international en 1905, etc.*

Vengono presentate per l' inserzione negli *Atti* le note seguenti:

1° Prof. Francesco PALATINI: *Sulle superficie algebriche i cui* S_h $(h+1)$ — *seganti non riempiono lo spazio ambiente*, dal Socio SEGRE;

2° Prof. Federico SACCO: *Fenomeni di corrugamento negli schisti cristallini delle Alpi*, dal Socio PARONA;

3° Prof. Piero GIACOSA: *Sull'azione della fitina in relazione alla funzione glicogenica*, dal Socio CAMERANO.

Il Socio PARONA, a nome del Socio MATTIROLO, presenta per l'inserzione nelle *Memorie* il lavoro del Dott. Giovanni NEGRI intitolato: *La vegetazione della collina di Crea*. Il Presidente delega i Soci MATTIROLO e PARONA per riferire intorno a detta Memoria.

LETTURE

Sulle superficie algebriche i cui S_h $(h+1)$ — *seganti non riempiono lo spazio ambiente.*

Nota del Prof. FRANCESCO PALATINI.

1. — Accade talvolta, nel fare delle ricerche su certe categorie di enti, di dover escludere alcune classi dei medesimi dalle conclusioni relative a quelli generici, ed è certo importante il poter determinare quali siano codeste classi. Sotto questo punto di vista credo possa tornar utile la pubblicazione del presente scritto nel quale mi propongo di determinare quelle superficie algebriche degli iperspazi i cui S_h seganti (e con la espressione " S_l segante „ intenderemo sempre un S_l avente $l+1$ punti linearmente indipendenti in comune con la superficie) non riempiono lo spazio ambiente, pur contenendo complessivamente almeno tanti punti quanti questo. — Per il caso più semplice di una superficie dello spazio a 5 dimensioni la questione è stata risolta già in una Nota del prof. Severi (*), nella quale al n° 8 è dimostrato che l'unica superficie di S_5 le cui rette seganti non riempiono lo spazio ambiente è quella del Veronese. In una mia Nota (**) poi è stata risolta la questione per le superficie rappresentate nel piano ciascuna dal sistema di tutte le curve di un determinato ordine.

Siccome gli ∞^{2h+2} spazi S_h seganti di una superficie Φ con-

(*) *Intorno ai punti doppi improprî di una sup. generale dello spazio a 4 dimensioni, ecc.*, " Rend. Circ. Mat. Palermo „, 1901.

(**) *Sulla rappresentazione delle forme ternarie, ecc.*, " Atti Accademia Lincei „, 1903.

tengono complessivamente ∞^{3h+2} punti, così nella questione attuale lo spazio ambiente dovrà avere una dimensione al più eguale a $3h+2$. Ammetteremo che questo spazio sia un S_{3h-2-a} $(a \geq 0)$ e che gli S_h seganti di Φ formino una varietà M di punti di dimensione $3h+2-a-m$ $(m>0)$, cosicchè per ogni punto di essa ne passano ∞^{a+m}. Notiamo subito che dev'essere $a<h$. Difatti se fosse $a=h$ lo spazio ambiente sarebbe un S_{2h+2} e allora un S_{2h+1} taglierebbe la Φ in una linea i cui $\infty^{h+1} S_h$ seganti riempiono codesto spazio (*), e siccome gli S_{2h+1} in discorso riempiono S_{2h+2}, così gli S_h seganti di Φ riempiono questo spazio. Tanto meno poi può essere $a>h$.

Ora fissato un S_h' segante di Φ, gli S_h seganti ad esso incidenti, passandone ∞^{a+m} per ogni punto di quello, saranno in generale ∞^{h+a+m}; però noi dobbiamo porci nell'ipotesi che possano essere anche $\infty^{h+a+m-u}$, nel qual caso vuol dire che, fissato uno di questi S_h passante per un punto generico A di S_h', degli $\infty^{h+a+m} S_h$ che passano per gli ∞^h punti di S_h' ve ne sono ∞^u, relativi ad altrettanti punti di S_h', che coincidono con quello, il quale dunque conterrà tutti quegli ∞^u punti che formeranno o un S_u od altra varietà contenuta in uno spazio lineare di dimensione maggiore di u; dunque ogni S_h segante di Φ ed incidente ad S_h' taglia questo in un $S_x (x \geq u)$.

Gli $\infty^{h+a+m-u} S_h$ seganti di Φ ed incidenti ad S_h' determinano con questo altrettanti $S_{2h-x} (x<h)$ [*a meno che un* S_{2h-x} *qualsiasi determinato da* S_h' *con uno di detti* S_h *anzichè contenere un numero finito di siffatti* S_h *non ne contenga* ∞^y $(y>0)$, *caso che per ora escludiamo, riserbandoci di esaminarlo nel n° successivo*]. Allora essendo ∞^{2h+2} gli S_h seganti di Φ, ed ognuno degli S_{2h-x} determinato da uno di essi con uno di quelli che lo incontrano contenendone un numero finito, i nostri S_{2h-x} saranno $\infty^{h+a+m-u+(2h+2)} = \infty^{3h+2+a+m-u}$, e sono tutti $(2h+2)$ — seganti (almeno). Ora per ognuno dei nostri S_{2h-x} passano in S_{3h+2-a} $\infty^{(x+1)(h+1-a}$

(*) Il procedimento seguìto in questo numero è applicabile alle varietà di un numero qualsiasi di dimensioni, e, applicato in precedenza alle curve con le semplificazioni dovute alla maggior semplicità del caso, conduce subito a concludere che in uno spazio di dimensione non maggiore di $2h+1$ non esistono curve i cui S_h seganti non riempiano lo spazio ambiente.

spazi S_{2h+1}, e in questo modo otteniamo $\infty^{2h+2-(a+m-u)+(x-1)(h+1-a)} =$ $= \infty^{4h-3-m+x(h-a)+(x-u)}$ spazi S_{2h+1} seganti (almeno) di Φ (*). Ora siccome questo numero dev'esser minore di quello ∞^{4h-4} di tutti gli S_{2h+1} seganti di Φ, perchè un gruppo di $2h+2$ punti di Φ contenuti in uno dei nostri S_{2h-x} è un gruppo particolare, così essendo $h > a$, $x \geq u$, dovrà aversi $m + x(h-a) + (x-u) = 0$, donde $m = 0$, $x = 0$, $x - u = 0$, $u = 0$. Dunque *la varietà formata dai punti degli* S_h *seganti di* Φ *in* S_{3h+2-a} *è sempre di dimensione* $3h + 2 - a$, *tranne forse nel caso che ci siamo riserbati di esaminare nel prossimo numero.*

2. — Supponiamo ora che un S'_{2h-x} qualsiasi determinato da un dato S_h' segante di Φ con uno degli S_h seganti che lo incontrano contenga ∞^y $(y > 0)$ S_h seganti, cosicchè le infinite intersezioni di questi con Φ, non potendo comprendere tutta la superficie, altrimenti essa troverebbesi in detto S'_{2h-x}, saranno distribuite sopra una linea, i cui ∞^{h+1} S_h seganti saranno dunque tutti e soli gli S_h seganti di Φ contenuti in quel S'_{2h-x}, cosicchè sarà $y = h + 1$, e allora gli S_{2h-x} determinati da S_h' con gli S_h seganti ad esso incidenti sono $\infty^{h+a+m-u-y} = \infty^{a+m-1-u}$, il che richiede $a + m - 1 \geq u$. Allora la M è costituita dai punti dei nostri S_{2h-x}. Ora di questi passandone $\infty^{a+m-1-u}$ per ognuno degli ∞^{2h+2} S_h seganti, ma ognuno contenendone ∞^{h+1}, gli S_{2h-x} distinti sono $\infty^{(a+m-1-u)+(2h+2)-(h+1)} = \infty^{h+a+m-u}$.

Allora presi $r = h + a + m - u$ punti generici sulla Φ, essi determinano un numero finito dei nostri S_{2h-x}, ognuno dei quali taglia Φ lungo una linea, ed $r - 1$ punti determinano ∞^1

(*) È possibile però pensare che ogni S_{2h+1} passante per uno arbitrario dei nostri S_{2h-x} ne contenga un'infinità, nel qual caso contiene pure infiniti S_h seganti e perciò, non potendo contenere tutta la Φ, la taglierà in una linea. In tal caso, fissato un S_{2h+2} passante per un S_{2h-x} ed in esso una semplice infinità generica di S_{2h+1} passanti per questo S_{2h-x}, si vede che ciascuno di questi S_{2h+1} tagliando la Φ secondo una linea, ed essendo siffatte linee fra loro distinte (perchè se coincidessero in una, questa per essere comune a tutti quegli S_{2h+1} sarebbe in S_{2h-x}, e si avrebbe così che ognuno dei nostri S_{2h-x} conterrebbe infiniti S_h, caso che ci siamo riserbati di considerare più innanzi), la superficie è contenuta in quel S_{2h+2}, cioè in uno spazio di dimensione minore di S_{3h+2-a}, essendosi dimostrato che deve essere $a < h$.

di siffatti spazi che formano ∞^2 coppie, e siccome i gruppi di $r-1$ punti di Φ sono $\infty^{2(r-1)}$, di siffatte coppie di spazi S_{2h-x} ne avremo ∞^{2r}, cioè tutte le coppie che si possono formare coi nostri S_{2h-x}, il che vuol dire che due qualunque di essi tagliansi almeno in un $S_{r-2}=S_{h+a+m-u-2}$ segante, poniamo in un $S_{h+a+m-u-2+s}$ $(s\geq 0)$, e determinano quindi un $S_{3h-2x-a-m+u+2-s}$. Ora fissato (se è $h+a+m-u-2+s\geq h$, il che avviene certo se è $s>0$ in virtù della $a+m-1\geq u$) nell'$S_{h+a+m-u-2+s}$ comune a due dei nostri S_{2h-x} un S_h' segante di Φ, e presi (ciò che è sempre possibile), uno nell'uno ed uno nell'altro, due S_h seganti uscenti da uno stesso punto di S_h', questi determinano uno dei nostri S_{2h-x}, e siccome quei due S_h hanno un S_x in comune, e perciò individuano uno spazio di dimensione $2h-x$, così quel S_{2h-x} appartiene all'$S_{3h-2x-a-m+u+2-s}$ determinato dai due S_{2h-x} anzidetti, il quale al variare di quei due S_h viene così a contenere infiniti S_{2h-x} e quindi infinite linee di Φ, e questa verrebbe così a trovarsi in uno spazio di dimensione minore di quella del dato S_{3h+2-a} (rammentando che è $x\geq u$, $m>0$). Allora converrà ammettere che sia $h+a+m-u-2+s\leq h-1$, cioè $a+m-1+s\leq u$, e siccome si è già trovato $a+m-1\geq u$, così concluderemo che è $s=0$, $a+m-1=u$.

Così adunque abbiamo in S_{3h+2-a} una superficie Φ che ammette $\infty^{h+a+m-u}=\infty^{h+1}S_{2h-x}$ che la tagliano ciascuno in una linea, e due generici dei quali hanno in comune un $S_{h+a+m-u-2+s}=S_{h-1}$ segante e determinano un $S_{3h-2x-a-m+u+2-s}=S_{3h+1-2x}$, e per ogni punto di M ne passano $\infty^{a+m-1-x}$, il che richiede $x\leq a+m-1$, e siccome si ha $x\geq u$, cioè $x\geq a+m-1$, così dovrà essere $x=a+m-1$. Fissati ora due dei nostri S_{2h-x}, e siano S'_{2h-x}, S''_{2h-x}, prendiamo un altro S_{2h-x} (dei nostri), il quale taglierà ciascuno di quei due rispettivamente in un S'_{h-1}, S''_{h-1} seganti di Φ, i quali appartenendo a quel S_{2h-x} avranno in comune almeno un S_{x-2} che trovandosi in S'_{2h-x}, S''_{2h-x}, sarà nell'S_{h-1} (segante di Φ) ad essi comune. Ora se S'_{h-1}, S''_{h-1} avessero in comune effettivamente soltanto un S_{x-2}, lo spazio da essi individuato sarebbe di dimensione $2h-x$, cioè sarebbe quel S_{2h-x} mediante il quale si sono ottenuti e che perciò sarebbe contenuto nel $S_{3h+1-2x}$ determinato da S'_{2h-x}, S''_{2h-x}, e allora tutta la Φ troverebbesi in questo spazio, che è certo di dimensione minore di quella del dato S_{3h+2-a}, essendo $x=a+m-1$ e

quindi (per essere $m \geq 1$) $x \geq a$ e $2x > a$, a meno che non sia $x = 0$, $a = 0$, $m = 1$. Devono dunque S'_{h-1}, S''_{h-1} avere in comune uno spazio di dimensione maggiore di $x - 2$, però non maggiore di $x - 1$, come si vede conducendo per essi due S'_h, S''_h seganti, i quali, come sappiamo, hanno in comune un S_x che sarà tagliato p. e. da S'_{h-1} in un S_{x-1}. Allora S'_{h-1}, S''_{h-1} determinano un S_{2h-1-x} che sarà l'intersezione del $S_{3h+1-2x}$ determinato da S'_{2h-x}, S''_{2h-x} con l' S_{2h-x} col quale abbiamo tagliato questi ultimi, e allora questi $S_{3h+1-2x}$, S_{2h-x} determinano un $S_{3h+2-2x}$. Dunque i nostri ∞^{h+1} S_{2h-x} determinano 3 a 3 ∞^{3h+3} spazi $S_{3h+2-2x}$ che tagliano ognuno Φ in una linea. Ora siccome, posto pure che ognuno di questi spazi sia un iperpiano di S_{3h+2-a}, si avrebbero più iperpiani del possibile [e se codesti spazi non sono iperpiani, gli iperpiani passanti per essi (non potendo uno contenerne infiniti altrimenti conterrebbe la Φ) saranno in numero ancora maggiore], così dovrà essere $S_{3h+2-2x}$ l'intero spazio S_{3h+2-a}, e perciò sarà $2x = a$, e dovendo essere $x \geq a$ ne segue $x = a = 0$, e allora dalla $a + m - 1 = x$ ricavasi $m = 1$.

Ne segue che *superficie i cui* S_h *seganti non riempiono lo spazio ambiente, quando la dimensione di questo non superi* $3h + 2$, *possono essere soltanto quelle di* S_{3h+2}, *ed anche per queste la varietà formata dai punti dei loro* S_h *seganti non può essere di dimensione minore di* $3h + 1$. Passeremo ora a determinare siffatte superficie, dimostrandone così l'esistenza.

3. — Abbiasi in S_{3h+2} una superficie Φ i cui S_h seganti formino una varietà di punti M_{3h+1}. Come s'è trovato prima, per ogni punto di M passano ∞^1 di questi S_h che sono tutti contenuti in un S_{2h} che taglia la superficie in una linea, e di questi S_{2h} se ne hanno ∞^{h+1}, ed ognuno è determinato da $h + 1$ punti di Φ, e due generici di essi tagliansi in un S_{h-1} segante e determinano un S_{3h+1}, cioè un iperpiano. Allora presi due S_{3h-1} determinati ciascuno da due dei nostri S_{2h}, si ha che ciascuno degli S_{2h} dell'uno è tagliato da ciascuno degli S_{2h} dell'altro in h punti della Φ, e così risulta subito che l'ordine di questa è $4h$ e quello della linea in cui Φ è tagliata da un S_{2h} è $2h$, ed essendo questa curva evidentemente immersa in questo S_{2h} è razionale, ed anche la Φ contenendo così un sistema lineare ∞^{h-1} di curve razionali

è razionale; passeremo allora a determinarne la rappresentazione piana.

Fissato uno dei nostri S_{2h}, esso con $h-1$ punti generici B della Φ determina un S_{3h-1}. Condotto per siffatto S_{3h-1} un S_{3h} e per questo un S_{3h+1}, l'intersezione di tale iperpiano con Φ è una linea C^{4h} composta della C^{2h} contenuta in S_{2h} e di un'altra C_1^{2h} che taglia la prima in h punti e passa per gli $h-1$ punti B, cosicchè l' S_{3h} considerato, contenendo questi $2h-1$ punti taglia C_1^{2h} e quindi Φ ancora in un punto. Dunque gli S_{3h} passanti per il fissato S_{3h-1} projettano la Φ biunivocamente in un piano arbitrario π.

Una sezione iperpiana C^{4h} di Φ taglia la C^{2h} già fissata in $2h$ punti, quindi viene projettata in una Γ^{2h}, mentre una C_1^{2h} taglia la fissata C^{2h} in h punti e vien così projettata in una Γ^h segante ogni Γ^{2h} in $2h$ punti mobili, mentre due Γ^h si tagliano in h punti mobili. Risulta di qui che le Γ^h formano un sistema razionale di ordine h, dimensione $h+1$, grado h, cioè o il ben noto sistema di ordine h con un punto fondamentale $(h-1)^{\text{plo}}$ ed $h-1$ punti fondamentali semplici, oppure il sistema di tutte le coniche del piano. Nel primo caso le Γ^{2h} sono tutte le curve di ordine $2h$ con un punto fondamentale $2(h-1)^{\text{plo}}$ ed $h-1$ punti doppi (*), nel secondo tutte le quartiche del piano. Nel primo caso la Φ possiede ∞' coniche, nel secondo nessuna e si ha così una Φ_{16} di S_{14} la quale nella classe di superficie di cui ci occupiamo (le quali presentano molte analogie con quelle ben note di ordine $n-1$ immerse in S_n e che si possono classificare in modo analogo a queste) fa la stessa parte che la superficie di Veronese rispetto alle rigate razionali.

Concludendo abbiamo: *Le sole superficie i cui* S_h *seganti non riempiono lo spazio ambiente* S_r, *pur contenendo complessivamente almeno* ∞^r *punti, sono la superficie di* S_{3h+2} *rappresentabile nel piano con il sistema delle curve d'ordine* $2h$ *con un punto fondamentale* $2(h-1)^{\text{plo}}$ *ed* $h-1$ *punti doppi, e nel caso di* $h=4$ *anche la superficie rappresentata dal sistema di tutte le quartiche del piano.*

(*) Queste superficie sono già state segnalate sotto altro punto di vista dal prof. Castelnuovo nella Nota: *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve iperellittiche,* " Rend. Circ. Mat. Palermo ", tomo IV, 1890.

Confrontando questa conclusione con le considerazioni del n° 1 di una mia Nota (*) si vede subito che questo scritto dà una nuova dimostrazione geometrica, e più semplice di quella contenuta nell'altra Nota già citata, del teorema relativo alla rappresentabilità delle forme ternarie di grado n mediante la somma di n^{me} potenze di forme lineari, e la semplicità delle considerazioni sulle quali questo scritto si fonda fa presumere che i risultati ottenuti si possano non tanto difficilmente generalizzare.

Torino, marzo 1906.

Fenomeni di corrugamento negli schisti cristallini delle Alpi.

Nota del Prof. FEDERICO SACCO.

(Con due Tavole).

Per la conoscenza dei fenomeni geotettonici che nelle loro varie modalità ed intensità originarono i rilievi terrestri, riesce di grande interesse non solo lo studio delle grandi sezioni naturali, come per esempio cercai di fare figurando l'anno scorso, negli Atti di questa stessa Accademia, un buon centinaio di esempi di " Fenomeni stratigrafici osservati nell'Appennino settentrionale e centrale „, ma è pure utilissimo l'esame dei fenomeni analogi che osservansi anche su semplici frammenti di roccia che, portati in Gabinetto, possonsi studiare con ogni comodità in tutti i loro dettagli.

Questo studio ricorda alquanto, per la piccola scala, quello eseguito da diversi geologi, come, a cominciare da un secolo fa, I. Hall, e poi in seguito Favre, Daubrée, Cadell, Tresca, Spring, Uzielli, Reyer, Peach, Schardt, Bailey Willis, Mellard Reade,

(*) *Sulla rappresentazione delle forme ed in particolare della cubica quinaria, ecc.*, " Atti Acc. Torino „, 1902.

Lord Avebury, ecc., i quali, con esperienze fatte in Gabinetto, e seguendo metodi diversi, cercarono di ottenere la riproduzione dei grandi fenomeni geotettonici naturali.

Ma, mentre in tali esperienze di Gabinetto vi è sempre una larga parte teorica, non essendo possibile di riprodurre le svariatissime reali condizioni che verificansi in natura per la costituzione dei fenomeni in questione, invece il sovraccennato esame di campioni naturali corrugati ci avvicina certo più sicuramente al vero, per la conoscenza dei grandi fenomeni geotettonici, giacchè tali campioni talora ci presentano, direi in miniatura, i fatti stessi che in grande scala costituiscono l'orotettonica della Stratosfera.

Ecco perchè da alcuni anni cercai di raccogliere, in varii punti delle Alpi occidentali, campioni di roccie cristalline pieghettate ed ora, approfittando anche della cortesia dei professori Parona, Spezia, Piolti e Colomba, che sono lieto di qui ringraziare per la gentile comunicazione di interessanti campioni analoghi, parmi opportuno di presentarne la figura con brevissimi cenni descrittivi, specialmente riguardo a varii Gneiss ed a qualcuno dei principali schisti cristallini che per lo più fanno parte della cosidetta Zona delle Pietre Verdi delle Alpi occidentali dal lato italiano; prevalgono in generale detti ripiegamenti nella parte inferiore di tale serie schistosa, specialmente là dove essa si appoggia contro i cosidetti Massicci di Gneiss centrale.

Ed ecco senz'altro la sommaria descrizione di detti campioni, la cui numerazione corrisponde a quella con cui essi sono segnati nelle unite tavole fototipiche.

I.

Gneiss pseudoghiandone, raccolto dal Prof. G. Spezia presso Piedimulera in Val d'Ossola, ora conservato nel Museo mineralogico dell'Università di Torino. Campione largo circa 40 cm., stato levigato da un lato, quello di cui si presenta la fotografia.

È costituito da una serie ondulato-contorta di zonarelle felspatico-quarzose biancastre alternate con zonule micacee nerastre e grosse lenti quarzose bianche. Vi si osserva chiaramente che le lenti quarzose, quantunque anch'esse incurvate,

nell'assieme però funzionarono quasi da punti resistenti (piccoli massicci od *Horst* in miniatura), contro ed attorno ai quali gli straterelli circostanti si addensarono, pieghettandosi meravigliosamente, talora comprimendosi e laminandosi (quando compresi e compressi tra due noccioli quarzosi compatti), senza che siansi verificate fratture notevoli, anzi piuttosto coll'apparenza quasi di una massa o corrente fluida obbligata ad attraversare una strettoia.

Talora dette zonule penetrano perfino nelle cavità o sinuosità dei noccioli quarzosi.

Le lenti quarzitiche spesso si intrecciano subparallelamente senza toccarsi, ma influendo nelle loro reciproche ripiegature. Dette lenti sono di 1 a 4 o 5 centim. di ampiezza nella parte nucleare, alta da 1 a 2 centim., e per lo più prolungansi trasversalmente in zonule sottili bianche che finiscono di perdersi frammezzo alle zonarelle quarzoso-felspatiche oppure cessano quasi di tratto, quasi trasformandosi in una serie di zonule quarzoso-felspatiche.

II.

Gneiss verdastro raccolto a Pont Buzet presso Aosta. Il campione, largo circa 22 centim., è conservato nel Museo litologico della Scuola di Applicazione per gli Ingegneri in Torino (n° 26814 d'Invent.).

La roccia gneissica, fortemente contorta, presenta di tratto in tratto interzonule lentiformi di quarzo e sparsi cristallini di Pirite; ma in complesso la costituzione litologica è abbastanza regolare e quindi le contorsioni, per quanto spiccate e ripetute, sono piuttosto uniformi in tutta la massa del campione.

III[a,b].

Gneiss cloritico raccolto dal Dott. F. Virgilio presso il lago di Bringais in Val Brusson (Valle d'Aosta). Il campione, largo circa 19 centim., è conservato ora nel Museo geologico dell'Università di Torino.

La massa gneissica verdastra, con interstraterelli felspatici biancastri, presenta sparsi numerosi cristallini di Magnetite.

Il campione è molto interessante perchè mostra di aver subìto non solo una forte compressione tangenziale, da cui è risultato il suo corrugamento obliquo quasi monoclinale, ma anche un notevole stiramento, nel senso ortogonale alla compressione sovraccennata, per cui tale piega monoclinale si è dovuta spaccare in varie linee (con fratture variabili da meno di un millim. ad oltre un centim.) e ne vennero conseguentemente anche spostate ad irregolare gradinata le diverse parti, rese tra di loro indipendenti per l'avvenuto fratturamento.

In seguito dette fratture vennero riempite specialmente da clorite (che è probabilmente una rigenerazione della stessa roccia cloritosa circostante), nonchè da sparsi cristalli di Quarzo, pure probabilmente in parte originati da una specie di secrezione della stessa massa gneissica.

IV.

Schisto gneissico verdastro, per la mica un po' cloritizzata, povero in felspato, fortemente contorto anche nei più minuti dettagli. Campione alto oltre 30 centim., stato raccolto in Valnontey (Val di Cogne), alla base del Ghiacciaio della Tribolazione ed ora conservato nel Museo geologico dell'Università di Torino.

Nella massa gneissica osservasi un grande sviluppo delle intercalazioni bianche quarzose, di cui alcune sono assai grandi e formano anzi talora vere lenti irregolarissime, anche qua e là sdoppiantesi irregolarmente.

Dove le lenti quarzose sono più estese si nota che esse, pur piegandosi e contorcendosi, tuttavia nel complesso costituirono ostacolo al regolare corrugamento della circostante massa micacea; quindi contro oppure tra questi maggiori centri quarzosi veggonsi veri addensamenti o pigiamenti delle pieghettature degli straterelli, essenzialmente micacei, circostanti; fenomeno analogo a quello del campione I.

Supponendo questo fenomeno portato in ampia scala, esso ci spiega assai bene come nelle formazioni sedimentarie certi forti conturbamenti stratigrafici, più o meno estesi, non siano sempre da attribuirsi ad urti o pressioni contro regioni rigide o più resistenti, ma spesso siano solo in relazione con irrego-

larità litologiche (come p. e. grandi masse compatte di protrusioni endogene cristalline, o ammassi quarzosi per locali accumuli silicei, o grandi lenti calcaree per antichi attolls, ecc., ecc.), irregolarità esistenti nella massa generale della formazione corrugata. Nel caso speciale però sembra abbastanza chiaro che i grandi e forti corrugamenti che osservansi nella complessa formazione delle Pietre verdi di Valnontey, e regioni alpine analoghe, sono essenzialmente dovute alle straordinarie pressioni da detta formazione subìte contro il Massiccio di Gneiss ghiandone del Gran Paradiso.

V e VI.

Gneiss grigio-verdastro, a mica un po' cloritizzata; campione allungato, largo circa 33 centim. nelle due faccie opposte di cui si presenta la fotografia; raccolto nel Vallone di Champorcher in Valle d'Aosta ed ora conservato nella Collezione litologica della Scuola degli Ingegneri in Torino (n° 30257 d'Inv.).

In questo grande masso corrugato vediamo prevalere gli straterelli micacei grigi e quelli felspatici bianchicci; ma appaiono anche qua e là lenti quarzitiche le quali, come nei campioni I e IV e casi analoghi, oltre ad essere assai meno ripiegati che gli schisti circostanti, mostrano chiaramente di aver funzionato da piccoli Massicci solidi, resistenti, contro ed attorno ai quali le pieghettature di detti straterelli schistosi si addensarono e si accentuarono notevolmente.

Nel campione in esame, oltre alle pieghe principali osservabili nelle sezioni degli schisti, si può vedere che le superficie degli straterelli micacei si mostrano pure minutissimamente corrugate e sempre nello stesso senso delle grandi rughe generali del masso roccioso; ciò ci prova che le stesse cause o pressioni che originarono le pieghe maggiori del campione, produssero pure, colle stesse modalità, le pieghettature minori, come analogamente, ma in ben più ampia scala, esse debbono aver originato le grandiose rughe che fecero sorgere i rilievi montuosi.

VII.

Gneiss verdiccio, con ripetute zone biancastre felspatiche. Campione alto circa 25 centim., raccolto dal Dr. F. Virgilio in Valnontey (Val di Cogne), e conservato nel Museo geologico dell'Università di Torino.

Presenta una regolare piega principale, o anticlinale, ad angolo quasi acuto, con parecchie ondulazioni lungo le linee di piega, ed inoltre una piega laterale foggiata a sinclinale arricciata.

VIII.

Gneiss a biotite con filone di *Microgranito*. Grande masso, lungo oltre 40 centim., raccolto nel 1905 dal Dott. A. Roccati nella Valle delle Rovine presso il lago delle Rovine sopra Entraque (Val Gesso), e conservato nel Museo geo-mineralogico della Scuola degli Ingegneri in Torino (n° 30258 d'Inv.).

Nel campione in esame colle zone prevalentemente quarzoso-felspatiche (plagioclasio ed ortosio) biancastre si alternano frequentemente zonule essenzialmente biotitiche, nerastre, a lucentezza metallica, dal che deriva una spiccata laminazione della roccia, che lascia quindi vedere chiaramente le ondulazioni e le contorsioni a cui essa andò soggetta. Dette zone, che paiono regolarmente subparallele, in realtà corrispondono in parte a pieghe pigiate e compresse in modo che le gambe delle pieghe assunsero una disposizione subparallela fra di loro. Ricordo che in questo caso, come spesso altrove, tali pieghe, messe in evidenza dalle laminette micacee brune, osservansi non solo in piccola scala nel campione esaminato ma anche in grande scala nella massa montuosa in cui è incisa la Valle delle Rovine, e così pure in piccolissima scala sotto il campo del microscopio, dimostrandoci in ogni modo le grandiose e generali azioni di compressione e pigiamento meccanico subìte da tutta la massa rocciosa sia in complesso sia nelle sue intime e minute parti.

L'interesse del campione è poi accresciuto dalla presenza di un filone, largo circa 7 centim., di un Microgranito grigiastro, con sparse macule biancastre felspatiche, che attraversa pres-

sochè ortogonalmente la zona delle pieghe dello Gneiss, quasi senza alterare la reciproca posizione delle labbra della frattura nè dar origine a fenomeni di contatto, giacchè questo risulta nettissimo, senza zone di transizione.

A proposito di questo campione credo opportuno ricordare come nella parte alta della stessa Valle delle Rovine, specialmente presso il Colle Brocan, nella grande zona gneissica costituente la Serra dell'Argentera, osservinsi grandi dicchi di Micrograuito i quali inglobano qua e là inclusi di Gneiss talora contorto, come mostra per esempio il bel campione, di quasi 40 centim. di diametro, che il Dott. A. Roccati illustrò recentemente nella sua nota sul *Micrograuito con inclusi di Gneiss del Colle Brocan*, " Atti R. Acc. Sc. Torino, XLI, 1906 ", campione che ora si conserva nella Collezione geologica della Scuola degli Ingegneri in Torino (n° 30261 d'Inv.). Detto incluso contorto ci prova l'antichità relativa del corrugamento della massa gneissica.

IX.

Micaschisto molto fogliaceo, alquanto alterato, con intercalazioni stratiformi di Quarzo. Il campione, largo circa 16 centim., raccolto molti anni fa in Valle d'Aosta, è conservato nel Museo geologico dell'Università. Esso rappresenta un tipico esempio di pieghe ripetute, ed inoltre ci dà una chiara idea, in piccola scala, delle valli e delle dorsali di pura orogenesi, prodotte cioè solo da sinclinali e da anticlinali. Di più vi si può nettamente osservare sia lo sdoppiamento di una piega sia l'unificazione di due pieghe vicine, colla relativa modificazione delle sovrastanti vallette, direi, orogeniche.

Infine la facile erosione dello schisto micaceo in esame ci mostra pure, sempre naturalmente in piccola scala, parecchi casi di placche residue, di vallette secondarie di erosione, ecc.

X.

Cloritoschisto felspatico, grigio-verdiccio, con interstraterelli di tinta chiara. Grande masso, lungo circa 35 centim., largo 17 centimetri, conservato nel Museo geologico dell'Università di Torino.

Questo schisto cloritoso-felspatico è tipicamente pieghettato: gli straterelli felspatici, mentre danno alla roccia una certa compattezza, fanno risaltare in modo spiccatissimo le più minute contorsioni nelle superfici di rottura alle due estremità del lungo campione roccioso.

XI e XII.

Cloriteschisto bruno-grigiastro. Due bei campioni, molto simili, larghi 20 a 24 centim., conservati nel Museo geologico dell'Università di Torino.

Consta di straterelli schistosi cloritici e forse in parte anche talcosi, splendidamente ripieghettati, i quali mostrano come i corrugamenti, subparalleli fra di loro, da semplici ondulazioni iniziali, poco a poco accentuandosi giungano sino a spiccatissime contorsioni.

XIII.

Cloriteschisto verdastro con cristallone di *Tormalina*. Interessante campione, lungo circa 15 centim., stato raccolto presso Chiaves (Monastero di Lanzo), ed ora conservato nella Collezione mineralogica della Scuola degli Ingegneri in Torino (n° 24484 d'Invent.).

Il Cloriteschisto in questione trovasi molto sviluppato in alcuni punti delle Valli di Lanzo in collegamento con zone di Serpentino e di Micaschisto gneissico; vi si riscontrano frequentemente, oltre a cristalli di Epidoto, bei cristalloni di Tormalina nera (1) spesso frantumati e coi loro frammenti un po' staccati gli uni dagli altri.

L'esemplare in esame offre spiccatissimo detto fenomeno. È infatti un grosso prisma esagonale di Tormalina, affatto completo da un lato, largo poco più di 1 centim. e della lunghezza reale di 9 centim. circa: esso si presenta rotto in 6 pezzi, ed i suoi frammenti, oltre che spostati dalla linea retta, sono staccati fra di loro in modo che sviluppansi ora per ben 13 centim.: è poi notevole che le zone intermedie di frattura sono riempite della

(1) Mattirolo E., *Sulla Tormalina nera nello schisto cloritico di Monastero di Lanzo (Valle del Tesso)*, " Atti R. Acc. Sc. Torino ", vol. XVII, 1882.

stessa pasta cloritica della circostante massa rocciosa. Riesce quindi evidente lo stiramento potente subìto dal cristallo impigliato nella massa cloritosa piuttosto tenera e costituita inoltre di piccolissime squamette (a cui si associano anche laminette talcose); tale struttura ha certamente facilitato lo scorrimento intimo della massa rocciosa sotto l'influenza di potenti azioni meccaniche di stiramento e quindi la fratturazione del cristallo di Tormalina e successiva distanzazione dei suoi diversi frammenti.

XIV.

Prasiniteschisto; piccolo campione di 15 centim. di diametro, che raccolsi nel 1900 frammezzo al detrito, salendo da Balme (Valle di Stura d'Ala) al Piano della Mussa; conservasi ora nel Museo geo-litologico della Scuola degli Ingegneri in Torino (nº 27210 d'Inv.).

La roccia consta di varie zonule, alcune prevalentemente cloritiche, di color verde-scuro, che potrebbero appellarsi ovarditiche, altre specialmente felspatiche, di color verde-chiaro. Vi si nota una zona quarzosa grigia, subparallela alle altre ed anch'essa corrugato-ondulata.

Questi Prasiniteschisti nell'alta Valle d'Ala, come d'altronde anche nelle regioni montuose vicine e consimilmente costituite, si accompagnano e si alternano con Calceschisti frequentissimamente corrugato-contorti nei modi più svariati, indicandoci le straordinarie pressioni orogenetiche a cui andò soggetta questa grandiosa e complessa formazione delle Pietre Verdi.

XV.

Serpentinoschisto verde, sericeo. Campione lungo quasi 20 centimetri, stato raccolto dal Dott. F. Virgilio al Colle del Lauson tra Val Cogne e Valsavaranche, e conservato ora nel Museo geologico dell'Università di Torino.

La roccia presentasi pieghettata fortemente ad angolo, senza rotture, indicandoci una notevole malleabilità, direi, della massa schistosa; osservansi inoltre piccoli corrugamenti secondari che accompagnano, parallelamente, le pieghe principali, nello stesso

modo che queste pieghe principali del campione si accordano talora con grandiosi corrugamenti orogenetici della regione montuosa.

D'altronde queste pieghettature, sovente accompagnate dalle contorsioni più bizzarre, incontrasi frequentissimamente nelle formazioni dei Serpentinoschisti, Cloriteschisti, ecc. della grande serie della zona delle Pietre Verdi (l. s.).

XVI^{a,b}.

Serpentinoschisto verde, sericeo. Piccolo campione di circa 10 centim. di diametro, stato raccolto dal Prof. G. Piolti nella Comba Robert sopra i Laghi di Avigliana.

La roccia serpentinosa, con passaggio a Clorite, si presenta splendidamente pieghettata ad angoli più o meno spiccati. Le pieghe si osservano non solo nelle sezioni o testate (XV^{b}), ma anche, anzi forse ancor meglio, nelle superfici superiori (XVI^{a}) ed inferiori degli straterelli schistosi; anzi quivi possiamo anche constatare nettamente sia la grande plasticità degli schisti serpentinosi piegantisi in mille modi e sensi senza rompersi, sia la molteplicità dei corrugamenti minori o secondari che fanno parte delle pieghe maggiori, sia il riunirsi ed il disgiungersi delle varie pieghe fra di loro, riproducendo così, in miniatura, una specie di paesaggio accidentato a dorsali e depressioni vallive multiformi, subparallele, di origine essenzialmente tettonica.

XVII.

Diaspro rosso-brunastro; campione del diametro di poco più di 10 centim., stato raccolto dal Dott. L. Colomba sopra Cesana, salendo al Colle di Sestrières (Valle di Susa).

Il campione, costituito di varii straterelli, mostrasi foggiato a tegola, per regolare piegatura senza cenno di rottura, ciò che parrebbe contrastare colla natura silicea e la compattezza della roccia.

XVIII.

Calceschisto grigiastro. Campione del diametro di circa 24 centimetri, stato raccolto nella formazione triassica di Montalto Dora (bassa Valle d'Aosta), e conservato ora nella Collezione geologica della Scuola Ingegneri in Torino (nº 27163 d'Invent.).

Nei Calceschisti delle Alpi le pieghe in grande ed in piccola scala sono straordinariamente comuni, in rapporto probabilmente colla relativa flessibilità della roccia, ma mi limito a presentarne un solo campione. Esso consta di un'alternanza più volte ed irregolarmente ripetuta di zonule calcareo-marmoree grigio-chiare e di straterelli schistosi calcareo-micacei grigio-scuri o leggermente verdastri.

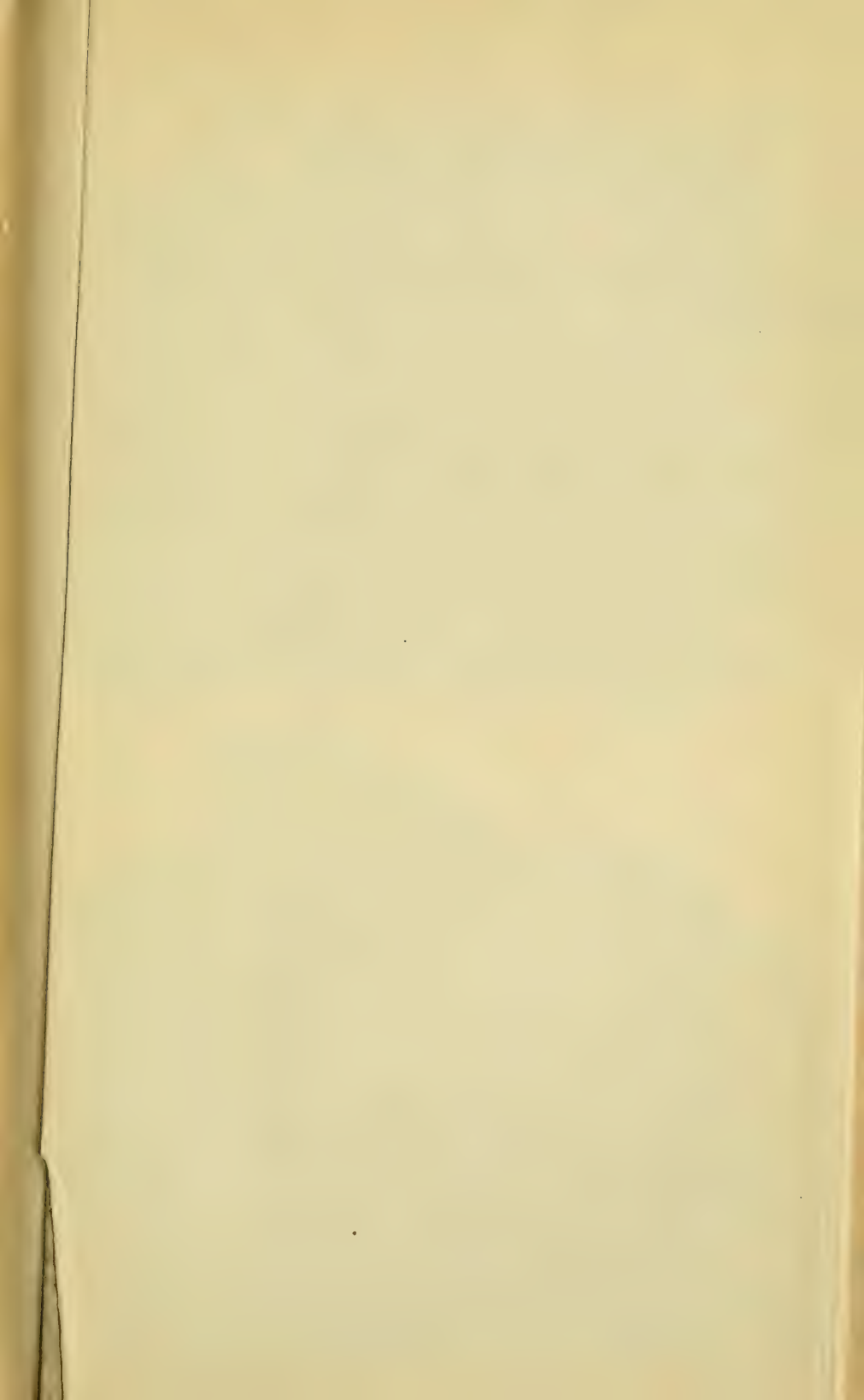
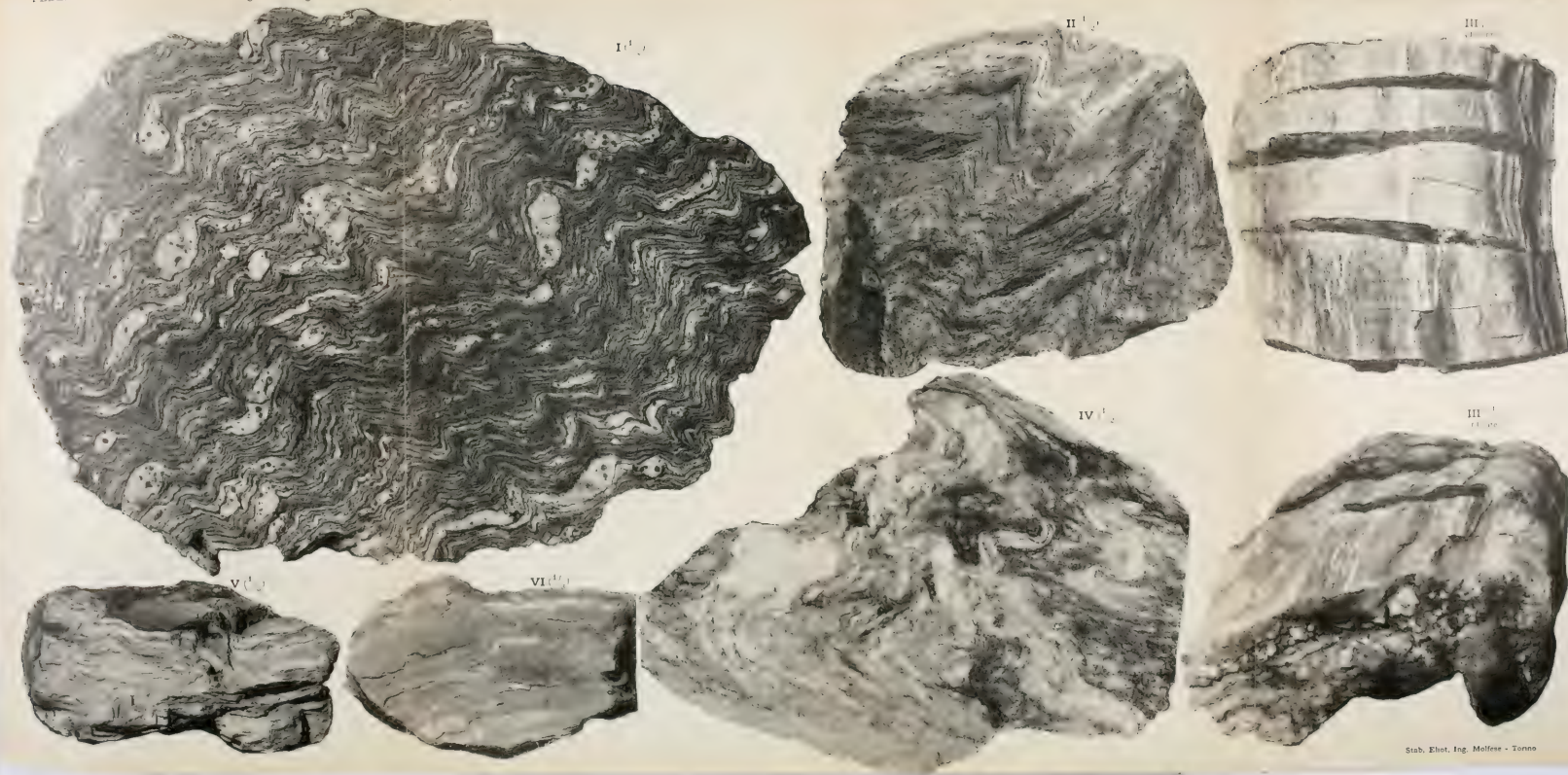
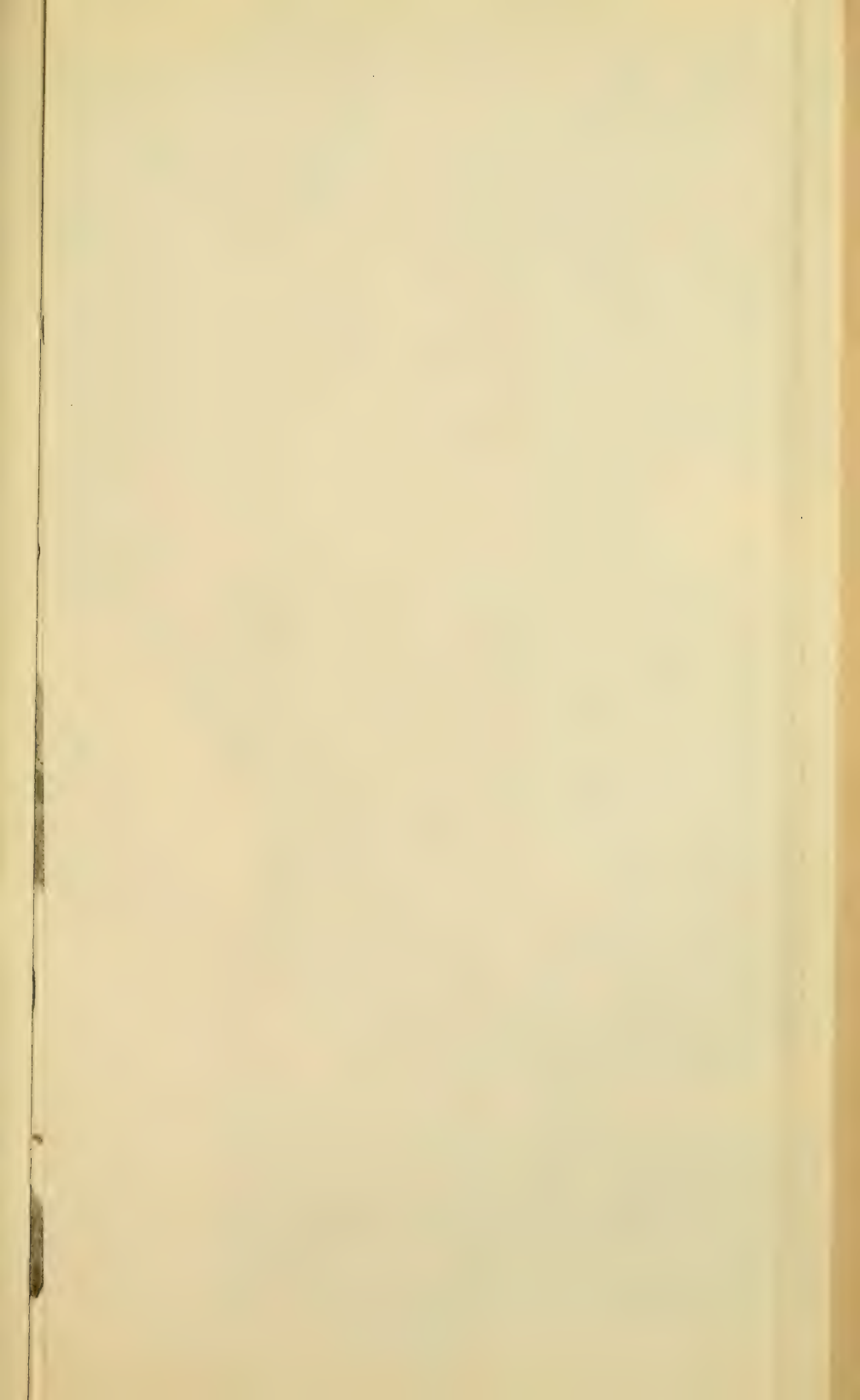
Anzitutto osserviamo come, malgrado che le zone calcaree siano relativamente alte e compatte e quelle micacee invece sottili e fogliettate, l'erosione degli agenti esterni (a cui fu esposta per tanti anni la roccia) si verificò assai più potente sulle prime che sulle seconde (probabilmente in gran parte per differenza nella dissoluzione chimica), di modo che nella testata degli strati veggonsi le zonarelle micacee sporgere sulle zone calcaree.

Quanto alle pieghe notasi che esse sono naturalmente più spiccate nelle zone dove predominano gli schisti micacei.

Infine si può nettamente osservare che le zone calcaree non formano veri strati regolari, continui, ma costituiscono spesso semplici lenti intrecciate ed intercalate fra gli schisti micacei. Vi possiamo cioè constatare in miniatura, direi, il fenomeno tanto frequente nella potentissima quanto complessa ed estesa serie dei Calceschisti e dei concomitanti schisti cristallini delle Alpi; vale a dire il fatto che i Calcari vi appaiono spesso come grandiose lenti, corrispondenti semplicemente a locali fenomeni biologici o sedimentari, e non già, come venne troppo spesso interpretato, a pizzicature di zone calcaree mesozoiche prese entro pieghe di schisti cristallini molto più antichi.

Torino, Castello del Valentino, Aprile 1906.

Stab. Eliot. Ing. Molfese - Torino

Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino. Vol. XLI (1906)

Sull'azione della fitina in relazione alla funzione glicogenica.

Nota di PIERO GIACOSA.

Nell'acido anidrometilendifosforico (acido fitinico) di cui il sale calcico magnesiaco è usato sotto il nome di fitina, esiste accoppiato all'acido fosforico un gruppo C^2H^3O, sulla cui evoluzione nell'organismo non conosciamo ancora nulla. A temperatura elevata e in presenza di acidi tre molecole di acido fitinico si uniscono per dare luogo alla formazione di inosite e di acido fosforico; ma questa reazione non ha luogo nell'organismo, come ho già dimostrato in precedenti lavori (1). Se non che l'aumentare che si osserva dei fosfati in seguito alla ingestione di fitina dimostra che nell'organismo questo corpo si scompone, come del resto avviene anche in parte al di fuori di esso e alla temperatura ordinaria: ma quale sia il destino ultimo dei residui organici così liberatisi finora non si conosce. Fra le eventualità che si potrebbero aver presenti rispetto a questo interessante punto, vi è pure quella che si formasse un idrato di carbonio a quella guisa che in altre condizioni si genera l'inosite. I due processi sono certo diversi: l'inosite è il polimero del gruppo CHOH in cui si sdoppia C^2H^3O idratandosi, mentre che per generare uno zucchero vero devono operarsi trasposizioni importanti di atomi, riduzioni e ossidazioni di due almeno fra i tre residui organici che si associerebbero a costituire la nuova molecola. Il problema meritava di essere studiato, ed io tentai d'avvicinarmi alla sua soluzione indagando l'influenza che esercita la fitina sulla formazione del glicogeno nel fegato, tanto più che in queste ricerche poteva anche conoscersi meglio il comportarsi della fitina come farmaco.

Se in un animale tenuto a digiuno per lungo tempo, la somministrazione di fitina avesse indotto una glicogenesi epa-

(1) *Sulla fitina (sale calcico-magnesiaco dell'acido anidrossimetilendifosforico) e suo comportarsi nell'organismo,* " Giorn. della R. Acc. di medicina di Torino „, Seduta 7 luglio 1904. — *Comportamento dell'inosite nell'organismo,* Id. id. 7 aprile 1905. — *Sul comportamento nell'organismo della fitina,* Id. id. id.

tica superiore a quella degli animali di paragone, poteva ritenersi probabile la formazione di un idrato di carbonio nel modo sopra indicato.

Sperimentai su conigli e su cani, tenuti soltanto digiuni di cibo e non d'acqua, per un periodo di parecchi giorni; non credetti di agevolare la scomparsa del glicogeno sottoponendo gli animali alla tetanizzazione perchè oltre che in questo caso avrebbe potuto anche scomparire il glicogeno eventualmente formatosi dalla fitina, si sarebbero considerevolmente stancati gli animali che per l'azione della fitina, data in queste circostanze, erano già in cattive condizioni.

Nei conigli a digiuno non si osserva più quella resistenza alla fitina di cui parlano Gilbert e Lippmann (1); gli animali appaiono considerevolmente stanchi, compare dispnea forte; si ha paralisi generale, perdita dei riflessi. Lo stesso si osserva nei cani. Il peso del corpo, quello degli organi diminuisce più rapidamente. Tutto indica trattarsi di due fatti che s'associano: un'accelerazione dei processi di distruzione dei tessuti, come avviene sempre nella fame, e una azione tossica che si fa più intensa grazie alle diminuite resistenze organiche. Del resto l'azione farmacologica dell'acido fitinico è imperfettamente studiata e i cenni degli autori francesi sono troppo sommarii. Esperienze fattesi in questo laboratorio con iniezioni endovenose di fitina negli animali mi hanno dimostrato che il fitinato sodico è un veleno che colpisce sopratutto i muscoli; ma su questo argomento tornerò in altro lavoro.

Ecco i particolari di qualche esperienza:

I. Tre conigli N° 1 2300 gr.
„ 2 2180 „
„ 3 2090 „

si lasciano digiunare dal 2 all'8 aprile, tenendoli in una gabbia, separati, con acqua a disposizione. Nel giorno 7 si introduce colla sonda nello stomaco del n° 1, 4 grammi di fitina sospesi in acqua. L'animale non dà segni di malessere, ma il giorno seguente appare più abbattuto dei compagni. Il giorno seguente

(1) “ La Presse Médicale „, 1904, n[i] 69 e 73.

si ripete l'iniezione della stessa quantità di fitina; l'animale la sopporta male, e due ore dopo accenna ad aggravarsi, con sintomi di paralisi cardiaca e debolezza crescente. Per cui la sera alle ore 20, essendo evidente che non potrà passare la notte, lo si uccide. Insieme si uccide il n° 3, che non ricevette fitina.

Dagli animali appena uccisi si estrae il fegato, si pesa, si tritura e si determina il glicogeno col metodo di Brücke; nel coniglio che ebbe la fitina il glicogeno era in traccie appena visibili, impesabili; nel coniglio tenuto per paragone si pesarono 0,015 gr. di glicogeno.

Quanto al coniglio n° 2, esso, come il n° 3, non dava segni di malessere, e il giorno 8, subito dopo somministrata la fitina colla sonda al n° 1, gli si iniettò inosite (3 gr. sciolti in acqua) nella vena marginale dell'orecchio, e ciò per altre indagini. L'animale non mostrò alcun indizio di disturbo, e fu ucciso la mattina del 10. Glicogeno assente o in traccie impesabili, come nel n° 1.

Il coniglio n° 1 che ebbe la fitina, alla morte pesava gr. 2050; il n° 3 gr. 1760. La perdita di peso fu in entrambi i casi di circa 11 per cento.

II. Due conigli N° 1 2850 gr.
„ 2 2600 „

si mettono a digiuno il 3 maggio, somministrando acqua.

Il n° 2 al 9 maggio alle ore 17,30 riceve per sonda gastrica 4 gr. fitina; l'animale che dianzi si mostrava eguale al compagno, appare tosto più abbattuto, e si va sempre più indebolendo; quando 24 ore dopo si tenta di fargli una nuova iniezione si accascia, ha forte dispnea, è insensibile, non ha riflesso pupillare. Si rinuncia alla iniezione, ma l'animale si aggrava sempre più, sì che due ore dopo lo si uccide e si dosa il glicogeno.

Il n° 1 si mantenne in osservazione fino all'11 maggio. Era alquanto dispnoico e debole, ma del resto normale. Si uccise e si dosò il glicogeno.

Questo animale perdette in 9 giorni 400 gr., cioè 14 %. L'altro che ricevette la fitina in 8 giorni perdette 650 gr., cioè il 25 %.

Il coniglio che ricevette fitina aveva nel fegato gr. 0,06 di glicogeno, l'altro di paragone che non ebbe nulla, gr. 0.27.

III. Due conigli. Il N. 1 pesa 1710 gr.
„ 2 „ 1620 „

Per avere l'assoluta parità di condizioni si sottopongono entrambi una volta al giorno nella stessa ora alla introduzione della sonda gastrica con questa differenza che all'uno (n° 1) si inietta acqua pura, all'altro la stessa quantità d'acqua contenente 3 gr. di fitina. L'iniezione si comincia dopo aver lasciato digiunare gli animali per 48 ore, dal 17 al 19 maggio.

L'esperienza si potè continuare per quattro giorni, in capo ai quali il coniglio con fitina si trovò (alle ore 17,30 del 23 maggio) giacente su un fianco, agonizzante; lo si uccise tosto e lo si pesò. Il peso era ridotto a gr. 1070, con una perdita del 34 %.

L'altro coniglio n° 1 che appariva normale si uccise pure, e si verificò che pesava gr. 1297, con una perdita del 24 %.

La ricerca del glicogeno diede per risultato: nel n° 1 (che non ebbe fitina) gr. 0,12; nel n° 2, che ebbe la fitina, traccie impesabili.

IV. Due cani, il n° 1 di gr. 3400, il n° 2, 2950: si lasciarono a digiuno, in una gabbia, dal 17 al 20 maggio, con acqua a disposizione; alle ore 12 di questo giorno il n° 1 ricevette 4 gr. di fitina in altrettante cassule di gelatina; il n° 2 ricevette 4 cassule vuote; si continuò così fino al 24, con la stessa dose giornaliera. Il cane che ebbe la fitina dava manifesti segni di malessere durante il trattamento, e le sue condizioni si aggravarono sì che morì alle ore 16 del 24. Si estrasse immediatamente il fegato per il dosamento del glicogeno. L'altro cane non dava indizio di malessere, e si uccise il mattino seguente per estrarne il fegato allo stesso scopo.

Glicogeno del fegato del cane che ebbe fitina gr. 0,14
„ „ senza fitina „ 0,17.

Questa esperienza conferma le precedenti eseguite sui conigli, e mostra che la fitina in animali digiunanti è veramente

velenosa: le dosi da me usate sono assai più piccole di quelle indicate da Gilbert e Lippmann (1); essi affermano di aver fatto ingerire a conigli fino a 10 gr. di fitina senza alcun inconveniente: in un caso si diede una dose di 20 gr. di colpo, dose che si ripetè dopo pochi giorni e non si notò alcun disturbo. Quale sarà la ragione di questa differenza di azione, che si osserva pure nel cane? Probabilmente l'assorbirsi di una proporzione maggiore di fitina a stomaco vuoto anzichè a stomaco pieno.

Il risultato concorde delle mie osservazioni è che non si può in alcun modo ammettere la formazione di glicogeno nel fegato a spese della fitina. Anzi sotto l'influenza di questa sostanza il glicogeno esistente scompare con maggior rapidità che non avvenga nella semplice inanizione. Questo è un fatto che s'accorda colla tossicità dell'acido fitinico; molti veleni (fra cui venne anche recentemente posta l'adrenalina), la febbre, la ipertermia, fanno rapidamente scomparire il glicogeno dal fegato.

Nell'ultima esperienza sui cani, si sono pesati gli animali giorno per giorno, e si venne così a constatare che l'animale a cui si somministrò la fitina, mentre nei primi giorni di digiuno aveva perduto meno in peso del suo compagno che serviva da paragone, in ultimo accelerò notevolmente il consumo del proprio corpo. E così si confermano i risultati delle precedenti esperienze sui conigli.

---

(1) Loc. cit., p. 17.

Gli Accademici Segretari
LORENZO CAMERANO.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 22 Aprile 1906.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Rossi, Manno, Carle, Brusa, Carutti, Pizzi, Chironi, Savio e Renier Segretario. — Scusano l'assenza il Direttore della Classe Ferrero ed i Soci Cipolla ed Allievo.

Viene approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 1° aprile 1906.

È letta la lettera del Socio corrispondente Prof. Luigi Pigorini, il quale dichiara di accettare la rappresentanza dell'Accademia al Congresso internazionale di Antropologia ed Archeologia preistorica di Monaco (Principato).

D'ufficio è fatto omaggio di un opuscolo del Socio corrispondente Giuseppe Biàdego: *Il pittore Jacopo da Verona (1355-1442) e i dipinti di S. Felice, S. Gregorio e S. Michele di Padova*, Treviso, 1906.

Il Socio Brusa presenta per gli *Atti* una sua nota: *Alcune idee fondamentali sul diritto di punire.*

LETTURE

Alcune idee fondamentali sul diritto di punire.

Nota del Socio EMILIO BRUSA.

1. **Teorie fondamentali sul diritto di punire.** — Queste teorie appariscono correlative alle fasi storiche delle nozioni di reato e di pena. Esse rappresentano sforzi fatti per approfondire le concezioni astratte o ideali, anzichè per penetrare le ragioni delle fasi storiche. Però in questo limite esse pure contribuiscono a chiarire il problema e ne agevolano la soluzione. Ciò che scaturisce manifestamente dalla correlazione delle teorie alle fasi storiche si è il nesso psicologico fra pena e reato: ciò fu sempre in passato e sussiste al presente. I fautori del materialismo nel diritto penale lo vorrebbero disconoscere, ma essi in tal modo si interdicono la sola visione possibile e veramente scientifica dell'*intima relazione* che esiste e deve esistere fra reato e pena. Le teorie filosofiche che si separano dalla realtà storica si riducono a concezioni meramente soggettive, che valgono soltanto a rivelare la tempra intellettuale e morale di coloro che le hanno escogitate. La relazione fra reato e pena è essa puramente una relazione causale, ed è in questa relazione rilevato il valore che possiede il reato per mettere in luce certe condizioni e pericoli che debbono richiamare l'opera prudente del legislatore penale? Oppure il reato contiene in sè tutti codesti elementi? Sarà vera soltanto quella risposta che formulerà il concetto complesso e di svolgimento progressivo del quale gli elementi sono pòrti insieme dalle vicende storiche e dal fine etico-sociale che sembra aver diretto, da un punto di vista generale, tali vicende.

Le teorie sogliono distinguersi in *assolute, relative* e *miste.*

Assolute, o della giustizia astratta e retributiva: è *giusto* il male della pena perchè ingiusto è il male del reato: *punitur quia peccatum.*

Relative, o della utilità: la pena è *legittima* perchè *utile o necessaria* alla difesa sociale contro le offese future: *punitur ne peccetur*.

Miste, cioè costruite con gli elementi proprî delle prime due, onde o la pena è *giusta* come *retribuzione*, ma questa è *limitata* dalla utilità o necessità della difesa sociale, oppure essa è *utile o necessaria* per questa difesa, ma *limitata* dalla norma assoluta riposta nella *retribuzione*: il *quia* e il *ne* sono riuniti prendendo il *quia* come base e il *ne* come limite, oppure viceversa il *ne* come base e il *quia* come limite. Nel primo caso si dice *giusta in sè* la pena, ma non applicabile se non se e in quanto sia utile per prevenire i reati futuri: nel secondo caso si dice giusto punire per prevenire i reati, alla condizione però di non punire innocenti nè punire i rei oltre la misura del loro torto.

Questa combinazione eclettica, mentre in sostanza non offre elementi nuovi per la soluzione del problema, mostra ad evidenza i difetti delle teorie assolute e delle relative, ch'essa perciò, lungi dal correggere, li accresce riunendole insieme. Riunione di concetti fra di loro opposti, l'eclettismo o sincretismo è però il rifugio ordinario degli opportunisti. Nella indagine della verità l'opportunismo può bensì illudere i cercatori impazienti cui fa difetto ogni fede nella necessità di principi armonici e razionali, ma effettivamente non giova mai a nulla di durevole.

Punire per ciò solo che il reato è un male etico-sociale, può riuscire *praticamente* difforme o contrario a ciò che intendesi per giustizia in un determinato complesso di condizioni sociali, condizioni sempre variabili, specialmente in fatto di sicurezza pubblica. Per ottenere la sicurezza pubblica nell'ambito dei sentimenti di giustizia quali realmente esistono in un dato tempo e luogo e presso un dato popolo, può talora bastare l'uso dei mezzi che l'amministrazione tiene a propria disposizione per prevenire i reati non meno che le sciagure, talora sono pure sufficienti i mezzi coercitivi sul patrimonio senza bisogno di minacciare e infliggere castighi penali, e può persino convenir meglio l'opera lenta ma efficace della educazione. E anche allora che si rende manifesta la necessità di applicare l'estremo rimedio della pena, può questa dimostrarsi esorbitante nella misura in cui la si vorrebbe determinare, tenendo sol conto della immoralità o ingiustizia del male che la provoca. Insomma, la co-

scienza giuridica della nazione stima giusta la pena *non in sè*, e nemmeno *in relazione all'ingiustizia* del fatto, ma sibbene quando oltre di ciò essa sia richiesta davvero per restituire ai consociati la loro tranquillità e la ragione praticamente sentita della loro tranquillità stessa.

D'altra parte, punire sol perchè si ritenga utile e necessario il dolore inflitto, spesse volte può condurre alle maggiori offese del sentimento pratico della giustizia sociale. Niente vieterebbe allora di punire ancorchè non siasi potuto accertare il fatto delittuoso o la reità del suo autore, purchè si creda utile o necessario nelle circostanze del caso l'incutere timore nei facinorosi e nei numerosi individui che si conoscono troppo deboli per saper resistere alle frequenti tentazioni inducenti al malfare. E non potrebbe neppur dirsi ingiusto allora il negare gli onori funebri al condannato, l'oltraggiarne per editto pubblico la memoria, il colpire il patrimonio della famiglia del condannato e la dignità e la capacità delle persone che compongono la famiglia stessa, nonostante che ai costumi civili del popolo ripugnino e la morte civile e la confisca generale del patrimonio e le barbare esemplarità funebri, ecc. L'utilità e la necessità, considerate da sole, non tengono conto di nessuna delle condizioni alle quali la pena vuol essere subordinata secondo il sentimento della giustizia, quale esiste negli animi più temperati e capaci di valutare l'efficacia dei mezzi in relazione ai fini. Nè esse richiedono rigore di forme da osservarsi nel *procedimento e nel giudizio penale*; nè tollerano che fra reato e pena sia imposta una certa *proporzione* secondo l'importanza dei beni giuridici offesi e indipendentemente anche da quelle qualità personali degli offensori che non siano rivelate dai fatti loro delittuosi; nè tampoco subiscono la giuridica condizione che reato e pena siano espressamente *determinati dalla legge* prima del fatto e non dal magistrato a suo arbitrio. Per tal modo l'uomo non conserva più alcuna dignità personale, sì perchè lo si punisce più del demerito suo, sì perchè lo si punisce ancorchè non abbia demeritato, essendo egli ridotto a *mero strumento* dei fini utilitari che il nuovo mandarinato si è prefisso di conseguire. Una siffatta teoria trasmuta, a parere di molti, il diritto penale in una specie di terapeutica medica: ma neppure questo dice tutto, giacchè il malato è esso stesso che desidera il medico o almeno consente alla cura e alle

operazioni chirurgiche, mentre invece in codesta concezione della giustizia penale il supposto reo subisce la violenza per volere ed opera di un'autorità insindacabile che si pone da sè come infallibile. Che se il cittadino *sembra* talvolta esser ridotto a stromento del bene pubblico, come accade specialmente quando è obbligato a prestare il servizio militare in guerra perdendovi anche la vita, allora l'autorità non si dà da sè come potere autogenio, ma compie invece l'altissima funzione di rappresentante del volere giuridico della nazione, di un volere cioè che rende conto di sè a' suoi mandanti e si riconosce responsabile e sindacabile.

Per poco che si mediti sul contrasto spiccatissimo che sorge fra le teorie del *quia* e quelle del *ne*, si devono dunque reputare le une e le altre egualmente erronee e insuscettibili di un'applicazione razionale. Sì nelle prime che nelle seconde è *inevitabile l'arbitrio del pubblico potere* cui sia inerente per natura o sia commessa la tutela dell'ordine giuridico nelle condizioni della sicurezza comune. E l'arbitrio stesso basta a dimostrare il loro fallimento, chè le razionali origini della pena per altro motivo e con altro fine non si ricercano dagli studiosi, se non appunto perchè la pena va giustificata sulla base di un *principio* che la ragione umana possa ritenere meritevole di essere posto come *inconcusso* e *invariabile*, sulla base di un principio che la ragione umana possa elevare a criterio informatore di tutta la legislazione punitiva e, conseguentemente, della pratica applicazione della pena in ogni e qualunque contingenza sociale.

Un tale principio non si troverà mai sino a tanto che non sia chiarito in modo indefettibile *che cosa debba intendersi per giustizia nella pratica della vita,* quando cioè la si guardi come un rapporto di *mio* e di *tuo* concreti, e non campati in un'astrazione inafferrabile. Perocchè nella forma astratta si contemplano i rapporti *generali* delle cose tutte e le loro leggi *generali*: ma quelli e queste debbono sempre rimanere intelligibili. Ora questo non è il caso di quel concetto della giustizia che trova *giusto in sè* o il male morale, il male prodotto dalla volontà d'un agente razionale che si reputa libero (o agisce praticamente come se si credesse libero) nella propria determinazione volitiva, o il male prodottosi indipendentemente dalla volontà rea. Qui si annida, a così dire, “ la contradizion che nol consente „. Il male

è voluto sì, e moralmente voluto, ma non in sè come male esso e perchè male quello che lo provoca, ma perchè *praticamente* alle funeste conseguenze del male precedente non si ovvia che con l' inflizione di un altro male. Il *quia* e il *ne* qui trovansi pertanto insieme fusi in modo indissolubile. Senza la presenza del male morale nel mondo, la funzione della giustizia non si concepirebbe nè in base al *quia peccatum*, nè per il fine *ne peccetur*. La giustizia sarebbe *egualitaria*.

Invece noi la conosciamo *punitiva* o *repressiva*, quando delle varie forme ch'essa può assumere nelle contingenze della vita sociale, assume questa perchè nessun'altra varrebbe al fine cui essa intende al cospetto di un male morale così profondo e grave, da ritenersi inadatte e insufficienti le tre altre forme della giustizia secondo che questa si propone la *prevenzione* del male, la sua *riparazione,* oppure la *distribuzione* di beni e mali. In tal senso fu a ragione detto dal Carrara, che la giustizia penale è un *calcolo comparativo* fra le esigenze del diritto degli offesi, individui e società, e quelle del diritto dell'offensore, il quale come persona conserva sempre un diritto, una dignità da proteggere in quella misura in cui sia rimasto rispettabile nonostante il reato commesso. E attenendosi a una siffatta concezione pratica, l'acuto Merkel ha potuto dire della giustizia in generale, che essa è la verità dei giudizi che nei nostri atti trovano un'espressione pratica; onde nel diritto penale questi giudizi si riferiscono a tre aspetti diversi della verità: a quello della verità di fatto accertata nel giudizio che decreta la pena (giusta decisione della *quaestio facti*), a quello della verità di diritto accertata pure in tale giudizio (giusta decisione della collocazione del fatto nella ipotesi della legge), e a quello della verità etica riposta nella legge che minaccia la pena, cioè a quell'aspetto in cui si vede la legge accordarsi con le idee e i giudizi etici dominanti nella nazione. Sotto quest'ultimo aspetto vuolsi pure, secondo lo stesso Merkel, considerare: 1° che è conforme a queste idee il connettere a un dato fatto una data pena, e 2° che la pena concreta da applicarsi in forza di legge porge la sua *giusta* espressione al valore che va riconosciuto al fatto secondo la specie e la gravità sua in conformità di quei giudizi estimativi. Donde quel criminalista deduce, che la pena non avrebbe per fine la giustizia, quantunque però per rispondere al fine dello stato essa

non possa, *per la natura del modo* medesimo col quale ha da conseguire il suo fine nello stato, mettersi in contradizione col *senso di giustizia che esiste nel popolo.*

È chiaro: la pena non è dunque giusta in sè, ma giusta nei benefizi ch'essa, ed essa sola, può procurare. Lo che significa che l'idea di giustizia, nella pena come in ogni altro mezzo di cui si serve lo stato per i suoi fini etici, si presenta *trasformata* dalle condizioni storiche concrete in cui questi fini etici si devono mandar ad effetto. Se tali condizioni non fossero alterate dal male morale, la giustizia si concepirebbe egualitaria. La *dignità* di ciascun consocio mantenendosi intatta secondo la legge etica, niente ne autorizzerebbe mai la menomazione in forma di *prevenzione* o sospetto, nè di *riparazione*, nè di *repressione*; e non vi sarebbe materia di bene o di male da *distribuire* fra i consoci per la via della coazione, perchè ognuno avrebbe ciò che gli spetta. Ma così non è, donde la necessità di subordinare la norma egualitaria alla retribuzione trasformata dal mal morale contenuto nei fatti che deviarono dal dovere, cioè alla retribuzione di un *certo male*, in una *certa misura e guisa*, e a *certe condizioni di giudizio per l'applicazione sua*, quali le condizioni storiche concrete lo richiedono dietro la scorta della retta ragione calcolatrice dei dati della esperienza. Questa ragione mostra infatti che non sempre giova al fine etico sociale retribuire la pena ancorchè un male etico-sociale siasi prodotto, e però intervengono per es. la sentenza irretrattabile di assoluzione passata in giudicato e la prescrizione estintiva dell'azione penale e della condanna, interviene l'indulgenza o il perdono per circostanze posteriori al maleficio, ecc. E mostra pure che per lo stesso adattamento individuale della pena al delinquente bisogna tener conto della sensibilità maggiore o minore di lui all'efficacia della pena stessa, e perciò occorre aver riguardo alla sua età minore, alla sua pertinacia nel reato (recidiva), ecc. Scendendo così dall'astrazione alla realtà è *giusto* prendere in considerazione anche le condizioni in cui il reato nasce nella sua prima fonte, che è la psiche dell'agente. *In quanto questa sia rivelata dal reato*, entra pure come coefficiente del calcolo retributivo. Così la *spinta e la controspinta psicologica al delitto*, che il Romagnosi ha proposte per la determinazione della natura e quantità della pena, traggono la loro ragione dalla *volontà rea*, che è un

elemento *intrinseco*, anzi la forza morale del reato, e non la traggono già da calcoli meramente utilitarî fondati sul solo rapporto di mezzo a fine tra pena e prevenzione del reato, fra la controspinta e la spinta.

L'origine del contrasto fra le teorie della retribuzione (*quia*) e quelle della prevenzione (*ne*) sta nella estrema difficoltà che dobbiamo cercare di superare per valutare gli *effetti psicologici* del reato e del suo *nesso causale* con le *reazioni* che quelli provocano, sia sotto forma di ragion fattasi, sia sotto forma di regolare atto giuridico, oppure nelle forme più progredite della pena privata e, meglio ancora, della pena pubblica. Di più, l'origine di tale contrasto si trova anche nella estrema difficoltà stessa di riconoscere esistenti nella punizione inflitta e subìta tutto ciò che occorre per corrispondere a quegli effetti psicologici. Il nesso c'è o ci deve essere, e c'è davvero quando sia dato bando all'alternativa del *quia* e del *ne*, e *quia* e *ne* siano fusi insieme nella nozione di una giustizia retributiva trasformata dalla presenza del male morale nella storia dell'umanità.

L'idea di giustizia si è storicamente elevata, mediante la civiltà, all'idea di *proporzione*: da *materiale* che era, e poi da *passionale*, e in fine da puramente *spirituale o mistica* e inconciliabile quindi con interessi mondani, a *proporzione etico-giuridica*. Sempre proporzione concreta, perchè della personalità e della dignità umana tien conto solo in quanto esse sussistano nell'offensore nonostante la sua caduta etico-giuridica, e in quanto già prima le forze etico-giuridiche insite nella società stessa possano avere agito e tuttora possono agire per rattenere l'offensore dal mal fare. La proporzione quindi si fissa anzitutto nel concetto di *uguaglianza davanti alla legge*, e poi in quello di *adattamento concreto* dei precetti o divieti di questa e delle sue sanzioni alle reali condizioni psico-fisiche dell'individuo; sì che *rispetto* e *pietà* verso il reo non appariscono arbitrarî, ma dovuti secondo la giustizia pratica, la quale ne modera la misura e il modo per renderli compatibili l'una e l'altro col sentimento della necessità di proteggere giuridicamente gl'interessi generali della tranquillità sociale.

A ciò ha sopratutto contribuito l'elemento psichico-morale della *intenzione rea*. In questa infatti si accentra il valore della umana personalità e dignità: *unico valore* che possediamo per

giudicare dei mali e dei beni tutti che interessano le nostre aspirazioni superiori, e quindi per giudicare anche dei reati e delle pene, delle offese patite e dei castighi inflitti per reazione alle medesime.

II. **Condizioni della pena e limite nella personale dignità**. — La pena è un dolore *certo*, e *certa* quindi dev'essere la ragione del punire; certa però questa non è se non perchè un *fatto* già commesso ha turbato la sicurezza etico-giuridica della consociazione. Solo del passato l'uomo può essere certo, e la certezza in diritto penale si ha solo di un fatto *obiettivamente* costituito con estremi che la legge ha potuto valutare *a priori* quali elementi essenziali perchè si produca l'effetto turbativo. Però il dolore della pena nel *riprovare* quel fatto è moderato dall'interesse supremo che lo stato ha di rispettare quella stessa *personalità e dignità* umana, la quale, offesa dal fatto reo, dev'essere, per il bene comune, rispettata anche nell'oppressore, nella misura e nei modi che il *senso pratico di giustizia* richiedono a seconda delle condizioni della civiltà. In questo senso si comprende l'abolizione delle *pene aberrative*, quali la morte civile, che è infamante, e la confisca generale dei beni, nonchè delle pene corporali afflittive dirette (fustigazione, marchio, tormenti, ecc.), e della pena di morte, la cui esecuzione, caduta già in disuso da un lungo periodo di anni presso di noi, fu abolita nel nuovo codice penale italiano di diritto comune (conservatasi solo nel diritto militare). Come non si vendica un principio astratto, ma si afferma una dignità realmente riconosciuta, così questa dignità deve del pari trovarsi riflessa nella imputazione del fatto reo e nel castigo riprovatore in conformità del senso pratico di giustizia, senso pratico che esclude ogni eccesso sia nel rigore che nella pietà, e che si appaga quindi mediante *una certa proporzione*.

La quale proporzione non esclude, a sua volta, nè la *prevenzione*, nè l'*emendazione*. Non la *prevenzione*, perchè tien conto del salutare effetto che il castigo produce sugli onesti rassicurandoli per ciò che rafforza i centri inibitori psichici e fisici dei malinclinati e del delinquente stesso. Non l'*emendazione*, perchè, pur non essendo questa nè la ragione nè il fine della pena, chè da un canto il reato è un'offesa dell'ordine morale esterno, e

dall'altro all'uomo non è dato di scrutare i cuori, giocoforza è che all'ordine morale esterno basti una *esteriore conformità* della condotta dei singoli alle norme su cui tale ordine si regge nello stato. Or questa conformità esteriore *suole*, a cagione dell'*abitudine*, specialmente a cagione dell'abitudine al *lavoro*, avere per effetto un qualche raddrizzamento o infrenamento *interiore* della volontà e dei centri etico-fisici. In questa specie di rapporti la legge deve tenersi paga a ciò che *suol* accadere, chè l'assoluto le sfugge, ed essa tradirebbe l'ufficio suo di rassicuratrice sociale, ove per correr dietro a questo miraggio sacrificasse quella parte di bene che alla legge sola è commesso di attuare.

III. **Legalità formale e legalità sostanziale (proporzione) nella pena.** — La *legalità* della pena, intesa con quel senso pratico di giustizia che, eliminando l'arbitrio, vuole però una proporzione non *formale* soltanto, ma altresì *reale* nelle circostanze concrete di fatto e di persona, riassume l'espressione del diritto di punire. Infatti la proporzione dell'imputazione e del castigo al valore effettivamente riconosciuto nelle condizioni della civiltà — valore etico-giuridico del fatto e della volontà rea riflessa nel medesimo secondo il carattere dell'agente — è proporzione voluta dalla legge stessa, come dalla legge è pur voluto il pubblico giudizio per l'applicazione della pena. La legalità del reato, della pena, e del giudizio stesso (che è denominato diritto *formale* rispetto al diritto *materiale* o sostanziale del reato e della pena), non deve fermarsi alla *forma* giuridica, ma servire egualmente alla *sostanza* dei beni da tutelare. Non basta quindi il divieto al *giudice* e all'*esecutore* di punire per fatti e con pene cui la legge non abbia espressamente dato la sua sanzione. Non basta la sola garanzia formale contenuta nella *rivendicazione* che la legge ha fatto del poter suo di contro a quello giudiziario ed esecutivo; vuolsi di più, vuolsi che la garanzia si estenda al *contenuto* stesso del diritto, che è appunto il bene o interesse reso meritevole della protezione legale dalla sua importanza per il conseguimento del bene etico-sociale comune della consociazione. Il problema fondamentale del diritto di punire non s'identifica con quello di diritto pubblico sulla costituzione dei pubblici poteri dello stato, i quali debbono essere distinti fra di loro perchè il sindacato reciproco delle rispettive funzioni si possa

effettuare. Il fine di questi poteri non è la forma legale, che è *mezzo*, ma il contenuto di questa forma, che è *fine* davvero: e fine del potere non è la legalità, ma il rispetto della *personalità e dignità umana* nelle condizioni, nei modi e gradi in cui praticamente lo stato della civiltà lo richiede. Il diritto non è tutto quanto rivendicato col sindacato sui limiti dei tre poteri legislativo, giudiziario ed esecutivo: a ciò provvede in ultima istanza la corte detta di cassazione. Lo rivendica egualmente la valutazione dei beni etico-sociali che fanno capo alla dignità personale dell'uomo e alla dignità stessa dei fini che si propone lo stato.

I beni giuridici, sì degl'individui e della società offesi, che dell'offensore, hanno tutti una comune origine, la *personalità*. Tolta questa, sparisce ogni fondamento non solo per la *legalità* della pena, non solo per la *forma giudiziaria* della sua applicazione, ma per la sua proporzione stessa nelle condizioni concrete di tempo, luogo, persone. La concezione complessiva del principio giustificatore della pena richiede pertanto un duplice riconoscimento: 1° della insufficienza, cioè, sì dell'idea di giustizia che dell'idea di utilità, e nell'alterna vicenda loro e nelle loro diverse combinazioni; 2° della necessità logica e pratica che la giustizia storica venga rappresentata senz'altro nella trasformazione, tante volte qui sostenuta, ch'essa ha subìto e subisce per effetto del male morale che ha turbato le ideali relazioni egualitarie dei diritti e dei doveri degli uomini nella consociazione. Per tal modo s'intende come correlative alle ragioni che fanno esistere il diritto e dovere dello stato di punire, siano le ragioni che lo fanno cessare o che ne moderano l'energia. *Giuridiche* le prime e non di mera opportunità politica, sono *giuridiche* del pari le seconde. Impunità e mitigazione di imputazione e di pena sono egualmente imposte dalla legge di proporzione o retribuzione concreta che governa il rapporto fra la personalità e dignità umana da far rispettare, da un canto, e i fatti che la misconoscono e la offendono, dall'altro.

La legge deve adunque, nella sua alta concezione giuridica, rispondere egualmente al bisogno del sindacato sui pubblici poteri nel loro esercizio, e al bisogno del sindacato sulla valutazione dei beni che si accentrano in quello supremo della personale dignità dell'uomo e dello stato, tutore e reggitore dell'ordine nella consociazione umana. Sollecita a dar sodisfazione a quel

primo bisogno si vide Roma antica, la quale, stante la divisione dei ceti e la riserva delle cariche pubbliche ai nobili e ai cavalieri, ha dovuto provvedere a che la plebe fosse garantita ne' suoi diritti legali; e ciò essa fece mediante la creazione di tribunali che giudicavano ad accusa popolare, e così, alle leggi speciali sui varî reati e le loro pene, che man mano venivano emanate si accompagnavano anche le norme per i giudizi da osservarsi nell'applicazione di quelle. La prima legge di tal genere fu, com'è noto, quella *de repetundis* che nell'anno 605 a. u. c. inizia la serie delle *leges iudiciorum publicorum* o dei *iudicia legitima*. Analogamente si svolse nel diritto inglese il sindacato legale sugli atti dei poteri e sui privilegî feudali e aristocratici. Si provvide così a garantire il retto uso del pubblico potere da parte dei privilegiati rivestiti delle cariche pubbliche, per modo che non subissero pena gl'innocenti o pena diversa dalla legale i colpevoli. Oggidì a questo primo bisogno, cioè alla legalità formale, hanno dato sodisfazione i governi costituzionali, e meglio, gli stati retti secondo il diritto. Al secondo bisogno, cioè alla legalità sostanziale, provvedono gli istituti che via via affinano le nozioni del reato in generale e dei reati singoli in particolare, secondo le varie condizioni dei sentimenti etico-giuridici che si producono nella nazione, con le correlative nozioni della pena pure in generale e nei casi speciali, istituti che si sforzano sempre più di adattare cotali nozioni anche alle condizioni individuali della reità e della sensibilità personale alla pena.

IV. **Ancora sulla legalità sostanziale o proporzione nella pena: opinioni divergenti.** — La legalità *sostanziale* fa argine alla sempre rinascente e funesta tendenza di molti a stabilire nel diritto penale un'*equazione* assoluta fra *giustizia* e *legge*. Non è lecito certamente far onta al legislatore col *presumere ingiusta* la sua volontà. Ma indagando la ragione stessa della legge si assurge alla considerazione di ciò che debba aversi per reato, nonchè della pena che per il reato *debba* applicarsi al colpevole. La qual cosa non si può sapere senza tener conto del valore, s'intende non mistico o astratto, però proporzionale dei diritti scaturiti dalla dignità personale sì degli offesi, individui e società, sì dell'offensore: dignità personale che è il bene per eccellenza, e dal quale s'irradia il bene stesso onde si forma tutto

quanto il diritto. Le cose si valutano per *quello che sono* e in confronto con altre che sono suscettibili del giudizio comparativo. Si valutano e si confrontano pure per i *loro effetti*, ma sempre sulla base di un'*unità di valore* alla quale tutti i beni si debbono saggiare, e questa unità di valore è la dignità personale da rispettarsi secondo il senso che di essa ha la nazione, giudice imparziale e intelligente.

Alla stregua del bene della dignità personale, tutti gli altri beni sono valutabili, comparabili, commensurabili, perchè quello è un bene che la ragione morale reputa indipendente dal calcolo delle accidentali conseguenze utilitarie. La legalità *sostanziale* vuole dunque norme degne di essere osservate perchè conformi alla natura e destinazione morale dell'uomo. E poichè la dignità permanente dell'offensore non differisce da quella degli offesi se non per la sola misura, che nell'offensore è minorata dal suo delitto, non v'ha dubbio che in ciò stesso si trovi la base del calcolo comparativo e di proporzione, dal quale la legge penale non può prescindere senza ritorcersi contro il suo principio giustificatore. È consuetudine il contrapporre l'interesse sociale nella persecuzione e punizione del reo, all'interesse individuale del reo stesso. Ma questa contrapposizione sparisce dinanzi all'idea dell'*interesse comune*: e comune è infatti quello che tutti i consociati e lo stato stesso hanno di evitare la punizione dell'innocente e la punizione esagerata del reo, di evitare, mediante garanzie di giudizio, che possa ragionevolmente sospettarsi viziata di errore o di dolo la sentenza che condanna o assolve, e di evitare che nell'esecuzione della condanna s'insinui l'abuso.

Se la reazione vendicativa dei popoli non ancora inciviliti esprimeva retribuzione passionale, e invece col progresso della esperienza e della riflessione si è trovato che il male della pena dovesse servire a un *fine utile* per incutere timore ai malvagi e rattenerli dalle offese, ciò non è buona ragione per dire che la verità stia, e tutta intera, nella concezione utilitaria.

Al fondo di ogni reazione, vendicativa o preventiva, sta sempre il concetto di retribuzione, che è idea di giustizia pratica perchè inseparabile da ogni fatto dolorifico compiuto a cagione di un danno ingiustamente patito. In questa relazione sta sempre racchiusa l'idea di *ricompensa*, di *eguagliamento di partite*, di *giustizia storica*. La relazione pertanto può e deve guar-

darsi sempre più nel suo aspetto razionale. Infatti, da quella che essa era dapprima fra *istinti* opposti, la vediamo salire poi a relazione fra spinta e controspinta *psicologica* e *utilitaria*, sino a prendere infine il carattere di relazione morale, tra violazione cioè di un dovere etico-giuridico e un dovere parimenti etico-giuridico che comanda la correzione di quella. E la correzione si fa sempre più complessa, tenendo conto, oltrechè del valore del fatto rispetto al bene giuridico offeso, anche del carattere personale dell'agente in quanto sia rivelato dal fatto stesso.

La pena minaccia e colpisce, non già l'astrazione del reato o il momento passato e divenuto perciò irrevocabile, ma il *delinquente* nelle sue varie condizioni di pericolosità e di infrenabilità sotto l'influenza della sanzione punitiva e del castigo inflitto. *Coordinati fra di loro i due termini, fatto e agente*, malattia e sintomo come sarebbero in medicina, la valutazione della correggibilità o meno del secondo non può escire dai confini del fatto, e l'aggravamento stesso di pena per la *recidiva* si fonda ancora nel fatto di una particolare pervicacia e insensibilità agli ordinari effetti che naturalmente il giudizio di condanna e la pena precedenti producono sui condannati. La pena deve agire insieme e sulla società e sul reo, ma sul reo *non più* che lo richiegga il valore etico-sociale del misfatto suo, e dove essa non sia bastata a corregger lui, e renderlo atto alla vita socialmente comportabile, non più la pena, funzione riprovatrice di un dato malfatto, ma altri mezzi, educativi e amministrativi, debbono provvedere. *Altri mezzi*, perchè non più di *reati* sarebbe egli imputato, ma solo di *tendenze* pericolose o ree, sulle quali, se esse non siano rivelate da reati nuovi, il diritto di riprovazione sociale mediante la pena non ha competenza.

V. **Influenza della condotta posteriore al reato e istituti complementari della pena e surrogati penali.** — Se, indipendentemente dalla recidiva, e dai cosidetti incorreggibili tenuti, fino a correzione conseguìta, sotto l'influenza della pena, cioè sotto *condanne indeterminate*, la *condotta posteriore* del colpevole, rivelatrice in lui di una *particolare sensibilità alla pena o alla legge del rimorso o della emendazione*, merita essa pure un giusto riguardo, in verità questo riguardo è voluto dalla stessa ragione fondamentale della pena. Noi lo vediamo affermato nel diritto italiano vigente (come nei diritti stranieri),

or sotto forma di *liberazione condizionale* dalla pena carceraria (art. 16 e 17 cod. pen., 4 e 5 decr. 1° dicembre 1889 per la sua attuaz.), or sotto quella di *passaggio da uno stabilimento agricolo o industriale al lavoro in opere fuori dello stabilimento penale* (art. 14 cod. pen., 3 decr. cit. di attuaz.). A ciò si aggiungano gli altri *surrogati penali* richiesti per l'*adattamento giudiziale* della pena alle condizioni del condannato.

Questi altri *surrogati penali* nel diritto italiano sono: *arresto in casa* per le donne e i minori non recidivi, art. 21 cod. pen., 7 decr. cit., *prestazione d'opera invece della multa e dell'arresto*, art. 19 e 22 cod. pen., 6 decr. cit., *riprensione giudiziale invece di un mese di detenzione o arresto, di tre mesi di confino o di 300 lire di multa o ammenda*, art. 26 e 27 cod. pen., 8 e 9 decr. cit.; senza dire della scelta che può fare il giudice fra il provvedimento revocabile di un *istituto di educazione o correzione* per i *minori dei 14 anni* e i *sordomuti minori dei 18*, e la loro *consegna ai genitori o tutori*, ecc., art. 54 e 58, parte 1ª, cod. pen., 15 decr. cit., e a tacere altresì sia della *casa di correzione sostituita alla pena restrittiva* della libertà personale per i *minori e sordomuti stessi che agiscono con discernimento*, art. 54 e 58 capov., cod. pen., sia ancora della *casa di custodia* che il giudice può sostituire alla pena restrittiva della libertà personale, per i *semi-infermi di mente*, art. 47 capov., cod. pen., sia in fine dello *stabilimento speciale* in cui il giudice può far scontare ai colpevoli, in *caso di ubriachezza abituale*, la pena restrittiva della libertà personale, art. 48, capov. 2, cod. pen. E da ultimo la legge 26 giugno 1904 permette un altro riguardo alle condizioni del delinquente, mercè l'istituto della cosidetta *condanna condizionale* (in Germania, *grazia condizionale*), o meglio *sospensione dell'esecuzione della condanna*: introdotto dapprima nel Belgio con la prima denominazione (legge 31 maggio 1888, comprendente anche l'istituzione della liberazione condizionale), esso era già stato sperimentato, nella Granbretagna e nell'Unione americana, quale *sospensione della stessa condanna*, e in quest'ultima trovasi prudentemente ed efficacemente fiancheggiato dal *probation officer*. Le *brevi pene carcerarie* sono oggi dai più ritenute mal rispondenti al fine e più atte a favorire la corruzione e la recidiva, di quello che a rassicurare la società. Donde il grande favore che oggidì godono i surrogati penali, e donde ancora quello che alcuni mostrano per la così detta *legge del perdono* assoluto.

Per giustificare in generale tutti codesti istituti, basta osservare, che tanto il legislatore quanto il giudice sono dalla natura delle cose astretti a giudizi più o meno *aprioristici*. Il legislatore fa giudizi aprioristici *generali*, che per la varietà dei casi particolari si formulano da lui per mezzo di tipi e non casuisticamente: tipi con latitudini penali, le quali, ad una con la facoltà di affermare l'esistenza di circostanze attenuanti generiche e indeterminate ed estrinseche al reato e che la legge valuta a un sesto della pena concretamente dovuta al reo (art. 59 cod. pen.), sono affidate al prudente criterio del giudice, quando esse latitudini non siano addirittura accompagnate dalla facoltà di scelta fra pene di diversa specie o fra pene e loro surrogati. Il giudice poi fa pure a sua volta giudizi aprioristici, benchè *particolari* nei singoli casi, e li fa usando di codeste latitudini e di codesta facoltà di scelta, ove esso abbia meritato tanta fiducia (non in Italia, eccetto che per alcuni surrogati, bensì in Inghilterra, nei Paesi Bassi e altrove). Anche il giudice deve, nonostante che ignori più o meno la speciale suscettibilità del colpevole all'efficacia della pena o del rimorso, *anticipare,* in una qualche misura, *il suo giudizio particolare*, onde serberà saviamente un certo rigore, e ciò per evitare il pericolo di essere, rispetto a questo o quel colpevole, o ingiustamente mite, o imprudente, fidando in una sensibilità squisita, o anche solo ordinaria, alla pena, che poi l'esperienza della esecuzione di questa dimostri ottusa o non squisita affatto. Gli è così che la provvida legge, cui preme di mettere d'accordo la pena con le condizioni reali del delinquente, apre la via, mediante gl'istituti sovra ricordati o altri del genere stesso, al *giusto adattamento individuale.* Sol quando essi non siano applicati, potrà, per lo stesso fine, intervenire l'*indulgenza eccezionale* nelle forme di *amnistia*, *indulto* e *grazia sovrana*; forme le quali, checchè altri pensi, rispondono esse pure al principio fondamentale del diritto o dovere che lo stato ha di punire se e dove e in quanto la tranquillità pubblica lo richieda in conformità della coscienza giuridica della nazione.

VI. **La volontà dell'agente quale condizione della pena: opinioni divergenti.** — Il diritto o dovere di punire si arresta dinanzi alla sventura che opera con le sole apparenze del delitto e senza la reale volontà dell'uomo ragionevole. Pur

troppo, infierisce ai dì nostri cotesto malanno sotto le più svariate forme di malattie nervose, ereditarie, o acquisite, incurabili, o accessibili alla speranza di guarigione. La pena giuridica non esiste che per i colpevoli. È deplorevole che non tutti siano, ai dì nostri così progrediti nel senso morale della legge e degli ordinamenti, di questo avviso. È sorta, com'è noto, una scuola che, negando la libertà dell'umano volere e la responsabilità *morale* che ne consegue, di responsabilità più non vuole sentir parlare, o ne parla solo come di un nome che maschera cosa contraria al suo senso naturale, e però la chiama responsabilità *sociale*. Essa dice: Già per i minorenni si vien riconoscendo che non occorre la pena, ma invece correzione ed educazione, e che il giudizio del loro discernimento non è più necessario; or si deve dirigere gli sforzi per ottenere lo stesso anche per gli adulti, perchè anche per gli adulti invece dell'azione punitiva, che risponde a una pretensione mistica o vendicativa, trascurando o non curando adeguatamente l'azione veramente utile, è necessario sostituire poco a poco studiati provvedimenti di sicurezza, profilattici, preventivi, eliminativi. In tal modo questa scuola (antropologi, sociologi e neopositivisti del diritto penale, acutamente stigmatizzati di *semplicisti* dal Lucchini) si ripromette di ottenere un giorno che nel senso testè indicato si parli anche della responsabilità dei cosidetti *anormali*. Quando così fra i delinquenti, fra i soggetti attivi primari dei delitti e passivi delle pene (o provvedimenti suddetti) gli anormali vi saranno posti anch'essi dai legislatori, dai giudici (o medici o ufficiali di polizia), dagli esecutori degli ordini loro, la coscienza popolare o muterà il titolo del trattamento per gli anormali e per i colpevoli veri, questi e quelli sottoponendo non a pene ma a provvedimenti di sicurezza e di cura, oppure lo conserverà codesto titolo di responsabili, ma continuando e perfezionando il sistema della maschera e della finzione.

Aberrazioni di certo, ma, aberrazioni o no, esse provano vie più il bisogno di tenerci saldamente stretti ai principî *razionali* del *diritto*, chè l'ineluttabile conseguenza di codeste opinioni sarà senza dubbio la sopraffazione del debole per opera dei forti e astuti cui riescisse impadronirsi della *forza pubblica*; e *autorità* essi non eserciteranno perchè sarà sparita la materia di questa, che è pur sempre il *diritto*, l'emanazione cioè della personale dignità dell'uomo.

VII. **Abusi della penalità.** — Se si trattasse di por un freno all'*eccessivo dilagare odierno dell'opera repressiva*, donde non può derivare che un continuo indebolimento dell'energia punitiva nei casi stessi nei quali più s'avrebbe bisogno di questa, se così fosse, l'indirizzo dei neopositivisti sarebbe da lodarsi. Infatti con la smania odierna di legiferare su tutto, di far sentire in ogni moto, in ogni pulsazione della vita sociale l'*impero espresso della volontà* che usurpa, forse non di rado, mercè gl'imperfetti ordinamenti pubblici e la scarsa educazione politica e civile, il nome di *generale*, chi non vede quanto sarebbe provvida una siffatta direzione? Sventuratamente così non è; tutt'altro. Le pene giuridiche si vogliono sostituite da provvedimenti più o meno dolorifici o privativi della libertà personale, e tuttavia più o meno arbitrarî, senza che sia mantenuta intatta la possibilità delle garanzie formali dei giudizi di colpabilità fondati in fatti obiettivamente valutati e definiti dal legislatore. E poichè la prevenzione utilitaria non ha facili confini o, meglio, non ne tollera affatto, ne segue che quei provvedimenti assumano proporzioni inaudite, si insinuino dovunque, e lo stato col suo infaticato e irresistibile zelo finisca per diventare opprimente, da benefico tutore ed eccitatore delle libere iniziative ch'egli dovrebb'essere. Si pensi poi al numero infinito degli organi necessari per l'applicazione dei provvedimenti stessi, alla frequente possibilità, presso gl'inferiori specialmente, di errori e abusi e corruzione. E questo perchè? Perchè tutti tendono oggi a chiedere per i loro beni una protezione penale senza confine.

L'eccesso delle complicazioni nella vita sociale odierna induce i popoli progrediti contemporanei a far ciò che pareva una necessità esclusiva di quelli rozzi o poco avanzati in civiltà: i quali, come i fanciulli, reagiscono subito secondo il risentimento passionale e irrefrenato, non veggono altro che il danno patito, non badano se derivi da intenzione o da caso, e si rivoltano contro coloro che lo hanno recato, sian essi o no cause colpevoli, ciò che sopratutto od unicamente importa essendo la *responsabilità per l'evento.*

Il progresso del diritto consiste invece nel cercare di riparare alle violazioni dei beni giuridici con mezzi non penali, ma che al tempo stesso non siano neppure provvedimenti più o meno arbitrarî. Questi mascherano quelli agli occhi di coloro, i quali

più non sanno che la responsabilità dell'uomo, morale o giuridica, penale o civile o amministrativa, è qualcosa di serio, è un rapporto che la coscienza progredita della consociazione ha elevato al grado di oggetto di norme, di precetti, divieti e sanzioni. Come il progresso del diritto esclude la responsabilità senza colpa, così esso deve tendere a restringere i confini del diritto penale; e li restringerà nonostante i molti nuovi interessi che la moderna civiltà vien creando, non appena si formi nel legislatore la convinzione che altri mezzi possano meglio convenire. Nel periodo transitorio in cui sembra che viviamo noi ora, si dovrebbe scorgere lo sforzo di coordinare fra di loro i nuovi interessi dentro il sistema del diritto sinora vigente.

In generale, perchè intervenga il diritto penale occorre, come si è visto, *un nesso della volontà della persona imputabile con l'evento, e questo dev'essere lesivo di un bene giuridico protetto dalla legge punitiva, lesivo effettivamente e gravemente o in modo irreparabile se vi sia imprudenza (colpa), o altrimenti se vi sia volontà positiva e diretta (dolo determinato) all'evento lesivo o espressa con atto diretto all'evento stesso (dolo indeterminato).*

Intanto, col dare troppo facile ascolto alle richieste di sanzioni penali per nuovi rapporti sociali, si è allargato enormemente il campo dei reati contravvenzionali, e si è esteso non poco pur quello dei delitti, or sottraendoli al giure civile in cui avrebbero figurato come quasi-delitti, or ritenendo bastevole la forma colposa, mentre nel difetto di gravità dell'evento si dovrebbe richiedere l'esistenza della dolosa. Dal che è poi derivata anche la conseguenza di un aumento via via crescente dell'attività sì della polizia amministrativa e giudiziaria, sì ancora dei tribunali e degli organi che curano l'esecuzione delle pene. Di tutto ciò fanno poi testimonianza le cifre statistiche; il cui aumento però, a chi ben guardi, non dovrebbe significare criminalità nè intensificata, nè estesa, date le cause nuove di essa nelle nuove e non sempre giustificate pretensioni all'intervento della penalità in rapporti che prima sfuggivano a questa.

L'Accademico Segretario
RODOLFO RENIER.

Torino, VINCENZO BONA, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi.

CLASSI UNITE

Adunanza del 29 Aprile 1906.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: Naccari, Camerano, Segre, Peano, Jadanza, Guidi, Parona, Mattirolo, Morera e Grassi;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: Rossi, Brusa, Carutti, Pizzi e Renier Segretario. — È scusata l'assenza del Socio Savio.

Si approva l'atto verbale dell'adunanza plenaria antecedente, 4 febbraio 1906.

Il Presidente dà la parola al Socio Pizzi, il quale legge la sua commemorazione del rimpianto Socio Pezzi, che è inserita negli *Atti*.

L'Università di Aberdeen celebrerà a metà settembre del 1906 il quarto centenario della sua fondazione, e l'Accademia è invitata a partecipare a quella festa scientifica. — Il Presidente dice che se nessuno dei Soci gli notificherà di recarsi ad Aberdeen per questa occasione egli farà pervenire a quell'Ateneo una lettera che recherà l'omaggio dell'Accademia.

Invitato dal Presidente, il Socio Tesoriere espone il rendiconto finanziario dell'anno 1905, sia del fondo accademico, sia

dei fondi particolari per i premi Vallauri, Bressa, Gautieri, Pollini. Legge poi il bilancio preventivo per l'anno 1906. — L'Accademia approva tanto il resoconto consuntivo quanto il bilancio preventivo.

Si procede alla nomina della 1ª Giunta pel conferimento del XV premio Bressa (internazionale; quadriennio 1903-1906).

Riescono eletti: Naccari, Camerano, Morera, Guareschi, De Sanctis, Graf, Chironi, Cipolla.

LETTURE

DOMENICO PEZZI

Commemorazione letta dal Socio ITALO PIZZI.

I.

Quando or fa quasi un anno, nella passata primavera, corsero voci, prima dubbie, poi certe, intorno alla mal ferma salute del nostro compianto Socio, il Professore Domenico Pezzi, tutti noi che lo conoscevamo e amavamo, restammo dolorosamente tocchi e sorpresi. Nessuno di noi, nessuno dei molti colleghi e degli amici, nessuno degli alunni, potè allora indursi a credere che quell'uomo, di cui tutti conoscevano la tempra forte, fatalmente si avvicinava al suo fine. Gravi, veramente, e sospettosi erano i segni del male, perchè egli, già così vivace e pronto, già così fermo e sicuro di sè in tutto ciò che pensava e diceva e operava, d'un tratto, in un volgere di poche settimane, fu visto, con dolorosa meraviglia, farsi incerto e dubitoso, incerto e dubitoso anche di sè, perplesso nelle parole e negli atti, non afferrar più le idee, o, se afferrate, smetterle d'un subito e disviarsene, e mostrare in tutti gli atti un insolito accasciamento del corpo e dello spirito. Ma egli non toccava l'anno sessantesimo, o lo toccava appena; ma egli s'era sempre mostrato tanto pieno di vita, sempre tanto presente a sè stesso, che, pur essendo noi certi essersi omai fiaccata quella singolar fibra d'uomo, nessuno però avrebbe allora pensato che, fra pochi mesi, avrebbe udito l'annunzio della sua fine. Fine prematura veramente per l'uomo ancora in vegeta età, per lo studioso ancora atto alle nobili indagini della scienza.

Momento, perciò, di doloroso stupore fu quello di tutti noi, e all'Accademia e all'Università quando, la mattina del 24 ottobre, ci sentimmo annunziare con ansia affannosa che Domenico Pezzi

non era più. Non volevam crederlo noi, tanto ci parve, ed era, immatura e repentina quella perdita; tanto ci pareva che quel-l'uomo dovesse vincere alla fine la malattia che l'aveva preso, e sopravvivere!

Nè io, Illustri Colleghi, mi sarei mai pensato che avrei dovuto commemorarlo qui, oggi, alla vostra presenza! Non avrei mai pensato che oggi qui, dove tante volte tutti noi abbiamo udito la sua parola incisiva e franca, se ne sarebbe inteso, per la modesta parola d'un suo collega e amico, l'elogio funerale! Ho detto amico. E fu veramente un amico, a me se mai in particolare, per il quale sempre, con commozione lo ricordo, egli nutrì affezion leale e sincera, per il quale egli non risparmiò la parola sua autorevole e protettrice quando l'amicizia e il sentimento di fratellanza di collega gliel'avevano richiesta in un momento per me difficile. Se adunque oggi io dirò brevemente di lui, ciò sarà come s'io pagassi un debito sacro, un debito di gratitudine, anche se il modo sarà dimesso e umile, non adeguato al soggetto, e il tributo sarà manchevole e scarso.

II.

Nacque Domenico Pezzi a Torino il 20 di aprile del 1844. Poco sappiamo della fanciullezza sua e dell'adolescenza; ma si raccoglie dalla testimonianza di un suo amico carissimo, l'avvocato Napoleone Razetti, già a lui compagno di scuola e da ciò che si legge nei dizionari biografici, ch'egli ebbe dal padre, uomo di costumi e di modi eletti, archivista dotto e bibliotecario del Re, fina, anzi squisita educazione. Ne ereditò, perchè il padre era buon cultore dell'arte del disegno e acquarellista di valore, certo gusto finissimo di artista del quale facevano bella testimonianza, senza ch'egli lo volesse o se ne accorgesse, molte sue osservazioni acute e proprie che di tanto in tanto gli sfuggivano nel conversare. E quella educazione fu anche, per quel che pare, severa e forte, al modo con cui siamo stati allevati anche noi della omai provetta generazione, quando non erano ancor di moda le mille moine improprie, di cui si attorniano oggi bambini e fanciulli sotto colore o d'igiene o d'allevamento scientificamente sano. Il nostro Pezzi frequentava,

nel 1856, le scuole ginnasiali del Collegio di San Francesco di Paola qui in Torino, e il padre ve l'accompagnava e nel riconduceva. Se il padre gl'inspirò e gl'infuse quell'austerità nei modi e nel sentire che fu tutta sua, dalla madre forse gli venne, come pensa l'egregio amico suo di fanciullezza testè ricordato, la squisitezza del fare che contemperò quell'austerità. Comunque sia di ciò, quali frutti recò poi quell'educazione severa, ma sana, si vede da ciò che fece poi come uomo e come studioso, perchè come tale, anche ammettendo ch'egli, per rigor soverchio, si lasciasse andar tropp'oltre, procacciandosi da taluno che non lo conobbe a dovere, taccia di duro e d'inflessibile, ebbe e tenne condotta veramente incensurabile.

Nel 1862, passò alle scuole universitarie. E son viventi ancora alcuni suoi condiscepoli che attestano unanimi quanta fosse allora la diligenza sua nello studio, quanto profitto vi facesse. Vi riscosse lodi e plausi, che però non lo fecero mai invanire, perchè è risaputo come ad un certo tale che vantavasi con lui d'aver avuto altrettanto quanto lui in certa votazione d'esami e d'averlo meritato, egli rispose sul viso che l'avuta lode, per lui come lui, era bontà dei maestri, non merito di chi la toccava. Ebbe, dopo soli tre anni, laurea di dottore, e fu notevole allora la sua dissertazione intorno al Dio supremo dei Greci, quale è ritratto nell'epopea omerica.

Ma gli studi che più fortemente lo chiamavano e volevano a sè, erano i glottologici, studi recenti in Europa e nuovi, o quasi nuovi, in Italia, quand'egli li intraprese. Il Pezzi, perciò, sebbene fosse tanto gloriosamente preceduto fra noi e da Giovanni Flechia che gli fu altresì maestro all'Università, e da Graziadio Isaia Ascoli, si deve tuttavia considerare a buon dritto come uno dei fondatori, fra noi, dello studio di questa scienza, ch'egli poi per lunghi anni, succeduto nella cattedra al maestro, professò con instancabile zelo, con entusiasmo di scienziato, innamorato della sua disciplina. In questo insegnamento suo, portò egli, aiutato dal naturale ingegno acutissimo, finissimo nell'analisi, tanto rigore e tanta precisione, che il linguaggio suo era linguaggio di matematico, e la dimostrazione sua non differiva punto da quella d'un teorema. I discepoli non potevano seguirlo sempre; perchè, se vi ha scienza pericolosa e atta a fuorviar facilmente anche il più sagace ricercatore, è la glottologia, la

quale, studiando la struttura dei linguaggi umani, non si lascia governar da eventuali somiglianze di suoni, ma appunto se ne insospettisce quando li trova, e tanto se ne insospettisce che, analizzandoli, li trova non di rado e fatui e fallaci. E non s'è visto forse, appunto ai nostri giorni, tutto un nuovo sistema di comparazione linguistica, sebbene architettato con tanto amore e pazienza virtuosa, fallir la prova appunto perchè, lasciata l'acuta e fina analisi glottologica, era fondato quasi soltanto sulle casuali somiglianze dei suoni?

E quanta coscienza nell'alto e delicato ufficio! Preciso, puntuale, non stanco mai, nemmeno quando già aveva in sè i germi del fatale morbo a cui dovette soccombere, fu sempre veduto e trovato là, al posto suo, pronto al dovere. Non si udì mai dire che egli, per qualche lieve mal di capo, si astenesse, troppo timoroso di faticare, dalla lezione sua; non si udì mai dire che egli, per qualche sopravvenuto incomodo, sollecitasse, troppo voglioso di riposo e guardingo troppo, intempestivi congedi, pur tanto facili ad esser concessi; non fu veduto mai sollecitar dai Ministeri ispezioni o missioni oneste per darsi riposo e svago correndo piacevolmente in ferrovia a visitare istituti e scuole.

Ma calmo e sereno, imperturbabile sempre, affrontando senza rimanerne tocco certa aura impopolare che gli destava contro la troppo rigida osservanza del dovere, seguì sempre sua via, insegnando con quella sua chiarezza perspicua, spronando i giovani col consiglio e l'avvertimento severo, conscio intimamente, forse anche troppo conscio, della nobiltà e dignità dell'alto ufficio.

Nè l'opera sua fu circoscritta al solo insegnamento orale. Non pochi, e tutti di gran pregio, a giudizio di chi se n'intende e in Italia e fuori, furono i suoi lavori in glottologia. Tra i quali, seguendo l'ordine del tempo, noterò in particolare la versione della grammatica comparativa dello Schleicher per la sola parte indo-italo-greca, aggiuntavi la versione del Lessico delle radici indo-italo-greche del Meyer, e premessavi una ben nutrita e ragionata dissertazione intorno allo studio del linguaggio. Vi sostenne, in questa dissertazione, tra le altre cose degne di nota, non esser possibile alcun nesso di parentela tra le lingue indo-europee e le semitiche, preceduto in ciò dallo Schleicher stesso, di cui ribadì le ragioni. Ciò era nel 1869. Due

anni appresso, nel 1871, per i maestri italiani di ginnasio pubblicò una grammatica comparativa della lingua latina. Seguirono, nel 1875, uno scritto su Guglielmo Corssen e la lingua etrusca; nel 1877, una Glottologia aria recentissima, che fu tradotta dal Roberts in inglese e data fuori nel 1879; le note filologiche intitolate *Ananke*, il Dialetto dell'Elide, i Nuovi studi intorno al dialetto dell'Elide, la Grecità non ionica delle iscrizioni più antiche, la Lingua greca antica, poderoso lavoro di analisi linguistica. Era questa l'opera a cui, forse, egli teneva di più e a cui lavorò con più lungo amore, sebbene non fosse poi pago dell'esito, perchè, mandandone un esemplare al suo amico carissimo, il professore Ferreri dell'Istituto Internazionale, nella lettera accompagnante il dono, in data del 20 ottobre passato, quattro giorni prima di morire, con evidente rimpianto scriveva così: " Tu assistesti, forse più che ogni altra persona, al nascere ed allo svolgersi dei concetti e dei fatti che di quel libro furon base. Bell'aurora che meritava tramonto migliore! „

Ma non mi è dáto, in commemorazione che deve esser breve, ricordar tutti i lavori glottologici di lui. Non posso tuttavia tacere di un'opera che tramezzava tra il glottologico e il filosofico e nella quale egli trattava del modo diverso con cui i popoli antichi, i Greci in particolare, avevano potuto esprimere, con vocaboli di cose naturali e materiali, concetti astratti. Opera che, come agevolmente si vede, si attiene alla psicologia e la tocca, e che sarebbe stata molto importante, data l'acutezza di lui nell'analizzare e nell'osservare, quando fosse stata condotta a termine. Ma non fu finita, e non fu finito nemmeno, perchè rimasto in tronco alla lettera P, un suo Lessico, il manoscritto del quale, con tanti altri, è passato in proprietà dell'Ospedale del Cottolengo. Ma ci basti di poter dire col De Gubernatis, nella breve biografia ch'egli già consacrò all'antico amico nel suo *Dizionario degli Scrittori*, che " in lui la dottrina alla tedesca si congiunge amabilmente con una certa genialità latina, che rende piacevole ciò ch'egli scrive e ciò ch'egli insegna „.

Non però tutte le opere sue furono severamente e austeramente scientifiche. L'affetto, la stima, la venerazione per i maestri suoi, per le persone tutte delle quali altamente apprezzava l'integro e leale carattere, tanto potentemente parlavano in lui, che, quando glie ne fu data l'onorifica commissione, commemorò

qui, nell'Accademia, con parola eloquente e adorna, viva e vibrata, e Giovanni Flechia, di cui ricordava la buona immagine paterna, e Bernardino Peyron, al quale lo legava un'antica e sincera amicizia. Io ricordo, noi tutti qui ricordiamo, Illustri Colleghi, quell'orazione sua che procedeva tranquilla e calma in apparenza, ed era pur tanto mossa e vibrante nell'intimo suo senso! E testimonio del suo fino sentire estetico e letterario è la dissertazione giovanile, del 1879, intorno al Concetto del Fato nelle poesie esiodee.

III.

Non era, il nostro Pezzi, uno di quegli scienziati che, appunto per esser troppo scienziati, si chiudono nell'ambito, per quanto vasto, della disciplina da loro coltivata, e nulla sanno di ciò che s'è fatto o si fa oltre. Il padre gli aveva instillato l'amore dell'arte; la scuola, allora tutta classica, puramente classica, non ancora imbastardita come ai nostri giorni, aveva educato in lui il gusto finissimo nella letteratura. Ed egli bene spesso, o nell'insegnare o nel conversar piacevole, anche passeggiando con qualche amico, soleva citare a memoria infiniti passi di scrittori italiani e latini, anche di greci, anche di poeti o francesi o tedeschi, donde si poteva comprendere che ne aveva famigliari le opere. Tutta questa bella conoscenza di scrittori gli adornava il conversare, gli dava certa forbitezza signorile nel dettato, certa sobrietà propria, certa dignità composta, della quale avemmo pur qui un recente esempio in quella sua nitida e incisiva prosa della commemorazione del Peyron, or ora ricordata.

E d'arti ragionava assai bene, della musica in particolare, della quale era altresì buono e appassionato cultore, perchè, come attestano gli amici suoi intimi, appartato, segretissimo, suonava spesso al pianoforte scelti brani di musica classica e spartiti di celebri compositori, nostrani e stranieri. Ne ragionava poi con gli amici, e ragionandone mostrava di conoscere, dandone anche adeguato giudizio, le pagine più belle, notandone anche le recondite e riposte bellezze. Gli erano famigliari non solo le più conosciute, ma anche le meno note opere dei maestri nostri, quelle anche che, per inescusabile colpa di noi Italiani, sono state abbandonate all'oblio per elevar su fittizi altari idoli

mostruosi. Non però era partigiano troppo, perchè pensava, giudicando e lodando, dalle arie omai antiquate ma riboccanti di espressione affettuosa, del *Pirata* del Bellini, alla composizione enigmaticamente fumosa del Wagner quando ritrae la morte d'Isotta, dalle tragiche note delle trombe, annunzianti la imminente sventura di Rigoletto, all'aria sentimentale di Isabella, supplicante pietà ai piedi di Roberto di Normandia.

E ai concerti musicali non mancò mai. Attesta quell'amico suo, averlo veduto solitario, in piedi, in un angolo della platea, tutto assorto nell'ascoltare, all'ultimo concerto Coccian, quando già lo rodeva il male che lo trasse irresistibilmente alla tomba. Non vi mancò mai, io diceva, ma ciò non fu in lui contratta abitudine leziosa, come di tanti che ora frequentano sale di concerti e teatri in cui si dànno spettacoli di grande apparato e strepito, e vi si annoiano perchè nulla intendono pure affermando d'avere inteso molto. Non così per il Pezzi. Un'audizione musicale era per lui un gaudio intimo, una gioia spirituale, un viatico vivificante e fortificante, non un passatempo qualunque da sfaccendati!

IV.

Ma del suo nobile carattere fanno bella testimonianza le sue virtù, tutte elette, non chiassose, non ostentatamente appariscenti, non menate pomposamente in mostra. Che anzi, se vi fu uomo che abborrisse dal chiasso e dall'ostentazione, era lui, il quale viveva nascosto quasi sempre, in casa, fra i suoi libri. Ma è noto quale memoria, perennemente affettuosa, serbasse dei genitori mancatigli quand'era ancor giovane. Io mi ricordo di una sera quando, fatta una breve passeggiata, riandando egli alcuni casi della sua vita, giunto a dire del come avesse perduto i genitori, conchiuse il mesto racconto dicendo con accento accorato: " E allora io rimasi solo! Oh! se voi sapeste che cosa vuol dire esser solo! ".

E degli amici non aveva egli quasi un culto e una venerazione? Non ridirò il nome del Peyron per il quale tutti sanno quanto affetto, quanta stima nutrisse; ma ricorderò bene quanto s'intrattenesse volentieri, a passeggio, sotto i portici, all'Università, qui all'Accademia, con tutti quelli coi quali aveva

dimestichezza, massime quando s'accordavano con lui nelle opinioni e nei pensieri. Era, in quelle conversazioni, signorilmente faceto, arguto, e talvolta vibrato e piccante. Per questo, fu giudicato non di rado da qualcuno non poco aspro e pungente: ma, se pur fu tale a volta a volta, egli pur mirava alla cosa degna, secondo lui, di qualche asprezza o puntura, non alla persona: nè intendeva di offendere o d'ingiuriare, ma di dir la verità e nient'altro che la verità; e se forse qualche volta fu veemente in ciò e parve acre e acerbo, il male che da tempo l'aveva preso, n'era la non remota cagione.

In cotesto, anzi, gli si deve dar somma lode. Perchè, pur di dir la verità o almeno ciò ch'egli in buona coscienza stimava essere la verità, non si lasciò prendere nè da paure nè da rispetti per questo o per quello mai. Noi l'abbiamo udito più volte qui all'Accademia e all'Università. Che piacesse o garbasse a tutti, non so; questo so ch'egli era e sincero e leale. O forse la segregazione in cui s'era messo, la solitudine alla quale la sorte lo aveva abbandonato, gli tolsero di poter dare, alle parole sue, quella vernice levigata che molti sanno adoperare abilmente, quella lisciatura linda che fa sempre fortuna anche quando le cose dette o son false o non valgon nulla. In lui, nulla di tale orpello, in lui, che non adulò mai nessuno per averne onori e titoli, che non fu mai dei caudatari e turiferari di ministri o di prefetti o di deputati, quando, al suon di fanfare strepitose, vennero a visitare istituti e biblioteche e accademie, che non intervenne mai alle cene loro imbandite.

Insomma, il Pezzi fu un carattere fiero, nobilmente e altamente fiero, anche con quella rigidezza che or si diceva, e che però intanto servì a velare in lui (e forse per suo deliberato proposito, ritrosissimo come era) certa intima e delicata bontà. Della quale sono bella prova il cospicuo dono, fatto per testamento nel febbraio del 1897, di tutto il suo avere al pio Istituto del Cottolengo, i pietosi legati fatte alle persone di servizio, affezionatissime già a lui vivo, ora inconsolabili di tanta perdita. Egli anzi, che si teneva carissimi certi animali domestici, unica sua e veramente fidata compagnia, come sovente diceva, in tanta solitudine sua, che soleva ogni giorno uscir sul balcone interno della casa per sporgere e mostrare un vassoio colmo di grano a certi colombi che gli accorrevano intorno avidi e volenterosi

e che egli, fattiglisi famigliari e mansueti, dolcemente accarezzava, egli adunque, come avrebbe potuto dimenticar le persone che a lui erano state larghe di cure e di pensieri? Un'antica sua donna di servizio, fattasi inabile per vecchiaia e malanni, pure uscitagli di casa, era da lui generosamente sovvenuta di denaro. Ora, queste persone beneficate da lui, pur piangendolo, si lodano di lui, e più si loderanno gl'infelici raccolti al Cottolengo. Soltanto parve a non pochi da deplorare (se pur è lecito dir così) ch'egli, avendo in casa così bella e scelta raccolta di libri, fra cui non pochi preziosi e rari, massime quelli concernenti la nobile disciplina con tanto amore da lui coltivata, non pensasse a costituirne erede o l'Università o la Facoltà di lettere, a cui, in tanta scarsezza presente, sarebbero stati di aiuto validissimo. Delle carte sue, come attesta chi vide il testamento, volle conservate quelle iscritte a qualche conoscente o amico, le altre condannò ad essere arse. Senonchè, queste non furono trovate; o almeno, come n'è andata voce, non se n'è rinvenuta che una parte, e non grande; e v'è ragione per credere, come pensa l'amico suo testè nominato, che egli, temendo forse di non essere esaudito, le ardesse nascostamente da sè. E fece bene, perchè non di rado si trova chi con non sempre lodevole zelo, smanioso di svelare cose nuove, dà fuori scritti di autori che non erano destinati al pubblico e non fatti per il pubblico. Costoro si credono scopritori di novità, e non sono che indiscreti. Toccò al Manzoni questa postuma sventura, ma il Verdi potè evitarla, e l'evitò facendo ardere all'aperto, in un campo, presso la sua villa di Sant'Agata, due grandi casse di suoi vecchi e dimenticati manoscritti.

V.

Alla fine, la naturale malinconia, venutagli a principio dal trovarsi solo, come tante volte affermava e lamentava, cresciutagli in ultimo dal contratto malore, ebbe in lui il sopravvento. Tolto qualche momento in cui ricompariva fuggevole il suo sorriso consueto tra il semplice e l'arguto, e si faceva udire ancora la sua parola misurata, dignitosa e propria, e pur festevole non di rado, il viver suo, negli ultimi mesi, si ridusse ad essere non altro che un mesto e lungo soliloquio, un lungo e non interrotto

rammarichio, un tapinarsi continuo per sè medesimo e per tutto ciò che lo circondava. A quell'amico fidatissimo a cui egli più confidava le sofferenze sue, e che gli consigliava di lasciar per poco la cattedra per andare a ritemprarsi in luogo ameno e tranquillo, ai monti, in campagna, al mare, egli rispose mesto e sfiduciato: " È tardi; ma forse tu hai ragione! „. Disperato di guarigione, il 19 del passato ottobre, ad una gentile signora di Torino, moglie all'amico professor Ferreri, mandava un suo biglietto ringraziandola " per la pietà (sono sue parole) di cui vedeva onorata da lei la misera causa della propria salute „. Dolevasi intanto di tutto, di tutto s'annoiava; e non di rado, accalorandosi d'improvviso, usciva in brevi ma veementi filippiche or contro questa, or contro quella cosa, e allora era terribile, come quando, e l'ho udito io, si proponeva di scrivere un libro che doveva esser fulmineo, contro certi abusi non infrequenti nello scompigliato campo dell'istruzione pubblica, e un altro, in cui voleva riversare (diceva così) tutto il suo disprezzo per l'invadente e improvvida democrazia, e intendeva certa democrazia venuta su in questi ultimi tempi. Asseriva anzi d'aver radunato documenti e materiali.

Ma, passati questi brevi momenti che direm tempestosi, egli soleva confortarsi elevandosi con l'animo e con la mente a più alto e sereno ordine di idee. Era di sentimenti pii; ma l'amico suo che mi ha fornito questa e le altre notizie, attesta che di religione non parlava mai, appunto perchè profondamente la sentiva, e, di morale, forse assai meno, egli, che di costumi fu sempre rigido e austero, e però morale sempre e religioso in atti, non in parole soltanto. Anche meno poi fu di quelli che al mondo si credono un gran che, come se il mondo non possa camminare se non sotto la loro guida, paternamente efficace. Non fece mai come quelli che ridevolmente si arrabattano per conquistar seggi nelle amministrazioni pubbliche captando il favore anche di chi meno li vuole o cerca; non mandò attorno telegrammi rumorosi come fanno ora i così detti superuomini quando hanno coperto di lor cifre alcuni quaderni, per annunziarne ai quattro venti il mirifico contenuto; non si fece invitare da consorzi nostrani o stranieri a tener conferenze a suon di musica, per poi far scrivere nei giornali cittadini d'essere stato ossequiosamente invitato. Ma, modesto sempre, quasi non fiducioso, perchè

il vero scienziato dubita più che non affermi e dubita assai più di sè e dell'opera sua che degli altri, ma fermo sempre e inconcusso nell'idea di quanto egli doveva alla scienza, alla città, ai discepoli, alla patria, come uomo, come cittadino, come maestro, passò tra gli uomini studiando e insegnando, beneficando e correggendo, meditando più che parlando o troppo o a caso. E, del resto, della vanità di tanti conati umani, della inutilità di tanti propositi spavaldi, della ridevolezza di tante alterigie, della superbia dei più, egli doveva avere, come veramente ebbe, una ben chiara e ben fondata idea, quando diceva che una delle massime morali a cui vivendo s'era maggiormente attenuto perchè maggiormente gli era penetrata nell'anima, era quella trovata da lui, per caso, sopra un vecchio e povero libro che un giorno acquistò scovandolo dimenticato su di uno dei tanti muricciuoli della città. Quella massima diceva: “ *Sumus quod sumus. Bene vive, et cœtera fumus!* „.

Torino, 29 Gennaio 1906.

Gli Accademici Segretari
LORENZO CAMERANO.
RODOLFO RENIER.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 29 Aprile 1906.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: JADANZA, NACCARI, GUIDI, GRASSI, MORERA, SEGRE, PEANO, MATTIROLO, PARONA e CAMERANO Segretario.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Il Presidente comunica:

1° Il telegramma che l'Accademia ha spedito per le onoranze al Prof. Tschermach dell'Università di Vienna;

2° Annunzia la morte del Socio corrispondente Samuele PIERPONT LANGLEY, segretario della " Smithsonian Institution „ di Washington;

3° Presenta alla Classe le opere seguenti pervenute in dono: dal Socio corrispondente Carlo KLEIN: *Studien über Meteoriten*; dal Socio corrispondente Giuseppe VERONESE: *Il vero nelle matematiche*; dal Socio corrispondente Francesco BASSANI: *Notizie sull'attuale eruzione del Vesuvio.*

Il Socio CAMERANO legge la commemorazione del Socio corrispondente Victor FATIO.

Vengono presentate per l'inserzione negli *Atti* le note seguenti:

1° Ing. Enrico GATTI: *Proprietà relativa alle lenti cilindriche biconvesse simmetriche,* dal Socio JADANZA;

2° Dr. Ernesto LAURA: *Sopra le trasformazioni ortogonali a tre variabili,* dal Socio MORERA;

3° Prof. Beppo LEVI: *Saggio per una teoria aritmetica delle forme cubiche ternarie*; Nota 1ª, dal Socio SEGRE;

4° Prof. Filippo RIMONDINI: *Sugli integrali definiti di un campo convesso,* dal Socio PEANO;

5° Dr. Luigi COGNETTI DE MARTIIS: *Nuove specie dei generi Pheretima e Tritogenia*, dal Socio CAMERANO.

Il Socio MATTIROLO, anche a nome del Socio PARONA, legge la relazione intorno alla memoria del Dr. Gio. NEGRI, intitolata: *La vegetazione delle colline di Crea.* La relazione, che conchiude favorevolmente per la stampa della memoria, è approvata all'unanimità. Con votazione segreta la Classe approva pure all'unanimità la stampa della memoria del Dr. NEGRI nei volumi delle *Memorie.*

Il Socio MATTIROLO, anche a nome del Socio corrispondente Prof. Saverio BELLI, presenta la loro memoria, intitolata: *Michele Antonio Plazza da Villafranca (Piemonte) e la sua opera in Sardegna (1748-1791).* La Classe con votazione segreta ne approva all'unanimità l'inserzione nei volumi delle *Memorie* accademiche.

Il Socio PARONA presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* il lavoro seguente del Dr. Clelia PARISCH: *Di alcune Nummuliti e Orbitoidi dell'Appennino ligure-piemontese.* Il Presidente delega i Soci PARONA e CAMERANO per riferire intorno a detto lavoro.

Il Socio CAMERANO presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* il lavoro del Dr. Giuseppe NOBILI, intitolato: *Ricerche intorno ai Crostacei della Polinesia.* Il Presidente delega i Soci CAMERANO e SALVADORI per riferire intorno a detto lavoro.

LETTURE

VICTOR FATIO

Brevi parole di commemorazione del Socio LORENZO CAMERANO.

Victor Fatio, di cui la scienza piange la perdita avvenuta il giorno 19 marzo 1906, nell'età di 67 anni, appartenne a quella schiera non numerosa di uomini ai quali le benigne circostanze della vita concedono di dare tutta la loro attività agli studi prediletti. Victor Fatio appartenne a quella schiera di uomini che dotati di non comune ingegno e di temperamento equilibrato hanno una visione giusta delle cose e sanno far convergere tutte le loro forze al conseguimento di uno scopo che essi stessi si sono prefisso, senza alcuna preoccupazione di ambizione personale.

Victor Fatio aveva fin dai primi anni in cui si era dato agli studi zoologici, formato il disegno di una *Fauna dei Vertebrati della Svizzera*, in cui tutte le specie di questo gruppo di animali del suo paese fossero studiati nel modo più minuto e completo possibile e che fosse fatta in maniera tale da concedere a chiunque di poter determinare prontamente e facilmente un individuo qualsiasi fra i Vertebrati svizzeri. Victor Fatio dedicò tutta la vita a tradurre in atto il suo disegno, e riuscì a dare alla scienza un'opera che a buon diritto viene considerata come classica fra quelle che riguardano lo studio sistematico dei vertebrati.

La ragione principale dell'importanza grande che ha l'opera del Fatio è nelle parole seguenti, che il Fatio stesso ha scritto nella prefazione del primo volume:

" Dans le but de donner à mes assertions l'exactitude et " le poids désirable, je me suis fait une loi de tout voir par " mes yeux. Divers naturalistes m'accuseront peut-être de pousser " trop loin le scrupule; mais ils comprendront qu'ayant adopté, " en pareille matière, les principes de Bacon, je n'ai pu, même " en leur faveur, me départir d'une méthode qui seule ne trompe

" jamais. J'ai toujours estimé qu'il valait mieux, plutôt que de " faire parade d'une richesse douteuse, accepter une pauvreté " relative, en étant sûr, du moins, de ce que l'on possède „.

Victor Fatio in queste sue ultime parole è molto modesto, poichè nelle 4318 pagine di cui consta la sua *Faune des Vertébrés de la Suisse* (1) seppe riunire intorno alle 512 specie di Vertebrati studiati una quantità grandissima di osservazioni diligenti, precise, riguardanti sia i costumi, sia la descrizione delle specie. L'opera del Fatio è una miniera di fatti ben studiati alla quale si ricorre continuamente anche oggi con piena fiducia.

Victor Fatio pubblicò il primo volume della sua *Fauna* riguardante i Mammiferi nel 1869. In quel tempo gli studi intorno ai Vertebrati europei, fatta eccezione forse per gli uccelli, erano scarsi e venivano per lo più condotti con metodo antiquato e poco preciso. Il libro del Fatio segnò il principio di un rinnovamento dei metodi di studio delle così dette faune locali. In esso venne ad affermarsi la necessità di studiare le specie di una località sopra serie di individui provenienti effettivamente dalla località stessa, la necessità di studiare minutamente il variare delle proporzioni delle varie parti degli animali, nei giovani e negli adulti dei due sessi, la necessità infine di dare per le singole specie descrizioni lunghe, minute e veramente comparabili fra loro.

---

(1) Victor Fatio, *Faune des vertébrés de la Suisse*. Vol. I, *Histoire naturelle des mammifères*, avec 8 planches. Georg. édit., p. 1-410 (1869). — Vol. II, *Hist. nat. des oiseaux*, parte 1ª, id., 1899, p. 1-836, con 135 fig. e 3 tav.; parte 2ª, id. id. 1904, p. 837-1743, con 120 fig. e 1 tav. — Vol. III, *Hist. nat. des reptiles et des batraciens*, id. id., 1872, p. 1-603, con 5 tav. — Vol. IV, *Hist. nat. des poissons*, parte 1ª, 1-785, con 5 tav., id. id., 1882. — Vol. V. *Hist. nat. des poissons*, parte 2ª, p. 1-576, con 4 tav., id. id., 1890. — *1r Supplément aux reptiles et aux batraciens*, nel vol. IV, 1882; *2e Supplément*, id., nel vol. V, p. II, 1890. — *1r Supplément aux mammifères*, nel vol. III, 1872; *2e Suppl.*, id. id., nel vol. IV, 1882; *3e Suppl.*, id. id., nel vol. V, 1890 (*Poissons*, II). — *Liste préliminaire des mammifères etc., en vue d'un supplément général à la Faune des vertébrés de la Suisse*, " Arch. des Sc. phys. et nat. de Genève „, 1905.

Il lavoro del Fatio comprende 609 figure e 27 tavole fuori testo delle quali 15 sono colorate. I disegni sono fatti tutti dal vero da preparazioni eseguite dal Fatio stesso e sono ammirabili per la loro esattezza e per l'indole loro veramente dimostrativa.

Il metodo seguito dal Fatio per lo studio della fauna svizzera dei Vertebrati fu allora una novità spiccatissima, e come tutte le cose nuove ebbe lode grande e non meno grande biasimo.

Non pochi fra i naturalisti sistematici dalla mente compenetrata ancora dalle idee Linneane dell'assoluta fissità delle specie animali e che da lungo tempo erano avvezzi a considerare le specie dei vertebrati più noti, come un qualche cosa di ben definito, e, si può dire anche, di esaurientemente studiato, non afferrarono allora la portata dell'opera del Fatio e ritennero inutile tutta la cura portata dal Fatio nella descrizione minuta e completa degli esemplarî di vertebrati svizzeri.

A fianco di questi naturalisti si trovò tuttavia allora una schiera di altri che, avendo accolto le conclusioni dell'opera Darwiniana, davano allo studio delle faune locali importanza precipua, appunto in rapporto alle teorie della mutabilità delle specie. Essi riconobbero l'utilità del metodo introdotto dal Fatio, lo seguirono e se ne fecero propugnatori convinti.

In Italia uno dei sostenitori più efficaci dell'opera del Fatio e del suo indirizzo scientifico fu Michele Lessona. Mi si conceda qui un ricordo personale.

Il primo libro che Michele Lessona mise fra le mie mani affinchè io cominciassi ad addestrarmi agli studi di determinazione delle specie ed imparassi i metodi della descrizione loro, fu appunto quello del Fatio, di cui erano state, nel 1873, pubblicate le parti riguardanti i Mammiferi ed i Rettili e Batraci.

Nelle bellissime lezioni di magistero che il Lessona impartì per molti anni agli studenti di scienze naturali, nelle quali egli trattava anche del modo di condurre le ricerche scientifiche, il libro del Fatio veniva studiato, discusso e presentato come uno dei migliori modelli da seguirsi.

A chiarimento di quanto sono venuto dicendo, valgano ancora le parole seguenti che il Lessona scrisse nel suo lavoro intorno al valore specifico della *Rana agilis* Thomas (1).

" Quella minutezza di analisi che condusse gli autori sopra-
" menzionati (Fatio, Boulenger, Camerano, Leydig) alle divisioni
" specifiche fatte, non fu in tutto guida al signor De Betta in
" questo suo lavoro, nel quale i caratteri più importanti su cui

(1) " Atti R. Acc. Sc. di Torino ", vol. XXI, 1886.

“ si fondano le divisioni specifiche, non vennero tenute nel conto
“ voluto..... Il signor De Betta lamenta in me il difetto di troppa
“ minuziosità nella esposizione dei caratteri. Invero, di questo
“ difetto io non mi so pentire, nè correggere. Parmi che oggi
“ nei lavori della sistematica, e sovra tutto negli studì di faune
“ locali, non si richieda soltanto l'esposizione concisa dei carat-
“ teri principali di una specie in una buona diagnosi: parmi
“ che l'indirizzo moderno della sistematica richieda pure l'esame
“ minuto e la minuta esposizione dei caratteri sopra un grande
“ numero di esemplari. Parmi che solo per tal modo si possa
“ realmente progredire nella conoscenza delle variazioni delle
“ forme..... „.

Queste parole del Lessona collimano con quelle che il Fatio scriveva nella sua introduzione ai volumi dei Rettili e Batraci (1).

“ Ainsi, la Suisse ne peut revendiquer ni un Reptile, ni un
“ Batracien qui lui soit propre; toutes les espèces que s'y
“ trouvent habitent également les pays circonvoisins, et yont
“ été dès longtemps, plus ou moins bien étudiées. Je ne puis
“ donc espérer apporter, dans ce travail, beaucoup de nouveautés.
“ Cependant, la science exigeant maintenant toujours plus d'exa-
“ ctitude et de minutie dans les observations, en vue de l'étude
“ si intéressante de la variabilité de l'espèce, je pense qu'une
“ description consciencieuse des divers caractères, des mœurs
“ et des variétés de nos Reptiles ne peut manquer de présenter
“ quelque intérêt „ (2).

---

(1) Pag. 17.

(2) Queste stesse parole del Fatio il Lessona cita pure nel suo lavoro: *Studii sugli Anfibii anuri del Piemonte* (“ Accademia dei Lincei „, Memorie, vol. I, 1877), e le fa seguire dalle considerazioni seguenti: “ Al concetto espresso da queste parole è informato il lavoro di cui vengo qui esponendo i principali risultamenti. Non descrivo fra gli anfibii del Piemonte specie nuove... ma l'esame diligente di ogni carattere zoologico di un gran numero di individui delle varie specie degli anfibii anuri del Piemonte in tutte le età, in tutte le stagioni, e nelle più diverse condizioni, rivela una somma di fatti cui dà gran peso la scienza moderna. Le faune locali hanno grandissima importanza oggidì, e una diligente descrizione di un gruppo di viventi in una regione ristretta può riuscire di sommo vantaggio allo avvenire... Quelle modificazioni, poco apparenti pel lentissimo loro succedersi, ma radicali e profonde, che si vengono producendo, sul suolo e sulla vege-

L'evoluzione ulteriore della scienza ha dato pienamente ragione ai sostenitori del metodo descrittivo proposto dal Fatio.

***

Victor Fatio nacque a Ginevra il 28 novembre 1838. Compiuti gli studi secondari, fu a Zurigo, poi a Berlino e a Lipsia per compiere gli studi superiori e conseguire il grado di Dottore in filosofia.

Suo padre, Gustavo Fatio de Beaumont, grande cacciatore e collettore di uccelli, aveva coltivato nel figlio la naturale tendenza allo studio dei fenomeni naturali e in particolar modo degli animali. Oswald Heer e Dubois Reymond in particolare, diedero al giovane naturalista una soda ed ampia coltura scientifica. Dubois Reymond, come rilevo da una notizia biografica del prof. Emilio Yung (1), aveva accolto il giovane Victor Fatio nel suo laboratorio, indirizzandolo a compiere numerose esperienze sull'azione dell'aria nel corpo degli uccelli. I risultati di queste ricerche vennero esposti dal Fatio nel suo lavoro: *De Avium corpore pneumatico* che fu il suo lavoro di laurea. Probabilmente il Fatio cedendo alle sollecitazioni del Dubois Reymond e dei fratelli Weber, avrebbe continuato le sue ricerche nel campo della fisiologia comparata senza un incidente avvenutogli nell'autunno del 1861. Una violenta malattia di tifo, dice il Yung, " effaça si complètement de sa mémoire ce qu'il avait " appris jusque-là, qu'il dut recommencer toutes ses études. " Il le fit courageusement et, l'année suivante, il s'en alla à Paris, " où H. Milne Edwards et les riches collections du Muséum, " qu'il fréquentait tous les jours, le ramenèrent définitivement " à la zoologie „.

Ritornato a Ginevra nel 1862, diede tutta la sua attività per il rimanente della vita alla esecuzione del suo grande lavoro

---

tazione di un paese, producono importanti modificazioni nella vita animale che non si potranno mai ben valutare senza una descrizione delle faune fatte di tempo in tempo con ogni più ampio sviluppo e colla maggior possibile diligenza, e quale sia l'importanza di un così fatto lavoro non è oggi chi non conosca „.

(1) " Journal de Genève „, 5 aprile 1906.

sulla fauna dei Vertebrati della Svizzera. Il primo volume venne pubblicato nel 1869 e riguarda i mammiferi; l'ultimo volume uscì per le stampe nel 1904 e si riferisce agli uccelli.

La vita che il Fatio condusse a Ginevra fu calma e tranquilla. Victor Fatio, dice il Yung, “ fut un homme parfaitement “ heureux, heureux par son mariage, heureux par sa superbe “ famille, heureux par le travail auquel il se livrait avec allé- “ gresse et sans ambition démesurée „.

***

Victor Fatio si occupò a studiare la Fillossera che nel 1874 aveva invaso i vigneti svizzeri, e colle sue ricerche fece notevolmente progredire le nostre conoscenze intorno al terribile insetto. Si occupò attivamente delle questioni relative alla caccia, alla pesca, alla protezione degli uccelli, alla piscicoltura. In tutte le questioni da lui studiate e in tutte le pubblicazioni ad esse relative il Fatio esercitò sempre l'acume del suo spirito di osservazione e la cura scrupolosa nell'accertamento dei fatti. La lettura delle pubblicazioni del Fatio relative agli argomenti menzionati è oggi ancora ricca di insegnamenti.

Oltre all'opera intorno alla fauna svizzera dei vertebrati, il Fatio ha pubblicato un numero notevole di altri lavori, dei quali si ricordano qui i principali:

1860. *De avium corpore pneumatico.*

1862. *Observations sur la “ Rana agilis „*, “ Rev. et mag. de Zool. „, XIV, pag. 81.

— *Description d'une nouvelle espèce d'Arvicola, le “ Myodes bicolor „*, Id., XIV, pag. 257.

1863. *Catalogue formulaire pour servir à l'étude des Vertébrés en Suisse*, 44 pag. in-f°. Genève (in francese ed in tedesco).

1864. *Les Reptiles et les Batraciens de la Haute Engadine*, “ Archives des Sc. Phys. Nat. „, XXI, pag. 241-290.

— *Une particularité de l'appareil reproducteur mâle chez l' “ Accentor alpinus „*, Id., XIX, pag. 78-80.

— *Id.*, “ Rev. et Mag. Zool. „, XV, pag. 65-67.

— *Les “ Syrrhaptes heteroclitus „ en Europe*, Id., s. 2ª, vol. 16, pag. 122-128.

1864-65. *Extrait d'une lettre au sujet des migrations des hirondelles*, “ Bull. Soc. vaudoise sc. nat. „, vol. 8, pag. 181-182.

1865. *Distribution verticale des Sylviadés en Suisse,* " Bull. Soc. ornith. suisse „, vol. I, pag. 39-67.

1865-66. *Mélanges ornithologiques.* I. *Quelques observations sur la Verderolle (Calamoherpe palustris Bechst.) en Suisse dans le Valais, au val d'Héremence.* II. *Le Martinet à ventre blanc (Cypselus alpinus) en Suisse et particulièrement à Berne,* Id., vol. I.

— *Observations sur la manière avec laquelle plusieurs oiseaux travaillent à masquer leurs nids, lorsqu'ils les voient découverts,* Id., vol. I, pag. 114-115.

— *L'oomètre,* Id., pag. 94-110.

— *Sylvia Cetti, Cormoranus pygmaeus et Buteo lagopus en Suisse,* Id., I, pag. 149.

— *Note sur la faune du Mont Salève,* Id., vol. I, pag. 104-106.

— *Une colonie d'* " *Ardea cinerea* „ *en Suisse,* Id., vol. I, pag. 73-78.

— *Note sur le* " *Cuculus canorus* „, Id., vol. I, parte 2ª, pag. 107-108.

— *Note sur les Hippolais et les Pouillots,* Id., pag. 145-146.

— *Parus borealis,* avec 1 pl., Id.. pag. 79-93. Suppl., parte 2ª, pag. 68.

— *Les* " *Syrrhaptes paradoxus* „ *en Suisse,* Id., pag. 111-114.

1866. *Oeufs du Coucou mêlés à ceux de différents autres oiseaux trouvés dans des nids de Rouges-gorges, etc.,* Id.

— *Poulet monstrueux,* Id.

— *Le Martinet à ventre blanc (Cypselus alpinus) en Suisse et particulièrement à Berne,* Id., I.

— *Rubiette caire (Ruticilla cairii) trouvée au pied du Salève près Genève,* Id.

— *Sur la coloration des plumes,* " Act. de la Soc. Helvét. de Sc. Nat. de Neuchâtel „, 50 sess., pag. 95-98.

— *On the various modes of Coloration of Feathers,* " Ann. Mag. Nat. Hist. „, serie 3ª, vol. 17. Traduzione.

— *On the Forms and Colours of Plumage. On Feathers; their decoloration* in " Intellect. Observ. „, vol. 10 e 11.

— *Les diverses modifications dans les formes et la coloration des plumes,* " Mem. Soc. de phys. et d'hist. nat. de Genève „, XVIII, parte 2ª, pag. 1-60. con 3 tav.

— *Id.,* estratto in " Arch. de la Bibliothèque universelle „, marzo 1866.

— *Id.,* estratto preliminare in " Archives sc. phys. et nat. de Genève „, nouv. pér., pag. 25.

1867. *Les campagnols du bassin du Léman,* 8°, con 6 tav.

— *Quelques mots sur l'air dans le corps de l'oiseau,* " Arch. sc. phys. nat. Genève „, nouv. pér., vol. 28, pag. 143-154.

1868. *Deux Tétras des Musées de Neuchâtel et de Lausanne,* " Bull. Société vaudoise „, IX, 1866-68.

1870. *Liste des divers représentants de l'* " *Alca impennis* „ *en Europe, etc.,* " Bull. Soc. ornith. Suisse „, vol. I, pag. 80-85, suppl. p. 147-149.

— *Quelques mots sur les exemplaires de l'* " *Alca impennis* „ *etc. qui se trouvent en Suisse,* avec 1 pl., Id., vol. 2°, pag. 73-79.

— *Deux cas de variétés albines (Corvus corax, Tordus merula),* Id., vol. 2°, pag. 163-164.

1870. *Melanisme d'une caille (Coturnix communis)*, Id., pag. 166.
— *Trois espèces de Grenouilles rousses observées en Europe*, " Arch. de Sc. phys. ", vol. 37.
1872. *Sur la présence en Suisse du " Dysopes Cestonii " Sav., etc.*, " Schweizer Naturfor. Gesell. Verh. ", LV, pag. 38.
1875. *Formes du " Phylloxera vastatrix " à Pregny, durant la première moitié de l'été*, " Arch. Sc. phys. et nat. ", vol. 53.
— *Sur le développement différent des nageoires pectorales dans les deux sexes et sur un cas particulier de mélanisme chez le Vairon et quelques autres Cyprinides.*
— *Le Phylloxéra dans le Canton de Genève, de mai à août 1875.*
1876. *Id., de août 1875 à septembre 1876.*
— *Communication sur les Cyprinides.*
— *Lettre à M. Dumas sur le Phylloxéra*, " Acc. Sc. Compt. Rend. Paris ", vol. 82.
— *Sur le Phylloxéra* (Bref resumé de son rapport au départ. de l'intérieur du Canton de Genève), " Schweizer Naturf. Gesel. Verh. ", 59.
— *Sur la détermination des Cyprinoides*, Id., 59.
1877. *De la variabilité de l'espèce, à propos de quelques poissons.*
— *Mues du canard de Miquelon*, " Bull. Soc. vaud. des Sc. nat. ", vol. 37.
— *Ueber die Anwendung der Lanterna magica zur demonstration des Phylloxéra.*
— *Sur le traitement des vignes phylloxérées par le sulfocarbonate de potasse*, " Compt. Rend. Ac. Paris ", 84.
1878. *État de la question phylloxérique en Europe en 1877*, " Arch. Sc. phys. et nat. de Genève ", vol. 62.
— *Instructions sommaires à l'usage des experts fédéraux et cantonaux (Phylloxéra).*
— *État de la question phylloxérique en Europe en 1877*, avec 7 carte.
1879. *Tableau des Rongeurs Suisses*, " Guide du Naturaliste ", N. 3, pag. 40.
1880. *Le Phylloxéra et les moyens de le combattre.* Conférences phylloxériques fédérales données à Lausanne.
— *Désinfection des véhicules, des plantes, des collections d'histoire natur., etc.* Gli stessi lavori sono stati presentati all'Accademia delle Scienze di Parigi alle sedute 12 aprile e 26 ottobre 1880. 1ª e 2ª serie di esperienze, " Arch. de Sciences de la biblioth. univers. ", vol. IV.
1881. *Guerre aux parasites par l'acide sulfureux.*
— *Désinfections par l'acide sulfureux.*
— *Révision de la Convention phylloxérique internationale* (Rapport).
1882. *Appareils siphonoides aux transvaseurs spécials pour acide sulfureux.*
1884. *Premier Congrès ornithologique international à Vienne* (Rapport). Genève et Berne.
1885. *L'observation ornithologique en Suisse*, " Arch. de Sc. phys. et nat. de Genève ", vol. 12, pag. 420-430.
— *Le Corégones de la Suisse*, " Recueil zoologique suisse ", vol. II, n. 4.
1887. *Hôtes d'hiver de la ville de Genève*, " Journal Diana ". Berne.
— *Deux maladies des oiseaux peu connues*, Id.

1887. *Rapport du Président de la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève pour l'année 1887*, vol. XXX.
— *La Bondelle queue-brulée*, " Compt. Rend. arch. de Sc. phys. et nat. „.
— *Une maladie du Brochet*, Id.
1888. *Les poissons d'Amérique en Suisse*, Id., vol. XIX, 3° per.
— *Sur un nouveau Corégone français (Coregonus Bezola) du Lac du Bourget*, " Compt. Rend. Acad. Paris „.
— *L'intelligence de la Bécasse*, " Arch. de Sc. phys. et nat. de Genève „, vol. 19, pag. 487-488.
1891. *Un nouveau Chiroptère Suisse (Vespertilio neglectus)*, Id., vol. 24, pag. 509-512.
— *Sur une variété de Bartanelle*, Id., vol. 24, pag. 512-514.
— *Le Tétras de l'Entlebuch*, Id., pag. 514-515.
Fatio e Studer (1885-1887-1891). *Catalogue questionnaire des oiseaux observés en Suisse* (in francese, in tedesco ed in italiano), 3 edizioni.
— — (1892). *Catalogue distributif des oiseaux de la Suisse*. Genève et Berne, pag. 69 e una carta col. (in franc., in ted. e in italiano).
1892. *Catalogue distributif des oiseaux de la Suisse (Analyse)*, 2 pag., " Arch. de Sc. phys. et nat de Genève „.
1894. *Passer rufipectus Bp. et Perdrix saxatilis var. melanocephala Fatio*, " Bull. Soc. zool. de France „, vol. XIX.
— *Perdrix saxatilis var. melanocephala: curieux déplacements de couleurs*, Mein, " Soc. zool. de France „, VII.
Fatio e Studer, *Catalogue des oiseaux de la Suisse*. 1r livr.: *Rapaces diurnes*. Genève, 1889, pag. 108, in-8° gr. e 7 carte (anche in tedesco).
— — 2e livr.: *Hiboux et Fissirostres*. Berne, 1894, pag. 101, in-8° gr. e 4 carte (anche in tedesco).
— — 3e liv.: *Incessores, Coraces, Scansores et Captores part.* Berne, 1901, pag. VIII-253 e 2 carte (anche in tedesco).
1894. *Quelques raretés pour la Suisse*, " Arch. de Sc. phys. et nat. Genève „, pag. 24.
1896. *Histoire des Corégone en Suisse*, Id. (4), vol. I, pag. 275-277.
— *Gibier sédentaire suisse. Mammifères et Oiseaux*, 2 tableaux. Cat. ill. Chasse et Pêche. Expos. nat. Suisse à Genève.
— *Les Corégones en Suisse*, Id.
— *Fabrication des fausses perles ou perles de poissons*, Id.
— *Poissons autochtones suisses. Distributions géographiques horizontales.* Genève.
1897. *Quelques nouveautés relatives au genre Corégone en Suisse*, " Arch. de Sc. phys. et nat. Genève (4), vol. I, pag. 275-277.
— *Quelques particularités ornithologiques du Mont Salève*, " Bull. Société zoolog. de France „.
— *De la présence d'une Corégone du type Dispersus dans le lac de Sarnen*, " Arch. Sc. phys. et nat. Genève „, (4), vol. 4, pag. 84-85.
— *Les Corégones en Suisse. Troubles résultant de l'importation*, Catal. Expos. Nat. Suisse géogr., chasse et pêche, pag. 125-132.

1898. *Ueber Aufstellung von Lokalfaunen in Museen*, " Verhand. Schweiz. Naturf. Ges. „, Ges. 81. Jahrsm., pag. 90.

1899. *Distribution, adaptation et variabilité des poissons en Suisse*, " Bull. Soc. zoolog. de France „, vol. XXIV.

1900. *Arrivée du Coucou*, in " Suisse, Aquila „, 6, pag. 97-99.

1901. *Quelques vertébrés de Poissons provenant des fouilles du Schweizersbild*, " Deutsch. d. Schweiz. Naturf. Gesell. „, XXXV.

— *Trois exemplaires d'une forme particulière de " Tetrao Tetrix „ femelle, peut-être femelle de " Tetrao medius „*, Ornis, vol. XI, Paris, Masson.

— *Deux petits vertébrés nouveaux pour la Suisse (Sorex pygmaeus Pall. et Rana graeca Boul.) et quelques intéressantes variétés*, " Revue Suisse zoolog. „, vol. 8, pag. 467-476.

1902. *Sur la double mue estivale des Anatidés*, " Bull. Soc. vaud. Sc. nat. „ (4), vol. 37. Proc. verb.

— *Nouveautés mammalogiques tessinoises*, " Revue suisse de zool. „, vol. 10.

1905. *La Bouvière " Rhodeus amones „ à Genève*, " Arch. de Sc. phys. et nat. „, pag. 4, vol. XX.

— *Mélanges zoologiques. " Myoxus Dryas intermedius „ en Suisse. Curieux Pouillot, " Phyllascopus „ d'Argovie. Quelques colonies d'oiseaux aquatiques. Le Haidli du Lac de Hallwyl. Adaptation chez les poissons*, " Arch. de Sc. phys. et nat. „, 4° per., vol. XX.

1906. *Sur le Waldrapp " Corvus sylvaticus „ de Gessner*, " Ibis „.

— *Lettera al sig. Howard Saunders sopra varii uccelli*, " Ibis „, 1906.

Emilio Yung, nello scritto sopra citato, dice che Victor Fatio " Bien qu'ayant l'esprit ouvert a toutes les nouveautés ne sa-" crifia pas de temps à discuter les théories incertaines et " passionnantes sur l'origine des êtres dont ses contemporains " se montrèrent si friands. Il les tenait pour vaines et il préféra " appliquer les ressources de son intelligence, faite de clarté " et de précision, à l'accomplissement d'une œuvre conçue par " lui dès sa jeunesse „ che è appunto la fauna dei Vertebrati svizzeri.

Chi legge tuttavia le opere del Fatio ha l'impressione ben chiara che egli era evoluzionista convinto. Non solo ne è una prova il metodo di studio degli animali da lui seguito: ma lo provano le ripetute affermazioni esplicite intorno al concetto della variabilità delle specie.

Nell'introduzione al volume II degli Uccelli, da lui pubblicato due anni circa prima di morire (1904), si leggono queste sue parole:

" L'étude minutieuse des variétés et formes diverses pré-" sente certainement un très grand intérêt et une utilité incon-

" testable: mais, c'est surtout, à mon avis, parce qu'elle peut
" jeter un jour précieux sur l'influence des conditions d'habitat
" et la variabilité, soit sur l'importance de la lutte entre l'héré-
" dité et l'adaptation.

" Les exemples de variabilité sous l'influence de conditions
" locales persistantes ne manquent certes pas, tant dans les
" Vertébrés que dans les Invertébrés, et jusque dans les étroites
" limites de la Suisse.

" Je ne puis par conséquent partager l'opinion de bien des
" naturalistes qui, croyant à l'immutabilité de l'espèce et à la
" fixité des caractères, affectent de ne pas voir les affinités
" qui relient leurs prétendues espèces, incontestablement formes
" voisines, parentes ou alliées, quoique parfois géographique-
" ment très distantes „.

* * *

Victor Fatio fu grandemente stimato dai naturalisti di tutti i paesi, e numerose Società scientifiche lo inscrissero fra i suoi membri. L'Accademia nostra lo nominò suo socio corrispondente nella seduta del 25 gennaio 1885.

La Francia, il Portogallo, l'Austria, la Prussia, la Spagna, la Serbia, la Russia, l'Italia lo insignirono di ordini cavallereschi.

Il Museo zoologico di Torino ebbe per oltre trent'anni rapporti scientifici con Victor Fatio continui e cordialissimi.

Il nome di Victor Fatio è degno di pigliar posto fra quelli di Pictet de la Rive, di Edoardo Claparède, di Aloïs Humbert, di Hermann Fol, di Henri di Saussure che la Svizzera ha a buon diritto scritto fra quelli dei suoi figli più illustri e la Scienza fra i suoi più benemeriti cultori.

Proprietà relativa alle lenti cilindriche biconvesse simmetriche.

Nota dell'Ingegnere ENRICO GATTI.

(Con una Tavola).

---

1. — I cerchi uguali Ω, Ω' (fig. 1) di raggio a e di centri rispettivi O, B rappresentino le sezioni normali di due cilindri retti rifrangenti d'indice di rifrazione $n \lessgtr \frac{2}{\sqrt{2}}$ e di angolo limite θ.

Si riferiscano tali cerchi ai due assi cartesiani ortogonali di direzioni positive oy, ox e si ammetta mobile il punto B sull'asse Ox. Indicato con c il segmento OB e supposto:

$$0 < c < 2a \tag{1}$$

sieno E, D i punti di intersezione delle circonferenze Ω, Ω'.

Nella supposizione fatta, i cilindri considerati determineranno, col solido a comune, una lente biconvessa simmetrica avente una sezione retta come $EADS$, e ciascun punto del cerchio Ω potrà considerarsi come punto di incidenza di raggi, i quali si supporranno sempre in quella sezione normale, pur di dare a c tale valore da condurre la circonferenza Ω' a passare pel punto di incidenza scelto.

Supposto che la luce si propaghi nel verso Ox, si ammetta incidente con angolo i in un punto I di coordinate $OK = x$, $IK = y$ dell'arco come EAD, un raggio $\frac{IV}{V'I}$ situato nel quadrante $\frac{NIL}{NIL'}$ e se ne tracci il raggio rifratto $\frac{IF}{IF'}$.

In quanto sarà esposto verranno dapprima considerati i punti, come I, d'ordinata positiva.

2. — Si determinino i punti dell'arco come EA (fig. 1) che scelti quali punti d'incidenza di raggi appartenenti all'uno od

all'altro dei noti quadranti, dànno luogo a raggi rifratti incidenti in un punto dell'arco come ESD. Perciò congiunti i punti E, D con B si traccino le rette EP, DQ con angoli $BEP = BDQ = \theta$.

I punti d'intersezione E, D, delle circonferenze Ω', Ω di equazioni rispettive:

$$y^2 + (c - x)^2 - a^2 = 0 \tag{2}$$

$$y^2 + x^2 - a^2 = 0 \tag{3}$$

hanno per comune ascissa $\frac{c}{2}$. Le ordinate loro sono espresse dalla

$$y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 - c^2}$$

e sarà:

$$y = \pm a \cos\theta \quad \text{per } c = 2a \operatorname{sen}\theta \quad \text{e per } c = -2a \operatorname{sen}\theta.$$

Le rette tracciate EP, DQ, hanno come equazione complessiva la:

$$(a) \quad (x - c)(c \operatorname{tang}\theta + \sqrt{4a^2 - c^2}) \mp y(\operatorname{tang}\theta \sqrt{4a^2 - c^2} - c) + \\ + 2a^2 \operatorname{tang}\theta = 0$$

nella quale si sceglierà il segno $\mp$ per la retta $\frac{EP}{DQ}$.

Indicate genericamente con y, x le coordinate dell'altro punto $\frac{P}{Q}$ d'incontro della retta $\frac{EP}{DQ}$ colla circonferenza Ω' si avrà (2):

$$(b) \qquad y = \mp \frac{2c \operatorname{tang}\theta + (1 - \operatorname{tang}^2\theta)\sqrt{4a^2 - c^2}}{2(1 + \operatorname{tang}^2\theta)}$$

$$(c) \qquad x = \frac{c(3 + \operatorname{tang}^2\theta) - 2 \operatorname{tang}\theta \sqrt{4a^2 - c^2}}{2(1 + \operatorname{tang}^2\theta)}$$

e, nella (b), si assumerà il segno $\mp$ pel punto $\frac{P}{Q}$.

L'ordinata del punto P, poichè $n > \sqrt{2}$, è negativa e però il raggio BE sarà visto da ciascun punto dell'arco come EA, sotto un angolo maggiore di θ.

Ciascun raggio rifratto corrispondente a ciascun raggio del quadrante come NIL ed incidente in un qualunque punto dell'arco come EA intersecherà quindi la circonferenza Ω in un punto appartenente all'arco come ESD.

Dal valore (b) di y relativo al punto Q si trae la relazione:

$$(d) \qquad c = 2y \operatorname{sen} 2\theta \pm 2\cos 2\theta \sqrt{a^2 - y^2}$$

nella quale dovrà scegliersi il valore pel quale sia $c = 2a \operatorname{sen} \theta$ per $y = a \cos\theta$ e quindi quello corrispondente al segno negativo.

Tale valore di c sostituito nella (c) porge coll'equazione:

$$(e) \qquad x^2 + y^2(1 + 8\cos^2\theta) - 4xy \operatorname{sen} 2\theta - a^2(4\cos^2\theta - 1)^2 = 0$$

il luogo dei punti come Q, luogo il quale è (b), (c) una ellisse di centro O.

Eliminando x fra le equazioni (e), (3) si ottiene come equazione complessiva delle ordinate dei punti reali d'incontro di quelle ellisse colla circonferenza Ω la:

$$(f) \qquad (y^2 - a^2\cos^2\theta)(y^2 - a^2\cos^2 2\theta) = 0.$$

Il punto, segnato in a, d'ordinata $y = a \cos \theta$, d'intersezione dell'ellisse (e) colla circonferenza Ω è quello d'incontro, d'ordinata positiva, delle due circonferenze Ω, Ω', quando sia $c = 2a \operatorname{sen} \theta$, e quello d'ordinata $y = -a \cos \theta$, segnato in a', è il punto di intersezione, d'ordinata negativa, delle circonferenze stesse quando sia $c = -2a \operatorname{sen} \theta$. Si osservi che ($d$): $c=0$ quando $y = \pm a \cos 2\theta$.

Dei punti quindi dell'ellisse (e) aventi simili ordinate, l'uno sarà b cioè quello d'ordinata positiva comune alla circonferenza Ω ed alla retta Ob condotta così che l'angolo $HOb = 2\theta$ e l'altro il punto b' simmetrico di b rispetto al punto O.

L'ellisse considerata passa pei punti a, b, a', b', e siccome il valore (d) di c, annullandosi per $y = \pm a \cos 2\theta$ riesce positivo quando sia $y = a \cos\theta$ ne segue che i punti di tal curva compresi nella circonferenza Ω ed ai quali corrispondono valori di c positivi saranno quelli dell'arco $a\,b$.

Il segmento come $B\,D$ sarà visto sotto l'angolo θ da ciascun punto dell'arco ab, e — come subito si può verificare — l'arco

stesso separerà i punti del cerchio Ω, cioè i punti della regione abD, dai quali quel segmento è visto sotto un angolo maggiore di θ da quelli della regione aEb dai quali esso si vede sotto un angolo minore di θ.

Considerata la circonferenza Ω' passante per un qualunque punto Q dell'arco ab riesce inoltre facile vedere che per i punti dell'arco come QE, eccettuato Q, godranno della proprietà di intersecare la circonferenza Ω in punti appartenenti all'arco come ESD, i raggi rifratti, dovuti agli incidenti nel quadrante come NIL', i quali sono compresi nell'angolo che può esprimersi con:

$$(g) \qquad DQ'B = \theta - \frac{1}{2}\gamma$$

quando detto Q' un punto qualunque dell'arco come QE, si indichi con γ l'angolo come QBQ'.

Tenuto presente quanto venne stabilito si può concludere:

1° che ciascun raggio rifratto, corrispondente a ciascun raggio del quadrante come NIL' ed incidente in qualsiasi punto della regione $Sabz$, intersecherà la circonferenza Ω in un punto dell'arco come ESD;

2° che soltanto i raggi rifratti compresi nell'angolo come $DQ'B$ — definito colla (g) — e corrispondenti a raggi del quadrante come NIL' godranno della proprietà ora enunciata quando, eccettuati essendo i punti dell'arco ab, si scelgano come punti d'incidenza quelli della regione aEb.

3. — Si supponga — per un momento — il punto I (fig. 1) scelto per modo che il punto F', di intersezione del raggio rifratto considerato IF' colla circonferenza Ω, cada nell'arco come ESD.

Nella generazione degli angoli come $\frac{BIF}{BIF'}$ si ammetterà che IB sia il primo lato e, gli angoli stessi si assumeranno positivi quando il loro secondo lato apparterrà al quadrante come $\frac{L'IB}{LIB}$.

Si diranno inoltre angoli r ed r' relativi al punto di incidenza scelto — corrispondenti a raggi incidenti nel quadrante

come $\frac{NIL}{NIL'}$ — gli angoli come $\frac{BIF,}{BIF,'}\frac{IFO}{IF'O}$ dovuti ad un raggio rifratto come $\frac{IF}{IF'}$.

Congiunto il punto I con O, indicato con α l'angolo OIB risulta:

$$\frac{\operatorname{sen} r'}{\operatorname{sen}(\alpha \pm r)} = \frac{OI}{a}$$

e in tale relazione si terrà conto del segno positivo o del negativo secondochè verrà considerato il triangolo OIF od il triangolo OIF'.

Ma siccome:

$$\alpha = \overset{<}{OIK} + \overset{<}{KIB}$$

e

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{cy}{a\,.\,IO} \qquad \cos \alpha = \frac{x^2 + y^2 - cx}{a\,.\,IO}$$

così la relazione scritta, quando si ponga mente alla (2), si trasforma nella:

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{sen} r' = \frac{1}{a^2}\left[cy \cos r \pm (cx - c^2 + a^2) \operatorname{sen} r\right]$$

nella quale sarà $\pm$ il segno da considerarsi quando essa si riferirà ad un raggio come $\frac{IF}{IF'}$.

La relazione (4) vale per tutti i punti di incidenza scelti nel semicerchio SEZ i quali godono della proprietà del punto I.

Sarà però lecito farla valere anche per quegli altri punti del semicerchio che non hanno la proprietà ammessa — cioè sarà lecito non tener conto del secondo punto di intersezione dovuto in simili casi al segmento come IF' ed all'arco come EAD — pur di intendere ristretta ai soli raggi dell'angolo definito colla (g) le proprietà che per tale modo verrebbero ad attribuirsi a tutti i raggi rifratti corrispondenti agli incidenti nel quadrante come NIL'.

Gli è con tale restrizione che in quanto segue si astrarrà dalla proprietà già supposta nel punto scelto come punto di incidenza, applicando la relazione (4) a determinare quali sieno i raggi incidenti in un punto qualsiasi I i quali dànno luogo a raggi direttamente emergenti dall'arco come ESD, cioè senza alcuna riflessione dei raggi rifratti corrispondenti.

4. — I valori massimo e minimo che possono essere assunti da r nella (4) sono θ e O.

I. — Fatto $r = \theta$ si ottiene (4):

$$\operatorname{sen} r' = \frac{1}{a^2}\left[cy\cos\theta \pm (cx - c^2 + a^2)\operatorname{sen}\theta\right]$$

e perciò sarà:

$$r' \gtreqless \theta$$

per

$$y \gtreqless (c - x)\operatorname{tang}\theta \tag{5}$$

oppure per

$$y \gtreqless \frac{2a^2}{c}\operatorname{tang}\theta - (c - x)\operatorname{tang}\theta \tag{6}$$

secondochè si tratterà di raggi incidenti nel quadrante come LIN o nel quadrante come NIL'.

II. — L'equazione (4) per $r = 0$ ed $r' = \theta$ porge:

$$y = \frac{a^2 \operatorname{sen}\theta}{c} \tag{7}$$

e sarà: $r' \gtreqless \theta$ per $y \gtreqless \dfrac{a^2\operatorname{sen}\theta}{c}$.

5. — Le equazioni racchiuse nella (5), (6) rappresentano due rette. La prima (fig. 1) passa per B, l'altra incontra l'asse Ox in un punto d'ascissa $y = c - \dfrac{2a^2}{c}$ e gli angoli fatti da tali rette colla direzione positiva Ox sono rispettivamente $(180 - \theta)$ e θ.

Indicate ordinatamente con y_1, x_1; y_2, x_2; y_3, x_3; le coordinate dei punti di intersezione delle rette (5), (6), (7), colla circonferenza Ω' si ottiene (2):

$$\begin{aligned} y_1 &= \pm a\operatorname{sen}\theta \\ x_1 &= c \mp a\cos\theta \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{2a^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \pm a\operatorname{sen}\theta\sqrt{c^2 - 4a^2\operatorname{sen}^2\theta}}{c} \\ x_2 &= \frac{c^2 - 2a^2\operatorname{sen}^2\theta \pm a\cos\theta\sqrt{c^2 - 4a^2\operatorname{sen}^2\theta}}{c} \end{aligned} \tag{9}$$

$$(10)\qquad y_3 = \frac{a^2 \operatorname{sen}\theta}{c} \qquad x_3 = \frac{c^2 \pm a\sqrt{c^2 - a^2\operatorname{sen}^2\theta}}{c}.$$

La circonferenza Ω' sarà quindi intersecata in punti reali e distinti dalla retta (5) mentre i punti di sua intersezione colla $\begin{matrix}(6)\\(7)\end{matrix}$ saranno reali e distinti, reali e coincidenti, o coniugati:

secondochè (1)
$$c \gtreqless 2a\operatorname{sen}\theta$$
$$c \gtreqless a\operatorname{sen}\theta.$$

Dovendosi considerare, come venne ammesso, quali punti di incidenza, quelli del semicerchio *ZES*, pei punti determinati dalla (8) potrà essere tale quello corrispondente all'ordinata positiva. E, quando sieno reali, fra quelli individuati dalla (9) — che hanno ordinata positiva perchè $c<2a$ — e fra gli altri definiti dalla (10) — pure d'ordinata positiva — potrà essere punto d'incidenza quello di minore ascissa.

A ciascun valore di c corrisponde una posizione della circonferenza Ω', unitamente alle rette (5), (6), (7), e volendo determinare i punti del luogo dei punti di intersezione di ciascuna di quelle rette colla circonferenza Ω', i quali potranno essere considerati come punti di incidenza, converrà eliminare c fra le tre coppie d'equazioni che si ottengono combinando la (2) rispettivamente colle (5), (6), (7). Così operando si otterranno ordinatamente come equazioni dei luoghi accennati le seguenti:

$$(11)\qquad y = \pm a\operatorname{sen}\theta$$

$$(12)\qquad y^4 + y^2x^2 - 4xya^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + a^2y^2(3\operatorname{sen}^2\theta - 1) + - a^2x^2\operatorname{sen}^2\theta + a^4\operatorname{sen}^2\theta = 0$$

$$(13)\qquad y^4 + y^2x^2 - 2xya^2\operatorname{sen}\theta - a^2y^2 + a^4\operatorname{sen}^2\theta = 0.$$

Rappresentato, nella figura 2, il noto cerchio Ω riferito ai noti assi cartesiani di direzioni positive Oy, Ox è subito visto che, per la convenzione fatta sul segno di y, delle due rette determinate dalla (11) saranno da considerarsi come punti di

incidenza i punti della retta alla quale corrisponde il segno positivo e precisamente quelli del segmento DE, di essa, compreso nella circonferenza Ω.

La retta DE riuscirà tangente nel suo punto d'incontro B', coll'asse Oy, alla circonferenza Ω'' di raggio $OL = a \operatorname{sen}\theta$.

Dei luoghi (12), (13) potranno pure considerarsi come punti di incidenza i punti reali di essi racchiusi nella semicirconferenza ABC i quali pel luogo $\begin{matrix}(12)\\(13)\end{matrix}$ sono quelli ai quali corrispondono valori di c uguali o maggiori di $\begin{matrix}2a \operatorname{sen}\theta\\ a \operatorname{sen}\theta\end{matrix}$.

I punti reali dei luoghi (12), (13) possono determinarsi graficamente ricorrendo alle rette (6), (7), però di essi è utile determinare taluni punti particolari.

I. — Prendendo in esame il luogo (12) si osservi che l'equazione sua per $y = 0$ porge $x = \pm a$ a cui corrisponde un valore di $c = \pm 2a$ e che però sarà C un punto del luogo stesso.

Fatto nella (9) $c = 2a \operatorname{sen}\theta$ risulta:

$$y_2 = a \cos\theta \quad \text{ed} \quad x_2 = a \operatorname{sen}\theta:$$

il punto F intersezione della semicirconferenza ABC colla normale LF all'asse Ox è quindi un secondo punto del luogo.

Essendo poi la tangente in F a tale luogo rappresentata da:

$$y = x \operatorname{tang}\theta$$

essa tangente sarà la retta OF: sarà cioè la tangente in quel punto alla circonferenza Ω' nella posizione assunta pel valore attribuito a c.

Dalla (9) per $y_2 = a \operatorname{sen}\theta$ si trae $c = \frac{a}{\cos\theta}$. Ora, la circonferenza Ω' passa per E pel valore positivo di $c = 2a \cos\theta$, e, siccome per $n > \sqrt{2}$ risulta $2a \cos\theta > \frac{a}{\cos\theta}$, così determinato il punto K per modo che sia $OK = \frac{a}{\cos\theta}$ la circonferenza Ω' di centro K taglierà il segmento DE in un punto, che si dirà H, il quale pure appartiene al luogo (12).

L'asse radicale della circonferenza (2) e della circonferenza Ω'' rappresentata dalla:

$$y^2 + x^2 = a^2 \operatorname{sen}^2\theta \tag{14}$$

ha per equazione la:

$$x = \frac{c^2 - a^2\cos^2\theta}{2c} \tag{15}$$

ed il valore positivo di c per cui riesce:

$$x_2 = x \qquad \text{è} \qquad c = a\sqrt{1 + 3\,\mathrm{sen}^2\theta}$$

al quale corrispondono le coordinate (9):

$$y = \frac{a\,\mathrm{sen}\theta\cos\theta}{\sqrt{1 + 3\,\mathrm{sen}^2\theta}} \qquad x = \frac{2a\,\mathrm{sen}^2\theta}{\sqrt{1 + 3\,\mathrm{sen}^2\theta}} \tag{15'}$$

pel punto reale di ordinata positiva comune alle circonferenze Ω', Ω''.

Segnato ON uguale al valore di c ora trovato, pei valori ammessi per n risulta $ON > OK$: la circonferenza Ω' descritta con centro in N taglierà la circonferenza Ω'' in punti reali ed il punto d'ordinata positiva (15'), detto Q, sarà un nuovo punto del luogo (12).

Ma indicata la (12) con $F(x,y)=0$ e la (14) con $f(x,y)=0$ risulta pel punto Q:

$$F'(x, y) = f'(x, y) = -2\,\mathrm{tang}\,\theta$$

e però i due luoghi avranno a comune in Q la tangente che ha per equazione:

$$y\cos\theta + 2x\,\mathrm{sen}\,\theta - a\,\mathrm{sen}\,\theta\sqrt{1 + 3\,\mathrm{sen}^2\theta} = 0.$$

Sostituito il valore di x tratto da tale equazione nella (12) essa si trasforma nella:

$$(y\sqrt{1 + 3\,\mathrm{sen}^2\theta} - a\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta)^2(y^2 + 3a^2\mathrm{sen}^2\theta) = 0$$

e però quella tangente non avrà altri punti reali con ordinata positiva, oltre Q, a comune col luogo (12).

Il luogo stesso riuscirà poi da banda opposta alla circonferenza Ω'' rimpetto a detta tangente, poichè il punto d'incontro di essa tangente coll'asse Ox ha per ascissa:

$$\frac{a}{2}\sqrt{1 + 3\,\mathrm{sen}^2\theta} < a.$$

L'arco $FHQC$ rappresenterà quindi il segmento del luogo (12) che importava determinare.

II. — Venendo al luogo rappresentato dalla (13) si ricordi che l'ordinata positiva relativa al punto d'incontro della circonferenza Ω colla Ω' è $\frac{1}{2}\sqrt{4a^2-c^2}$ e si noti che i valori positivi di c pei quali risulta:

$$\frac{a^2 \operatorname{sen}\theta}{c} = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2-c^2}$$

sono dati dalla:

$$c = a\sqrt{2(1 \pm \cos\theta)}.$$

Posto (fig. 2):

$$OM = a\sqrt{2(1+\cos\theta)} \qquad OI = a\sqrt{2(1-\cos\theta)}$$

risulta pel valore ammesso per n:

$$OM > ON \qquad OC > OI > OL$$

e di più:

$$a > a\sqrt{2(1+\cos\theta)} - a.$$

quindi i punti reali P, R d'ordinata positiva — intersezioni della circonferenza Ω colle posizioni assunte dalla Ω' portata col suo centro ordinatamente in M ed in I — apparterranno al luogo (13).

Un altro punto si trova sul segmento DE in S essendo $SC = a$ poichè (10) è appunto $y_3 = a \operatorname{sen}\theta$ per $c = a$.

L'ordinata positiva del punto d'intersezione della (2) colla (14) è (15):

$$y = \frac{1}{2c}\sqrt{4c^2a^2\operatorname{sen}^2\theta - (c^2 - a^2\cos^2\theta)^2}$$

pei valori di c compresi fra $a(1+\operatorname{sen}\theta)$ ed $a(1-\operatorname{sen}\theta)$ ed è:

$$c = a\sqrt{1+\operatorname{sen}^2\theta}$$

il valor positivo di c pel quale risulta $y_3 = y$.

Fatto $OZ = a\sqrt{1+\operatorname{sen}^2\theta}$, pel valore ammesso per n, il punto Z cade fra C e K ed

$$a > a\sqrt{1+\operatorname{sen}^2\theta} - a\operatorname{sen}\theta.$$

Gli è perciò che il punto V d'ordinata positiva di intersezione della (2) colla (14), quando il centro della prima circonferenza sia portato nel punto Z, è un altro punto del luogo (13).

Le coordinate del punto V sono espresse da:

$$y = \frac{a \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2\theta}} \qquad x = \frac{a \operatorname{sen}^2\theta}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2\theta}}.$$

Indicata la (13) con $F_1(x, y) = 0$ risulta pel punto V:

$$F_1'(x, y) = f'(x, y) = - \operatorname{sen}\theta$$

e perciò la (13) e la (14) avranno in V la stessa tangente. Tale tangente, rappresentata dalla equazione:

$$y + x \operatorname{sen}\theta - a \operatorname{sen}\theta \sqrt{1+\operatorname{sen}^2\theta} = 0,$$

passa pel punto Z.

Eliminando x, fra la (13) e questa ultima equazione, risulta:

$$(y\sqrt{1+\operatorname{sen}^2\theta} - a \operatorname{sen}\theta)^2 (y^2 + a^2 \operatorname{sen}^2\theta) = 0.$$

Quella tangente non avrà quindi altri punti reali con ordinata positiva, oltre V, a comune colla (13) mentre la porzione $RSVP$ del luogo (13), racchiusa nel semicerchio ABC, riescirà da banda opposta della circonferenza (14) rispetto alla tangente stessa.

Riassumento quanto venne esposto ai (ff. 4-5) si può concludere che:

1° i punti del semicerchio ABC (fig. 2) considerati come punti di incidenza di raggi del quadrante come LIN relativamente ai quali ad un angolo di rifrazione $r = \theta$ corrisponde un angolo $r' \gtreqless \theta$ sono ordinatamente quelli del segmento DE e dei segmenti circolari — DEB, $DEAC$ — nei quali quella retta separa il semicerchio considerato;

2° i punti del semicerchio ABC considerati come punti d'incidenza di raggi del quadrante come $L'IN$ relativamente ai quali ad un angolo $r = \theta$ corrisponde un angolo $r' \gtreqless \theta$ sono ordinatamente quelli dell'arco FQC e delle regioni $FQCP$, $FBAC$ nelle quali quell'arco separa il semicerchio considerato;

3° i punti del semicerchio ABC considerati come punti d'incidenza di raggi relativamente ai quali ad un angolo $r = \theta$

corrisponde un angolo $r' \gtreqless \theta$ sono ordinatamente quelli dell'arco RVP e quelli delle regioni $RVPE$, $RACPV$ in cui quell'arco separa il semicerchio, e ciò qualunque sia il quadrante nel quale si considerano quei raggi.

6. — Si risolva la (4) rispetto sen$r$ ponendo la condizione $r' = \theta$.

Indicato con ρ (fig. 1) il segmento OI e tenuto presente che:

$$x^2 + y^2 = \rho^2; \quad (cx - c^2 + a^2)^2 + c^2y^2 = a^2\rho^2$$

si otterrà:

$$a^2\rho^2 \operatorname{sen}^2 r \mp 2a^2 \operatorname{sen}\theta (cx - c^2 + a^2) \operatorname{sen} r - y^2c^2 + a^4 \operatorname{sen}^2\theta = 0 \tag{16}$$

e però:

$$\operatorname{sen} r = \frac{\pm a \operatorname{sen}\theta (cx - c^2 + a^2) \pm cy \sqrt{\rho^2 - a^2 \operatorname{sen}^2\theta}}{a\rho^2}. \tag{17}$$

Nella (16) si assegnerà il segno $\mp$ e nella (17) il segno $\pm$ al coefficiente di $(cx - c^2 + a^2)$ se si tratterà di raggi appartenenti al quadrante come $\frac{LIN}{L'IN}$.

I valori (17) di sen$r$ riusciranno complessi coniugati, reali ed uguali, reali e distinti, secondochè sarà:

$$\rho \lesseqgtr a \operatorname{sen}\theta \tag{18}$$

a) Se $\rho = a \operatorname{sen}\theta$ la (17) offre le coppie di radici uguali:

$$\operatorname{sen} r = \pm \frac{cx - c^2 + a^2}{\rho^2} \operatorname{sen}\theta \tag{19}$$

delle quali quella che si riferisce ai raggi incidenti nel quadrante come $\frac{LIN}{L'IN}$ sarà positiva o negativa:

$$cx - c^2 + a^2 \gtreqless 0 \tag{a'}$$

secondochè:

$$cx - c^2 + a^2 \lesseqgtr 0; \tag{b'}$$

b) Quando $\rho > a \operatorname{sen}\theta$ le radici di ciascuna coppia tratte dalla (16), hanno ugual segno, se $y < \frac{a^2 \operatorname{sen}\theta}{c}$, e, segno opposto, se $y > \frac{a^2 \operatorname{sen}\theta}{c}$.

Nel primo caso saranno ambedue positive od ambedue negative, e nel secondo sarà maggiore la positiva o la negativa secondochè verrà soddisfatta la prima o la seconda delle condizioni racchiuse nella $\frac{a'}{b'}$ se si tratterà di raggi incidenti nel quadrante come $\frac{LIN}{L'IN}$.

Che se fosse $y = \frac{a^2 \operatorname{sen}\theta}{c}$ allora una delle radici di ciascuna delle coppie dovute alla (16) avrebbe valore nullo e le rimanenti il valore:

$$(d) \qquad \pm \frac{2(cx - c^2 + a^2)}{\rho^2} \operatorname{sen}\theta$$

e quindi pei raggi incidenti nel quadrante come $\frac{LIN}{L'IN}$ sarà la radice assunta col segno $\pm$ (d) positiva o negativa secondochè sarà soddisfatta l'una o l'altra delle condizioni rappresentate colla $\frac{a'}{b'}$.

Le radici dell'una coppia riuscirebbero poi uguali a quelle dell'altra e reali quando, essendo $y \gtreqless \frac{a^2 \operatorname{sen}\theta}{c}$, si verificasse la condizione $cx - c^2 + a^2 = 0$.

c) Occorrendo ora determinare quali sieno i punti del semicerchio ABC pei quali:

$$cx - c^2 + a^2 \gtreqless 0$$

si scelga per c un determinato valore (1) e si traccino (fig. 2) le circonferenze Ω' ed Ω''' di raggio e di diametro rispettivi $Oe = c$.

La Ω''' sarà rappresentata dall'equazione:

$$y^2 + x^2 - cx = 0:$$

ed i punti di sua intersezione colla Ω' avranno per coordinate:

$$(c') \qquad x = \frac{c^2 - a^2}{c}$$

$$(d') \qquad y = \pm \frac{a}{c} \sqrt{c^2 - a^2}$$

sicchè. tali punti saranno reali per $c \geqq a$ ed immaginari per $c < a$.

Si supponga, così come venne assunto in figura, $oe>a$ e si indichi con f il punto d'ordinata positiva gf di intersezione della Ω' colla Ω'''.

Il luogo dei punti come f si otterrà eliminando c fra le equazioni (c'), (d'). Gli è per tal modo che si ottiene la:

$$(e') \qquad y^4+y^2x^2-a^2x^2=0.$$

Il luogo (e') ha a comune col semicerchio ABC i punti reali che, come f, sono posti, ciascuno, su una delle circonferenze Ω' alle quali corrispondono valori di $c \gtreqless a$ ed è manifestamente tangente in o all'asse oy. Di più esso passa pei punti V, H ed interseca la circonferenza Ω nel punto Z' d'ordinata positiva in cui la bisettrice dell'angolo yox pure la incontra. Infatti combinando la (e') ordinatamente colle: $y^2+x^2=a^2 \operatorname{sen}^2\theta$; $y=a \operatorname{sen}\theta$: $y^2+x^2=a^2$ e sostituendo ad x e ad y i valori positivi dati dalle (c'). (d') si ottengono per c i valori positivi e maggiori di a:

$$c=a\sqrt{1+\operatorname{sen}^2\theta}; \quad c=\frac{a}{\cos\theta}; \quad c=a\sqrt{2}$$

i quali provano la premessa.

Tracciato l'arco (fig. 2) $OVHZ'$ del luogo (e') racchiuso nel semicerchio ABC, i punti di esso luogo sono tali che (c') per essi:

$$cx-c^2+a^2=0.$$

La condizione perchè (2), (d'):

$$(f') \qquad a^2-(c-x)^2 \gtreqless \frac{a^2}{c^2}(c^2-a^2)$$

è:

$$c^2x^2-2c^3x+c^4-a^4 \lesseqgtr 0.$$

Ma le radici di quel polinomio risoluto come equazione rispetto ad x sono racchiuse nella:

$$x=\frac{c^2 \pm a^2}{c}$$

e poichè i punti dell'arco come EA (fig. 1), nei quali si hanno a considerare raggi incidenti, non possono avere una ascissa maggiore di $\frac{c}{2}$ ne consegue che, nei limiti entro i quali può

farsi variare x per ciascun valore di $c>a$, la (f') sarà verificata per:

$$x \gtrless \frac{c^2-a^2}{c}.$$

I punti adunque d'ordinata positiva delle Ω' pei quali sarà:

$$cx-c^2+a^2 \gtrless 0$$

saranno ordinatamente quelli degli archi come fs, fv — staccati dal punto f — pel quale quel trinomio ha valore nullo.

Tracciato l'arco OW di centro C può dirsi che, quando sia $c>a$, pei punti del semicerchio ABC nei quali possono considerarsi raggi incidenti cioè pei punti del triangolo mistilineo WOC — esclusione fatta pei punti dell'arco OW — sarà:

$$cx-c^2+a^2 \overline{\gtrless} 0$$

secondochè essi punti si troveranno sull'arco $Z'HVO$, oppure apparterranno rispettivamente alle regioni WOZ', $Z'OC$.

Quando fosse $c=a$ allora come punti d'incidenza potrebbonsi considerare i punti dell'arco OW e per tali punti — eccettuato O — si avrebbe $cx-c^2+a^2>o$ perchè $x>o$.

Allorchè sia $c<a$, poichè la porzione d'arco della Ω' compresa nel semicerchio ABC (fig. 2) ha per ascisse de' suoi estremi $c-a$ e $\frac{c}{2}$ vi saranno, in simile arco, punti d'ascissa negativa, un punto d'ascissa nulla e punti d'ascissa positiva.

Pei punti d'ascissa $x \overline{>} o$ è $cx-c^2+a^2>o$ e così pure accade per i punti d'ascissa negativa, perchè simile relazione equivale (2) alla ρ^2-cx la quale in tal caso è positiva.

I punti adunque del semicerchio ABC pei quali è:

$$cx-c^2+a^2 \overline{\gtrless} 0$$

sono ordinatamente quelli dell'arco $Z'VO$ e delle regioni $Z'VOAB$, $Z'VOCP$ nelle quali l'arco stesso separa il semicerchio considerato.

Simile proprietà verrà usata nell'applicare la (4) ai punti del semicerchio ABC pei quali le radice racchiuse nella (17) risultano reali.

7. — Si possono ora esaminare i diversi casi definiti dalla (18).

A) $$\rho < a \operatorname{sen} \theta.$$

Tenuto presente quanto venne supposto intorno al segno di y, è chiaro che alla condizione ora espressa rispondono i punti interni alla semicirconferenza $A'B'L$. Relativamente ad essi, qualunque sia il quadrante nel quale si immaginano raggi incidenti, non vi ha alcun valore dell'angolo r al quale corrisponda per r' un valore uguale a θ.

D'altro lato gli angoli r ed r' relativi a ciascuno di tali punti (ff. 5), e qualunque sia il quadrante nel quale si considerano raggi incidenti, sono tali che:

$$\text{per } r = \theta \text{ è } r' < \theta \text{ e per } r = o \text{ è } r' < \theta.$$

L'angolo r', pure variando al variare dell'angolo r da o a θ, si manterrà minore di θ e quindi: ciascun raggio considerato come incidente in qualsiasi punto interno alla semicirconferenza ABC, dà luogo a raggi direttamente emergenti.

B) È $$\rho = a \operatorname{sen} \theta$$

pei punti della semicirconferenza $A'B'L$.

Per $r = \theta$ risulta (ff. 5) $r' < \theta$ eccezione fatta per il punto $\frac{B'}{Q}$ relativamente ai raggi che incidono nel quadrante come $\frac{LIN}{L'IN}$ pel quale è $r' = \theta$.

Per $r = o$ si ha, qualunque sia il quadrante nel quale incidono raggi incidenti, $r' < \theta$ eccettuato essendo il punto V pel quale è $r' = \theta$.

La (17) porge (2):

$$\operatorname{sen} r = \pm \frac{\rho^2 - cx}{\rho^2} \operatorname{sen} \theta$$

nella quale si terrà conto del segno $\pm$ pei raggi del quadrante come $\frac{LIN}{L'IN}$ (fig. 1).

E riuscirà, in valore assoluto: pei raggi del quadrante come LIN:

$$r \gtreqless \theta \quad \text{per} \quad cx \lesseqgtr 0 \quad \text{ossia (2) per } c \lesseqgtr a \cos \theta$$

e pei raggi del quadrante come $L'IN$:

$$r \gtreqless \theta \quad \text{per} \quad cx \gtreqless 2a^2 \operatorname{sen}^2\theta \quad \text{ossia (2) per} \quad c \gtreqless a\sqrt{1+3\operatorname{sen}^2\theta}.$$

Indicato quindi con $\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix}$ il valore comune delle radici uguali avute dalla (17), se si tratterà di raggi appartenenti al quadrante come $\frac{LIN}{L'IN}$, quando $r' = \theta$ risulta (fig. 2):

pei punti dell'arco $A'B'$ escluso B'	$r_1 > \theta, \quad r_2 < 0$
pel punto B'	$r_1 = \theta, \quad r_2 < 0$
pel punto dell'arco $B'V$, escluso B' e V,	$r_1 < \theta, \quad r_2 < 0$
pel punto V	$r_1 = r_2 = 0$
pei punti dell'arco VQ, esclusi V, Q,	$r_1 < 0, \quad r_2 < \theta$
pel punto Q	$r_1 < 0, \quad r_2 = \theta$
pei punti dell'arco QL, escluso Q,	$r_1 < 0, \quad r_2 > \theta.$

Dei due angoli r ed r' relativi ad un punto qualsiasi della semicirconferenza $A'B'L$, e qualunque sia il quadrante nel quale si considerano raggi incidenti, l'angolo r' non potrà assumere valore maggiore di θ al variare di r da o a θ, sicchè i diversi raggi incidenti in ciascun punto della semicirconferenza $A'B'L$ daranno luogo a raggi direttamente emergenti.

C) Pei punti del segmento ABC — pei quali è $\rho > a \operatorname{sen}\theta$ — si considerino anzitutto come punti di incidenza di raggi quelli del segmento DE e degli archi FQC, RSP, indicando genericamente con $\operatorname{sen} r_1$, $\operatorname{sen} r_2$ i valori delle radici delle coppie definite colla (17).

a) Sostituiti i valori (8) delle coordinate dei punti del segmento DE nella relazione (17), relativa ai raggi appartenenti al quadrante come LIN, i valori che se ne ottengono sono:

$$\operatorname{sen} r_1 = \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2 - 2ca\cos\theta} \operatorname{sen}\theta; \quad \operatorname{sen} r_2 = \operatorname{sen}\theta.$$

Ma, in valore assoluto:

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2 - 2\,ca\cos\theta} \gtreqless 1,$$

ossia:

$$r_1 \gtreqless \theta \qquad \text{secondochè} \qquad c \lesseqgtr a\cos\theta$$

e quindi pei raggi incidenti nel quadrante come LIN e per:

$$r = 0 \qquad \text{ed} \qquad r' = \theta$$

si avrà: pei punti del segmento DB' escluso il punto B',

$$r' < \theta \qquad r_1 > \theta \qquad r_2 = \theta$$

pel punto B':

$$r' < \theta \qquad r_1 = r_2 = \theta,$$

pei punti del segmento $B'S$ esclusi i punti B', S:

$$r' < \theta \qquad r_1 < \theta \qquad r_2 = \theta,$$

pel punto S:

$$r' = \theta \qquad r_1 = 0 \qquad r_2 = \theta,$$

pei punti del segmento SE escluso il punto S:

$$r' > \theta \qquad r_1 < 0 \qquad r_2 = \theta$$

essendo pei punti del segmento SH — esclusi i punti S, H — in valor assoluto $r_1 < r_2$; pel punto H, $r_1 = r_2$ e pei rimanenti punti del segmento HE, $r_1 > r_2$;

b) Nella (17) si sostituiscano i valori (9) delle coordinate dei punti della curva FQC relativa ai raggi incidenti nei punti stessi ed appartenenti al quadrante come $L'IN$.

Si otterrà:

$$\operatorname{sen} r_1 = \frac{-3a^2 + 8a^2 \operatorname{sen}^2\theta + 4a\cos\theta\sqrt{c^2 - 4a^2\operatorname{sen}^2\theta} - c^2}{c^2 + a^2 - 4a^2\operatorname{sen}^2\theta - 2a\cos\theta\sqrt{c^2 - 4a^2\operatorname{sen}^2\theta}} \operatorname{sen}\theta\,; \quad \operatorname{sen} r_2 = \operatorname{sen}\theta$$

ed il coefficiente di $\operatorname{sen}\theta$ nel valore $\operatorname{sen} r_1$ sarà uguale, maggiore o minore dell'unità, secondochè:

$$c^4 - c^2a^2(5 + 3\operatorname{sen}^2\theta) + 4a^4 + 12a^4\operatorname{sen}^2\theta \gtreqless 0.$$

L'equazione racchiusa in tale relazione ammette come radici $\pm 2a$; $\pm a\sqrt{1 + 3\operatorname{sen}^2\theta}$ e quindi (1) sarà $r_1 \gtrless \theta$ secondochè $c \gtreqless a\sqrt{1 + 3\operatorname{sen}^2\theta}$.

Notando ancora che l'arco di curca FQC ha coll'arco RSP un punto a comune H situato sulla circonferenza Ω' alla quale corrisponde per c il valore reale e positivo:

$$c = a\sqrt{5 - 4\cos\theta}$$

— determinato tale valore uguagliando i valori delle ordinate corrispondenti nelle (9), (10) — si deduce che per i raggi incidenti nel quadrante come $L'IN$, ai valori:

$$r = 0 \qquad r' = \theta$$

corrisponderanno: pei punti dell'arco CQ, escluso il punto Q:

$$r' < \theta \qquad r_1 > \theta \qquad r_2 = \theta,$$

pel punto Q:

$$r' < \theta \qquad r_1 = r_2 = \theta,$$

pei punti del segmento QH, esclusi i punti Q, H:

$$r' < \theta \qquad r_1 < \theta \qquad r_2 = \theta,$$

pel punto H:

$$r' = \theta \qquad r_1 = 0 \qquad r_2 = \theta,$$

pei punti del segmento HF, escluso il punto H;

$$r' > \theta \qquad r_1 < 0 \qquad r_2 = \theta$$

essendo pei punti del segmento HH, escluso H, in valor assoluto, $r_1 < r_2$; pel punto H, $r_1 = r_2$ e pei rimanenti punti del segmento HF, $r_1 > r_2$.

c) Venendo a considerare l'arco RSP si sostituiscano nella (17) i valori delle coordinate di punti di tale arco relativi ai raggi incidenti nei punti stessi — supposti — simili raggi — appartenenti prima al quadrante come LIN e poi al quadrante come $L'IN$.

Si otterrà:

pei raggi incidenti nel quadrante come LIN — dette $\operatorname{sen} r_1$ e $\operatorname{sen} r_2$ le radici

$$\text{(19)} \qquad \operatorname{sen} r_1 = \frac{2a(a - \sqrt{c^2 - a^2 \operatorname{sen}^2\theta})}{c^2 + a^2 - 2a\sqrt{c^2 - a^2 \operatorname{sen}^2\theta}} \operatorname{sen}\theta; \ \operatorname{sen} r_2 = 0,$$

e pei raggi incidenti nel quadrante come $L'IN$, dette $\operatorname{sen} r_1'$, $\operatorname{sen} r_2'$ le radici stesse:

$$\text{(20)} \qquad \operatorname{sen} r_1' = \frac{-2a(a - \sqrt{c^2 - a^2 \operatorname{sen}^2\theta})}{c^2 + a^2 - 2a\sqrt{c^2 - a^2 \operatorname{sen}^2\theta}} \operatorname{sen}\theta; \ \operatorname{sen} r_2' = 0.$$

Il coefficiente di senθ nella (19) è, in valor assoluto, uguale, maggiore o minore dell'unità, e quindi:

$$r_1 \gtreqless \theta \qquad \text{secondochè (1)} \qquad c \lesseqgtr a.$$

Il coefficiente di senθ nella (20) è, in valor assoluto, uguale, maggiore o minore dell'unità, secondochè:

$$c^4 - 10a^2c^2 + 16a^4\text{sen}^2\theta + 9a^4 \lesseqgtr 0.$$

Le radici di simile polinomio risoluto come equazione rispetto c sono:

$$\pm a\sqrt{5 + 4\cos\theta} \qquad \pm a\sqrt{5 - 4\cos\theta}$$

e quindi per la (20) si avrà:

$$r_1 \gtreqless \theta \qquad \text{secondochè (1)} \qquad c \lesseqgtr a\sqrt{5 - 4\cos\theta}.$$

Le relazioni fra gli angoli r ed r' relativi ai raggi incidenti nel quadrante come $\frac{LIN}{L'IN}$ — nei diversi punti dell'arco di curva considerato — quando

sia $\qquad r = \theta \qquad \text{ed} \qquad r' = \theta$

risultano quali seguono:

pei punti dell'arco PII escluso il punto II:

$$r' < \theta \qquad r_1 < 0 \qquad r_2 = 0$$
$$r' > \theta \qquad r_1' > \theta \qquad r_2' = 0,$$

pel punto II:

$$r' < \theta \qquad r_1 < 0 \qquad r_2 = 0$$
$$r' = \theta \qquad r_1' = \theta \qquad r_2' = 0,$$

pei punti dell'arcò IIV esclusi i punti II e V:

$$r' < \theta \qquad r_1 < 0 \qquad r_2 = 0$$
$$r' < \theta \qquad r_1' < \theta \qquad r'_2 = 0,$$

pel punto V:

$$r' < \theta \qquad r_1 = r_2 = 0$$
$$r' < \theta \qquad r_1' = r_2' = 0.$$

pei punti dell'arco VS, esclusi i punti V ed S:

$$r' < \theta \qquad r_1 < \theta \qquad r_2 = 0$$
$$r' < \theta \qquad r_1' < 0 \qquad r_2' = 0,$$

pel punto S:

$$r' = \theta \qquad r_1 = \theta \qquad r_2 = 0$$
$$r' < \theta \qquad r_1' < 0 \qquad r_2' = 0,$$

pei punti del segmento SR, escluso il punto S:

$$r' > \theta \qquad r_1 > \theta \qquad r_2 = 0$$
$$r' < \theta \qquad r_1' < 0 \qquad r_2' = 0.$$

Gli angoli indicati $(C - a, b)$ con r_1 ed r_2 e con (C, c) r_1, r_2; r_1', r_2' possono determinarsi ricorrendo a quello dei due archi di circonferenza, insistenti sul segmento come OI (fig. 1) e capaci dell'angolo θ, il quale cade nella regione verso cui si intende che la luce si propaghi.

Infatti essendo le circonferenze, che si diranno circonferenze θ relative al punto d'incidenza scelto, rappresentate dalla equazione:

$$X^2 + Y^2 - X(x + y\sqrt{n^2 - 1}) - Y(y - x\sqrt{n^2 - 1}) = 0$$

quando dei punti di esse si suppongano essere X, Y le coordinate correnti, ed essendo il loro raggio determinato da $\pm \frac{n\rho}{2}$, consegue che desse secheranno la circonferenza Ω in punti reali e distinti quando sia $\rho > a \operatorname{sen} \theta$. E gli accennati angoli saranno quelli che i raggi, proiettanti dal punto d'incidenza scelto i punti di intersezione della θ colla Ω, fanno colla congiungente come IB (fig. 1).

Tenuta presente tale osservazione ed esaminando ordinatamente le risultanze $(C, - a, b, c)$ si può facilmente stabilire che:

1° Dei raggi appartenenti al quadrante come $\frac{LIX}{L'IX}$:

a) emergono direttamente quelli incidenti

nei punti del segmento DB' / dell'arco CQ;

b) emergono direttamente quelli determinati da $i = 90^\circ$ e dal fascio $\operatorname{sen} i = n \operatorname{sen} r_1$ i quali incidono

nei punti $\begin{matrix}\text{del segmento} & B'S \\ \text{dell'arco} & QII\end{matrix}$ esclusi i punti $\frac{B'}{Q}$ e $\frac{S}{II}$

mentre fra i raggi incidenti in $\frac{S}{II}$ godono di simile proprietà quelli pei quali è $i = o$ ed $i = 90^\circ$;

c) l'emergenza diretta non avrà luogo che pel raggio al quale corrisponde $i = 90^\circ$ fra quelli incidenti

nei punti $\begin{matrix}\text{del segmento} & SE \\ \text{dell'arco} & IIF\end{matrix}$ escluso il punto $\frac{S}{II}$.

2° Dei raggi appartenenti al quadrante come $\frac{LIN}{L'IN}$:

a) emergono direttamente quelli incidenti nei punti dell'arco $\frac{PV}{VR}$;

b) emergono direttamente quelli determinati da $i = 90^\circ$ e da $i = o$ che incidono nel punto $\frac{S}{II}$, mentre per gli altri punti dell'arco $\frac{VS}{VII}$ — escluso V — si avvertirà l'emergenza diretta pel raggio corrispondentemente al quale è $i = o$ e pei raggi del fascio determinato da $\begin{matrix}\operatorname{sen} i = n \operatorname{sen}(\theta - r_1) \\ \operatorname{sen} i = n \operatorname{sen}(\theta - r_1')\end{matrix}$;

c) l'emergenza diretta non avrà luogo che pel raggio pel quale è $i = o$ fra quelli incidenti nel punto dell'arco $\frac{SR}{IIP}$ escluso il punto $\frac{S}{II}$.

D) Dei punti del semicerchio ABC pei qual è $\rho > a \operatorname{sen} \theta$ rimangono a considerare quelli interni alla semicorona $ABCLB'A'$ racchiusi nei contorni limitati dal segmento DE e dagli archi (fig. 2) RSP, FQC:

1° Prendendo ad esaminare le regioni $AA'DB'$, $B'SV$, $VIIQ$, QLC, rappresentate in maggior scala nella (fig 3), si indichino con a, b, c, d punti appartenenti alle regioni stesse, si attribuisca alle lettere I, Z, K, N, M il significato delle omonime della (fig. 2) e si osservi che la circonferenza Ω' passante pel punto V seca (9) il prolungamento FG della nota curca FQC.

I centri delle circonferenze Ω' passanti pei punti come a, b, c, d, cadono rispettivamente nei segmenti OI, IZ, ZN, NH essendo $OH = 2a$ ed ai punti designati corrisponda, pure rispettivamente, un valore di c uguale ad oe, of, og, oh. Per un punto qualunque come $\begin{matrix} a, b, \\ c, d, \end{matrix}$ delle regioni $\begin{matrix} AA'DB', B'SV \\ VIIQ, QLC \end{matrix}$, ed in ambedue i quadranti si ha: $r' < \theta$ per $r = o$ e per $r = \theta$ e perciò i raggi $\begin{matrix} ae, bf \\ cg, dh \end{matrix}$ e quelli che si potranno condurre da ciascuno di quei punti facenti con questi raggi l'angolo $r = \theta$ intersecheranno la circonferenza Ω'' poichè la loro distanza dal punto o riesce evidentemente minore di $a \operatorname{sen} \theta$.

Le radici racchiuse nella (17) e relative ai punti come $\begin{matrix} a, b \\ c, d \end{matrix}$ sono $\begin{matrix} \text{positive} \\ \text{negative} \end{matrix}$ pei raggi del quadrante come LIN e sono $\begin{matrix} \text{negative} \\ \text{positive} \end{matrix}$ pei raggi del quadrante come $L'IN$. Quindi, nelle regioni citate, pei raggi incidenti nel quadrante come $\begin{matrix} L'IN \\ LIN \end{matrix}$ risulta manifesta l'emergenza diretta.

Considerando ora per le regioni $\begin{matrix} AA'DB' \\ B'SV \end{matrix}$ i raggi appartenenti al quadrante come LIN, si tracci la circonferenza Ω' relativa al punto $\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$ fino ad incontrare in $\begin{matrix} a' \\ b' \end{matrix}$ il segmento DE. Da quest'ultimo punto il segmento $\begin{matrix} Ee \\ Ef \end{matrix}$ sarà visto sotto l'angolo θ e però il raggio $\begin{matrix} al \\ bm \end{matrix}$ che fa con $\begin{matrix} ae \\ bf \end{matrix}$ l'angolo positivo $r = \theta$ sarà colla DE convergente nel verso secondo il quale la luce si propaga. Perciò i raggi passanti pel punto $\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$ e tangenti alla Ω'' i quali fanno con $\begin{matrix} ae \\ bf \end{matrix}$ un angolo r positivo — ossia i raggi che da quel punto proiettano i punti d'incontro della circonferenza θ, ad esso relativa, colla circonferenza Ω — riescono $\begin{matrix} \text{esterni} \\ \text{interni} \end{matrix}$ all'angolo $\begin{matrix} lae \\ mbf \end{matrix}$. Le radici (17) quindi riferentisi al punto come $\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$ e relative al quadrante come LIN saranno ambedue $\begin{matrix} \text{maggiori} \\ \text{minori} \end{matrix}$ di $\operatorname{sen} \theta$.

Similmente: prendendo a considerare per le regioni $\frac{VIIQ}{QLC}$ i raggi appartenenti al quadrante come $L'IN$ si tracci la Ω' che passa pel punto $\frac{c}{d}$ fino ad incontrare in $\frac{c'}{d'}$ la curva FQG. Capiterà d' nell'arco CQ e c' nell'arco QF o sul suo prolungamento. I raggi i quali condotti dal punto $\frac{c'}{d'}$ formano gli angoli r_1, r_2 (C-b) tali che ad essi corrisponda un angolo $r' = \theta$ sono tangenti alla Ω'' e sarà uguale a θ quello dovuto al raggio tangente $\frac{c'p}{d'q}$ che fa con $\frac{c'g}{d'h}$ l'angolo $\frac{\text{maggiore}}{\text{minore}}$.

Il raggio $\frac{ct}{dv}$ che fa con $\frac{cg}{dh}$ l'angolo positivo $r = \theta$ sarà colla $\frac{c'p}{d'q}$ convergente nel verso secondo cui la luce si propaga e quindi i raggi passanti pel punto $\frac{c}{d}$ e tangenti alla Ω'', i quali fanno con $\frac{cg}{dh}$ angoli r positivi, risultano $\frac{\text{interni}}{\text{esterni}}$ all'angolo $\frac{gct}{hdv}$. Ne segue che le radici (17) riferentisi al punto come $\frac{c}{d}$ e relative al quadrante come $L'IN$ saranno ambedue $\frac{\text{minori}}{\text{maggiori}}$ di sen θ.

Adunque: per i punti delle regioni $\frac{AA'DB'}{QLC}$ avrà luogo la emergenza diretta ancora quando trattisi di raggi in essi incidenti ed appartenenti al quadrante come $\frac{LIN}{L'IN}$ e per quelli della regione $\frac{B'SV}{VIIQ}$ l'emergenza diretta si verificherà pei raggi in essi incidenti del quadrante come $\frac{LIN}{L'IN}$ corrispondenti ai fasci r_1 e $\theta - r_2$ supposto che sia $r_2 > r_1$ indicati essendo con r_1 ed r_2 gli angoli definiti colla (17).

2° Pei raggi incidenti nel quadrante come $\frac{LIN}{L'IN}$: per ciascun punto della regione $RSDB$ risulta (fig. 2) $r' < \theta$ se $r = o$ ed $r' \gtreqless \theta$ se $r = \theta$ e, per ciascun punto della regione $PIIQC$, è $r' < \theta$ quando $r = o$ ed $r' \lesseqgtr \theta$ per $r = \theta$, essendo le radici (17) relative a quel quadrante $\frac{\text{positive}}{\text{negative}}$ pei punti della prima regione e $\frac{\text{negative}}{\text{positive}}$ per quelli della seconda.

Di ciascuna coppia di radici, quando sono positive, all'una corrisponderà quel valore di r compreso fra o e θ pel quale è $r'=\theta$ e l'altra necessariamente sarà maggiore di θ.

Quindi i raggi incidenti nei punti della regione $\frac{RSDB}{PIIQC}$ ammetteranno raggi tutti direttamente emergenti se appartenenti al quadrante come $\frac{L'IN}{LIN}$ mentre si avrà l'emergenza diretta dei raggi del fascio al quale corrisponde quel valore di r per cui $r'=\theta$ se quei raggi sieno considerati nel quadrante come $\frac{LIN}{L'IN}$.

3° Secondochè si tratti di raggi incidenti nel quadrante come LIN, o, come $L'IN$: (fig. 2) pei punti della regione $RSHF$

se

$$r=0 \quad \text{è} \quad r'>\theta \quad \text{od} \quad r'>\theta$$
$$r=\theta \quad \text{è} \quad r'>\theta \quad \text{od} \quad r'<\theta$$

e per quelli della regione $EHIIP$

se

$$r=0 \quad \text{è} \quad r'>\theta \quad \text{od} \quad r'>\theta$$
$$r=\theta \quad \text{è} \quad r'<\theta \quad \text{od} \quad r'>\theta,$$

mentre le radici (17) relative al primo od al secondo quadrante saranno l'una di segno opposto all'altra.

Quando trattisi della regione $\frac{RSHF}{EHIIP}$ la radice positiva corrispondente al quadrante come $\frac{LIN}{L'IN}$ deve essere maggiore di θ perchè, non potendo avere valore uguale a θ, se le fosse minore ad $r=\theta$ corrisponderebbe $r'<\theta$: quindi in quel quadrante nessun raggio potrà avere l'emergenza diretta.

Per la regione stessa la radice positiva poi corrispondente al quadrante come $\frac{L'IN}{LIN}$ avrà quel valore compreso fra o e θ per cui sia $r'=\theta$ e quindi, detto r_1 tale valore, in quel quadrante emergerà direttamente il fascio incidente al quale è dovuto il rifratto determinato da $\theta-r_1$.

4° Per i punti della regione $SHIIV$ le radici (17) relative al quadrante nel quale voglionsi supporre raggi incidenti sono

di segno opposto l'una all'altra riuscendo uguali, in valore assoluto, quelle relative ai punti dell'arco HV, mentre, qualunque sia il quadrante

per

$$r = 0 \quad \text{è} \quad r' > \theta$$

$$r = \theta \quad \text{è} \quad r' < \theta.$$

Se quindi con r_1 verrà indicata genericamente la radice (17) positiva — qualunque sia il quadrante considerato — sarà $\theta - r_1$ il fascio rifratto pel quale l'emergenza diretta avrà luogo.

5° Pei punti della regione FHE, qualunque sia il quadrante considerato risulta: $r' > \theta$ per $r = o$ e per $r = \theta$.

Le radici (17), corrispondenti a ciascun quadrante, pure qui sono l'una di segno opposto all'altra e, quella la quale risulta positiva, deve avere valore maggiore di θ perchè, non potendo essere uguale a θ, se a θ riuscisse minore, dovrebbe all'angolo $r = \theta$ corrispondere l'angolo $r' < \theta$.

Gli è perciò che nei punti della regione considerata, e qualunque sia il quadrante in cui si suppongono raggi incidenti, nessuno di detti raggi può direttamente emergere.

8. — Quanto venne trovato pei punti come I (fig. 1) d'ordinata positiva, può estendersi ai punti come I' d'ordinata negativa notando che, rispetto alla sezione retta della lente, i raggi come $\frac{VI,\ \ V_1I'}{V'I,\ \ V_1'I'}$, i quali trovansi nelle stesse condizioni, sono quelli appartenenti ai quadranti $\frac{LIN,\ \ L_1I'N'}{L'IN,\ \ L_1'I'N'}$.

9. — I risultati ottenuti possono ora enunciarsi.

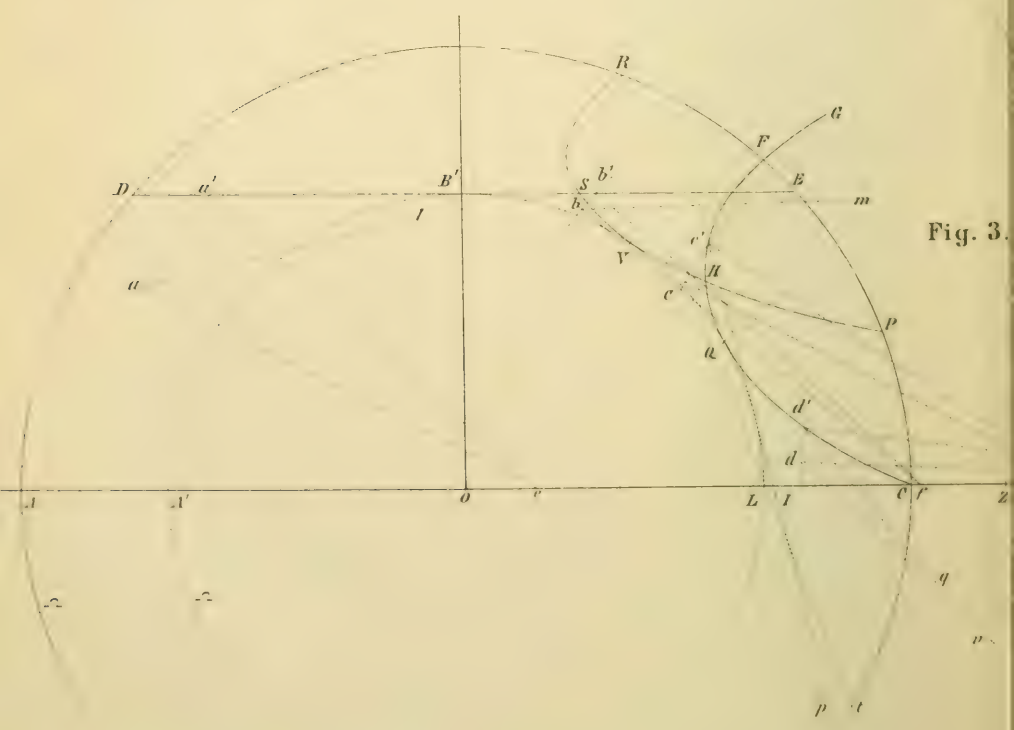
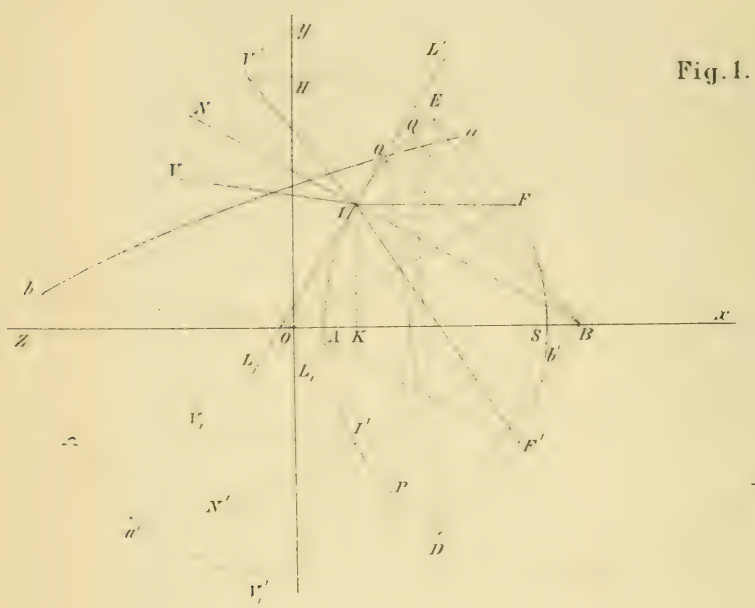
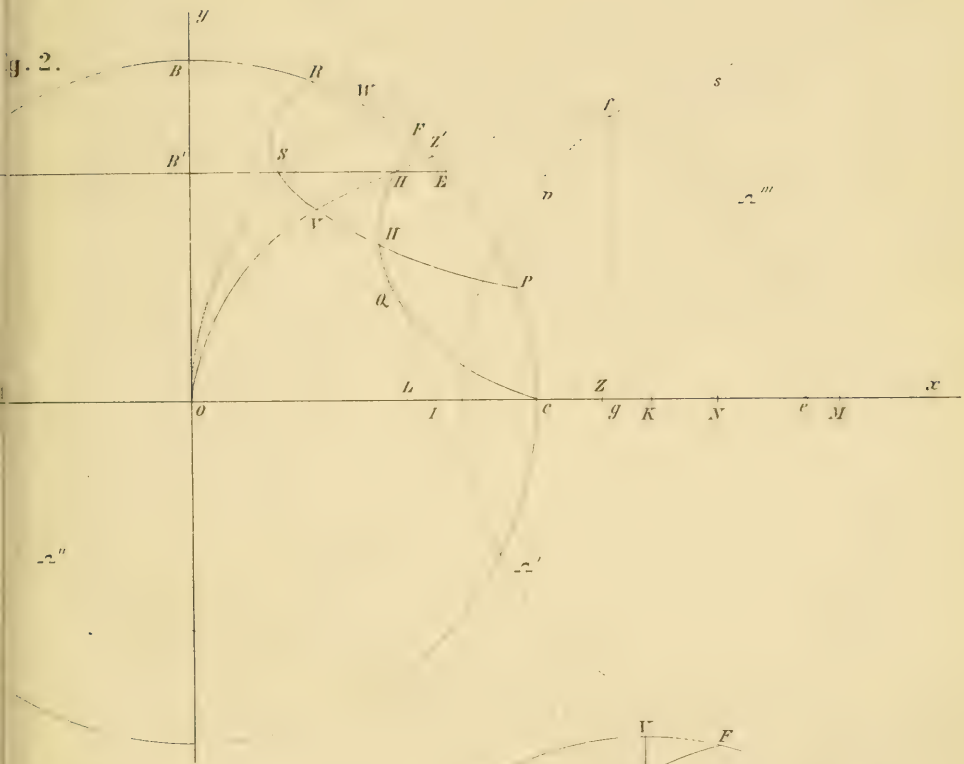
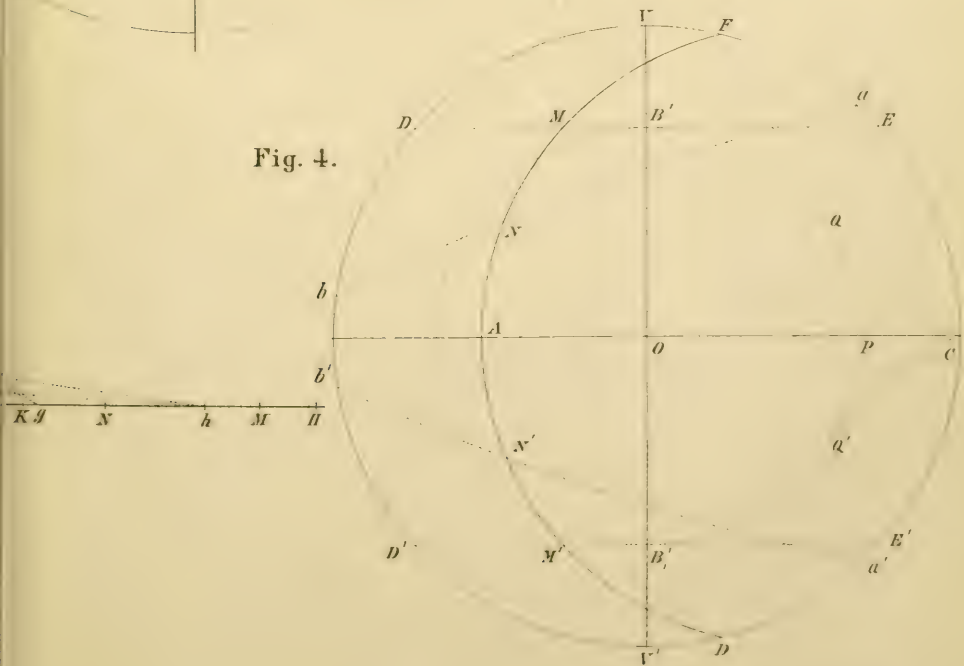
Data una lente cilindrica biconvessa simmetrica d'indice di rifrazione $n \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \frac{2}{\sqrt{2}}$ e d'angolo limite θ, se ne rappresenti (fig. 4) la sua sezione retta $FADC$ e si completi la circonferenza di centro O corrispondente all'arco FDC dal quale devesi avere l'emergenza diretta dei raggi incidenti.

Si traccino l'asse OC della lente ed il diametro VV' che gli è perpendicolare e, descritta la circonferenza di raggio $OP = OC \operatorname{sen} \theta$, si conducano: l'arco di curva CQ (12), il suo simmetrico CQ' rispetto l'asse OC; le rette DE, $D'E'$ parallele

Fig. 1.
Fig. 3.

[Fi]g. 2.

Fig. 4.

Lit. Salussolia, Torino

all'asse stesso e tangenti — archi e rette — alla circonferenza di raggio OP, indicando rispettivamente con Q, Q', B', B_1' i punti di tangenza.

I punti del segmento MM' dell'arco FAD comuni alla regione $CQB'DD'B_1'Q'$ saranno quelli nei quali ciascun raggio incidente nel piano della sezione considerata ed appartenenti ai quadranti come (fig. 1) LIN, L_1FN' ammetteranno raggi direttamente emergenti.

Tenuto altresì presente quanto venne mostrato al (ff. 2) si noti che l'ellisse (e) incontra la retta DE (fig. 4) in due punti d'ascisse:

$$x_1 = 3a\cos\theta \qquad x_2 = a\cos\theta(1 - 4\cos 2\theta)$$

e poichè per:

$$2 > n > \sqrt{2} \qquad \text{è} \qquad -1 < 1 - 4\cos 2\theta < 1$$

così il punto d'ascissa x_2 apparterrà al segmento DE. Ma

$$x_2 \gtreqless 0 \qquad \text{per} \qquad n \lesseqgtr \frac{2}{3}\sqrt{6}$$

ond'è che per lo stesso mezzo, a seconda della rifrangibilità della luce omogenea impiegata, il punto avente quell'ascissa cadrà in B' od apparterrà all'uno od all'altro dei segmenti $B'E$, $B'D$.

Se si tracceranno quindi (fig. 4) l'arco $a\,b$ (ff. 2-1°) dell'ellisse (e) ed il suo simmetrico $a'\,b'$ rispetto l'asse OC i punti dell'arco FAD comuni alla regione $CQB'DD'B_1'Q'$ racchiusa fra tali archi — cioè i punti dell'arco NN' nel caso considerato in figura — saranno quelli nei quali ciascun raggio incidente nel piano della sezione considerata ed a qualunque quadrante appartenga, ammetterà un raggio direttamente emergente.

Novara, Febbraio 1906.

Dall'Istituto Professionale Omar.

Sugli integrali definiti di un campo convesso.

Nota del Prof. FILIPPO RIMONDINI di Ferrara.

1. — In una nota inserita negli Atti dell'Accademia di Torino, 1905, ho sviluppato un metodo per il calcolo approssimato dell'integrale doppio di una funzione di due variabili data in un campo rettangolare, in funzione dei valori che la funzione acquista nei vertici di n^2 rettangoli in cui resta diviso il campo da rette parallele agli assi.

Ora mi propongo la ricerca di una formola che serva nel caso di una funzione data in un campo qualunque *convesso* (tale cioè che ogni retta non ne tagli il contorno in più di due punti). Trovata questa formola si avrà il modo di calcolare con sufficiente approssimazione il volume di ogni solido che si proietti su un piano in un'area convessa, in funzione delle ordinate corrispondenti a punti del contorno del campo e a punti interni opportunamente scelti.

2. — Ci è d'uopo anzitutto presentare sotto un aspetto un po' diverso dal solito la formola di Simpson per il calcolo approssimato di un'area piana limitata da una curva chiusa convessa.

Se $\varphi(x, y) = 0$ è l'equazione della linea contorno dell'area riferita a due assi x e y, ed $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ sono i valori di y corrispondenti ad ogni x compreso fra a e b, vale a dire se $y = \varphi_1(x)$ e $y = \varphi_2(x)$ sono le equazioni delle linee che si ottengono tirando le parallele all'asse y tangenti al contorno, l'area considerata si otterrà colla formola:

$$\int_a^b \{\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\} dx = \frac{b-a}{6n} \begin{bmatrix} \varphi_2(a) + \varphi_2(b) + 2P_2 + 4I_2 - \\ -\varphi_1(a) - \varphi_1(b) - 2P_1 - 4I_1 \end{bmatrix} + R$$

dove sono indicate con P_2, I_2, P_1, I_1 i valori delle funzioni $\varphi_2(x)$ e $\varphi_1(x)$ nei punti di divisione dell'intervallo $a...b$ rispettivamente d'ordine pari e dispari. Se poi si indicano con d_i le corde della linea $\varphi(xy)=0$ parallele all'asse y e corrispondenti ai punti di divisione x_i dell'intervallo $a...b$, si potrà anche scrivere:

$$\int_a^b \{\varphi_2(x)-\varphi_1(x)\} dx = \frac{b-a}{6n}[2(d_2+d_4+...+d_{2n-2})+4(d_1+d_3+...+d_{2n-1})\}] =$$

$$= \frac{b-a}{6n}\left[\sum_{i=1}^{n} 2d_{2i} + \sum_{j=1}^{n} 4d_{2j-1}\right] + R$$

e l'errore commesso R è rappresentato da

$$R = -\frac{(b-a)^5}{n^4 . 4!\, 5!}[\varphi_2^{\text{IV}}(\eta) - \varphi_1^{\text{IV}}(\eta)]$$

essendo η compreso fra a e b (*).

3. — Sia data ora una funzione di due variabili $f(x, y)$ in un campo convesso definito dall'equazione $C(x, y)=0$, o, ciò che è lo stesso, limitato dalle due curve $y=\psi(x)$, $y=\varphi(x)$, essendo $a \leq x \leq b$.

Partendo dalla formola di Simpson:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6}\left\{f(a)+f(b)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\} + R$$

dove:

$$R = -\frac{(b-a)^5}{4!\, 5!} f^{(\text{IV})}(\xi) \qquad (a \leq \xi \leq b)$$

ponendo rispettivamente $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ in luogo di a e b, si avrà:

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy = \frac{\psi(x)-\varphi(x)}{6}[f(x, \varphi(x)) + f(x, \psi(x)) + 4f(x, \mu(x))] + R$$

essendo:

$$R = \frac{-[\psi(x)-\varphi(x)]^5}{4!\, 5!} f_y^{(\text{IV})}(x, \theta(x))$$

$$\mu(x) = \frac{\varphi(x)+\psi(x)}{2}$$

$$\varphi(x) \leq \theta(x) \leq \psi(x).$$

(*) Per l'espressione di R si veda ad es. PEANO: *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale,* Torino, 1887, pag. 211; e *Formulaire de mathématique,* t. IV, pag. 187.

Dividendo l'intervallo $a \dots b$ in n parti eguali coi punti x_2, $x_4, \dots, x_{2n-2}$, e integrando fra i limiti x_i e x_{i+2}, e ponendo:

$$x_{i+2} - x_i = \delta = \frac{b-a}{n}$$

e scrivendo per brevità φ_i e ψ_i in luogo di $\varphi(x_i)$ e $\psi(x_i)$, e sottintendendo, quando non dia luogo ad ambiguità, l'argomento x, verrà:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy = \frac{1}{6} \int_{x_i}^{x_{i+2}} (\psi - \varphi) f(x, \varphi) dx +$$

$$+ \frac{1}{6} \int_{x_i}^{x_{i+2}} (\psi - \varphi) f(x, \psi) dx + \frac{4}{6} \int_{x_i}^{x_{i+2}} (\psi - \varphi) f(x, \mu) dx + \int_{x_i}^{x_{i+2}} R dx =$$

$$= \frac{1}{6} \int_{x_i}^{x_{i+2}} \psi \, . \, f(x, \varphi) dx + \frac{1}{6} \int_{x_i}^{x_{i+2}} \psi \, . \, f(x, \psi) dx + \frac{4}{6} \int_{x_i}^{x_{i+2}} \psi . f(x, \mu) dx -$$

$$- \frac{1}{6} \int_{x_i}^{x_{i+2}} \varphi . f(x, \varphi) dx - \frac{1}{6} \int_{x_i}^{x_{i+2}} \varphi . f(x, \psi) dx - \frac{4}{6} \int_{x_i}^{x_{i+2}} \varphi . f(x, \mu) dx + \int_{x_i}^{x_{i+2}} R dx$$

Ed applicando a ciascuno la formola di Simpson:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy =$$

$$= \frac{\delta}{36} [\psi_i f(x_i, \varphi_i) + \psi_{i+2} f(x_{i+2}, \varphi_{i+2}) + 4\psi_{i+1} f(x_{i+1}, \varphi_{i+1})] + R' +$$

$$+ \frac{\delta}{36} [\psi_i f(x_i, \psi_i) + \psi_{i+2} f(x_{i+2}, \psi_{i+2}) + 4\psi_{i+1} f(x_{i+1}, \psi_{i+1})] + R'' +$$

$$+ 4 \frac{\delta}{36} [\psi_i f(x_i, \mu_i) + \psi_{i+2} f(x_{i+2}, \mu_{i+2}) + 4\psi_{i+1} f(x_{i+1}, \mu_{i+1})] + R''' -$$

$$- \frac{\delta}{36} [\varphi_i f(x_i, \varphi_i) + \varphi_{i+2} f(x_{i+2}, \varphi_{i+2}) + 4\varphi_{i+1} f(x_{i+1}, \varphi_{i+1})] - R_1' -$$

$$- \frac{\delta}{36} [\varphi_i f(x_i, \psi_i) + \varphi_{i+2} f(x_{i+2}, \psi_{i+2}) + 4\varphi_{i+1} f(x_{i+1}, \psi_{i+1})] - R_1'' -$$

$$- 4 \frac{\delta}{36} [\varphi_i f(x_i, \mu_i) + \varphi_{i+2} f(x_{i+2}, \mu_{i+2}) + 4\varphi_{i+1} f(x_{i+1}, \mu_{i+1})] - R_1''' +$$

$$+ \int_{x_i}^{x_{i+2}} R dx.$$

Od anche:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy = \frac{\delta}{36} [\psi_i \{f(x_i, \varphi_i) + f(x_i, \psi_i) + 4f(x_i, \mu_i)\} -$$

$$- \varphi_i \{f(x_i, \varphi_i) + f(x_i, \psi_i) + 4f(x_i, \mu_i)\} +$$

$$+ \psi_{i+2} \{f(x_{i+2}, \varphi_{i+2}) + f(x_{i+2}, \psi_{i+2}) + 4f(x_{i+2}, \mu_{i+2})\} -$$

$$- \varphi_{i+2} \{f(x_{i+2}, \varphi_{i+2}) + f(x_{i+2}, \psi_{i+2}) + 4f(x_{i+2}, \mu_{i+2})\} +$$

$$+ 4\psi_{i+1} \{f(x_{i+1}, \varphi_{i+1}) + f(x_{i+1}, \psi_{i+1}) + 4f(x_{i+1}, \mu_{i+1})\} -$$

$$- 4\varphi_{i+1} \{f(x_{i+1}, \varphi_{i+1}) + f(x_{i+1}, \psi_{i+1}) + 4f(x_{i+1}, \mu_{i+1})\}] +$$

$$+ R' + R'' + R''' - R_1' - R_1'' - R_1''' + \int_{x_i}^{x_{i+2}} R dx$$

e infine:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy = \frac{\delta}{36} [(\psi_i - \varphi_i)\{f(x_i, \varphi_i) + f(x_i, \psi_i) + 4f(x_i, \mu_i)\} +$$

$$+ (\psi_{i+2} - \varphi_{i+2})\{f(x_{i+2}, \varphi_{i+2}) + f(x_{i+2}, \psi_{i+2}) + 4f(x_{i+2}, \mu_{i+2})\} +$$

$$+ 4(\psi_{i+1} - \varphi_{i+1})\{f(x_{i+1}, \varphi_{i+1}) + f(x_{i+1}, \psi_{i+1}) + 4f(x_{i+1}, \mu_{i+1})\}] +$$

$$+ R' + R'' + R''' - R_1' - R_1'' - R_1''' + \int_{x_i}^{x_{i+2}} R dx.$$

Si ha inoltre:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} R dx = - \frac{1}{4!\,5!} \int_{x_i}^{x_{i+2}} (\psi - \varphi)^5 f_y^{IV}(x, \theta(x)) dx =$$

$$= - \frac{\delta}{6.4!5!} [(\psi_{i+2} - \varphi_{i+2})^5 f_y^{IV}(x_{i+2}, \theta_{i+2}) + (\psi_i - \varphi_i)^5 f_y^{IV}(x_i, \theta_i) +$$

$$+ 4(\psi_{i+1} - \varphi_{i+1}) f_y^{IV}(x_{i+1}, \theta_{i+1})] + \frac{-\delta^5}{4!\,5!\,4!\,5!} D_x^4 D_y^4 f(\xi, \theta(\xi)).$$

E quindi:

$$|R| < \frac{\delta}{6.4!\,5!} [d^5 M + d^5 M + 4d^5 M] + \frac{\delta^5}{(4!)^2 (5!)^2} D_x^4 D_y^4 f$$

$$|R| < \frac{\delta . d^5 M}{4!\,5!} + \frac{\delta^5 M'}{(4!)^2 (5!)^2}$$

dove si è indicato con d la massima corda parallela all'asse y

del campo C, ed M il limite superiore dei valori assoluti della f_y^{IV} in tutto il campo, ed M' quello della $D_x^4 D_y^1 f$.

Quanto alle altre quantità R', R'', ..., si ha ad esempio:

$$R' = \frac{1}{6} \cdot \frac{\delta^5}{4!\,5!} D_x^4 \psi(\xi) f(x, \varphi(\xi)) < \frac{\delta^5 M''}{6 \,.\, 4!\,5!}$$

sicchè:

$$|R' + R'' + R''' - R_1' - R_1'' - R_1'''| < 6 \,.\, \frac{\delta^5 . M''}{6 \,.\, 4!\,5!}$$

$$< \frac{\delta^5 M''}{4!\,5!}.$$

Così la somma di tutti i resti è in valore assoluto minore di

$$\frac{\delta . d^5 M}{4!\,5!} + \frac{\delta^5 M' .}{(4)^2\,(5!)^2} + \frac{\delta^5 M''}{4!\,5!}$$

cioè minore di:

$$\frac{b-a}{n . 4!\,5!}\left(Md^5 + \frac{M'(b-a)^4}{n^4 . 4!\,5!} + \frac{M''(b-a)^4}{n^4}\right).$$

4. — Considerando ciascuna delle parti $\delta = \frac{b-a}{n}$ in cui si è diviso l'intervallo $a \ldots b$, ed applicando a ciascuna le considerazioni fatte, risulterà, ponendo in generale:

$$\psi(x_i) - \varphi(x_i) = d_i$$
$$f(x_i, \varphi(x_i)) = z_i$$
$$f(x_i, \psi(x_i)) = z_i'$$
$$f(x_i, \mu(x_i)) = z_{m,i}$$

la formola seguente:

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(xy)\, dy = \frac{b-a}{36n} [4d_1(z_1 + z_1' + 4z_{m,1}) +$$
$$+ 4d_3(z_3 + z_3' + 4z_{m,3}) +$$
$$+ 4d_5(z_5 + z_5' + 4z_{m,5}) +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ 4d_{2n-1}(z_{2n-1} + z'_{2n-1} + 4z_{m,2n-1}) +$$
$$+ 2d_2(z_2 + z_2' + 4z_{m,2}) +$$
$$+ 2d_4(z_4 + z_4' + 4z_{m,4}) +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ 2d_{2n-2}(z_{2n-2} + z'_{2n-2} + 4z_{m,2n-2})] + R,$$

ossia:

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(xy)\, dy =$$

$$=\frac{b-a}{36n}\left[4\sum_{i=1}^{n} d_{2i-1}(z_{2i-1}+z'_{2i-1}+4z_{m,2i-1})+2\sum_{j=2}^{n-2} d_{2j}(z_{2j}+z'_{2j}+4z_{m,2j})\right]+R.$$

5. — Si dividano ora tutte le corde del campo parallele all'asse y condotte per i punti $x_2, x_4, \ldots, x_{2n-2}$, in n parti eguali coi punti di ordinate:

$$y_{2,2}=\varphi(x_2)+\frac{\psi(x_2)-\varphi(x_2)}{n}$$

$$y_{2,4}=\varphi(x_2)+2\,\frac{\psi(x_2)-\varphi(x_2)}{n}$$

$$y_{2,6}=\varphi(x_2)+3\,\frac{\psi(x_2)-\varphi(x_2)}{n}$$

. . . .

$$y_{4,2}=\varphi(x_4)+\frac{\psi(x_4)-\varphi(x_4)}{n}$$

. . . .

ossia in generale:

$$y_{2p,2i}=\varphi(x_{2p})+2i\,\frac{\psi(x_{2p})-\varphi(x_{2p})}{n}$$

$$(p,\, i=0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$$

e si considerino le linee $\mu(x)$ definite da:

$$\mu_i(x)=\varphi(x)+i\,\frac{\psi(x)-\varphi(x)}{n}$$

le quali divideranno il campo in n parti a guisa di fusi curvilinei qualunque, ciascuna delle quali poi dalle parallele all'asse y è alla sua volta divisa in n trapezi curvilinei. Applicando a ciascuno dei campi chiusi limitati o da due delle linee $\mu(x)$, o da una $\mu(x)$ e dalla $\varphi(x)$ o dalla $\psi(x)$ la formola ultimamente tro-

vata, e indicando per brevità con $z_{i,j}$ il valore della funzione corrispondente al punto di coordinate x_i, $y_{i,j}$, si otterrà:

$$\int_b^a dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(xy)\,dy = \sum_{h=0}^{n-1} \Big[4d_1(z_{1,2h} + z_{1,2h+2} + 4z_{1,2h+1})$$

$$+ 4d_3(z_{3,2h} + z_{3,2h+2} + 4z_{3,2h+1}) +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ 4d_{2n-1}(z_{2n-1,2h} + z_{2n-1,2h+2} + 4z_{2n-1,2h+1})$$

$$+ 2d_2(z_{2,2h} + z_{2,2h+2} + 4z_{2,2h+1})$$

$$+ 2d_4(z_{4,2h} + z_{4,2h+2} + 4z_{4,2h+1}) +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ 2d_{2n-2}(z_{2n-2,2h} + z_{2n-2,2h+2} + 4z_{2n-2,2h+1}) \Big] + R =$$

$$= \frac{b-a}{36n} \Big[4d_1(z_{1,0} + z_{1,2n} + 2z_{1,2} + 2z_{1,4} + \ldots + 2z_{1,2n-2} + 4z_{11} + 4z_{1,3} + $$
$$+ \ldots + 4z_{1,2n-1}) +$$

$$+ 4d_3(z_{3,0} + z_{3,2n} + 2z_{3,2} + 2z_{3,4} + \ldots + 2z_{3,2n-2} + 4z_{3,1} + 4z_{3,3} +$$
$$+ \ldots + 4z_{3,2n-1}) +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ 4d_{2n-1}(z_{2n-1,0} + z_{2n-1,2n} + 2z_{2n-1,2} + 2z_{2n-1,4} + \ldots + 2z_{2n-1,2n-2} +$$
$$+ 4z_{2n-1,1} + 4z_{2n-1,3} + \ldots + 4z_{2n-1,2n-1}) +$$

$$+ 2d_2(z_{2,0} + z_{2,2n} + 2z_{2,2} + 2z_{2,4} + \ldots + 2z_{2,2n-2} + 4z_{2,1} + 4z_{2,3} +$$
$$+ \ldots + 4z_{2,2n-1}) +$$

$$+ 2d_4(z_{4,0} + z_{4,2n} + 2z_{4,2} + 2z_{4,4} + \ldots + 2z_{4,2n-2} + 4z_{4,1} + 4z_{4,3} +$$
$$+ \ldots + 4z_{4,2n-1}) +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ 2d_{2n-2}(z_{2n-2,0} + z_{2n-2,2n} + 2z_{2n-2,2} + 2z_{2n-2,4} + \ldots + 2z_{2n-2,2n-2} +$$
$$+ 4z_{2n-2,1} + 4z_{2n-2,3} + \ldots + 4z_{2n-2,2n-1}) \Big] + R.$$

Il confronto di questa formola con quella del n° 2 relativa al calcolo approssimato di un'area piana limitata da un campo convesso, ci fa rilevare che, trovata l'area di questo campo convesso, basta nella sua espressione moltiplicare ognuna delle corde d_i parallele all'asse y per: *la somma dei valori della funzione negli estremi di detta corda, più il doppio dei valori che la funzione assume nei punti di divisione di posto pari della corda stessa, più il quadruplo dei valori nei punti di divisione di posto dispari,* e poi prendere un sesto di tutto il risultato.

Si osservi ancora che supponendo il campo rettangolare, cioè facendo nella formola ultima:

$$d_1 = d_2 = d_3 = \ldots = \frac{d-c}{n}$$

si ritrova la formola già da me data nella nota citata al n° 1 (*).

6. — Dopo quanto si è veduto, risulta evidente che per eseguire il calcolo approssimato di un volume racchiuso da una superficie chiusa $f(x, y, z) = C$, o, ciò che è lo stesso, da due superficie $z = f_1(x,y)$ e $u = f_2(x,y)$, che si proiettino sul piano xy in un campo convesso, basterà applicare ad entrambe le funzioni z ed u la formola trovata, e poi fare la differenza dei risultati.

7. — Si giunge ad una formola più notevole di quella trovata, col seguente procedimento.

Si parta dalla formola (**):

$$(1) \qquad \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy =$$

$$= \frac{(b-a)(d-c)}{12}\left\{f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)+8f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right)\right\} + R$$

nella quale R è nullo per le funzioni di grado non superiore al 3°, e per le altre funzioni contiene le derivate quarte divise

(*) F. Rimondini, *Sul calcolo approssimato degli integrali doppi a limiti costanti,* “ Atti dell'Accad. di Torino ”, 1905, pag. 5.

(**) F. Rimondini, l. c., n° 4.

per dei fattoriali e per il numero n^2 delle parti in cui è diviso il campo rettangolare.

Senza tener conto, per ora, di R, si cerchi di far dipendere il calcolo dell'integrale:

$$I = \int_{x_i}^{x_{i+2}} dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$$

dal precedente, rendendo costanti i limiti nell'integrale rispetto ad y. Basta perciò eseguire la trasformazione:

$$y = \varphi(x) + t[\psi(x) - \varphi(x)],$$

da cui:

$$dy = [\psi(x) - \varphi(x)]\, dt;$$

così alla coppia di valori:

$$y = \varphi(x) \qquad \text{e} \qquad y = \psi(x)$$

si fa corrispondere la coppia:

$$t = 0 \qquad \text{e} \qquad t = 1.$$

E allora verrà:

$$I = \int_{x_i}^{x_{i+2}} dx \int_0^1 f[x, \varphi(x) + t[\psi(x) - \varphi(x)]] . (\psi(x) - \varphi(x))\, dt.$$

Ora che i limiti dei due integrali sono costanti, applichiamo la formola (1) ricordata, e per brevità chiamiamo δ l'intervallo x_i, x_{i+2}, e poniamo:

$$\psi(x_i) - \varphi(x_i) = d_i, \quad \psi(x_{i+1}) - \varphi(x_{i+1}) = d_{i+1}, \quad \ldots\ldots$$

Si avrà così:

$$I = \frac{\delta}{12} \Big\{ f(x_i, \varphi_i) d_i + f(x_{i+2}, \varphi_{i+2}) d_{i+2} + f(x_i, \psi_i) d_i + f(x_{i+2}, \psi_{i+2}) d_{i+2} + + 8 f\left(x_{i+1} \frac{\psi_{i+1} + \varphi_{i+1}}{2}\right) d_{i+1} \Big\}.$$

Applicando la formola ora trovata a ciascuna delle parti contenute nella porzione del campo compresa fra le parallele all'asse y condotte dai punti x_i e x_{i+2}, e chiamando z_{ij} il valore della funzione $f(x, y)$ corrispondente alla coppia di valori delle variabili:

$$x = x_i, \quad y = \varphi(x_i) + j\,\frac{\psi(x_i) - \varphi(x_i)}{n},$$

troveremo:

$$\begin{aligned}
I = {} & \frac{b-a}{12n}\left[(z_{0,i} + z_{2,i})d_i + (z_{0,i+2} + z_{2,i+2})d_{i+2} + 8z_{1,i+1}d_{i+1}\right] + \\
& + \frac{b-a}{12n}\left[(z_{2,i} + z_{4,i})d_i + (z_{2,i+2} + z_{4,i+2})d_{i+2} + 8z_{3,i+1}d_{i+1}\right] + \\
& + \frac{b-a}{12n}\left[(z_{4,i} + z_{6,i})d_i + (z_{4,i+2} + z_{6,i+2})d_{i+2} + 8z_{5,i+1}d_{i+1}\right] + \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
& + \frac{b-a}{12n}\left[(z_{2n-2,i} + z_{2n,i})d_i + (z_{2n-2,i+2} + z_{2n,i+2})d_{i+2} + 8z_{2n-1,i+1}d_{i+1}\right] = \\
= {} & \frac{b-a}{12n}\left[(z_{0,i} + 2z_{2,i} + 2z_{4,i} + \ldots + 2z_{2n-2,i} + z_{2n,i})d_i + \right. \\
& + (z_{0,i+2} + 2z_{2,i+2} + 2z_{4,i+2} + \ldots + 2z_{2n-2,i+2} + z_{2n,i+2})d_{i+2} + \\
& \left. + 8(z_{1,i+1} + z_{3,i+1} + z_{5,i+1} + \ldots + z_{2n-1,i+1})d_{i+1}\right].
\end{aligned}$$

E allora, applicando questa formola a tutte le striscie, cioè dando ad i i valori:

$$2,\ 4,\ \ldots,\ 2n,$$

verrà:

$$\begin{aligned}
\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy = {} & \frac{b-a}{12n}\left[(\ 0\ ) + (z_{0,2} + 2z_{2,2} + \ldots + 2_{2n-2,2} + z_{2n,2})d_2 + \right. \\
& + 8(z_{11} + z_{31} + \ldots + z_{2n-1,1})d_1 + \\
& + (z_{0,2} + 2z_{2,2} + \ldots + 2z_{2n-2,2} + z_{2n,2})d_2 + \\
& + (z_{0,4} + 2z_{2,4} + \ldots + 2z_{2n-2,4} + z_{2n,4})d_4 + 8(z_{1,3} + z_{3,3} + \ldots + z_{2n-1,3})d_3 + \\
& + (z_{0,4} + 2z_{2,4} + \ldots + 2z_{2n-2,4} + z_{2n,4})d_4 + \\
& + (z_{0,6} + 2z_{2,6} + \ldots + 2z_{2n-2,6} + z_{2n,6})d_6 + 8(z_{1,5} + z_{3,5} + \ldots + z_{2n-1,5})d_5 + \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + (z_{0,2n-2} + 2z_{2,2n-2} + \ldots + 2z_{2n-2,2n-2} + z_{2n,2n-2})d_{2n-2} + (\ 0\ ) + \\
& \left. + 8(z_{1,2n-1} + z_{3,2n-1} + \ldots + z_{2n-1,2n-1})d_{2n-1}\right].
\end{aligned}$$

Riducendo si ha finalmente:

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy = \frac{b-a}{6n} \Big[(z_{0,2} + 2z_{2,2} + \dots + 2z_{2n-2,2} + z_{2n,2}) d_2 +$$

$$+ 4(z_{1,1} + z_{3,1} + \dots + z_{2n-1,1}) d_1 +$$

$$+ (z_{0,4} + 2z_{2,4} + \dots + 2z_{2n-2,4} + z_{2n,4}) d_4 +$$

$$+ 4(z_{1,3} + z_{3,3} + \dots + z_{2n-1,3}) d_3 +$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$+ (z_{0,2n-2} + 2z_{2,2n-2} + \dots + 2z_{2n-2,2n-2} + z_{2n,2n-2}) d_{2n-2} +$$

$$+ 4(z_{1,2n-1} + z_{3,2n-1} + \dots + z_{2n-1,2n-1}) d_{2n-1} \Big]$$

che è la formola che si cercava.

Ferrara, Luglio 1905.

Saggio per una teoria aritmetica delle forme cubiche ternarie.

Nota I di BEPPO LEVI, a Torino.

I tentativi per risolvere in numeri razionali l'equazione indeterminata di terzo grado (o, ciò che è lo stesso, risolvere in numeri interi l'equazione omogenea di terzo grado in tre variabili) rimontano a Fermat, il quale, da una soluzione supposta nota dell'equazione $y^2 = a + bx + cx^2 + dx^3$ o dell'altra $y^2 = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ (dove a, b, c, d, e rappresentano numeri razionali) insegnò a dedurre, con procedimento razionale, una soluzione dell'equazione medesima, in generale diversa dalla prima. Il metodo di Fermat è riprodotto da Eulero nella sua Algebra [1] e poi, più brevemente, dal Legendre nella Théorie des nombres [2]. Esso consiste sostanzialmente, nel determinare — per la prima equazione — le coordinate del tangenziale del punto razionale noto nella cubica che l'equazione rappresenta, oppure le coordinate dell'ulteriore punto d'intersezione della cubica con una conica tangente ad essa nel suo punto all'infinito e tritangente nel punto razionale noto. Quanto alla seconda equazione essa rappresenta notoriamente una quartica avente un tacnodo nell'unico suo punto all'infinito, ed il metodo di Fermat consiste nel determinare l'ulteriore intersezione della quartica con una conica tritagente ad essa nel punto razionale dato e tangente ad essa (e quindi alla retta all'infinito) nel punto all'infinito della quartica medesima.

Non sono queste invero le equazioni più generali per cui simili considerazioni possano applicarsi, ma all'una o all'altra indifferentemente si conduce, mediante una sostituzione birazionale a coefficienti razionali, l'equazione di ogni cubica (o di ogni

---

[1] L. Euler, *Élémens d'Algèbre*, trad. Bernoulli, avec Additions par Lagrange, 1774 (vol. II, p. 135 e seg.).

[2] 2e édition, 1808, p. 431.

curva ellittica) di cui sia noto un punto razionale; ed il supporre che di dette equazioni si conosca una soluzione razionale (finita) equivale a supporre che *un secondo* punto razionale sia noto sulla curva primitiva. Questa domanda è realmente eccessiva: i metodi medesimi del Fermat possono applicarsi evidentemente alla cubica generale senza farle subire l'accennata trasformazione, onde è ben naturale che, insignificantemente modificati, siano ricomparsi ben tosto — indipendentemente forse dalla prima fonte — presso i geometri che successivamente ripresero il medesimo problema: Cauchy ([1]), Desboves ([2]), Lucas ([3]) e recentemente Poincaré ([4]). Insieme colle tangenti in punti razionali noti si usano qui le congiungenti coppie di punti razionali, le cui ulteriori intersezioni colla cubica sono chiaramente nuovi punti razionali, ed anche intersezioni con curve d'ordine > 1 (Lucas).

Alle accennate ricerche d'indole generale devesi poi aggiungere una larghissima bibliografia di studi particolari sulle condizioni di risolvibilità e sulla determinazione di tutte le soluzioni (od anche solo di parte di esse) di equazioni particolari (principalmente binomie — spesso a coefficienti numerici dati — prima fra tutte l'equazione di Fermat $x^3 + y^3 = z^3$ o, se si vuole, $x^3 + y^3 = 1$). Ciononostante si può dire che la teoria sia del tutto muta dinnanzi al problema generale delle proprietà aritmetiche delle forme cubiche. Anche la lunga memoria citata del Poincaré, in mezzo ad alcune felicissime osservazioni, lascia aperti assai più problemi di quanti ne risolva: e la risoluzione che qui si troverà di alcuni di essi pare, non solo come problema, ma ancora per i risultati cui essa porta, non priva d'interesse.

Il problema è vasto e — a quanto pare — in gran parte nuovo o intentato. Non vorrà dunque stupire il lettore se a molte e molte domande non abbiamo per ora alcuna risposta.

([1]) *Exercices de mathématique*, cahier 4.

([2]) " Nouvelles Annales „ (2), 18, 20, (3), 5.

([3]) *Sur l'analyse indéterminée du troisième degré etc.*, " Nouv. Annales „, (2), 17, p. 507.

([4]) *Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques*, " Journal de Liouville „, (5), 7, 1901, p. 161.

Delle cubiche che qui si studiano si ammette quasi sempre noto un punto razionale (il riconoscere su di una cubica data in modo generico, se un tal punto esista è problema oltremodo difficile, ed irrisolto fin qui). Per tali cubiche sono studiate le condizioni di equivalenza per trasformazioni birazionali a coefficienti razionali, e sono determinati gli invarianti numerici indipendenti la cui uguaglianza caratterizza tale equivalenza. Si passa quindi all'esame delle successioni di punti razionali che si ottengono da un gruppo di punti razionali noti mediante operazioni razionali, e particolarmente del caso in cui una tale successione dà luogo ad infiniti punti. Modificata quindi, per ragioni che si diranno, la nozione di *rango* già introdotta dal Sylvester e nuovamente fatta rivivere dal Poincaré, si pongono i preliminari per uno studio delle cubiche a birapporto razionale. A note successive si rimandano alcune deduzioni riguardo a tali cubiche, e l'esame dei gruppi finiti di punti razionalmente dipendenti. Le conclusioni di quest'ultimo studio paiono particolarmente interessanti.

1. — Riferito il piano ad un sistema di coordinate trilineari, l'equazione cubica in tre incognite omogenee rappresenta una cubica, ed ogni sua soluzione intera un punto razionale della cubica. La semplicità e l'evidenza del linguaggio geometrico ci consiglierà costantemente di riferirci a questa rappresentazione.

Le equazioni delle curve che si avrà per tal modo occasione di considerare si supporranno costantemente a coefficienti razionali: perciò si tralascierà di regola di ricordare tal condizione.

Un gruppo di punti del piano si dirà *razionale* quando è definito come il gruppo totale dei punti comuni ad un dato sistema di curve (a coefficienti razionali): un gruppo razionale è irreduttibile se ogni curva a coefficienti razionali passante per uno dei suoi punti passa di conseguenza per gli altri: ogni gruppo razionale è un insieme di gruppi razionali irreduttibili.

Generalità intorno all'equivalenza razionale di due cubiche. — Invarianti.

2. — Diremo razionalmente equivalenti due cubiche a coefficienti razionali quando esse possono trasformarsi l'una nell'altra mediante una trasformazione — birazionale sulle curve — a coefficienti razionali. Una tal trasformazione diremo per brevità una *trasformazione razionale* dell'una cubica nell'altra.

È noto che ogni corrispondenza birazionale fra due cubiche C e C' può stabilirsi mediante ∞^2 trasformazioni cremoniane quadratiche dei loro piani ([1]) e che una qualunque di queste trasformazioni quadratiche può definirsi prendendo come punti fondamentali nel piano di C i punti in cui C medesima è segata ulteriormente da una conica arbitraria passante per tre punti di C corrispondenti a tre punti allineati di C' ([2]).

Segue di qui che *se — le cubiche essendo a coefficienti razionali — la corrispondenza fra esse può esser definita mediante formole a coefficienti razionali, le due cubiche si trasformeranno l'una nell'altra per mezzo di una trasformazione cremoniana quadratica a coefficienti razionali.* Infatti i tre punti d'intersezione di C' con una retta razionale costituiscono una terna razionale, cui corrisponde su C una nuova terna razionale ([3]). Per questa e per due punti razionali arbitrari del piano di C passa una conica a coefficienti razionali che taglia nuovamente C in tre punti, costituenti una terna razionale. Si scelgano questi come punti fondamentali della trasformazione quadratica, secondo quanto sopra si è ricordato: ogni terna di punti di C' allineati

---

([1]) Cfr. Segre, *Le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche*, " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", 1889 (n. 3).

([2]) Perchè una trasformazione quadratica così definita trasforma C in una cubica in cui a tre punti allineati di C' corrispondono 3 punti allineati; quindi projettivamente identica a C' (Cfr. Segre, l. c. Marletta, *Sulla identità projettiva di due curve algebriche*, " Atti dell'Acc. Gioenia ", Catania (4), 19. 1905).

([3]) Per rientrare nella definizione di gruppo razionale di punti data al n. 1, basta considerare questi gruppi come comuni rispett. all'una e all'altra cubica data e a quelle costituite dalle terne di rette che li projettano dai punti fondamentali delle coordinate.

sopra una retta razionale, avrà per corrispondente in C' una terna razionale di punti che con quei tre punti fondamentali sta sopra una conica a coefficienti razionali (1). La corrispondenza quadratica definita dalla omografia che così resta stabilita fra le coniche della rete e le rette del piano di C' (nella quale omografia a rette a coefficienti razionali corrispondono coniche a coefficienti razionali e reciprocamente) ha dunque coefficienti razionali.

Tutte e sole le trasformazioni razionali di C in C' si ottengono evidentemente moltiplicando una fissa di esse per tutte le trasformazioni razionali di C' in se stessa: lo studio e la classificazione delle trasformazioni razionali di due cubiche equivalenti l'una nell'altra si riconduce dunque allo studio delle trasformazioni analoghe d'una cubica in sè. Esamineremo particolarmente il caso in cui le cubiche abbiano punti razionali.

3. — Se la cubica C possiede un punto razionale A, ogni trasformazione razionale di C in se stessa trasforma A in un punto razionale di C (distinto da A o coincidente con esso). È noto d'altra parte che secondochè C è una cubica a modulo generale o armonica o equianarmonica esistono 2, 4 o 6 serie di trasformazioni birazionali di C in se stessa, in ciascuna delle quali esiste una ed una sola trasformazione che trasforma un dato punto A in un dato punto B di C (2).

Ne risulta che, se la cubica C possiede punti razionali, fissato arbitrariamente uno di questi A *si può stabilire fra la totalità dei punti razionali di* C *e le trasformazioni razionali di* C *in se stessa una corrispondenza per modo che in ciascuna delle nominate serie di trasformazioni birazionali di* C *in se stessa ne esiste al più una razionale in corrispondenza a ciascun punto razionale di* C, *la quale precisamente trasforma* A *in questo punto.*

Completeremo questa osservazione dimostrando che, *qualunque sia la cubica* C, *ad ogni punto razionale* B *diverso da* A *corrispondono precisamente* DUE E DUE SOLE *trasformazioni razionali*

(1) Funzioni simmetriche delle coordinate dei punti di ciascuna delle due terne.

(2) Cfr. SEGRE, l. c.

di C in se stessa che mutano A in B: esse appartengono rispettivamente alle due serie di trasformazioni generali; una trasformazione singolare (sopra una cubica armonica o equianarmonica) *non è mai razionale* (¹); *esiste infine una sola trasformazione razionale che muta A in se stesso, ed è una projezione della cubica su se stessa.*

Si noti invero che la projezione di C su se stessa da un suo punto razionale è una trasformazione razionale di C in sè. Siano allora A e B due punti razionali di C, i quali eventualmente potrebbero coincidere: sia B_1, l'ulteriore punto d'intersezione di C colla retta AB: sarà anch'esso razionale: d'altronde non è escluso possa coincidere con A, con B o con entrambi. La projezione di C su se stessa da B_1, è una prima trasformazione razionale di C in sè che muta A in B. Sia ancora T il tangenziale di B: sarà esso pure un punto razionale: se alla trasformazione ora nominata si fa seguire la projezione di C su se stessa da T, la trasformazione prodotto è ancora razionale, appartiene alla seconda serie (delle trasformazioni generali) e muta ancora A in B. Se però A e B coincidessero, coinciderebbero B_1 e T e la nuova trasformazione si ridurrebbe all'identità.

Resta a mostrare la non esistenza di trasformazioni razionali singolari.

Consideriamo dapprima una cubica armonica: il quadrato d'una trasformazione singolare su di essa è una projezione della cubica su se stessa; se quindi una tal trasformazione T è razionale, la cubica possiede un punto razionale A, tangenziale dei suoi punti uniti. Siano O_1 e O_2 i due punti non uniti per T di cui A è tangenziale: essi formano una coppia involutoria per la trasformazione razionale T e formano perciò una coppia razionale. La retta O_1O_2 incontra quindi ulteriormente la cubica in un nuovo punto razionale A'. Si chiamino (O_1), (O_2) le projezioni della cubica su se stessa da O_1 e O_2 rispettivamente: il prodotto $(O_1)\,T\,(O_2) = (O_2)\,T\,(O_1)$ sarà una nuova trasformazione razionale singolare della cubica appartenente alla stessa serie di T ed avrà per punti uniti A ed A'. Si chiami T_1 questa trasformazione, e si pensi, per semplicità, previamente tras-

(¹) Cfr., dal punto di vista analitico, il n. 8.

formata razionalmente la cubica, in una in cui A sia flesso; ognuna delle trasformazioni cremoniane quadratiche che contengono T_1 degenera allora in una collineazione in cui son punti uniti A, A' e il punto d'incontro della tangente in A colla retta armonica di A; ed il quadrato di questa collineazione deve essere l'omologia armonica che contiene la projezione della cubica su se stessa da A. Questa collineazione è quindi immaginaria [1] e perciò certamente non razionale. È dunque assurdo che sia razionale T_1 e quindi T.

Consideriamo ora una cubica equianarmonica: una trasformazione singolare razionale di periodo 6 la quale esistesse sulla cubica avrebbe l'unico suo punto unito razionale. Se poi sulla cubica si avesse una trasformazione singolare razionale di periodo 3, ed inoltre un punto razionale, il prodotto di quella trasformazione per la projezione da questo punto sarebbe una trasformazione razionale singolare di periodo 6, e di nuovo avrebbe l'unico suo punto unito razionale. Sia A questo punto, O il suo tangenziale: la trasformazione considerata determina nel fascio O una projettività ciclica del 3° ordine avente il raggio unito OA razionale (e quindi reale). Questa projettività non può dunque essere reale, e quindi nemmeno la trasformazione della cubica in sè che l'ha generata [2].

---

[1] Sia A'' il terzo punto unito della collineazione: P un punto del piano, P' il suo corrispondente, P_1 il corrispondente di P', coniugato armonico di P rispetto ad A e alla retta $A'A''$; siano L, M i punti d'intersezione di $A'A''$ colle rette $P'P$, $P'P_1$ e H, K i punti d'intersezione di $A'A''$ colle AP, AP'. Il gruppo $(HKLM)$ dovrà essere armonico perchè projezione di $HAPP_1$ da P'. Del pari dovrà essere armonico il gruppo $(HKA'A'')$, ed infine anche $(LMA'A'')$, perchè H e K, L e M debbono corrispondersi nella collineazione: le tre coppie HK, LM, $A'A''$ non possono essere tutte reali e quindi nemmeno entrambi i punti P, P'.

[2] Dalle precedenti considerazioni risulta pure che una cubica armonica su cui esistesse una trasformazione razionale singolare o una cubica equianarmonica su cui esistesse una trasformazione razionale singolare di periodo 6 dovrebbero possedere punti razionali, e si ricadrebbe nella precedente contraddizione; quindi, indipendentemente dall'ipotesi dell'esistenza di punti razionali, *una cubica armonica a coefficienti razionali non può mai possedere trasformazioni razionali singolari, ed una cubica equianarmonica a coefficienti razionali non può mai possedere trasformazioni razionali singolari di periodo 6.*

4. — Da queste osservazioni segue immediatamente che *se due cubiche C e C' razionalmente equivalenti hanno punti razionali, esistono sempre due e due sole trasformazioni razionali dell'una nell'altra che a un punto razionale arbitrario dell'una fanno corrispondere un punto razionale arbitrariamente fissato sull'altra.*

Siano infatti A, A' i due punti razionali fissati rispettivamente su C e C': se una trasformazione razionale T di C in C' muta A in un punto di C' (necessariamente razionale) diverso da A', sia B' questo punto: sia poi U una delle due trasformazioni razionali che mutano C' in se stessa e B' in A': la trasformazione TU trasformerà C in C' facendo corrispondere A e A'. Se poi la T fa già corrispondere A ad A', una seconda trasformazione della stessa proprietà sarà il prodotto di T per la projezione di C' su se stessa dal tangenziale di A'.

Se in particolare *le due cubiche razionali* C *e* C' *sono razionalmente equivalenti e ciascuna di esse possiede un flesso razionale, esse possono trasformarsi razionalmente l'una nell'altra in modo che i due flessi si corrispondano.* È noto che la trasformazione dei due piani in cui quella delle cubiche è contenuta è allora una collineazione.

5. — Ci varremo dell'ultima osservazione per dedurre le condizioni perchè due cubiche razionali, possedenti ciascuna un punto razionale, siano razionalmente equivalenti. Assoggettando, al bisogno, ciascuna delle due cubiche ad una trasformazione cremoniana quadratica che muti in un flesso il punto razionale noto, *si può supporre che le due cubiche* C *e* C' *di cui si vogliono studiare le condizioni di equivalenza abbiano ciascuna un flesso razionale e che la trasformazione sia una projettività a coefficienti razionali in cui questi flessi si corrispondono* e con essi necessariamente le tangenti per essi alle cubiche rispettive e i punti di contatto di queste.

Riferita ciascuna cubica ad un sistema di coordinate nel quale il flesso considerato sia $x = y = 0$ (risp. $x' = y' = 0$) e la sua conica polare sia $xz = 0$ (risp. $x'z' = 0$), le loro equazioni prendono la forma:

$$(1) \qquad xz^2 + a\varphi_3 = 0\,, \qquad\qquad (2) \qquad x'z'^2 + a'\varphi_3' = 0$$

dove φ_3 e φ_3' sono forme del 3° ordine in x, y e in x', y', aventi il coefficiente di y^3 e di y'^3 rispettivamente uguale a 1; e le due cubiche saranno equivalenti sempre e solo quando, mediante una trasformazione di coordinate a coefficienti razionali che non sposti l'origine nè gli assi $x=0$, $z=0$, — vale a dire una trasformazione della forma:

$$(3) \qquad x=\alpha x' \qquad y=\beta x'+y' \qquad z=\gamma z'$$

— l'equazione (1) può trasportarsi nella (2).

La condizione necessaria e sufficiente perchè una sostituzione della forma:

$$(3)_1 \qquad x=\alpha x' \qquad y=\beta x'+y'$$

(a coefficienti razionali o non) trasformi φ_3 in φ_3' è notoriamente che le radici $\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{x_3}{y_3}$ di $\varphi_3=0$ e le radici $\frac{x_1'}{y_1'}, \frac{x_2'}{y_2'}, \frac{x_3'}{y_3'}$ di $\varphi_3'=0$ possano ordinarsi per modo che i birapporti $\left(0\ \frac{x_1}{y_1}\ \frac{x_2}{y_2}\ \frac{x_3}{y_3}\right)$, $\left(0\ \frac{x_1'}{y_1'}\ \frac{x_2'}{y_2'}\ \frac{x_3'}{y_3'}\right)$ siano uguali: e fissato tale ordine, la sostituzione è completamente determinata dalla condizione di dover trasformare l'una nell'altra le radici omologhe. Ma se la cubica non è armonica od equianarmonica ad un determinato ordine delle radici dell'una equazione non corrispondono due ordini differenti delle radici dell'altra, cosicchè la trasformazione è univocamente determinata dalle equazioni $\varphi_3=0$, $\varphi_3'=0$ medesime. I coefficienti α e β, i quali dipendono algebricamente dai coefficienti delle forme φ_3, φ_3', sono dunque funzioni razionali di essi; vale a dire che la sostituzione $(3)_1$ sarà razionale tosto che le due cubiche posseggono lo stesso birapporto $\neq -1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$.

6. — Il coefficiente α ha ufficio fondamentale nella determinazione delle condizioni di trasformabilità. Si ponga:

$$(4) \qquad \begin{aligned} \varphi_3(xy) &\equiv m_0x^3+3m_1x^2y+3m_2xy^2+y^3\equiv\varphi_3(xy;m) \\ \varphi_3'(x'y') &\equiv m_0'x'^3+3m_1'x'^2y'+3m_2'x'y'^2+y'^3\equiv\varphi'_3(x'y';m'). \end{aligned}$$

È facile prevedere [1] che α potrà assumere la forma:

$$\alpha = \frac{\delta(m)}{\delta(m')} \tag{5}$$

dove $\delta(m)$ rappresenta una funzione razionale dei coefficienti di φ_3 (e $\delta(m')$ la stessa funzione dei coefficienti di φ'_3): ma è utile svolgere completamente il calcolo di α.

Si considerino perciò le forme $x\varphi_3(xy)$, $\alpha x'\varphi'_3(x'y')$; esse sono trasformate l'una nell'altra dalla sostituzione $(3)_1$ di determinante α; se quindi per le due forme si calcolano gli invarianti fondamentali i, j [2] (invarianti rispettivamente del peso 4 e 6) i loro valori per le due forme dovranno differire soltanto, rispettivamente, pei fattori α^4 e α^6.

Per la forma $x\varphi_3(xy)$ si ha:

$$\text{(6)} \qquad \begin{aligned} i &= -\frac{3}{2}(m_1 - m_2^2) \\ j &= -\frac{3}{8}(2m_2^3 - 3m_1m_2 + m_0). \end{aligned}$$

Si chiamino rispettivamente i' e j' le espressioni analoghe nelle m': i valori degli invarianti fondamentali (i e j) della forma $\alpha x'\varphi_3'(x'y')$ (rispettivamente dei gradi 2 e 3) saranno $\alpha^2 i'$, $\alpha^3 j'$, e per la precedente osservazione dovrà aversi:

$$\alpha^2 i' = \alpha^4 i, \qquad \alpha^3 j' = \alpha^6 j \; [3]$$

[1] Si ponga $\alpha = \psi(m, m')$; nella trasformazione inversa di φ_3' in φ_3 si dovrà porre $x' = \frac{1}{\alpha} x$, onde si ha $\frac{1}{\alpha} = \psi(m', m)$. Si consideri inoltre una forma intermedia $\varphi_3''(x''y'') \equiv \varphi_3''(x''y''; m'')$ trasformata della φ_3 per una sostituzione della forma $(3)_1$, onde i suoi coefficienti risultino funzioni delle m; l'equazione funzionale risultante $\psi(m, m') = \frac{\psi(m\, m'')}{\psi(m'\, m'')}$ mostra allora, dopo alcune riduzioni, che la ψ (che già si suppone razionale) deve assumere la forma (5). Nel caso della cubica armonica od equianarmonica l'induzione cade perchè non si può più affermare che $\psi(m, m')$ sia funzione razionale dei coefficienti m, m': ciononostante la forma (5) sarà conservata, ma $\delta(m)$ sarà un *numero razionale* funzione (non razionale) dei coefficienti m (cfr. n. 7).

[2] Cfr. p. es. Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen ü. Geometrie*, vol. I, cap. III (ed. francese, p. 284).

[3] Si verificano d'altronde facilmente le due uguaglianze calcolando direttamente i coefficienti m' in funzione dei coefficienti m e dei coefficienti della sostituzione $(3)_1$ che *si suppone* trasformare φ_3 in φ'_3 e costruendo quindi mediante essi le espressioni i', j'.

ossia:

$$\alpha^2 = \frac{i'}{i} \qquad \alpha^3 = \frac{j'}{j} \tag{7}$$

e quindi, facendo il rapporto delle due uguaglianze:

$$\alpha = \frac{i}{j} : \frac{i'}{j'}. \tag{8}$$

Risulta così verificata per α la forma (5) preannunciata con:

$$\delta(m) = \frac{i}{j} = \frac{4(m_1 - m_2^2)}{(2m_3^2 - 3m_1m_2 + m_0)}. \tag{9}$$

7. — Il passaggio dalle relazioni (7) alla (8) presuppone però che ciascuno dei due rapporti $\frac{i'}{i}$, $\frac{j'}{j}$ non sia illusorio: è ciò che avverrebbe se la cubica fosse armonica od equianarmonica, casi caratterizzati rispettivamente dalle relazioni $j = j' = 0$, $i = i' = 0$ [1]. L'eccezione invero fu già preveduta direttamente al n. 5.

Nel caso della cubica armonica la prima delle (7) dà:

$$\alpha = \pm \sqrt{\frac{i'}{i}}. \tag{8'}$$

Una maggior determinazione non è possibile coi soli elementi discussi fin qui [2]: le radici delle $\varphi_3 = 0$, $\varphi_3' = 0$ possono infatti supporsi allora ordinate in modo che i birapporti $\left(0, \frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{x_3}{y_3}\right)$, $\left(0, \frac{x_1'}{y_1'}, \frac{x_2'}{y_2'}, \frac{x_3'}{y_3'}\right)$ valgano entrambi -1: sono allora univocamente fissate le radici da chiamarsi $\frac{x_1}{y_1}$, $\frac{x_1'}{y_1'}$, onde queste sono funzioni razionali dei coefficienti delle equazioni rispettive. Le radici delle coppie residue invece possono ancora scambiarsi fra loro e dipendono quindi da una irrazionalità quadratica. Se, mediante una prima trasformazione projettiva a coefficienti razionali si rendono identiche le due prime radici, risulta immediatamente che una trasformazione $(3)_1$ si potrà

---

[1] CLEBSCH-LINDEMANN, l. c., pag. 297.

[2] Cfr. n. 8.

stabilire ponendo una qualunque corrispondenza fra le radici delle due coppie residue: onde l'ambiguità di segno della (8').

Perchè la $(3)_1$ sia a coefficienti razionali *occorre qui che* i *e* i' *posseggano lo stesso fattore non quadratico.* Porremo:

$$(9') \qquad \delta^2(m) = \textit{massimo fattor quadratico di } \frac{1}{i}.$$

La (8') rientrerà così nella forma (5).

Nel caso della cubica equianarmonica la seconda delle (7) dà:

$$(8'') \qquad \alpha = \sqrt[3]{\frac{j'}{j}}$$

e affinchè la trasformazione $(3)_1$ possa esser razionale non cade dubbio sulla radice cubica a scegliersi (la radice reale), e perchè sia effettivamente razionale *occorre e basta che* j *e* j' *posseggano il medesimo fattore non cubico.* Porremo:

$$(9'') \qquad \delta^3(m) = \textit{massimo fattor cubico di } \frac{1}{j}$$

e così rientrerà anche la (8'') nella forma (5). In questo caso la relazione $\frac{2}{3}\, i = m_2^2 - m_1 = 0$ permette di semplificare l'espressione di j: si ha:

$$(6'') \qquad j = m_0 - m_2^3.$$

8. — Soddisfatte le condizioni enunciate nei n[i] 5, 7 si possono supporre le coordinate x, y mutate razionalmente nelle nuove x', y' in modo che l'equazione (1) divenga:

$$(1') \qquad \alpha x' z^2 + a\varphi_3' = 0.$$

Di qua $z = \pm\sqrt{\frac{-a}{\alpha}}\sqrt{\frac{\varphi_3'}{x'}}$ mentre dalla (2) si ha $z' = \pm\sqrt{-a'}\sqrt{\frac{\varphi_3'}{x'}}$. La (1') si trasforma quindi nella (2) mediante la sostituzione $z = \pm\sqrt{\frac{a}{\alpha a'}}\, z'$: e questa sostituzione sarà razionale quando sia razionale:

$$\sqrt{\frac{1}{\alpha}\,\frac{a}{a'}} = \sqrt{\frac{a}{\delta(m)} : \frac{a'}{\delta(m')}}$$

ossia quando $\frac{a}{\delta(m)}$ *ed* $\frac{a'}{\delta(m')}$ *posseggano lo stesso fattore non quadratico.*

Particolarmente notevole è questa condizione nel caso della cubica armonica, in quanto vale ad eliminare l'ambiguità di segno che ancora rimaneva nella (8'). *Dovranno* cioè *sceglersi i segni di* $\delta(m)$ *e* $\delta(m')$ *(che la formola* (9') *lascia indeterminati), per modo che* $\frac{a}{\delta(m)}$ *ed* $\frac{a'}{\delta(m')}$ *abbiano lo stesso segno; per es. uguali rispettivamente ai segni di* a *e di* a' [1].

9. — Riassumendo i risultati dei n[i] 5-8 si può dunque enunciare che *una cubica a coefficienti razionali che possegga un punto razionale dipende in generale da due invarianti aritmetici indipendenti, l'uguaglianza dei quali per due tali cubiche esprime la condizione necessaria e sufficiente per la loro equivalenza razionale.*

Supposta l'equazione della cubica portata nella forma:

$$xz^2 + a\varphi_3(xy) = 0$$

$$\varphi_3(xy) \equiv m_0x^3 + 3m_1x^2y + 3m_2xy^2 + y^3$$

e posto:

$$i = m_1 - m_2^2 \qquad j = m_0 - 3m_1m_2 + 2m_2^3 \ (^2)$$

i due invarianti sono, per la cubica generale, $\frac{i^3}{j^2}$ *e il massimo fattore non quadratico di* $\frac{aj}{i}$ (il quale si potrà naturalmente sempre assumere numero intero. avendo cura di trasformare in quadrato il denominatore di questo numero razionale).

Il primo invariante si può calcolare direttamente sull'equazione della cubica nella sua forma generale perchè (a meno del fattore —24) *è l'invariante assoluto* $\frac{i^3}{j^2}$ *della forma biquadratica*

---

[1] Si noti che la determinazione della sostituzione (3) che ne risulta, con una sola ambiguità di segno nel coefficiente γ è l'immagine analitica delle conclusioni altrimenti ottenute ai n[i] 3, 4.

[2] Si sono qui mutati solo per un fattor costante i valori dati precedentemente ai simboli i e j (equaz. (6)); tale alterazione non muta evidentemente le conclusioni: analoghe modificazioni, per sola comodità di scrittura, si sono portate in alcuni degli invarianti successivi.

rappresentante la quaterna di tangenti da un punto della cubica alla cubica medesima: ad esso può sostituirsi il birapporto della cubica (invariante irrazionale).

Fanno eccezione i casi della cubica armonica ed equianarmonica.

Per la cubica armonica i due invarianti sono il massimo fattore non quadratico di i *— sia* θ *— e il massimo fattore non quadratico di* $|a\sqrt{i:\theta}|$.

Per la cubica equianarmonica i due invarianti sono il massimo fattore non cubico di $j(=m_0-m_2^3)$ *— sia* θ_1 *— ed il massimo fattore non quadratico di* $a\sqrt[3]{j:\theta_1}$.

Quando le cubiche (1) e (2) (n. 4) posseggono un punto razionale diverso dal flesso $x=y=0$ (risp. $x'=y'=0$) e dai punti d'intersezione colla retta $z=0$ (risp. $z'=0$) la seconda condizione d'equivalenza (n. 8) prende ancora una diversa forma degna di nota. Si vede infatti che, dopo la trasformazione $(3)_1$, le rette $\frac{x'}{y'}=\text{cost}$ che projettano punti razionali dell'una cubica, projettano pure — nell'ipotesi della equivalenza — punti razionali dell'altra: e reciprocamente è sufficiente per l'equivalenza che su *una* stessa retta $\frac{x'}{y'}=\text{cost.}$ stiano punti razionali delle due cubiche, non appartenenti alle rette $z=0$, $z'=0$. Quindi *se due cubiche aventi lo stesso birapporto* (e soddisfacenti all'ulteriore condizione che a questa si aggiunge qualora siano armoniche o equianarmoniche) *ed aventi un flesso razionale, hanno ancora un punto razionale di cui quel flesso non sia tangenziale, la condizione necessaria e sufficiente per la loro equivalenza è espressa dal fatto che il gruppo formato dalle quattro tangenti passanti pel flesso* (compresa quella nel flesso medesimo) *e dalla projettante il punto razionale supposto nell'una sia projettivo al gruppo formato dalle tangenti pel flesso dell'altra e da una retta projettante dal flesso un (conveniente) punto razionale di questa.*

Le successioni di punti razionali d'una cubica razionalmente concatenati.

10. — Si dirà che un punto razionale o un gruppo razionale di punti di una cubica a coefficienti razionali è dedotto

razionalmente dai punti razionali $A_1 A_2 \dots A_r$ quando è univocamente determinato mediante intersezioni della cubica con curve a coefficienti razionali, completamente definite dai punti $A_1, A_2, \dots, A_r$ e dai valori (razionali) di un certo gruppo di coefficienti che vi compaiono come parametri; per assegnare i valori di questi parametri costringeremo generalmente la curva a passare per altrettanti punti razionali fissati arbitrariamente sul piano.

Riferiti i punti della cubica ad un parametro ellittico, per modo che la somma dei valori del parametro in tre punti allineati sia nulla, a meno di periodi, si chiamino $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r$ le coordinate ellittiche di $A_1 A_2 \dots A_r$.

Se una curva a coefficienti razionali d'ordine ν passa per $A_1 A_2 \dots A_\varrho$, taglia ulteriormente la cubica in un gruppo razionale di $3\nu - \rho$ punti di cui la somma delle coordinate ellittiche sarà (a meno di periodi [1]) $-(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\varrho)$. E se una curva d'ordine μ passa per questo e per altri gruppi razionali determinati analogamente mediante curve d'ordine $\nu', \nu'', \dots$ passanti pei gruppi di punti razionali $A_1' A_2' \dots A'_{\varrho'}, A_1'' A_2'' \dots A''_{\varrho'}, \dots$ di coordinate ellittiche $\alpha_1' \alpha_2' \dots \alpha'_{\varrho'}, \alpha_1'' \dots$, taglierà ulteriormente in un gruppo razionale di $3(\mu - \nu - \nu' - \nu'' - \dots) + \rho + \rho' + \rho'' + \dots$ punti, in cui la somma delle coordinate ellittiche sarà $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\varrho) + (\alpha_1' + \alpha_2' + \dots + \alpha'_{\varrho'}) + (\alpha_1'' + \alpha_2'' + \dots + \alpha''_{\varrho''}) + \dots$ Se infine questa curva sarà stata obbligata ancora a passare pei punti razionali $B_1 B_2 \dots B_\sigma$ aventi le coordinate ellittiche $\beta_1 \beta_2 \dots \beta_\sigma$, il numero dei punti del gruppo razionale residua intersezione si ridurrà a $3(\mu - \nu - \nu' - \dots) + \rho + \rho' + \rho'' + \dots - \sigma$ e la somma dei valori della coordinata ellittica nei punti di esso a $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\varrho) + (\alpha_1' + \alpha_2' + \dots + \alpha'_{\varrho'}) + \dots - (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_\sigma)$. Il ragionamento si prosegue in modo evidente; si osserverà che nulla vieta di far coincidere un qualsiasi numero di punti A e B, onde, considerando che $\rho, \rho', \rho'', \dots, \sigma$ sono precisamente i numeri dei termini nelle parentesi dell'ultima somma, si potrà concludere che *se un gruppo razionale di* k *punti della cubica è dedotto razionalmente dai punti razionali* $A_1, A_2, \dots, A_r$, *la somma delle coordinate ellittiche dei suoi punti è una combinazione lineare a coefficienti interi delle coordinate ellittiche* $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r$ *di questi punti, tale*

---

[1] Questa condizione, *a meno di periodi*, sarà sempre sottintesa parlando di coordinate ellittiche.

che la somma algebrica dei suoi coefficienti è congrua a k *rispetto al modulo* 3. In particolare, facendo k = 1, *la coordinata ellittica di ogni punto razionale della cubica, dedotto razionalmente dai punti* $A_1 A_2 \ldots A_r$ *ha la forma* $\Sigma p_i \alpha_i$, *colla condizione* $\Sigma p_i \equiv 1$ *(mod. 3).*

È importante rilevare che quest' ultima proposizione s'inverte e l'inversa possiede ancora una determinazione maggiore che la proposizione precedente: *tutti i punti la cui coordinata ellittica ha la forma* $\Sigma p_i \alpha_i$ *(con* $\Sigma p_i \equiv 1$ *(mod. 3)) si deducono razionalmente dai punti* $A_1 A_2 \ldots A_r$; *e per tal deduzione basta la costruzione di tangenziali e di terze intersezioni della cubica con rette congiungenti due suoi punti, operate sopra i punti iniziali o sopra punti già dedotti da essi mediante costruzioni di questa medesima natura.* Siano infatti $A_1 A_2 \ldots A_\varrho B_1 B_2 \ldots B_\sigma$ punti, distinti o non, di coordinate ellittiche rispettive $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_\varrho \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_\sigma$ e si consideri il punto P avente la coordinata ellittica $(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\varrho) - (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\sigma)$, con $\rho - \sigma \equiv 1$ (mod. 3); tolto il caso di $\rho = 1$ $\sigma = 0$, in cui il punto considerato è uno dei punti A, almeno uno dei numeri ρ, σ è ≥ 2. Se allora $\rho \geq 2$ si conduca la retta $A_1 A_2$ (tangente in A_1, se i due punti coincidessero) e si chiami B_1' il terzo suo punto di intersezione colla cubica; la sua coordinata ellittica sarà $\beta_1' = -\alpha_1 - \alpha_2$, onde la coordinata di P potrà scriversi $(\alpha_3 + \ldots + \alpha_\varrho) - (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\sigma + \beta_1')$. Del pari se $\sigma \geq 2$, si chiami A_1' l'ulteriore intersezione della retta $B_1 B_2$ colla cubica, la cui coordinata ellittica sarà $\alpha_1' = -\beta_1 - \beta_2$; l'espressione della coordinata di P diverrà $(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\varrho + \alpha_1') - (\beta_3 + \ldots + \beta_\sigma)$. Nell'uno e nell'altro caso il numero dei punti A e B mediante le cui coordinate si esprime quella di P sarà diminuito di 1 (mentre evidentemente la somma algebrica dei coefficienti della combinazione lineare si sarà conservata $\equiv 1$ (mod. 3)); mediante l'applicazione ripetuta del procedimento si giungerà infine alla costruzione del punto P partendo dai punti A e B, mediante le sole costruzioni lineari enunciate.

11. — Applicando i risultati precedenti al caso in cui si parta da un unico punto razionale A, di coordinata ellittica α, si ottiene che *tutti e soli i punti della cubica che si deducono razionalmente dal punto* A *corrispondono alle coordinate ellittiche della forma* $(3n + 1)\alpha$, *dove* n *è un numero intero, positivo o negativo.* Il numero di questi punti è finito quando è finito il

numero dei valori di $(3n+1)\alpha$ incongrui rispetto ai periodi, vale a dire quando α è parte aliquota d'un periodo ω. Dimostreremo in seguito che questo caso deve considerarsi come eccezionale, cosicchè *una cubica a coefficienti razionali la quale possegga un punto razionale ne possiede in generale tutta una infinità*. D'altronde l'esistenza di cubiche con successioni infinite di punti razionali, razionalmente dedotti l'un dall'altro si stabilisce facilmente mediante semplici esempi.

12. — Si pone allora la questione: quali caratteristiche possiede un tale aggregato di infiniti punti razionali?

È facile vedere che *l'aggregato dei punti razionali della cubica è allora denso su ciascun ramo della cubica su cui un tal punto esiste* (1). Basta, per persuadersene aritmeticamente, ricordare che si può sempre disporre in modo che ad ogni punto del ramo dispari della cubica appartenga un valore reale della coordinata ellittica, e che, se esiste pure il ramo pari, ad ogni punto di questo appartenga un valore reale a meno di un mezzo periodo immaginario (2). Sia allora anzitutto A un punto razionale del ramo dispari da cui si deducano razionalmente infiniti punti razionali, cosicchè $\frac{\alpha}{\omega}$ sia irrazionale reale (ω essendo un periodo reale); assegnato un numero reale β qualunque, per un noto teorema dell'Hermite (3), esistono valori interi di n e di h tali che:

$$\left|\frac{1}{\omega}\left[(3n+1)\alpha - h\omega - \beta\right]\right| = \left|n\,\frac{3\alpha}{\omega} - h - \frac{\beta-\alpha}{\omega}\right|$$

è piccolo a piacere: esistono quindi punti razionalmente dedotti dal punto A di coordinata ellittica α, e prossimi quanto si vuole a un punto B di coordinata ellittica β reale arbitraria. Se poi si considera un punto A di coordinata ellittica $\alpha + \frac{\omega'}{2}$, del ramo

(1) Cfr. Poincaré, l. c., p. 173.

(2) Cfr. p. es. Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen ü. Geometrie*, vol. I, p. 609-610.

(3) " Giornale di Crelle ,, 40. — Minkowsky, *Geometrie der Zahlen*, vol. I, p. 180.

pari della cubica (ove ancora, per ogni periodo reale ω, $\frac{\alpha}{\omega}$ sia irrazionale reale), basterà porre $n = 2\nu$ e $n = 2\nu + 1$ rispettivamente nei due casi di n pari e n dispari, e considerare le espressioni:

$$\left|\frac{1}{\omega}\left[(6\nu+1)\left(\alpha + \frac{\omega'}{2}\right) - h\omega - 3\nu\omega' - \left(\beta + \frac{\omega'}{2}\right)\right]\right| = \left|\nu\frac{6\alpha}{\omega} - h - \frac{\beta -}{\omega}\right|,$$

$$\left|\frac{1}{\omega}\left[(6\nu+4)\left(\alpha + \frac{\omega'}{2}\right) - h\omega - (3\nu+2)\omega' - \beta\right]\right| = \left|\nu\frac{6\alpha}{\omega} - h - \frac{\beta - 4\alpha}{\omega}\right|$$

ed applicare ai numeri ν, h il teorema dell'Hermite, per concludere che esistono allora punti razionalmente dedotti da A in ogni prossimità di ciascun punto reale della cubica, appartenga esso al ramo pari ovvero al ramo dispari (sia cioè della forma $\beta + \frac{\omega'}{2}$ o β la sua coordinata ellittica).

13. — Non sarà forse senza interesse il mostrare come la proposizione possa dimostrarsi con tutta semplicità, per via geometrica (o algebrica che dir si voglia) senza alcun ricorso alla rappresentazione mediante le trascendenti ellittiche.

Si osservi perciò che *se una cubica possiede infiniti punti razionali, l'aggregato di questi punti razionali non ha punti isolati.* Infatti sulla cubica esisterà certo qualche punto — razionale o non — di condensazione dell'aggregato dei punti razionali; sia C un tal punto, C_1 un punto razionale mobile tendente a C, A un punto razionale fisso. La retta AC_1 taglia la cubica in un terzo punto razionale B_1, mobile con C_1 e tendente, mentre C_1 tende a C, al punto B, ulteriore intersezione di AC colla cubica. Da B_1 si proietti la cubica su se stessa, e precisamente si consideri la proiezione dell'intorno di C: sarà l'intorno di un punto D_1 e possiederà in ogni prossimità di D_1 punti razionali, proiezioni di punti razionali prossimi a C; e se B_1 tende, per punti razionali, a B, D_1 tende ad A; sia D_1' una posizione di D_1 distante meno di $\frac{1}{2}\epsilon$ da A, E_1' un punto razionale dell'intorno di D_1', e distante da D_1' meno di $\frac{1}{2}\epsilon$; E_1' disterà da A meno di ϵ. In ogni intorno di A esistono dunque punti razionali della cubica.

L'aggregato dei punti razionali della cubica genera quindi, per chiusura, un aggregato perfetto: ogni punto della cubica che non appartenga a questo è interno ad un segmento di punti che tutti non gli appartengono: se questo segmento non riempie tutto un ramo della cubica, ed ha quindi estremi, ognuno dei suoi estremi è punto di condensazione solo a destra o solo a sinistra dell'aggregato dei punti razionali. Ora dimostreremo che tali punti non possono esistere, cioè: *Ciascun punto limite di punti razionali è punto di condensazione così a destra come a sinistra del loro aggregato.* Nell'aggregato perfetto ottenuto per chiusura dall'aggregato dei punti razionali, esistono infatti infiniti punti di condensazione a destra e a sinistra dell'aggregato medesimo: sia allora C uno di questi punti il quale non sia tangenziale del punto B arbitrariamente scelto in detto aggregato perfetto, nè abbia B per tangenziale. La retta BC taglia ulteriormente la cubica in un punto A avente da B e da C una distanza finita; se B' e C' sono punti razionali sufficientemente prossimi a B e C, la $B'C'$ taglierà ulteriormente la cubica in un punto razionale arbitrariamente prossimo ad A: dunque anche A è punto limite di punti razionali della cubica. Si possono ora determinare intorni di C e di A sufficientemente ristretti perchè il rapporto tra la distanza di due punti dell'intorno di C e la distanza delle loro proiezioni nell'intorno di B fatte da un punto qualunque dell'intorno di A resti compreso fra due limiti finiti L e l $(L > l)$. Siano C' e C'' due punti razionali dell'intorno di C, da parti opposte di C e le distanze $C'C$ e $C''C$ siano δ' e δ''. Si scelga A_1 razionale, sufficientemente prossimo ad A perchè la distanza di B dal punto B_1, ulteriore intersezione della cubica colla $A_1 C$, sia $< \delta' l$ e $< \delta'' l$. Siano $B_1' B_1''$ le proiezioni di C' e C'' da A_1 (quindi punti razionali della cubica); cosicchè:

$$\delta' L > B_1 B_1' > \delta' l \qquad \delta'' L > B_1 B_1'' > \delta'' l.$$

B_1' e B_1'' saranno da parti opposte di B_1, e, a causa delle disuguaglianze ora scritte, anche da parti opposte di B, e distanti da B rispettivamente meno di $\delta'(L + l)$ e $\delta''(L + l)$. Facendo tendere δ' e δ'' a 0 si ottiene che il punto B è punto limite di punti razionali così a destra come a sinistra.

Ne risulta l'enunciata densità dell'aggregato dei punti razionali sopra ogni ramo su cui tali punti esistono.

È chiaro d'altra parte che se un punto razionale esiste sul ramo pari della cubica, uno ne esiste pure sul ramo dispari, vale a dire il tangenziale del primo.

14. — La precedente discussione ci dà già una considerevole nozione sulla distribuzione dei punti razionali sulla cubica razionale. Ma i problemi che ancora si pongono al riguardo sono numerosi e pieni d'interesse: invero il solo elemento considerato fin qui è l'esistenza di infiniti punti razionali, punti i quali potrebbero ben tutti dedursi razionalmente da uno solo di essi. Ora questa derivazione d'una serie illimitata di punti da uno precedentemente noto esaurisce l'aggregato dei punti razionali della cubica? È facile vedere che così non sarà generalmente: per lo meno, sempre quando dalla razionalità di un punto di coordinata ellittica α si è dedotta la razionalità di tutta una serie compresa nella formola $(3n+1)\alpha$ dovrà nascere il dubbio che α medesimo sia multiplo di una coordinata $\frac{\alpha}{3\rho+1}$ appartenente essa pure ad un punto razionale da cui A si dedurrebbe razionalmente, ma non viceversa. Ma ci si presenteranno casi in cui questa incompletezza della serie dei punti razionalmente dedotti da uno noto è più fondamentale.

Da considerazioni di questa natura il Sylvester prima, il Poincaré poi, sono stati indotti a introdurre un elemento di classificazione delle cubiche razionali che quest'ultimo chiamò il *rango* [1]: ma secondo la definizione adottata da questi autori il rango non risulta invariante per trasformazioni birazionali a coefficienti razionali, potendone esser mutato di una unità: perciò noi modificheremo leggermente tal definizione: *si consideri una qualunque delle cubiche equivalenti alla data ed aventi un flesso razionale: se è possibile determinare sulla cubica un gruppo di punti razionali diversi dal flesso e tali che nessuno di essi possa dedursi razionalmente da altri punti del gruppo e dal flesso, ma ogni altro punto razionale della cubica possa ottenersi in tal modo, tal gruppo si dirà una* BASE DELL'AGGREGATO DEI PUNTI RAZIONALI DELLA CUBICA; *il numero dei punti di essa si dirà il* RANGO

---

[1] Poincaré, l. c., p. 171. Il Sylvester lo chiamò *base*: si confronti al riguardo Lucas, " Nouvelles Annales ", (2), 17, p. 509.

DELLA CUBICA. Se la cubica non possiede, oltre il flesso, altri punti razionali sarà di rango 0. Si noti che non si può per ora affermare che ogni cubica possegga un rango [1].

I punti razionali di una cubica di rango ρ sono allora quelli la cui coordinata ellittica può scriversi:

$$m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \ldots + m_\varrho\alpha_\varrho + \frac{1}{3}\sum_1^\varrho n_i\alpha_i \text{ [2]}$$

dove $m_1, m_2, \ldots, m_\varrho$ sono numeri interi qualunque e $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$ convenienti coordinate ellittiche, razionalmente indipendenti, fisse per la cubica e per tutte quelle equivalenti ad essa (e precisamente sono coordinate ellittiche dei punti d'una base sopra una di queste cubiche, avente flesso razionale cui si sia attribuita la coordinata 0), mentre le n_i sono interi fissi per ciascuna cubica del sistema di cubiche equivalenti.

Cubiche a birapporto razionale.

15. — Come primo avviamento allo studio dei problemi che provengono dalla considerazione di tutti i punti razionali d'una cubica, svolgeremo alcune considerazioni sulle cubiche a birapporto razionale, di cui sia noto un punto razionale.

Supporremo la cubica trasformata razionalmente in una in cui il punto razionale noto sia un flesso e sia il punto $x=y=0$, cosicchè l'equazione prenda la forma:

(1) $$xz^2 + a\varphi_3(xy) = 0.$$

Se si suppone inoltre che la cubica non sia armonica, assegnato un valore k del birapporto $\left(0\ \frac{x_1}{y_1}\ \frac{x_2}{y_2}\ \frac{x_3}{y_3}\right)$, ove $\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{x_3}{y_3}$ sono le

---

[1] Può cioè dubitarsi, sia che esista sulla cubica una base costituita di infiniti punti razionali: si potrebbe dire allora che il rango è infinito; sia che non esista alcuna base in quanto che, fissato un qualunque gruppo di punti razionali, i suoi punti si possano dedurre razionalmente da altri senza che questi si ottengano razionalmente dal gruppo fissato: è ciò che avverrebbe se ogni punto razionale fosse tangenziale d'altri punti razionali.

[2] Da questa espressione risulta immediatamente l'invarianza del rango per trasformazioni birazionali della cubica.

radici di $\varphi_3 = 0$, queste radici sono univocamente determinate; esse sono quindi funzioni razionali di k e dei coefficienti di φ_3: nel caso presente sono dunque numeri razionali. Vale a dire che *ogni cubica a birapporto razionale, la quale possegga un punto razionale e non sia armonica possiede sempre altri tre punti razionali*: supposto che il primo punto sia un flesso, questi altri sono i punti di contatto delle tangenti da esso alla cubica.

Più generalmente, e per le stesse ragioni, ad ogni punto razionale della cubica se ne aggruppano altri 3, tutti razionali, e sono i punti che con quello hanno comune il tangenziale: questi nuovi tre punti si deducono d'altronde razionalmente dal primo considerato e dai punti di contatto delle tangenti uscenti dal flesso.

Se invece la cubica è armonica dall'esistenza del primo punto può solo indursi come necessaria l'esistenza di un secondo punto razionale sulla cubica.

16. — Supponiamo di restare nel caso generale in cui esistono tre ulteriori punti razionali: si ponga $k = \frac{k_1}{k_2}$ (k_1, k_2 interi primi fra loro), e si scelga il sistema delle coordinate in modo che i tre punti di contatto delle tangenti dal flesso siano:

$$y = z = 0 \qquad y = k_1 x,\ z = 0 \qquad y = k_2 x,\ z = 0.$$

L'equazione (1) prenderà la forma:

$$a_1 x z^2 + a_2 y (y - k_1 x)(y - k_2 x) = 0 \tag{2}$$

dove a_1 e a_2 sono interi (positivi o negativi) primi fra loro $\left(\frac{a_2}{a_1} = a\right)$.

La proposizione generale del n. 9 ci permette di affermare che saranno equivalenti tutte e sole le cubiche (2) in cui il prodotto $a_1 a_2$ possiede lo stesso massimo fattore non quadratico, e si possono quindi supporre a_1 e a_2 liberati dai loro fattori quadratici. Si ritrova d'altronde più facilmente questo fatto con una considerazione diretta: si chiamino infatti a'^2, a''^2 i fattori quadratici di a_1 e a_2 rispettivamente, α', α'' i fattori non qua-

dratici, cosicchè $a_1 = a'^2\alpha'$ $a_2 = a''^2\alpha''$. Da ogni soluzione dell'equazione (2) si dedurrà, mediante la posizione:

$$z' = a'z, \; y' = a''\alpha''y, \; x' = a''\alpha''x,$$

una soluzione dell'equazione:

$$(3) \qquad \alpha'\alpha''x'z'^2 + y'(y' - k_1x')(y' - k_2x') = 0;$$

e reciprocamente, mediante la posizione:

$$z = a''\alpha''z', \qquad y = a'y', \qquad x = a'x';$$

si dedurrà da ogni soluzione della (3) una soluzione della (2). Potremo limitare il nostro studio all'equazione (3).

17. — Se $m, n, \ldots$ sono numeri interi indicheremo con $(m, n, \ldots)$ il loro m. c. d. La x' potrà avere un fattore comune col coefficiente $\alpha'\alpha''$: se $(x', \alpha'\alpha'') = f$, f dovrà pure essere fattore di $y'(y' - k_1x')(y' - k_2x')$ e quindi di y': allora sarà fattor cubico di questo prodotto, e poichè $\alpha'\alpha''$ non ha fattori quadratici, sarà fattor quadratico di x'. Porremo:

$$(4) \qquad \frac{\alpha'\alpha''}{f} = c, \quad \frac{x'}{f^2} = x, \quad \frac{y'}{f} = y \quad z' = z$$

(dove naturalmente x, y, z hanno ora significato diverso che nel n. prec.): l'equazione (3) diverrà:

$$(5) \qquad cxz^2 + y(y - k_1fx)(y - k_2fx) = 0$$

dove si potrà supporre:

$$(6) \qquad (c, x) = 1 \quad (k_1, k_2) = 1 \quad (c, f) = 1 \quad (z, f) = 1 \;\; (^1)$$

$$c, f \text{ privi di fattori quadratici}$$

e tutte le soluzioni di (3) si ottengono mediante le sostituzioni (4) considerando successivamente tutte le equazioni (5) per le quali il prodotto cf ha un medesimo valore $\alpha'\alpha''$.

Nell'equazione (5) ogni fattore di x deve esser fattore del 2° addendo e quindi di y: allora è fattor cubico del 2° addendo

(1) Perchè nell'equazione (3) si doveva supporre $(x', y', z') = 1$.

e non potendo dividere c nè z sarà fattor cubico di x. *Per ogni soluzione della* (5) *soddisfacente alle condizioni* (6) x *è dunque un cubo* e può porsi:

$$x = \xi^3 \qquad y = \xi y_1 \tag{7}$$

$$(\xi, c) = (\xi, z) = 1 \tag{8}$$

onde la (5) diviene:

$$cz^2 + y_1(y_1 - k_1 f\xi^2)(y_1 - kf\xi^2) = 0 \tag{9}$$

e dovrà essere:

$$(y_1, \xi) = 1 \qquad (y_1, f) = 1 \tag{10}$$

perchè ogni fattor comune a y_1 e a ξ o a f dovrebbe appartenere a cz^2 e quindi a z o a c contro le (6).

Sia ora:

$$(k_1, y_1) = p_1 \qquad (k_2, y_1) = p_2 \tag{11}$$

$$k_1 = p_1\kappa_1 \qquad k_2 = p_2\kappa_2 \qquad y_1 = p_1p_2\eta.$$

La (9) diviene:

$$cz^2 + p_1^2p_2^2\eta(p_2\eta - \kappa_1 f\xi^2)(p_1\eta - \kappa_2 f\xi^2) = 0,$$

onde si vede che, c non potendo avere fattori quadratici, dovrà supporsi:

$$z = p_1p_2\zeta; \tag{12}$$

dovrà essere inoltre, per le (10) e (11),

$$(f, p_1) = (f, p_2) = (c, \kappa_1) = (c, \kappa_2) = 1. \tag{13}$$

Ponendo infine:

$$(c, \eta) = e, \qquad c = ed, \qquad \eta = e\eta' \tag{14}$$

l'equazione diviene:

$$d\zeta^2 + \eta'(p_2e\eta' - \kappa_1 f\xi^2)(p_1e\eta' - \kappa_2 f\xi^2) = 0 \tag{15}$$

dove:

$$\begin{gathered}(\eta', d) = (\eta', \kappa_1 f) = (\eta', \kappa_2 f) = (\eta', \xi) = 1 \\ (p_1e, \kappa_2 f) = (p_2e, \kappa_1 f) = (p_1, p_2) = (\kappa_1, \kappa_2) = 1.\end{gathered} \tag{16}$$

La (15) e le prime delle (16) mostrano che ogni fattore di η' è fattore di ζ e non è fattore di $(p_2 e\eta' - \kappa_1 f\xi^2)(p_1 e\eta' - \kappa_2 f\xi^2)$, ed è perciò fattor quadratico di η'. Dovrà quindi essere:

$$(17) \qquad \eta' = \pm\theta^2 \qquad \zeta = \theta\varphi$$

$$(18) \qquad d\varphi^2 \pm (\pm p_2 e\theta^2 - \kappa_1 f\xi^2)(\pm p_1 e\theta^2 - \kappa_2 f\xi^2) = 0$$

$$(19) \qquad (\theta, \xi) = (\theta, \varphi) = (\varphi, \xi) = 1.$$

E se si pone:

$$(20) \quad d = \epsilon'\epsilon'', \ (\epsilon', \epsilon'') = 1, \ (\epsilon', p_2) = (\epsilon', \kappa_1) = (\epsilon'', p_1) = (\epsilon'', \kappa_2) = 1$$

$$(21) \qquad (p_1\kappa_1 - p_2\kappa_2) = (k_1 - k_2) = lm \qquad (l, e) = (l, f) = 1$$

$$(22) \qquad \varphi = l\lambda\mu, \ (\lambda, \mu) = 1,$$

l'equazione (18) sarà soddisfatta per tutti e soli i valori di θ, ξ, φ che derivano dalle soluzioni dei singoli sistemi:

$$(23) \quad \pm p_2 e\theta^2 - \kappa_1 f\xi^2 = \pm\epsilon' l\lambda^2, \ \pm p_1 e\theta^2 - \kappa_2 f\xi^2 = \mp\epsilon'' l\mu^2 \ \text{(}^1\text{)}$$

corrispondenti a tutte le scelte che si possono fare dei fattori ϵ', ϵ'', l; dove si debbono prendere insieme i segni superiori e insieme i segni inferiori dei primi membri, e così pure quelli dei secondi membri, ma indipendentemente fra loro quelli dei primi e quelli dei secondi membri.

Una notevole maggior determinazione si può ancora portare nella determinazione di questi segni mediante le osservazioni seguenti: i fattori $f, \epsilon', \epsilon'', p_1, p_2$ possono sempre supporsi positivi: e avrà allora il segno di c. Inoltre, assoggettando previamente al bisogno la cubica ad una trasformazione di coordinate, si può supporre che il valor k del birapporto della cubica sia positivo e > 1, cosicchè $k_1 > k_2 > 0$. Allora saranno pure positivi κ_1, κ_2, l, m e si vede agevolmente, con semplice considerazione dei segni, che il sistema (23) è certamente impossibile se non si prende:

η' dello stesso segno di e

$$(23)_1 \qquad p_2|e|\theta^2 - \kappa_1 f\xi^2 = -\epsilon' l\lambda^2, \qquad p_1|e|\theta^2 - \kappa_2 f\xi^2 = \epsilon'' l\mu^2.$$

---

(1) Si tenga presente che, a causa delle (19), i binomi $p_2 e\theta^2 - \kappa_1 f\xi^2$, $p_1 e\theta^2 - \kappa_2 f\xi^2$ non possono aver comuni altri fattori che quelli di $k_1 - k_2$.

Così la risoluzione in numeri interi d'una determinata equazione (3) è ricondotta alla risoluzione in numeri interi di un numero limitato di sistemi $(23)_1$. Si noti ancora che questi sistemi si accoppiano in modo che da ogni soluzione d'un sistema si deduce immediatamente una soluzione dell'altro sistema della coppia. Basta osservare che, eliminando successivamente θ e ξ fra le equazioni $(23)_1$ si ha il sistema equivalente:

$$(23)_2 \qquad p_2\epsilon''\mu^2 + p_1\epsilon'\lambda^2 = fm\xi^2, \quad \kappa_1\epsilon''\mu^2 + \kappa_2\epsilon'\lambda^2 = |e|m\theta^2,$$

che non è altro che un sistema (23) in cui le incognite $\theta, \xi, \lambda, \mu$ hanno preso i nomi rispettivi $\frac{\mu}{(m,\epsilon')}, \frac{\lambda}{(m,\epsilon'')}, \xi, \theta$ e i coefficienti $p_2, \kappa_2, p_1, \kappa_1, e, f, \epsilon', \epsilon'', l$ hanno preso i valori rispettivi $p_2, \kappa_2, \kappa_1, p_1,$ $\frac{\epsilon''(m,\epsilon')}{(m,\epsilon'')}, \frac{-\epsilon'(m,\epsilon'')}{(m,\epsilon')}, \frac{-ef}{|e|}, |e|, \frac{m}{(m,\epsilon')(m,\epsilon'')}$ [1].

Riserviamo al seguito del presente studio alcune notevoli applicazioni di questa riduzione.

Torino, 29 aprile 1906.

---

[1] Evidentemente con queste posizioni non risultano soddisfatte le condizioni per cui il sistema (23) s'è potuto scrivere nella forma più determinata $(23)_1$: ciò non toglie però valore alla osservazione. Perchè le dette condizioni risultino soddisfatte occorre qualche cambiamento di segno che equivale ad assumere $\left(\frac{\mu}{(m\epsilon')}\right)^2, \theta^2$, come valori rispettivi di $-\theta^2$ e di $-\mu^2$.

Sopra le trasformazioni ortogonali a tre variabili.

Nota di ERNESTO LAURA.

1. — Sia:

$$x_i' = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 \qquad i=1,2,3 \tag{1}$$

una trasformazione ortogonale destrorsa. Considerate allora le a_{ik} come funzioni di una variabile t, esprimiamo le a_{ik} in funzione degli angoli di Eulero θ, φ, ψ e formiamo poscia le espressioni delle componenti della rotazione istantanea secondo i tre assi mobili, si otterranno allora le ben note formole:

$$\left\{\begin{aligned} \pi &= \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \frac{d\psi}{dt} - \cos\varphi \frac{d\theta}{dt} \\ \chi &= \cos\varphi \operatorname{sen}\theta \frac{d\psi}{dt} + \operatorname{sen}\varphi \frac{d\theta}{dt} \\ \rho &= \frac{d\varphi}{dt} - \cos\theta \frac{d\psi}{dt}. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Risolvendo queste equazioni rispetto alle derivate degli angoli, si trova:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \chi \operatorname{sen}\varphi - \pi \cos\varphi \\ \frac{d\psi}{dt} &= \chi \frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\theta} + \pi \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\theta} \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \rho + \cot\theta(\pi \operatorname{sen}\varphi + \chi \cos\varphi). \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Il sistema (3) è un sistema di Lie (*) collegato col gruppo le cui trasformazioni infinitesime sono:

$$(4)\quad \begin{cases} X_1 f \equiv -\cos\varphi \dfrac{\partial f}{\partial \theta} + \dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\theta} \dfrac{\partial f}{\partial \psi} + \cot\theta \operatorname{sen}\varphi \dfrac{\partial f}{\partial \varphi} \\ X_2 f \equiv \operatorname{sen}\varphi \dfrac{\partial f}{\partial \theta} + \dfrac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\theta} \dfrac{\partial f}{\partial \psi} + \cot\theta \cos\varphi \dfrac{\partial f}{\partial \varphi} \\ X_3 f \equiv \dfrac{\partial f}{\partial \varphi}. \end{cases}$$

Si riconosce d'altra parte che il gruppo (4) è simile ed egualmente composto al gruppo le cui trasformazioni infinitesime fondamentali sono:

$$(5)\quad \begin{cases} Y_1 f \equiv -i \dfrac{1-\xi^2}{2} \dfrac{\partial f}{\partial \xi} - i \dfrac{1-\eta^2}{2} \dfrac{\partial f}{\partial \eta} - i \dfrac{1-\zeta^2}{2} \dfrac{\partial f}{\partial \zeta} \\ Y_2 f \equiv \dfrac{1+\xi^2}{2} \dfrac{\partial f}{\partial \xi} + \dfrac{1+\eta^2}{2} \dfrac{\partial f}{\partial \eta} + \dfrac{1+\zeta^2}{2} \dfrac{\partial f}{\partial \zeta} \\ Y_3 f \equiv -i\xi \dfrac{\partial f}{\partial \xi} - i\eta \dfrac{\partial f}{\partial \eta} - i\zeta \dfrac{\partial f}{\partial \zeta}. \end{cases}$$

La trasformazione:

$$(6)\quad \begin{cases} \theta = \theta(\xi, \eta, \zeta) \\ \varphi = \varphi(\xi, \eta, \zeta) \\ \psi = \psi(\xi, \eta, \zeta) \end{cases}$$

che riduce il gruppo (4) al gruppo (5), ridurrà il sistema (3) alla forma:

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = -i\pi \dfrac{1-\xi^2}{2} + \chi \dfrac{1+\xi^2}{2} - i\rho\xi \\ \dfrac{d\eta}{dt} = -i\pi \dfrac{1-\eta^2}{2} + \chi \dfrac{1+\eta^2}{2} - i\rho\eta \\ \dfrac{d\zeta}{dt} = -i\pi \dfrac{1-\xi^2}{2} + \chi \dfrac{1+\zeta^2}{2} - i\rho\zeta, \end{cases}$$

(*) Cfr. Luigi Bianchi, *Lezioni sulla teoria dei gruppi*, pag. 696.

ossia l'integrazione del sistema (3) è ridotta a quella di una unica equazione di Riccati — il che è un ben noto risultato.

Oggetto della presente Nota si è l'esprimere le a_{ik} in funzione dei parametri $\xi \eta \zeta$. Per una tale ricerca non conviene trovare esplicitamente le (6) (il che ovviamente risolverebbe il problema) — una tale ricerca infatti comporterebbe l'integrazione di un sistema completo di tre equazioni alle derivate parziali — i due gruppi (4) e (5) essendo semplicemente transitivi.

2. — La ricerca propostaci è la generalizzazione della seguente. Le

$$a_{i1}\, a_{i2}\, a_{i3}$$

soddisfacendo all'equazione:

$$a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + a_{i3}^2 = 1 \tag{8}$$

sono esprimibili mediante due parametri. Introdotte le π, χ, ρ componenti della rotazione istantanea secondo gli assi mobili, le a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} considerate come funzioni di t, soddisfano al sistema differenziale:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{da_{i1}}{dt} &= a_{i2}\rho - a_{i3}\chi \\ \frac{da_{i2}}{dt} &= a_{i3}\pi - a_{i1}\rho \\ \frac{da_{i3}}{dt} &= a_{i1}\chi - a_{i2}\pi \end{aligned}\right. \tag{9}$$

ossia, tenuto conto della (8), al sistema:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{da_{i1}}{dt} &= a_{i2}\rho - \sqrt{1 - a_{i1}^2 - a_{i2}^2}\,\chi \\ \frac{da_{i2}}{dt} &= \sqrt{1 - a_{i1}^2 - a_{i2}^2}\,\pi - a_{i1}\rho. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Vuolsi operare su (10) un cambiamento di variabili tale che riduca l'integrazione del sistema (10) a quella di una unica equazione di Riccati.

Per far ciò osserviamo che il sistema (10) è un sistema di

Lie collegato col gruppo accorciato delle rotazioni in un S_3 attorno ad un punto.

Le trasformazioni infinitesime di questo gruppo sono:

$$
(11) \qquad \begin{cases}
X_1 f \equiv \sqrt{1 - a_{i1}^2 - a_{i2}^2}\, \dfrac{\partial f}{\partial a_{i2}} \\[2ex]
X_2 f \equiv -\sqrt{1 - a_{i1}^2 - a_{i2}^2}\, \dfrac{\partial f}{\partial a_{i1}} \\[2ex]
X_3 f \equiv a_{i2} \dfrac{\partial f}{\partial a_{i1}} - a_{i1} \dfrac{\partial f}{\partial a_{i2}}.
\end{cases}
$$

Considerato d'altra parte il gruppo proiettivo della retta esteso a coppie di variabili e di trasformazioni infinitesime fondamentali:

$$
(12) \qquad \begin{cases}
Y_1 f \equiv -i \dfrac{1-\xi^2}{2} \dfrac{\partial f}{\partial \xi} - i \dfrac{1-\eta^2}{2} \dfrac{\partial f}{\partial \eta} \\[2ex]
Y_2 f \equiv \dfrac{1+\xi^2}{2} \dfrac{\partial f}{\partial \xi} + \dfrac{1+\eta^2}{2} \dfrac{\partial f}{\partial \eta} \\[2ex]
Y_3 f \equiv -i\xi \dfrac{\partial f}{\partial \xi} - i\eta \dfrac{\partial f}{\partial \eta}
\end{cases}
$$

si riconosce facilmente la similitudine dei gruppi (11) e (12) e la loro eguale composizione. Le formole di trasformazione che conducono dal gruppo (11) al gruppo (12) si avranno eguagliando le funzioni stazionarie dei due gruppi; si otterrà per tal modo:

$$
(13) \qquad \begin{cases}
\dfrac{a_{i2}}{\sqrt{1 - a^2_{i1} - a^2_{i2}}} = \dfrac{1 - \xi\eta}{\xi + \eta} \\[2ex]
\dfrac{a_{i1}}{\sqrt{1 - a^2_{i1} - a^2_{i2}}} = -i \dfrac{1 + \xi\eta}{\xi + \eta}
\end{cases}
$$

da cui:

$$
(14) \qquad \begin{cases}
a_{i1} = \dfrac{1 - \xi\eta}{\xi - \eta} \\[2ex]
a_{i2} = i \dfrac{1 + \xi\eta}{\xi - \eta} \\[2ex]
\sqrt{1 - a_{i1}^2 - a_{i2}^2} = a_{i3} = \dfrac{\xi + \eta}{\xi - \eta}.
\end{cases}
$$

Il sistema (10) per le (14) si trasforma poi nel sistema di Lie collegato col gruppo (12), ossia nel sistema:

$$(15)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = -i\pi\dfrac{1-\xi^2}{2} + \chi\dfrac{1+\xi^2}{2} - i\rho\xi \\[2ex] \dfrac{d\eta}{dt} = -i\pi\dfrac{1-\eta^2}{2} + \chi\dfrac{1+\eta^2}{2} - i\rho\eta. \end{cases}$$

Le formole (14) sono date in DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces, etc.*, 1887, pag. 22 e seguenti, ove sono ricavate con considerazioni geometriche. Dal fatto poi che le equazioni in termini finiti del gruppo (12) sono:

$$(16)\qquad \begin{cases} \xi = \dfrac{m\xi'+n}{p\xi'+q} \\[2ex] \eta = \dfrac{m\eta'+n}{p\eta'+q} \end{cases}$$

discende che quando le coordinate dei punti di una sfera vengono espresse mediante le coordinate curvilinee ξ, η a mezzo delle (14), ogni spostamento rigido sulla sfera (rotazione attorno al suo centro) corrisponde ad una stessa sostituzione lineare effettuata simultaneamente sopra le due suddette coordinate ξ, η.

Seguendo poi il Darboux (l. c., pag. 33), diciamo $x_1 x_2 x_3$ il punto della sfera di coordinate curvilinee ξ, η; ed $x_1' \, x_2' \, x_3'$ quello di coordinate ξ', η' — allora per le (14) e (16) si ha:

$$(17)\qquad \begin{cases} x_1' = ax_1 + a'x_2 + a''x_3 \\[1ex] x_2' = bx_1 + b'x_2 + b''x_3 \\[1ex] x_3' = cx_1 + c'x_2 + c''x_3 \end{cases}$$

e le $a, b, c, \ldots$, quando si ponga:

$$(18)\qquad mq - np = 1$$

hanno i valori seguenti:

$$a = \frac{1}{2}(q^2+m^2-n^2-p^2);\quad b = \frac{i}{2}(m^2+n^2-p^2-q^2);\quad c = pq - mn$$

$$a' = \frac{i}{2}(q^2+n^2-m^2-p^2);\quad b' = \frac{1}{2}(m^2+n^2+p^2+q^2);\quad c' = i(pq+mn)$$

$$a'' = nq - mp \qquad b'' = -i(mp+nq) \qquad c'' = mq + np.$$

Dalla (17) si ricava poscia:

$$(19)\quad \begin{cases} x_1' + ix_2' = q^2(x_1 + ix_2) + n^2(-x_1 + ix_2) - 2nq(-x_3) \\ -x_1' + ix_2' = p^2(x_1 + ix_2) + m^2(-x_1 + ix_2) - 2pm(-x_3) \\ -x_3' = pq(x_1 + ix_2) + mn(-x_1 + ix_2) - (mq + np)(-x_3). \end{cases}$$

I parametri q, $-n$, p, $-m$ così introdotti quando si suppongano le q ed m complesse coniugate, e così pure le p e $-n$, e inoltre soddisfino alla (18) coincidono dunque con i parametri $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ di Klein (*).

3. — Premettiamo il seguente teorema.

Sieno:

$$(20)\qquad X_i f \equiv \lambda_{i1}\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_{i2}\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_{i3}\frac{\partial f}{\partial z} \qquad i = 1, 2, 3$$

le trasformazioni infinitesime di un gruppo semplicemente transitivo e si abbia:

$$(21)\qquad (X_1, X_2)f = X_3 f,\ (X_2, X_3)f = X_1 f,\ (X_3, X_1)f = X_2 f.$$

Le trasformazioni infinitesime del gruppo reciproco sieno:

$$(22)\qquad Y_i f \equiv \mu_{i1}\frac{\partial f}{\partial x} + \mu_{i2}\frac{\partial f}{\partial y} + \mu_{i3}\frac{\partial f}{\partial z} \qquad i = 1, 2, 3$$

e si abbia:

$$(23)\qquad (Y_1, Y_2)f = -Y_3 f,\ (Y_2, Y_3)f = -Y_1 f,\ (Y_3, Y_1)f = -Y_2 f.$$

Si esprimano le $Y_i f$ nelle $X_i f$ e si ottenga:

$$(24)\qquad Y_i f = a_{i1}X_1 f + a_{i2}X_2 f + a_{i3}X_3 f. \qquad i = 1, 2, 3$$

Dico allora: 1° che la trasformazione (24) è ortogonale

(*) Cfr. Klein und A. Sommerfeld, *Ueber die Theorie des Kreisels*, Heft I, pag. 20 e seguenti.

destrorsa; 2° che pensate le x, y, z funzioni di una variabile t e fatta la posizione:

$$(25)\quad \begin{cases} p = a_{21}a_{31}' + a_{22}a_{32}' + a_{23}a_{33}' \\ q = a_{31}a_{11}' + a_{32}a_{12}' + a_{33}a_{13}' \\ r = a_{11}a_{21}' + a_{12}a_{22}' + a_{13}a_{23}' \end{cases}$$

in cui le lettere accentate stanno ad indicare derivate rispetto a t, e risolte le (25) rispetto a x', y', z' si ha il sistema:

$$(26)\quad \begin{cases} x' = p\mu_{11} + q\mu_{21} + r\mu_{31} \\ y' = p\mu_{12} + q\mu_{22} + r\mu_{32} \\ z' = p\mu_{13} + q\mu_{23} + r\mu_{33}. \end{cases}$$

Invero poichè i gruppi (20) e (22) sono reciproci si ha identicamente:

$$(Y_i, X_k) = 0 \qquad i, k = 1, 2, 3.$$

E tenendo presenti le (24) si ha facilmente:

$$(27)\quad \begin{cases} X_1f \,.\, X_1a_{i1} + X_2f(X_1a_{i2} - a_{i3}) + X_3f(X_1a_{i3} + a_{i2}) = 0 \\ X_1f(X_2a_{i1} + a_{i3}) + X_2f \,.\, X_2a_{i2} + X_3f(X_2a_{i3} - a_{i1}) = 0 \\ X_1f(X_3a_{i1} - a_{i2}) + X_2f(X_3a_{i2} + a_{i1}) + X_3f \,.\, X_3a_{i3} = 0. \end{cases}$$

D'altronde il gruppo (20) è semplicemente transitivo, perciò tra le sue trasformazioni infinitesime non possono intercedere relazioni lineari a coefficienti non nulli: le (27) dànno quindi luogo alle identità:

$$(28)\quad \begin{cases} X_1a_{i1} = 0 & X_2a_{i1} = -a_{i3} & X_3a_{i1} = a_{i2} \\ X_1a_{i2} = a_{i3} & X_2a_{i2} = 0 & X_3a_{i2} = -a_{i1} \\ X_1a_{i3} = -a_{i2} & X_2a_{i3} = a_{i1} & X_3a_{i3} = 0 \end{cases} \qquad i = 1, 2, 3.$$

La 1ª delle (23) per le (24) diviene:

$$(a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3, \quad a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3)f = \\ -(a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3)f.$$

Sviluppando, tenendo presenti le (28) e le (21), e indicando con A_{ik} il complemento algebrico di a_{ik} nel determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

risulterà a riduzioni fatte:

$$A_{31}X_1f + A_{32}X_2f + A_{33}X_3f = a_{31}X_1f + a_{32}X_2f + a_{33}X_3f$$

da cui:

$$A_{31} = a_{31}, \quad A_{32} = a_{32}, \quad A_{33} = a_{33}.$$

Si ha ossia in generale:

$$a_{ik} = A_{ik}. \qquad i, k = 1, 2, 3$$

La trasformazione lineare (24) è dunque ortogonale destrorsa.

Le prime tre formole delle (28) scritte esplicitamente dànno:

$$\begin{cases} \lambda_{11}\dfrac{\partial a_{i1}}{\partial x} + \lambda_{12}\dfrac{\partial a_{i1}}{\partial y} + \lambda_{13}\dfrac{\partial a_{i1}}{\partial z} = 0. \\ \lambda_{21}\dfrac{\partial a_{i1}}{\partial x} + \lambda_{22}\dfrac{\partial a_{i1}}{\partial y} + \lambda_{23}\dfrac{\partial a_{i1}}{\partial z} = -a_{i3} \\ \lambda_{31}\dfrac{\partial a_{i1}}{\partial x} + \lambda_{32}\dfrac{\partial a_{i1}}{\partial y} + \lambda_{33}\dfrac{\partial a_{i1}}{\partial z} = a_{i2}. \end{cases}$$

Queste equazioni sono risolubili nelle $\dfrac{\partial a_{i1}}{\partial x}, \dfrac{\partial a_{i1}}{\partial y}, \dfrac{\partial a_{i1}}{\partial z}$ poichè il gruppo (20) essendo semplicemente transitivo, si ha:

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{vmatrix} \lesseqgtr 0.$$

Indichiamo con Λ_{ik} il complemento algebrico di λ_{ik} in Λ; otterremo allora le formole:

$$\left\{\begin{aligned} \Lambda \frac{\partial a_{i1}}{\partial x} &= a_{i2}\Lambda_{31} - a_{i3}\Lambda_{21} \\ \Lambda \frac{\partial a_{i1}}{\partial y} &= a_{i2}\Lambda_{32} - a_{i3}\Lambda_{22} \\ \Lambda \frac{\partial a_{i1}}{\partial z} &= a_{i2}\Lambda_{33} - a_{i3}\Lambda_{23} \end{aligned}\right. \qquad i=1,\,2,\,3.$$

Formole analoghe si avranno dal considerare la 2ª e la 3ª terna delle (28).

Le 27 formole che così si hanno si possono riassumere nelle seguenti:

$$(29)\qquad \left\{\begin{aligned} \Lambda \frac{\partial a_{i\alpha}}{\partial x} &= a_{i\beta}\Lambda_{\gamma 1} - a_{i\gamma}\Lambda_{\beta 1} \\ \Lambda \frac{\partial a_{i\alpha}}{\partial y} &= a_{i\beta}\Lambda_{\gamma 2} - a_{i\gamma}\Lambda_{\beta 2} \\ \Lambda \frac{\partial a_{i\alpha}}{\partial z} &= a_{i\beta}\Lambda_{\gamma 3} - a_{i\gamma}\Lambda_{\beta 3} \end{aligned}\right. \qquad i=1,\,2,\,3$$

nelle quali α, β, γ indica una qualsivoglia delle tre permutazioni:

$$(1,\ 2,\ 3) \qquad (2,\ 3,\ 1) \qquad (3,\ 1,\ 2).$$

Le (29) moltiplicate rispettivamente per x', y', z' e sommate dànno:

$$(30)\qquad \Lambda a'_{i\alpha} = a_{i\beta}(x'\Lambda_{\gamma 1} + y'\Lambda_{\gamma 2} + z'\Lambda_{\gamma 3}) - a_{i\gamma}(x'\Lambda_{\beta 1} + y'\Lambda_{\beta 2} + z'\Lambda_{\beta 3}).$$

Si hanno allora per le (25) le espressioni seguenti delle p, q, r

$$(31)\qquad \left\{\begin{aligned} \Lambda p &= x'\sum_{k=1}^{3} a_{1k}\Lambda_{k1} + y'\sum_{k=1}^{3} a_{1k}\Lambda_{k2} + z'\sum_{k=1}^{3} a_{1k}\Lambda_{k3} \\ \Lambda q &= x'\sum_{k=1}^{3} a_{2k}\Lambda_{k1} + y'\sum_{k=1}^{3} a_{2k}\Lambda_{k2} + z'\sum_{k=1}^{3} a_{2k}\Lambda_{k3} \\ \Lambda r &= x'\sum_{k=1}^{3} a_{3k}\Lambda_{k1} + y'\sum_{k=1}^{3} a_{3k}\Lambda_{k2} + z'\sum_{k=1}^{3} a_{3k}\Lambda_{k3}. \end{aligned}\right.$$

Le (31) sono risolubili nelle x', y', z' poichè il determinante dei coefficienti di queste quantità equivale a:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{21} & \Lambda_{31} \\ \Lambda_{12} & \Lambda_{22} & \Lambda_{32} \\ \Lambda_{13} & \Lambda_{23} & \Lambda_{33} \end{vmatrix} = \Lambda^2.$$

Per note proprietà dei determinanti reciproci si ricava infine:

$$(32) \qquad \begin{cases} x' = p\sum_{k=1}^{3} a_{1k}\lambda_{k1} + q\sum_{k=1}^{3} a_{2k}\lambda_{k1} + r\sum_{k=1}^{3} a_{3k}\lambda_{k1} \\ y' = p\sum_{k=1}^{3} a_{1k}\lambda_{k2} + q\sum_{k=1}^{3} a_{2k}\lambda_{k2} + r\sum_{k=1}^{3} a_{3k}\lambda_{k2} \\ z' = p\sum_{k=1}^{3} a_{1k}\lambda_{k3} + q\sum_{k=1}^{3} a_{2k}\lambda_{k3} + r\sum_{k=1}^{3} a_{3k}\lambda_{k3}. \end{cases}$$

Le (32) coincidono poi con le (26) quando si tenga conto delle (24).

Si osservi ancora che quando invece si facesse la posizione:

$$(33) \qquad \begin{cases} \pi = -(a_{12}a_{13}' + a_{22}a_{23}' + a_{32}a_{33}') \\ \chi = -(a_{13}a_{11}' + a_{23}a_{21}' + a_{33}a_{31}') \\ \rho = -(a_{11}a_{12}' + a_{21}a_{22}' + a_{31}a_{32}') \end{cases}$$

allora poichè si avrebbe:

$$\begin{cases} \pi = a_{11}p + a_{21}q + a_{31}r \\ \chi = a_{12}p + a_{22}q + a_{32}r \\ \rho = a_{13}p + a_{23}q + a_{33}r \end{cases}$$

il sistema (32) si potrà porre sotto la forma:

$$(34) \qquad \begin{cases} x' = \pi\lambda_{11} + \chi\lambda_{21} + \rho\lambda_{31} \\ y' = \pi\lambda_{12} + \chi\lambda_{22} + \rho\lambda_{32} \\ z' = \pi\lambda_{13} + \chi\lambda_{23} + \rho\lambda_{33}. \end{cases}$$

4. — Quando nel moto di un corpo rigido attorno ad un punto sono conosciute in funzione di t le componenti p, q, r della rotazione istantanea secondo gli assi fissi, o le π, χ, ρ componenti della rotazione istantanea secondo gli assi mobili, per ottenere le equazioni finite del moto devono essere integrati i sistemi (26) o (34). Il teorema dato nel n° precedente permette perciò di determinare *a priori* la forma di questi sistemi; tale forma non è però arbitraria dipendendo essa dai gruppi (20) e (21), i quali sono semplicemente transitivi e di nota composizione.

5. — Per l'applicazione del teorema suddetto alla ricerca delle espressioni delle a_{ik} in funzione di tre parametri $\xi\eta\zeta$ tali che il sistema (34) assuma la forma (7), basterà considerare il gruppo:

$$
(35)\quad \begin{cases} X_1 f \equiv -i\dfrac{1-\xi^2}{2}\dfrac{\partial f}{\partial \xi} - i\dfrac{1-\eta^2}{2}\dfrac{\partial f}{\partial \eta} - i\dfrac{1-\zeta^2}{2}\dfrac{\partial f}{\partial \zeta} \\[2ex] X_2 f \equiv \dfrac{1+\xi^2}{2}\dfrac{\partial f}{\partial \xi} + \dfrac{1+\eta^2}{2}\dfrac{\partial f}{\partial \eta} + \dfrac{1+\zeta^2}{2}\dfrac{\partial f}{\partial \zeta} \\[2ex] X_3 f \equiv -i\xi\dfrac{\partial f}{\partial \xi} - i\eta\dfrac{\partial f}{\partial \eta} - i\zeta\dfrac{\partial f}{\partial \zeta} \end{cases}
$$

ed il gruppo reciproco le cui trasformazioni infinitesime sono:

$$
(36)\quad \begin{cases} Y_1 f \equiv -iC\dfrac{\partial f}{\partial \zeta} \\[2ex] Y_2 f \equiv -\dfrac{A}{2}\dfrac{\partial f}{\partial \xi} - \dfrac{B}{2}\dfrac{\partial f}{\partial \eta} - C\dfrac{\partial f}{\partial \zeta} \\[2ex] Y_3 f \equiv \dfrac{i}{2}\left(A\dfrac{\partial f}{\partial \xi} - B\dfrac{\partial f}{\partial \eta}\right). \end{cases}
$$

in cui si è posto:

$$
A = \frac{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)}{\zeta-\eta}; \quad B = \frac{(\eta-\zeta)(\eta-\zeta)}{\xi-\zeta}; \quad C = \frac{(\zeta-\xi)(\zeta-\eta)}{\eta-\xi}.
$$

Si verificano allora le identità:

$$
\begin{array}{lll} (X_1, X_2)f = X_3 f & (X_2, X_3)f = X_1 f & (Y_3, Y_1)f = Y_2 f \\ (Y_1, Y_2)f = -Y_3 f & (Y_2, Y_3)f = -Y_1 f & (Y_3, Y_1)f = -Y_2 f \\ & (X_i, Y_k) = 0 & i, k = 1, 2, 3. \end{array}
$$

I gruppi (35), (36) soddisfano alle condizioni del teorema dato. Si ha ora:

$$
(37)\quad \begin{cases}
Y_1 f = \dfrac{1-\xi\eta}{\xi-\eta} X_1 f + i\,\dfrac{1+\xi\eta}{\xi-\eta} X_2 f + \dfrac{\eta+\xi}{\xi-\eta} X_3 f \\[2ex]
Y_2 f = -\dfrac{i}{2}\left[\dfrac{1-\eta\zeta}{\eta-\zeta} + \dfrac{1-\zeta\xi}{\zeta-\xi} + 2\,\dfrac{1-\xi\eta}{\xi-\eta}\right] X_1 f + \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1+\eta\zeta}{\eta-\zeta} + \dfrac{1+\zeta\xi}{\zeta-\xi} + \right. \\[2ex]
\qquad \left. + 2\,\dfrac{1+\xi\eta}{\xi-\eta}\right] X_2 f - \dfrac{i}{2}\left[\dfrac{\zeta+\eta}{\eta-\zeta} + \dfrac{\xi+\zeta}{\zeta-\xi} + 2\,\dfrac{\eta+\zeta}{\xi-\eta}\right] X_3 f \\[2ex]
Y_3 f = -\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1-\eta\zeta}{\eta-\zeta} - \dfrac{1-\xi\zeta}{\zeta-\xi}\right] X_1 f - \dfrac{i}{2}\left[\dfrac{1+\eta\zeta}{\eta-\zeta} - \dfrac{1+\zeta\xi}{\zeta-\xi}\right] X_2 f - \\[2ex]
\qquad - \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\zeta+\eta}{\eta-\zeta} - \dfrac{\zeta+\xi}{\zeta-\xi}\right] X_3 f.
\end{cases}
$$

I coefficienti della trasformazione lineare del 2° membro daranno le espressioni richieste dei nove coseni. Tali espressioni conducono poi, come facilmente si verifica, al sistema (7).

È interessante il fatto che per la ricerca in funzione di t dei nove coseni quando sieno note le $\pi\chi\rho$, sì che essa sia fatta come al N° 2, sì che sia fatta usando dei parametri $\xi\eta\zeta$, deve essere integrata una stessa equazione di Riccati, e cioè:

$$\frac{d\tau}{dt} = -i\pi\,\frac{1-\tau^2}{2} + \chi\,\frac{1+\tau^2}{2} - i\rho\tau.$$

Nuove specie dei generi " Pheretima „ e " Tritogenia „.

Nota del Dr. LUIGI COGNETTI DE MARTIIS.

Oggetto di questa nota è una piccola collezione cortesemente affidatami dal k. k. Naturhistorischen Hofmuseum di Vienna. La compongono sei soli esemplari, ma il loro studio mi riuscì oltremodo interessante poichè essi rappresentano altrettante specie, quasi tutte nuove per la scienza. Quattro esemplari furono raccolti a Yokohama dal Dr. Haberer, gli altri due a Durban nel Natal (Sud-Africa) dal Dr. Penther: questi ultimi appartengono a due generi vicinissimi, *Tritogenia* e *Microchaetus*, della famiglia *Glossoscolecidae* subfam. *Microchaetinae*, quelli di Yokohama al vasto genere *Pheretima* della fam. *Megascolecidae* subfam. *Megascolecinae*.

Fo ancora menzione in questa nota di una *Pheretima* raccolta a Tahiti (Is. della Società) durante il viaggio di circumnavigazione della R. nave " Liguria „ al comando di S. A. R. Luigi Amedeo di Savoia, Duca degli Abruzzi. È meritevole d'essere ricordata anche pel fatto che finora nulla si sapeva degli Oligocheti di quella località (1).

Pheretima Habereri n. sp.

Caratteri esterni. — L'unico esemplare misura 170 mm. in *lunghezza*, 8 mm. in *diametro*. *Segmenti* 137.

Forma cilindrica, poco attenuata alle due estremità. Il dorso, nella regione postclitelliana, mostra un *colore* leggermente violaceo, il clitello è bruno-violaceo, le altre regioni sono cenerognole.

Il *prostomio* è anteriormente subtronco; il suo processo posteriore incide per metà l'anello cefalico e si fonde con esso

---

(1) Mi è grato esprimere la mia riconoscenza all'Intendente del reparto zoologico Prof. Hofrat F. Steindachner, al Custos Prof. E. von Marenzeller, e ancora ai valenti e fortunati raccoglitori.

(Kopf epilobisch $^1/_2$). I segmenti preclitelliani sono allungati più degli altri: dal 7° al 13° inclusi appaiono nettamente triannulato-carenati; i postclitelliani sono carenati.

Le *setole*, presenti a partire dal 2° segmento, sono disposte in serie anellare continua: ravvicinate fra loro nelle regioni dorsale e ventrale, sono soltanto un po' rilassate ai lati del corpo per breve tratto. Per ogni segmento sono ugualmente robuste: se ne contano 38 al 4°, 50 al 7°, 57 al 10°, 70 al 13°, 78 al 17°, 82 al 26°, e pure 82 al 44°.

Il *clitello* è a cingolo completo, ed occupa i tre segmenti 14-16 per intero. Vi mancano le setole, vi sono poco visibili i solchi intersegmentali. È invece visibilissima l'*apertura femminile* impari mediana, posta a metà del 14° segmento, in forma di una breve fessura trasversale a labbra cenerognole, contenuta in una leggera depressione trasversalmente ovale.

Le *aperture maschili* trovansi alla faccia ventrale del 18° segmento, sostenute da atrî tumidi: hanno labbra un po' rugose. Tra esse v'è un tratto di 4 mm. in cui si contano 13 setole. Sui segmenti 19° e 20° s'estende un paio di larghe *fascie ghiandolari*, ininterrotte, bianchicce, rilevate a mo' di piattaforme, a margini anteriore e posteriore arrotondati, mentre i lati sono pressochè paralleli, quelli esterni in direzione delle aperture maschili. Ogni piattaforma è larga 2 mm., lunga 4 e porta quattro *papille* allineate in serie longitudinale: due disposte nel 19° segmento presso i margini anteriore e posteriore, le due altre disposte in modo uguale sul 20°. Ogni papilla è ventosiforme, a margine grinzoso. Sulle piattaforme non vi sono setole e neppure nel tratto intermedio che appare longitudinalmente rugoso e un po' concavo (Tav., fig. 1).

Le *aperture delle spermateche* sono allineate con quelle maschili e disposte agl'intersegmenti $^5/_6$ $^6/_7$ $^7/_8$ $^8/_9$ in un paio per ciascuno. Alcune di esse sono riconoscibili dall'esterno in forma di piccole macchiette oscure nel solco intersegmentale; sono allineate su due linee parallele, tra le quali al 7° segmento si contano 9 setole.

Il primo *poro dorsale* è all'intersegmento $^{12}/_{13}$.

Caratteri interni. — I *dissepimenti* $^5/_6$ $^6/_7$ $^7/_8$ sono ispessiti, più ancora lo sono i tre che seguono il ventriglio, $^{10}/_{11}$ $^{11}/_{12}$ $^{12}/_{13}$;

il setto $^{13}/_{14}$ è ispessito in grado minore. Mancano i setti $^{8}/_{9}$ e $^{9}/_{10}$. La pagina anteriore dei setti $^{5}/_{6}$ e $^{6}/_{7}$ è vellutata.

Il *ventriglio* muscoloso è ben sviluppato: lo precede una dilatazione dell'esofago. Sono presenti due diverticoli *ciechi* ai lati dell'intestino, contenuti nel 26° segmento, suddivisi ognuno in circa 10 lobi disuguali: il superiore maggiore di tutti (Tavola, fig. 2). L'ultimo paio di *cuori* è al 13°.

Sistema riproduttore. — I segmenti 10° e 11° contengono ognuno un paio di *testes* con rispettivi padiglioni avvolti in *capsule* seminali che circondano il tubo esofageo fino a fondersi (quelle di un segmento) lungo la linea mediana dorsale. Nelle capsule dell'11° segmento è incluso un primo paio di grosse *vescicole* seminali lobate, compresse contro il setto $^{10}/_{11}$ dal quale pendono, e disposte dorso-lateralmente al tubo digerente. Un secondo paio di vescicole seminali, di dimensioni un po' maggiori, e a lobi molto profondi, pende dal setto $^{11}/_{12}$ libero nel 12° segmento, disposto come il paio anteriore.

È presente un paio di grosse *prostate*, slargate ad abbracciare in parte il canale digitale, estese con la porzione ghiandolare, ch' è lobata, nei segmenti 16-21, attraversando i setti divisori. Il condotto muscolare descrive uno stretto giro di spira dirigendosi prima in avanti, poi verso la linea mediana del corpo, ecc. Manca una borsa copulatrice (Tav., fig. 3).

Contro la parete si scorgono, dietro le prostate, degli ammassi ghiandolari corrispondenti alle piattaforme papillifere descritte nei caratteri esterni (1).

Le *spermateche* sono così disposte: il primo paio nel 6° segmento, il secondo e il terzo nel 7°. Del quarto paio la posizione è indeterminata causa l'assenza del setto $^{8}/_{9}$. Ogni spermateca mostra un'ampolla ovoide, grossa, continuata in un canale ripiegato su se stesso e poco più corto dell'ampolla. Presso l'apertura esteriore il canale riceve un *diverticolo* tubulare, dilatato verso il fondo cieco, e lungo quanto l'ampolla e il canale presi assieme o anche più, sebbene sia ripiegato a zig-zag nel tratto mediano e prossimale, e talvolta in parte raggomitolato su se stesso (Tav., fig. 4).

Loc.: Yokohama, rep. Dr. Haberer 1°-IV-1904.

---

(1) Nella regione delle spermateche, e in minor quantità anche altrove, si scorgono, attaccate alla parete del corpo e ai setti, delle vescicole tondeggianti con diametro di 1-2 mm.: sono verosimilmente cisti di Gregarine.

Pheretima Marenzelleri n. sp.

CARATTERI ESTERNI. — *Lunghezza* 190 mm.: *diametro* 6-7 mm. (al clitello un po' minore). *Segmenti* 138.

Forma cilindrica, poco attenuata all'estremità anteriore, brevemente conica alla posteriore. *Colore* uniformemente perlaceo, tranne il clitello che è viola-rossiccio.

Il *prostomio* mostra un solco longitudinale mediano sulle sue facce anteriore e ventrale: il processo posteriore incide per metà il primo segmento continuandosi con esso (Kopf epilobisch $^1/_2$). I segm. 4°-9° sono carenati, il 10°, 11°, e specialmente il 12° e 13°, sono triannulati.

Le *setole*, presenti a partire dal 2° segmento, son disposte in serie anellare, interrotte per breve tratto alla linea mediana ventrale, su tutta la lunghezza del corpo (aa = circa $^3/_2$ ab). Davanti al clitello si nota pure un'interruzione alla linea mediana dorsale, pari in ampiezza a circa $^4/_3$ di uno degl'intervalli contigui. Le setole alla faccia ventrale sono più robuste che sul dorso e sui lati. Si contano 22 setole al 3° segmento, 36 al 7°, 44 al 10°, 52 al 13°, 50 al 17°, 52 al 24°, 56 a metà del corpo.

Il *clitello* occupa per intero i segmenti 14-16, manca di setole e di solchi intersegmentali. A metà del 14° segmento, sulla linea mediana ventrale appare evidentissima una piccola areola bianchiccia, longitudinalmente ovale, che porta al centro il *poro femminile*.

Le *aperture maschili* sono al 18° segmento, all'apice di due papille coniche poco sporgenti, separate da un intervallo di 5 mm. nel quale sono allineate 10 setole. Le *aperture delle spermateche*, in numero di 4 paia, sono ben visibili al centro di piccoli tubercoletti allineati con le aperture maschili agl'intersegmenti $^5/_6$ $^6/_7$ $^7/_8$ $^8/_9$: tra le linee occupate da queste aperture si contano 10 setole al 6°, 15 al 9° segmento. All'intersegmento $^7/_8$ si scorge una piccola *papilla* rilevata con depressione centrale, posta a breve distanza dalla linea mediana ventrale sul lato sinistro. Due papille uguali alla suddetta trovansi all'intersegmento $^8/_9$, simmetriche sui due lati del corpo, pure alla faccia ventrale, distanti fra loro 1 mm.

I *pori dorsali* cominciano dall'intersegmento $^{12}/_{13}$: sono visibili anche al clitello.

Caratteri interni. — I *dissepimenti* $^{5}/_{6}$ e $^{6}/_{7}$ sono ispessiti e presentano la superficie anteriore vellutata, il setto $^{7}/_{8}$ è poco ispessito, l'$^{8}/_{9}$ è sottile, il $^{9}/_{10}$ manca; di nuovo ispessiti sono i setti $^{10}/_{11}$-$^{13}/_{14}$.

Il *ventriglio* muscoloso è contenuto nell'8° segmento. Ai lati dell'intestino s'origina, davanti al setto $^{26}/_{27}$, un paio di ampî *ciechi* intestinali semplici, diretti in avanti fino al setto $^{25}/_{26}$ che attraversano per poi ripiegarsi verso il dorso mentre le dimensioni si riducono alquanto. L'ultimo paio di *cuori* è al 13° segmento.

Sistema riproduttore. — Il 10° e 11° segmento contengono ciascuno un paio di *testes* con rispettivi padiglioni racchiusi in *capsule* seminali omocrome, a parete mediocremente sottile, estese nella regione sottoesofagea e sui lati dell'esofago contro la pagina anteriore dei setti $^{10}/_{11}$ e $^{11}/_{12}$ fino a raggiungere le aperture delle *vescicole* seminali. Di questi ultimi organi ve n'ha un paio all'11° e un paio al 12°, posti dorso-lateralmente all'esofago, liberi nella cavità del corpo; le vescicole dell'11° sono mediocri, tondeggianti, minori di quelle del 12° che appaiono poco lobate Le *prostate* si contengono nel 18° segmento: l'esemplare esaminato mostra la porzione ghiandolare sviluppata soltanto sul lato destro. Il tratto muscolare s'origina dietro il setto $^{17}/_{18}$ e prima di raggiungere il poro maschile descrive una S, rivolgendo la prima convessità all'esterno, la seconda verso la catena gangliare ventrale. Manca una borsa copulatrice (Tav., fig. 5).

Le tre prime paia di *spermateche* sono distribuite nei segmenti 6°, 7°, 8°; il quarto è posto pure nell'8°. Ogni spermateca mostra un'ampolla ovoide un po' compressa contro il setto, continuata in un canale pari a $^{1}/_{3}$ circa della lunghezza totale: manca affatto il diverticolo (Tav., fig. 6).

Loc.: Yokohama, rp. Dr. Haberer 1°-iv-1904.

Questa specie mostra qualche affinità con *Ph. divergens* (Michlsn.). Se ne stacca per l'estensione dei diverticoli intestinali, per la presenza di prostate, per l'assenza completa di diverticoli a tutte le spermateche, e per la disposizione intersegmentale e il numero delle papille.

Pheretima ambigua n. sp.

Caratteri esterni. — *Lung.* 95 mm. *Diam.* 5 mm. *Segm.* 76. *Forma* cilindrica poco attenuata alle due estremità, meno all'anteriore che alla posteriore. *Colore* uniformemente cenerognolo: clitello bruno-violaceo. *Prostomio* breve e largo; il suo processo posteriore s'insinua per circa $^1/_3$ nel primo segmento e si continua con esso (Kopf epilobisch). Il primo segmento mostra una breve incisione al margine anteriore in corrispondenza della linea mediana ventrale. I segmenti 3°-13° sono più allungati dei rimanenti.

Le *setole*, presenti a partire dal 2°, sono ad ogni segmento equidistanti tranne sul dorso, e, alla metà posteriore, anche sul ventre ove si scorge un breve intervallo in corrispondenza della linea mediana. Sul dorso l'intervallo mediano è pari a circa 2 volte e $^1/_2$ uno dei contigui, sul ventre a circa 1 volta e $^1/_2$ uno dei contigui. Al 2° segmento si contano 20 setole, 32 se ne contano al 3°, 58 al 7°, 60 al 10°, 50 al 13°, 52 al 17°, 58 al 24°, 56 al 40°.

I tre segmenti 14°-16°, che sono ricoperti per intero dal clitello, portano setole alla sola regione ventrale.

A metà del 14° si scorge ventralmente una piccola depressione rotonda occupata da una lieve papilla biancastra che porta il *poro femminile* impari mediano.

Non si scorgono alla superficie del corpo altre aperture tranne i *pori dorsali* riconoscibili anche al clitello: il primo trovasi all'intersegmento $^{12}/_{13}$. Mancano papille.

Caratteri interni. — I *dissepimenti* $^5/_6$ $^6/_7$ $^7/_8$ e $^{10}/_{11}$-$^{14}/_{15}$ sono leggermente ispessiti; i due primi hanno la parete anteriore cosparsa di fitti villi ghiandolari. Mancano i setti $^8/_9$ e $^9/_{10}$.

Il *ventriglio* robusto s'estende dal setto $^7/_8$ fino a breve distanza dal $^{10}/_{11}$. L'intestino medio, distinto per la colorazione più cupa, s'inizia al 15° segmento, ed è dilatato a partire dal 17°. Dal 20° al 25° mostra per ogni segmento un paio di borse laterali segnate da un solco e spostate gradatamente verso la regione ventrale (1). Al 27° s'origina un paio di *ciechi* ripiegati in avanti ed estesi fin nel 24° segmento attraverso i setti: ogni

(1) Simili a quelle descritte più avanti e figurate per *Ph. vittata*.

cieco, a partire dal 26° segmento in avanti, è suddiviso in 4 diverticoli digitiformi diminuiti in lunghezza dal più dorsale al più ventrale. Ultimi *cuori* al 13°.

Sistema riproduttore. I segmenti 10° e 11° contengono ognuno un paio di *capsule* seminali ipoesofagee che racchiudono *testes* e padiglioni. Le *vescicole* seminali sono all'11° e 12°, lobate. Nel 13° pende dal setto $^{12}/_{13}$ un terzo paio di piccole vescicole clavate. I vasi deferenti appaiono rigonfi e sigmoidi dietro al setto $^{17}/_{18}$, poi di nuovo rettilinei e sottilissimi fino a metà del 18° segmento, ove attraversano la parete del corpo (Tav., fig. 7). Mancano borse copulatrici. Gli *ovarî* a ventaglio, lobati, sono al 13° segmento. Di spermateche non vidi traccia alcuna.

Pheretima vittata Goto e Hatai.

1898 *Perichaeta v.*, Goto e Hatai, in: Annot. Zool. Japon., vol. 2, p. 74.

1900 *Amyntas vittatus*, Beddard, in: Proc. Zool. Soc. p. 635.

1900 *Ph. v.*, Michaelsen, Oligochaeta, in: Das Tierreich, Lief. 10, p. 312.

Ascrivo a questa specie un esemplare adulto di cui riferisco la descrizione per disteso a complemento di quella di Goto e Hatai.

Caratteri esterni. — *Lungh.* 100 mm., *diam.* 5 mm. *Seg.* 80. *Forma* cilindrica, poco attenuata alle due estremità, al clitello ristretta. *Colore* cenerognolo con lieve iridescenza, al clitello violaceo.

Prostomio breve e largo, con processo posteriore che incide $^{2}/_{3}$ del primo segmento e si continua con questo (Kopf epilobisch). I segmenti preclitelliani, specialmente 9°-13° sono allungati e triannulati.

Le *setole*, presenti a partire dal 2° segmento, sono disposte in serie anellare, brevemente interrotta ai segmenti post-clitelliani sulla linea mediana dorsale per un tratto pari a circa il doppio di uno degli intervalli viciniori, e alla linea mediana ventrale per un tratto ancora più breve ($aa < 2ab$). Sui lati del corpo le setole sono più ravvicinate che altrove: se ne contano

46 al 4° segmento, 58 al 7°, 62 al 10°, 66 al 13°, 62 al 17°, 58 al 24°, 66 a metà del corpo.

Il *clitello* privo di setole, occupa per intero i tre segmenti 14-16, ed è lievemente segnato dai solchi intersegmentali. L'*apertura femminile* è al centro di una papilla rotonda bianchiccia, impari mediana ventrale, posta in una leggera infossatura a metà del 14° segmento.

Davanti alle setole del 7° segmento si scorgono due gruppi di piccolissime papille sporgenti disposte in serie lineare trasversa a poca distanza dal margine anteriore (1): sul lato destro si contano due papille, sul sinistro tre. Tra i due gruppi v'è un intervallo di 14 setole. Ogni papilla corrisponde all'*apertura* di una *spermateca*. Il primo *poro dorsale* è all'intersegmento ${}^{13}/_{14}$.

Caratteri interni. — I *dissepimenti* ${}^{5}/_{6}$ e ${}^{6}/_{7}$ sono leggermente ispessiti e vellutati alla pagina anteriore: il setto ${}^{7}/_{8}$ è pure un po' ispessito. L'${}^{8}/_{9}$ e ${}^{9}/_{10}$ mancano. I setti ${}^{10}/_{11}$-${}^{15}/_{16}$ sono più o meno sottili, gli altri sottilissimi.

Il *ventriglio* muscoloso doliiforme s'estende dal setto ${}^{7}/_{8}$ fino a poca distanza dal setto ${}^{10}/_{11}$. All'avanti del setto ${}^{5}/_{6}$ si trova la massa compatta del bulbo faringeo da cui partono numerosi muscoli retrattori. L'esofago è un po' dilatato al 12° segmento, poi di nuovo sottile. L'intestino medio comincia al 15° segmento per allargarsi dietro al sepimento ${}^{16}/_{17}$; appare strozzato in corrispondenza degl'intersegmenti. Ai segmenti 20°-26° l'intestino mostra rispettivamente un paio di *borse laterali* segnate da un solco alla base; sono dapprima laterali e poi latero-ventrali, mentre il loro volume si riduce a grado a grado (Tav., figg. 7 e 8, *b*). Al 27° segmento l'intestino dà luogo a due *ciechi* laterali, ampi, diretti in avanti, attraversando due setti, fin nel 25° segmento, ove si suddividono in 4 o 5 diverticoli digitiformi decrescenti in lunghezza verso la regione ventrale (Tav., figg. 7 e 8, *c*).

Il vaso dorsale porta un 1° paio di anse cilindriche, mediocri davanti al dissepimento ${}^{7}/_{8}$, un secondo paio più esile all'altezza del margine posteriore del ventriglio, un terzo paio a

---

(1) Cfr. la figura di Goto e Hatai in loc. cit., per cui servì un esemplare con aperture di spermateche anche all'8 segmento.

poca distanza dal setto $^{10}/_{11}$, dissimmetrico pel fatto che l'ansa sinistra è esilissima mentre la destra è mediocre. I segmenti 11°, 12°, 13°, contengono ciascuno un paio di cuori intestinali, originati dal vaso sopraintestinale, alquanto più grossi delle anse suddette.

Apparato riproduttore. — Le *capsule* seminali piccole, sono sottoesofagee, aderenti al sottile setto $^{10}/_{11}$, disposte nel 10° e 11° segmento, in ognuno dei quali v' è fusione dorsale e ventrale delle capsule, la cui parete è sottile. Le *vescicole* seminali, un po' lobate, slargate, compresse contro la pagina posteriore dei setti $^{10}/_{11}$ e $^{11}/_{12}$ sporgono nei segmenti 11° e 12° inferiormente all'esofago e risalgono lungo i lati di questo. Il loro volume è subeguale. Dal setto $^{12}/_{13}$ pende nel 13° segmento un paio di piccole vescicole, ventrali, compresse contro quel setto, rudimentali, non comunicanti con le vescicole del 12°. Il colore di tutte le vescicole è bianco. I vasi deferenti s'originano dietro ai setti $^{10}/_{11}$ e $^{11}/_{12}$: davanti al $^{12}/_{13}$ si fondono assieme su ciascun lato e decorrono lungo la parete del corpo fino al dissepimento $^{21}/_{22}$ dopo del quale si dilatano in una piccola *borsa* oblunga a parete sottile che sovrasta all'apertura maschile posta, su ogni lato, a metà del 22° segmento (Tav., fig. 10). Prostate assenti. Tra i due pori maschili, invisibili all'esterno, v'è un intervallo poco minore di $^{1}/_{3}$ del perimetro del corpo.

Le *spermateche* sono mediocri, ovali o tondeggianti, compresse contro la parete ventrale del corpo al 7° segmento. Il canale è lungo circa quanto l'ampolla o meno. Mancano affatto i diverticoli.

Loc.: Yokohama, Dr. Haberer rep. 1°-IV-1904.

? *Pheretima hawayana* (Rosa).

1900. *Amyntas hawayanus*, Beddard, in: P. Zool. Soc. London, p. 645.

Loc.: Tahiti, Is. della Società. Viaggio della R. Nave " Liguria ", Giugno 1904.

Con tutta probabilità è da ascriversi a questa specie un esemplare adulto in mediocre stato di conservazione. Ne riferisco i caratteri più salienti per gli opportuni raffronti. Tengasi presente che *P. h.* è specie alquanto variabile.

Caratteri esterni. — *Lunghezza* 63 mm., *diametro* mm. 2 a 2,5. *Segmenti* 96.

Forma cilindrica, snella, appuntita all'estremità anteriore; alla coda sporgono le zone setigere. *Colore* azurro-violaceo, molto iridescente causa il distacco della cuticola. *Prostomio* largo, con processo posteriore che incide per $^1/_3$ l'anello cefalico.

Setole un po' ravvicinate nella regione ventrale. Al 2° segmento si contano 15 setole, così al 3°, 17 al 4°, id. al 5°, 14 al 6°, 34 all'8°, 38 al 9°, id. al 10°, 52 all'11°, 44 al 12°, id. al 13°, 48 al 17°, 44 al 24°.

Il *clitello* ricopre per intero i tre segmenti 14°-16°.

Le *aperture maschili* sono al 18° su grosse papille flosci e circondate ognuna da un lieve solco incompleto. Fra di esse si contano 12 setole. L'apertura femminile è irriconoscibile. Le *aperture delle spermateche* sono in due paia agl'intersegmenti $^7/_8$ e $^8/_9$; nell'intervallo ventrale si contano 14 setole all'8° segmento, 13 al 9°. Il primo poro dorsale è all'intersegmento $^{11}/_{12}$.

Caratteri interni. — I *setti* $^4/_5$ e $^5/_6$ sono vellutati sulla parete anteriore. Mancano l'$^8/_9$ e $^9/_{10}$. Gli ultimi *cuori* sono al 13° segmento ove s'inizia l'intestino medio. Al 25° segmento si scorgono i due *ciechi* intestinali, semplici, ripiegati verso la linea mediana dorsale.

Apparato riproduttore. — I segmenti 11° e 12° contengono ciascuno un paio di *vescicole seminali* semplici. Le grosse *prostate* s'estendono con la porzione ghiandolare nei segmenti 18°-21°; al 20° s'origina da queste il dotto muscolare che attraversa i setti $^{18}/_{19}$ e $^{19}/_{20}$ e s'attenua in prossimità del poro maschile (Tav., fig. 12). Mancano borse copulatrici (bulbi), a meno che funzionino come tali, introflettendosi, le due papille flosce sopra ricordate.

Le *spermateche* sono in due paia, il primo posto davanti al setto $^7/_8$, il secondo forse riferibile all'8° segmento. Hanno ampolla quasi sessile, ovata, il diverticolo è poco più lungo e ripiegato su se stesso (Tav., fig. 13).

Tritogenia morosa n. sp.

Un esemplare giovane, fortemente contratto alla regione anteriore.

Caratteri esterni. — *Lunghezza* 27 mm.; *diametro* mm. 4,5. *Segmenti* 94.

La *forma* del corpo è in complesso cilindrica, tronca all'estremità posteriore causa la brusca riduzione in diametro dei quattro ultimi segmenti. L'estremità anteriore appare cupoliforme in seguito alla forte contrazione dei primi segmenti. *Colore* gialliccio.

Il *prostomio* è nascosto nel primo segmento. I segmenti 4°-9° sono nettamente biannulati, rimanendo per i tre primi uguali i due anelli, pel 7° 8° e 9° l'anello posteriore è un po' più breve dell'anteriore. Una lieve biannulazione, almeno parziale, si osserva pure ad altri segmenti.

Le *setole* sono strettamente geminate; i segmenti 1°-6°, 20°, 21° ne sono privi, così pure gli ultimi 30 (circa). Il 7°-9° portano soltanto due fascî ciascuno, molto probabilmente i ventrali, sull'anello anteriore. A partire dal 10° sono presenti i fasci ventrali e dorsali, i quali convergono tutti verso la linea mediana ventrale, raggiungendo il massimo ravvicinamento al 20°, dopo di che si scostano di nuovo per allinearsi in serie longitudinali parallele. A metà del corpo calcolai:

$aa =$ mm. 1,72; $ab =$ mm. 0,04; $bc = 0,96$; $cd =$ mm. 0,04; $dd =$ mm. 8,93, quindi: $aa < 2\,bc$; $dd > {}^2/_3$ perimetro.

Le setole sono quasi dritte, ingrossate un po' circa a metà senza mostrare un nodulo distinto: mancano affatto di ornatura (Tav., fig. 15). Variano le loro dimensioni; così al 16° segmento trovai per una setola ventrale: lungh. mm. 0,33, diam. mm. 0,025; al 18° per una setola dorsale lungh. mm. 0,14, diam. mm. 0,025; a metà del corpo lungh. mm. 0,23, diam. mm. 0,025. Ciò prova che in prossimità delle aperture maschili (v. sotto) le setole si riducono alquanto in dimensione, e probabilmente a completa maturità sessuale non compaiono. Nell'esemplare giovane esaminato mancano le ventrali del 18° e 19°, le ventrali e le dorsali del 20°-21°. Non posso dire se vi siano setole copulatrici, a meno che siano tali le dorsali e le ventrali del 12° segmento.

contigue alle aperture delle spermateche, che nell'esemplare studiato sono rotte.

Manca ogni traccia di clitello. Alla regione ventrale dei segmenti 19°-21° si nota un lieve e stretto solco longitudinale mediano: il 20° segmento per breve tratto ai due lati del solco appare biannulato: all'estremo interno delle incisure che danno luogo alla biannulazione, trovansi le *aperture maschili*, invisibili, disposte internamente alle serie dei fasci ventrali (Tav., fig. 14). Le *aperture femminili* sono di poco esternamente a quelle serie presso al margine posteriore del 14°, pure esse invisibili, al pari delle *aperture delle spermateche*; queste in numero di 4 paia, disposte agl'intersegmenti 11°-12° e 12°-13° in direzione dei fascî dorsali e ventrali (Tav., figg. 16 e 17).

Il 12° segmento è biannulato alla faccia ventrale.

Non potei rintracciare i nefridiopori.

Caratteri interni. — Primo *dissepimento* visibile è il 5-6, sottile: il 6-7 e 7-8 sono molto robusti, meno robusti l'8-9 e 9-10: sottili o sottilissimi tutti gli altri. L'inserzione parietale dei setti coincide con gl'intersegmenti corrispondenti.

Davanti al primo setto trovasi un robusto bulbo faringeo. Il *ventriglio* tondeggiante s'estende nei segmenti 6° e 7°: mostra lo strato muscolare molto sviluppato, ed è rivestito all'interno da una cuticola molto spessa. È presente un paio di *ghiandole di Morren* disposte dorsalmente all'esofago, aderenti ad esso per largo tratto. Appaiono come due protuberanze tondeggianti: la loro struttura è finamente spugnosa pel forte ravvicinamento de follicoli, e ricorda quella che s'osserva nei *Glossoscolex* (cfr. Michls., 1897. Zool. Jahrb. Syst. vol. 10. *Gl. peregrinus*! Tav., fig. 3). Sono estese nei segmenti 10° e 11°. L'ampio intestino p. d. non comincia prima del 13° segmento, e mostra un *typhlosolis* a sezione ovale. Gli ultimi *cuori* sono all'11°.

Apparato riproduttore. Sono presenti due paia di *capsule seminali* ai segmenti 10° e 11° racchiudenti *testes* e padiglioni: esse si protendono verso il dorso, specialmente quelle dell'11° segmento, senza oltrepassare le linee laterali. Nell'esemplare giovane esaminato non trovai traccia di vescicole seminali neppure all'esame microscopico di una serie di segmenti longitudinali.

Gli *ovarî* sono al 13°: rimpetto ad essi stanno i padiglioni degli ovidotti. La parete del corpo mostra due forti sporgenze verso l'interno in corrispondenza dei segmenti 18°-21°, ravvicinate fra loro presso la linea mediana ventrale: sono dovute a maggior sviluppo dello strato muscolare (Tav., fig. 16, *s. m.*). Ai segmenti 19°-21°, per breve tratto attorno alle aperture maschili, si scorge uno strato ghiandolare sotto a quello epidermico, e si può ritenere ch'esso caratterizzi un paio di *tubercula pubertatis*, che nell'esemplare giovane studiato, non sono riconoscibili all'esterno, ma verosimilmente si fanno evidenti a maturità sessuale (Tav., fig. 16). Le *spermateche* hanno forma di tubuli serpeggianti nella parete del corpo e poi sporgenti nel celoma per breve tratto dilatandosi al fondo cieco. Al 12° segmento ogni fascio di 2 setole è contenuto in un unico follicolo in cui sboccano due grosse ghiandole piriformi (Tav., fig. 17, *g*) a lume ristretto, a parete ispessita, disposte l'una davanti l'altra dietro al follicolo relativo, e avvolte entrambe in una tasca comune (*t*) a parete sottile. Analoghe ghiandole, ma alquanto minori, stanno in corrispondenza dei fascî ventrali del 23° segmento, disposte in modo analogo.

Si tratta di ghiandole affatto simili a quegli organi descritti e figurati da Benham per *Microchaetus papillatus* Benham (cfr. P. Zool. Soc. London, 1892, p. 114 e tav. 8, fig. 10), e da quell'autore distinti col nome di “ suckers „.

Loc.: Durban, Natal, Dr. Penther rep. 1897.

Benchè fatta su un solo esemplare giovane, questa descrizione permette di riconoscere in *Tr. morosa* una specie diversa da *Tr. sulcata*. Come caratteri differenziali più spiccati vanno per ora ricordati quelli tratti dall'ispessimento di setti anteriori e dalla posizione di essi. In *Tr. sulcata* “ Das erste erkennbare Dissepiment, die Segmente 3 und 4 trennend, ist sehr stark verdickt „. In *Tr. morosa* primo setto riconoscibile è invece quello che separa i segmenti 5 e 6, ed è sottile: sono molto ispessiti i due che seguono.

Microchaetus sp.

Loc.: D'Urban, Natal, Dr. Penther rep. 1897.
Un esemplare giovanissimo.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Pheretima Habereri n. sp.

Fig. 1. Segmenti 18°-21° visti ventralmente, ⨯ circa 4 (♂ = ap. maschile).
„ 2. Tratto dell'intestino medio onde mostrare il cieco digitato (*c*) laterale destro del 26° segmento, ⨯ 6.
„ 3. Prostata sinistra, ⨯ 4 e 1/2 (♂ = ap. maschile).
„ 4. Spermateca, ⨯ 6.

Pheretima Marenzelleri n. sp.

„ 5. Prostate, ⨯ 6 (♂ = ap. maschile sinistra).
„ 6. Spermateca, ⨯ 6.

Pheretima ambigua n. sp.

„ 7. Tratto distale del canale deferente sin., ⨯ 6 circa (♂ = ap. masch.).

Pheretima vittata Goto e Hatai.

„ 8. Porzione del tubo digerente vista dal dorso (segm. 13°-31°) onde mostrare la posizione delle borse intestinali (*b.*) e dei ciechi laterali (*c.*), ⨯ 2; (*cu.* = cuori dell'ultimo paio).
„ 9. Tratto intestinale (segm. 23°-29°) visto dal lato sinistro, ⨯ 4 e 1/2.
„ 10. Tratto distale del canale deferente sinistro, ⨯ 6 (♂ = ap. maschili al 22° segm., *c. g.* = catena gangliare ventrale).
„ 11. Spermateche di sinistra nel 7° segm., ⨯ 6.

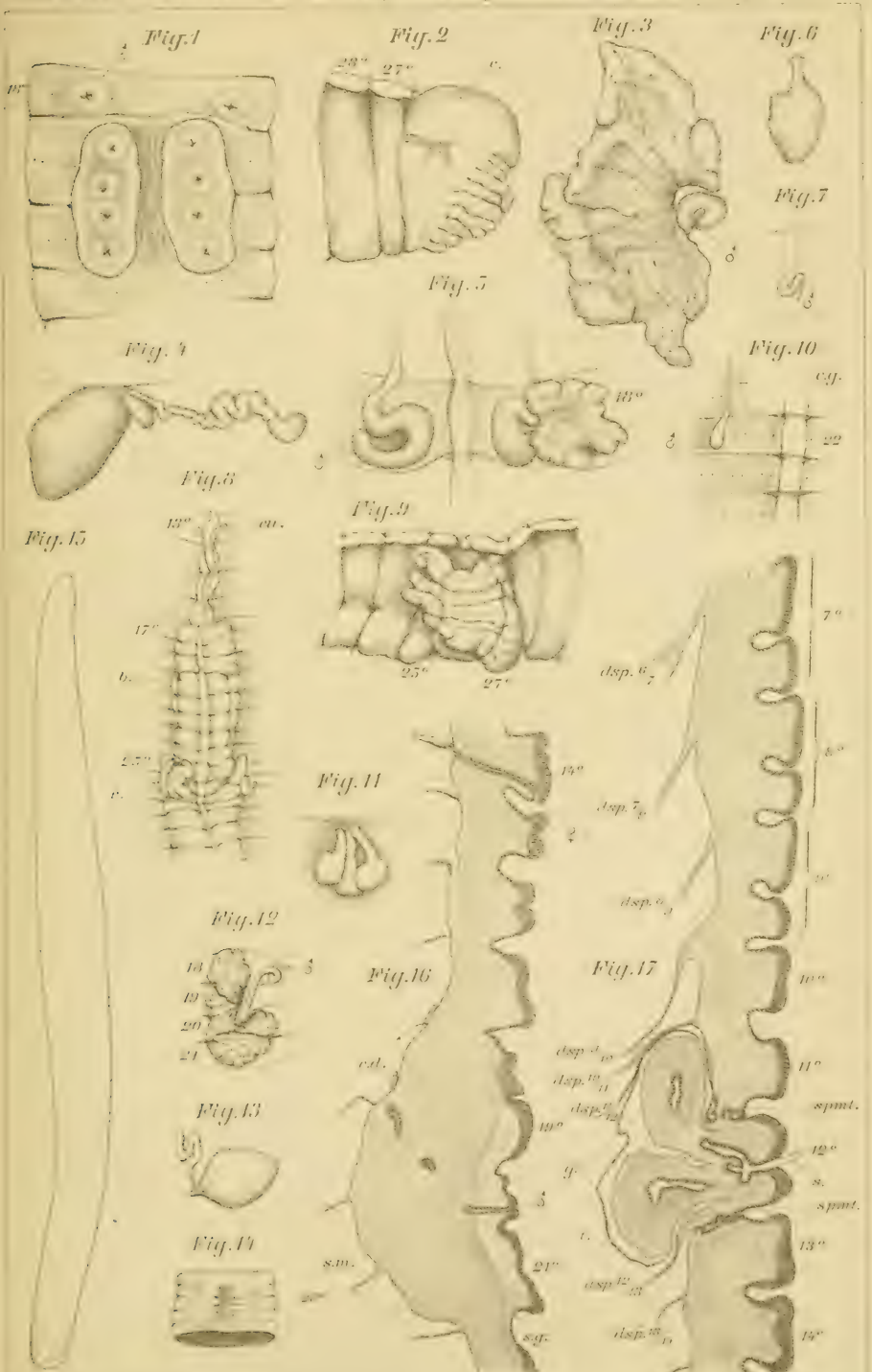
? *Pheretima hawayana* (Rosa).

„ 12. Prostata, ⨯ 7 (♂ = ap. maschile).
„ 13. Spermateca, ⨯ 7.

Tritogenia morosa n. sp.

„ 14. Porzione dell'animale (segm. 18°-22°) vista ventralmente: si scorgono le due fessure trasverse del 20° segm. laterali al solco mediano longitudinale esteso sui segmenti 19°-21°. All'estremo interno delle fessure stanno i pori maschili, ⨯ 3 circa.
„ 15. Setola, ⨯ 480.
„ 16. Sezione longitudinale della parete del corpo, un po' obliqua rispetto all'asse longitud., passante per le aperture maschile (♂) e femminile (♀), ⨯ 33 (*c. d.* = can. deferente, *s. g.* = strato ghiandolare, *s. m.* = sporgenza muscolare).
„ 17. Sezione della parete del corpo parallela alla precedente passante per le aperture delle spermateche (*spmt.*), ⨯40; (*dsp.* = dissepimento; *gh.* = ghiandole annesse al follicolo setigero; *s* = setola; *t.* = tasca delle ghiandole suddette). I numeri corrispondono ai segmenti.

COGNETTI DE MARTIIS L. - Nuove specie dei generi Pheretima e Tritogenia.

L. Cognetti de Martiis dis. Lit. Salussolia, Torino

Relazione intorno alla memoria presentata dal Dr. Giovanni Negri intitolata: *La vegetazione delle colline di Crea.*

Il lavoro del Dr. Negri, intorno al quale l'Accademia ci ha dato incarico di riferire, è la continuazione di quello già edito nei nostri volumi.

L'autore, come aveva promesso, ha continuato indefessamente ad occuparsi della vegetazione del subappennino piemontese ed anzi, in questa nuova contribuzione, prende le mosse dalle conclusioni alle quali era giunto nella prima Memoria; che cioè:

La vegetazione del subappennino piemontese si trova in uno stato di transizione dal tipo *microtermo* (adattato cioè a climi freddi), che assunse durante il periodo glaciale; ad un tipo *megatermo* (adattato a climi caldi) caratterizzato da una serie di specie mediterranee, il cui numero e la cui diffusione va continuamente crescendo, favorita dalle profonde mutazioni che l'ambiente ha subìto e subisce per opera dell'uomo.

Nei varî punti del subappennino questo fenomeno si svolge con intensità diversa; e mentre i colli torinesi si possono considerare come una delle migliori stazioni di rifugio dei relitti microtermi di origine glaciale, altri distretti, ad es. la collina di Crea, offrono una ricchezza straordinaria di elementi meridionali.

Di questi appunto l'A. ha studiato l'importanza ed il tempo ed il modo di immigrazione.

La Memoria comprende tre paragrafi, senza tener conto del Catalogo delle specie raccolte nella regione e riferite nell'appendice colla indicazione delle singole associazioni vegetali, alle quali ciascuna specie appartiene; così come egli ha fatto nella Memoria già pubblicata.

Nel primo paragrafo, l'ambiente dei colli di Crea viene esaminato partitamente nei suoi elementi: *oroidrografico, edafico, climatico* ed *antropico*; l'esagerazione delle condizioni favorevoli alla vegetazione megaterma viene posta in chiaro colla descrizione dettagliata dei singoli particolari.

Nel secondo paragrafo vengono enumerate le stazioni vegetali determinate dalle dette condizioni d'ambiente ed indicate le associazioni che vi si sono stabilite, delle quali l'A. fissa il numero a *diciotto*.

Nel terzo paragrafo infine è tracciata, nelle sue linee meglio accertabili, l'evoluzione della vegetazione dal periodo glaciale in poi nella regione studiata dall'A.

L'elemento megatermo, così importante nei colli di Crea, sarebbe dovuto ad una immigrazione relativamente recente di specie liguri, attraverso i bassi valichi della catena appenninica; immigrazione che continua tuttora, favorita dall'accennata trasformazione della regione, nella quale la distruzione delle ultime associazioni boschive, e la degradazione progressiva dei colli, che ne è la conseguenza immediata, sopprimono gli ultimi rifugi della vegetazione microterma.

Come si vede da questi cenni, l'argomento trattato dall'A. è dei più interessanti e dei più importanti; e l'A., il quale dedicò a questo suo studio alcuni anni di ricerche e di erborizzazioni, mostra di conoscerlo a fondo.

Il Negri, che si è valso anche degli studi fatti prima di lui sopra questa interessante regione dall'omonimo avvocato Francesco Negri di Casale, sagacissimo botanico ed archeologo, viene a portare con questo suo lavoro (che speriamo non sia per essere l'ultimo sopra tale argomento), un prezioso contributo alla conoscenza della Flora piemontese.

Per queste ragioni, congratulandoci coll'A. per la costanza e la diligenza da lui posta in questo genere di ricerche, le prime che vengano fatte nell'àmbito della Flora piemontese, convinti di fare opera utile, proponiamo all'Accademia che il lavoro del Dottor Negri venga accolto per la inserzione nei volumi delle Memorie.

C. F. Parona

O. Mattirolo, *relatore*.

L'Accademico Segretario

Lorenzo Camerano.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 6 Maggio 1906.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ERMANNO FERRERO
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: Rossi, Manno, Cipolla, Allievo, Carutti, Savio, De Sanctis e Renier Segretario. — Scusano l'assenza il Presidente D'Ovidio e i Soci Carle e Chironi.

La Deputazione di Storia Patria per le antiche provincie e la Lombardia invita l'Accademia a farsi rappresentare nella riunione straordinaria che si terrà il 13 maggio 1906 nel Palazzo Madama per commemorare il secondo centenario dell'assedio e della liberazione di Torino. Il Presidente Ferrero ringrazia la Deputazione del cortese invito ed informa i Colleghi che per la rappresentanza ha già provveduto il Presidente D'Ovidio.

Il Socio Manno fa omaggio di un volume del Senatore Annibale Marazio, *Il partito socialista italiano e il Governo,* Torino, 1906.

Per l'inserzione negli *Atti* sono presentate le seguenti note:

1° Dal Socio De Sanctis: Angelo Taccone, *Sulla questione dei tripodi dedicati dai Dinomenidi in Delfi;*

2° dal medesimo Socio De Sanctis: Lorenzo Dalmasso, *Un seguace di Quintiliano al principio del II sec. dell'êra volgare;*

3° dal Socio Savio: *La cronaca di Filippo da Castel Seprio;*

4° dal Socio RENIER: Augusto BECCARIA, *Le redazioni in volgare della sentenza di Frate Accursio contro maestro Cecco d'Ascoli* (1).

Il Presidente FERRERO, Direttore della Classe, ritesse in breve la storia dell'antica città di Industria, ricordata da Plinio, sulla cui ubicazione non vi è alcun dubbio, e degli scavi fruttuosi che vi furono praticati. Dopo inutili tentativi antecedenti, la Società di Archeologia e Belle Arti ha ora ottenuto un fondo da S. E. il Ministro dell'Istruzione Pubblica affinchè quegli scavi siano ripresi e continuati per conto del Governo. Siccome nelle pubblicazioni accademiche sono compresi parecchi scritti intorno ad Industria, il Presidente FERRERO crede di far cosa grata alla Classe comunicandole questa buona novella, e la Classe infatti ne prende atto con soddisfazione.

---

(1) Questa Nota comparirà in uno dei prossimi fascicoli.

LETTURE

Sulla questione dei tripodi dedicati dai Dinomenidi in Delfi.

Nota del Prof. ANGELO TACCONE.

Nell'ode terza Bacchilide celebra la vittoria riportata da Jerone col carro ad Olimpia nel 468 e nello stesso tempo esalta la splendida offerta di aurei tripodi fatta dal tiranno di Siracusa nel tempio di Apollo in Delfi. Anzi, a dir vero, più ancora della vittoria olimpica sembra che la dedica dei tripodi abbia in realtà porto a Bacchilide l'occasione di comporre quel carme. È da notare infatti che quella dedica non è rammentata nell'ode soltanto dai vv. 17-21:

λάμπει δ' ὑπὸ μαρμαρυγαῖς ὁ χρυσός,
  ὑψιδαιδάλτων τριπόδων σταθέντων

πάροιθε ναοῦ, τόθι μέγιστον ἄλσος
Φοίβου παρὰ Κασταλίας ῥεέθροις
Δελφοὶ διέπουσι.

Ben più significativo è il fatto che il punto d'incontro fra la realtà ed il mito nell'ode terza sta nelle generose offerte che tanto Jerone quanto Creso fecero al dio di Delfi e nelle conseguenze felici che ne derivarono ad entrambi; di più, terminato il racconto mitico, il poeta insiste ancora sulla gloria acquistatasi dal tiranno siracusano col mandare al tempio d'Apollo oro in tale quantità che nessuno dei Greci ne aveva mai donato la maggiore.

Disgraziatamente però nel riferirsi alla dedica dei tripodi Bacchilide si è tenuto in termini così generali che per noi, tardi posteri, non possono riuscire che del tutto vaghi, sicchè non contribuiscono certo gran fatto a dissipare le incertezze in cui si era avvolti, prima del ritrovamento dei nuovi carmi, a pro-

posito delle offerte dei Dinomenidi nel tempio di Apollo delfico. Alla rinascita di Bacchilide si aggiunsero le scoperte archeologiche dei Francesi a Delfi, ma anche queste, per mala ventura, piuttosto che a dipanare, servirono ad aggrovigliare ancor più la matassa. Pur tuttavia, sembrandomi che da uno studio accurato della questione qualche maggior luce possa trarsi di quella che finora si riuscì a fare, io procaccerò qui di esporre nel modo più breve e più chiaro possibile la storia della questione, le soluzioni che ne furono proposte, e infine una soluzione mia, la quale, se non sarà del tutto esauriente, avrà però sulle altre il vantaggio di riuscire meno incompiuta e di accordarsi ad un tempo più che esse non facciano vuoi con la tradizione letteraria vuoi con i risultati delle scoperte archeologiche.

È abbastanza noto adunque l'epigramma, attribuito a Simonide e conservatoci in *Ant. Pal.*, VI, 214 e in Suida, riguardante la dedica di un ἀνάθημα ad Apollo Pitio da parte dei quattro figli di Dinomene, e cioè Gelone, Jerone, Trasibulo e Polizelo, come χαριστήριον per la vittoria d'Imera riportata l'anno 480 dai Siracusani, collegati con altre città della Sicilia, contro i Cartaginesi, sotto la condotta di Gelone. L'epigramma suona:

> Φημὶ Γέλων', Ἱέρωνα, Πολύζηλον, Θρασύβουλον,
> παῖδας Δεινομένευς, τὸν τρίποδ' ἀνθέμεναι
> βάρβαρα νικήσαντας ἔθνη, πολλὴν δὲ παρασχεῖν
> σύμμαχον Ἕλλησιν χεῖρ' ἐς ἐλευθερίην (1).

Ma esso ci è pure stato tramandato dallo scoliasta a Pindaro, *Pit.* 1, 155, il quale riferisce la tradizione secondo cui Gelone, il vero vincitore d'Imera, avrebbe, per affetto ai fratelli, fatto la dedica non soltanto in nome proprio, ma anche in nome loro, e dà, al v. 2, invece della lezione τὸν τρίποδ' ἀνθέμεναι, l'altra τοὺς τρίποδας θέμεναι. Ecco dunque per lo meno un primo dubbio: l'offerta consistè in un tripode od in più tripodi?

(1) Ommetto senz'altro il distico

> ἐξ ἑκατὸν λιτρῶν καὶ πεντήκοντα ταλάντων
> Δαρετίου χρυσοῦ, τᾶς δεκάτας δεκάταν,

che l'*Antologia* e Suida interpongono fra i vv. 2 e 3, e che è universalmente riconosciuto spurio.

Ma procediamo. Diodoro (XI, 26), attenendosi alla testimonianza dello storico siciliano Timeo di Tauromenio, ricorda un solo tripode, dedicato da Gelone dopo la vittoria d'Imera. Ateneo invece (VI, pp. 231 E-232 C), riferendosi all'autorità di Fania d'Ereso (Περὶ τῶν ἐν Σικελίᾳ τυράννων) e di Teopompo (Φιλιππικά), riferisce che, dopo Gige e Creso, Gelone e Jerone furono i primi ad offrire ἀναθήματα aurei od argentei ad Apollo delfico, e adopera precisamente le parole seguenti: τοῦ μὲν (*scil.* Gelone) τρίποδα καὶ νίκην χρυσοῦ πεποιημένα ἀναθέντος, καθ' οὓς χρόνους Ξέρξης ἐπεστράτευε τῇ Ἑλλάδι (la qual data corrisponde esattamente al 480, anno della battaglia d'Imera), τοῦ δὲ Ἱέρωνος τὰ ὅμοια. Ci narra poi ancora Ateneo, riferendo da Teopompo, che Jerone, βουλόμενος ἀναθεῖναι τῷ θεῷ τὸν τρίποδα καὶ τὴν Νίκην ἐξ ἀπέφθου χρυσοῦ, ἐπὶ πολὺν χρόνον ἀπορῶν χρυσίου, ὕστερον ἔπεμψε τοὺς ἀναζητήσοντας εἰς τὴν Ἑλλάδα, dove finalmente i messi di Jerone poterono avere tutto l'oro che desideravano da un tale Architele di Corinto, che Jerone ricompensò poscia regalmente. Sicchè da Ateneo ci viene attestato coi più minuti particolari che i tripodi offerti furono due, e anzi con l'aggiunta di due Νίκαι: questa testimonianza ha intanto l'effetto di persuaderci che la lezione τοὺς τρίποδας dello scoliasta di Pindaro non fu semplice frutto della fantasia dello scoliasta stesso, ma ebbe più salde fondamenta, anzi con le sue particolarità ci dispone, pur senza fornirci la certezza materiale in causa delle attestazioni divergenti che vedemmo, a dare alla lezione, che reca il plurale, la preferenza sull'altra. Ma dalle parole di Ateneo risulta ancora che non solo i tripodi furono due, ma due furono altresì gli offerenti, Gelone e Jerone: risulta eziandio, come ben fa notare il Jebb (1), che le offerte dei due fratelli furono fatte in tempi diversi, altrimenti la indicazione cronologica καθ' οὓς χρόνους Ξέρξης ἐπεστρ. τῇ Ἑλλάδι non sarebbe stata messa subito dopo riferita l'offerta di Gelone, sì bene dopo l'accenno ad entrambe. E l'osservazione del Jebb è pienamente confermata da quanto, come vedemmo, Ateneo aggiunge sul ritardo che dovette subire l'invio di Jerone a Delfi per la difficoltà di trovare oro di coppella.

(1) *Bacchylides. The poems and fragments edited with introduction, notes, and prose translation* (Cambridge, 1905), p. 453.

Adunque dallo studio e dal confronto delle testimonianze antecedenti alla scoperta di Bacchilide possiam dire che fosse risultato probabile essere stati i tripodi offerti due (con due Νίκαι) e due essere stati gli offerenti, Gelone e Jerone, in tempi diversi. Restava però oscuro il motivo della offerta di Jerone, indipendente da quella di Gelone, se era davvero da ammettere con lo scoliasta di Pindaro che l'offerta di Gelone fosse stata fatta in nome di tutti i fratelli. Occorreva dunque pensare che la offerta di Jerone fosse stata motivata da altra ragione che dalla vittoria d'Imera. L'altra ragione poteva essere la riconoscenza del re siracusano per le vittorie agonali riportate a Pito. E la scoperta di Bacchilide parve per un momento confermare tale ipotesi e portare quindi a questa definitiva soluzione della questione: due ἀναθήματα da parte dei Dinomenidi a Delfi, uno di Gelone, anche a nome dei fratelli, per la vittoria d'Imera, uno, più tardo, di Jerone, per suoi particolari motivi, e cioè per le vittorie pitiche; e siccome, secondo ci narra Ateneo, l'offerta di Jerone venne fatta con grande ritardo, così nel cantare la vittoria olimpica di Jerone nel 468 Bacchilide celebrò nello stesso tempo la splendida dedica di Jerone, che dovea allora datare da brevissimo tempo (infatti l'ultima delle vittorie pitiche di Jerone, e nello stesso tempo la maggiore, fu del 470). Bacchilide avrebbe poi fatto uso del plurale τριπόδων volendo alludere anche all'*ex-voto* di Gelone, dal quale un certo onore veniva altresì a Jerone, oltrechè pel motivo dianzi accennato, anche in quanto esso faceva testimonio non solo della regale munificenza di Gelone, ma pure dello splendore della casa tutta quanta dei Dinomenidi.

Ma qui giungono le scoperte archeologiche a riaggrovigliare la matassa che sembrava dipanata. Gli scavi francesi a Delfi misero in luce (1) davanti alla fronte orientale del tempio, e cioè nel luogo più conspicuo che fosse assegnato agli ἀναθήματα, un'ampia base quadrangolare di alberese, su cui è sovrapposto un alto gradino pure di alberese. Questo gradino porta, alla distanza di un metro l'uno dall'altro, due piedistalli della forma

(1) Vedi in proposito Théophile Homolle in *Bulletin de correspondance hellénique*, XXI-1897, pp. 588 e sgg., e più distesamente in *Mélanges Weil* (Paris, 1898), pp. 207-224.

di capitelli a campana rovesciati. Che ciascun piedistallo sorreggesse un tempo un tripode è dimostrato, tra l'altro, dalle cavità esistenti sulla superficie superiore di entrambi, cavità nelle quali si adattavano i piedi del tripode. Orbene l'uno dei piedistalli porta la seguente inscrizione: Γελον ο Δεινομεν[εος] | ανεθεκε τοπολλονι | Συραϲοσιος || Τον τριποδα : και τεν : Νικεν : εργασατο | Βιον : Διοδορο : υιος : Μιλεσιος. L'inscrizione dell'altro disgraziatamente è monca: non vi si legge più se non in una riga —— νεοσανεθεκε ελ e nell'altra ——— hεπταμναι. L'Homolle la dà così redintegrata: [Ηιάρων hο Δεινομέ]νεος ἀνέθεκε· [h]έλ- | [κε δὲ τάλαντα δέκα] hεπτὰ μναῖ.

E fin qui tutto sarebbe andato bene, perchè la scoperta archeologica avrebbe confermato la conclusione cui accennavamo poc' anzi, che i tripodi offerti dai Dinomenidi fossero due (le Νίκαι evidentemente sormontavano i tripodi), uno di Gelone ed uno di Jerone (la base potè da principio essere destinata per il solo piedistallo e relativo tripode di Gelone, e più tardi essere ampliata per accogliere altresì l'offerta di Jerone). Ma il guaio si è che insieme con la base portante i due piedistalli uniti si trovarono pure due piedistalli disgiunti, più piccoli dei primi, anepigrafi, della stessa forma di un capitello a campana rovesciato, forma affatto eccezionale a Delfi. Uno di essi mostra sulla superficie superiore le cavità per accogliere il tripode: l'altro nella parte superiore è monco. Come spiegare dunque l'intricata faccenda?

L'Homolle propose la seguente soluzione. Gelone, il vincitore d'Imera, dedicò il suo tripode dopo la vittoria: Jerone, che era assai ambizioso e che ad Imera avea pure combattuto, riuscì più tardi ad ottenere che una uguale offerta sua fosse messa accanto a quella del fratello: il mite Gelone allora, quale tacito rimprovero all'intrigante fratello e per onorare anche i due fratelli più giovani, avrebbe fatto porre i due piedistalli minori coi relativi tripodi minori. Può darsi, pensa l'Homolle, che i due piedistalli minori poggiassero sopra un'unica base sulla quale fosse inciso l'epigramma simonideo.

L'ipotesi dell'Homolle è certo assai acuta, perchè, oltre allo spiegare la presenza dei quattro piedistalli di forma uguale e nello stesso tempo eccezionale a Delfi, riesce anche a salvare, in certo modo, la dianzi accennata tradizione riferita dallo sco-

liasta di Pindaro: di più trova altresì un posto per l'epigramma, il quale, pure secondo lo scoliasta, fu inciso sull'ἀνάθημα di Gelone (l'indicazione del posto è quanto mai vaga nelle parole dello scol.: φασὶ δὲ τὸν Γέλωνα τοὺς ἀδελφοὺς φιλοφρονούμενον ἀναθεῖναι τῷ θεῷ χρυσοῦς τρίποδας, ἐπιγράψαντα ταῦτα· Φημὶ κτλ.). Una parte di essa poi potrebbe essere appoggiata dal fatto, rilevato dall'Homolle, che uno dei due piedistalli minori è più piccolo dell'altro, quasi si fosse voluto con tale gradazione di grandezza alludere alla gradazione dell'età dei due fratelli minori. Ma le fondamenta dell'ipotesi si sfasciano perchè poggiano sopra un presupposto che proprio non si può ammettere. Come infatti avrebbe potuto Jerone, durante la vita del fratello Gelone, e mentre altro non era se non governatore di Gela alla dipendenza di lui, gareggiare con lui, suo signore, nella ricchezza di un *ex-voto*? E come mai, data anche la materiale possibilità di ciò, Jerone sarebbe stato così privo di accorgimento politico da compiere un atto, il quale, per la gravità che acquistava dalla importanza panellenica del tempio di Delfi, avrebbe potuto a buon diritto inimicargli il fratello Gelone e costargli la successione nel trono? (Jebb, p. 455).

Il Blass (1) vorrebbe riferire a Jerone l'offerta di tre tripodi, e cioè del maggiore per la vittoria pitica col carro (470 a. Cr.), dei due minori per quelle col celete. Come Ateneo abbia taciuto dei due tripodi minori egli spiegherebbe con la poca importanza di questi a petto del maggiore. Il Blass fa notare come con la sua interpretazione andrebbero egregiamente d'accordo le parole di Bacchilide ai vv. 63 e sgg.: Jerone avrebbe superato nella magnificenza dell'*ex-voto* anche il fratello Gelone. Di più risulterebbe spiegato, dice il Blass, come i due piedistalli minori non rechino inscrizione: ancora come tra i caratteri dell'inscrizione di Jerone e quelli dell'altra, di Gelone, interceda qualche differenza di forma, essendo interceduti circa undici anni tra le dediche dei due fratelli (dal 479 al 468).

Ed anche la soluzione del Blass, che si presenta in un ordine di idee affatto diverso da quello dell'Homolle, è assai acuta, ma non regge neppur essa. E per vero intanto Bacchilide non dice nei vv. 63 e sgg. che Jerone abbia superato tutti i Greci

---

(1) *Pref.* al suo *Bacchilide*, pp. LIX-LX[3].

nella ricchezza del suo *ex-voto*, sibbene che nessun Greco mai superò lui: perchè nell'affermazione di Bacchilide fosse compreso anche Gelone non occorreva quindi che Jerone avesse offerto più del fratello, ma bastava che avesse offerto altrettanto. Perchè poi i due piedistalli minori non rechino inscrizione alcuna lo si può spiegare anche altrimenti dal Blass e lo vedremo più sotto: così pure si può spiegare altrimenti il motivo per cui tra l'offerta di Gelone e quella di Jerone sarebbe trascorso tanto tempo da non sembrare strano l'uso di lettere alquanto diverse. Ma lasciamo questi argomenti secondarî, e veniamo al principale, messo in luce dal Jebb a p. 456. Il tripode di Jerone, posto accanto a quello di Gelone, non potè essere dedicato in ringraziamento d'una vittoria pitica, sia pure col carro, per la importanza del luogo ove fu collocato, luogo così conspicuo, aggiungo io, che Bacchilide stesso, nel suo cenno pur tanto fuggevole, trovò necessario menzionarlo e menzionarlo in una sede ben conspicua pur essa nel suo carme, in principio cioè di una strofa (ant. β': πάροιθε ναοῦ). Dalle testimonianze antiche intorno agli ἀναθήματα dedicati in quel luogo appare legittimo indurre che esso fosse riservato alle offerte che erano in relazione con le grandi vittorie nazionali. Così sappiamo da Erodoto che là stava il bronzeo albero di nave, ornato con stelle d'oro, offerto dagli Eginesi dopo Salamina (VIII, 122), e colà era pure il tripode aureo offerto dagli Elleni dopo Platea (IX, 80). Orbene il tripode di Gelone fu dedicato come χαριστήριον per la vittoria d'Imera: non è possibile che accanto ad esso, sulla stessa base, sorgesse un *ex-voto* per un motivo di gran lunga meno importante.

Il Jebb, per parte sua, crede (pp. 456-7) che Jerone abbia dedicato un solo tripode sormontato dalla Νίκη, identico a quello del fratello, e che l'abbia dedicato " per asserire la sua uguaglianza con Gelone quale difensore dell'Ellade occidentale ... Ma prima di far questo, Jerone attese almeno che fosse morto il fratello (478): sorriderebbe poi al Jebb l'idea che la dedica sia stata fatta dopo la battaglia di Cuma (474). Quanto ai due piedistalli minori e relativi tripodi, il Jebb dice che ci dobbiamo accontentare di rimanere, sul conto loro, al buio. Così pure dobbiamo rimanere al buio intorno al luogo dove sarebbe stato inciso l'epigramma di Simonide. Poichè infatti esso non fu inciso nè sul piedistallo di Gelone, nè su quello di Jerone, nè sulla

base comune, nè su alcuno dei piedistalli minori, nè sulla ipotetica base comune di questi dal momento che è probabilissimo che Jerone abbia dedicato il suo tripode più tardi del fratello, nè tanto meno, come voleva il v. Wilamowitz, sulla base della Νίκη di Gelone, perchè non sembra omai ragionevole dubitare che una stessa base dovesse reggere il tripode e la Νίκη, sovrastando questa a quello.

Non si può negare che l'ipotesi del Jebb sia eccellente nella parte che risolve e prudente assai nel resto: tuttavia mi sembra possibile trarre dai dati che possediamo una conclusione alquanto più compiuta. Ed ecco il mio avviso su tutta la questione.

È ormai accertato, per l'accordo fra la tradizione letteraria ed i risultati delle scoperte archeologiche, che Gelone dedicò un tripode ed una Νίκη (la Νίκη sormontava il tripode): che l'offerta fosse un χαριστήριον per la vittoria d'Imera lo dimostra il luogo ove fu collocata. L'accordo perfetto poi fra la scoperta archeologica e la testimonianza di Ateneo riguardo a Gelone cresce naturalmente fede a tutta la testimonianza del sofista, sicchè sembra pure da credere certo che il secondo piedistallo maggiore sorreggesse il tripode e la Νίκη di Jerone, tanto più che le lettere νεος, incise su questo piedistallo, nella posizione che occupano non lasciano dubbio che l'integrazione Δεινομέ]νεος sia sicura. L'essere l'ἀνάθημα di Jerone stato posto accanto a quello del fratello in un luogo riservato ai monumenti in relazione colle vittorie nazionali elleniche è prova che l'offerta di Jerone ebbe il significato che le attribuisce il Jebb; e se ebbe tale significato, fu posteriore alla morte di Gelone. Ma fu anche posteriore senza dubbio alla battaglia di Cuma, perchè, come in modo più particolareggiato osservai in principio di questa nota, l'intonazione di tutto il carme terzo di Bacchilide è tale che l'occasione di esso appare essergli stata porta più dall'offerta di Jerone a Delfi che dalla vittoria olimpica di lui. La data dell'offerta dovea quindi allora essere ancora recente assai, come recentissima era quella della vittoria.

I due tripodi minori furono, a parer mio, dedicati da Jerone stesso quando dedicò il suo accanto a quello del fratello, e l'atto di Jerone fu ad un tempo atto di generosità verso i fratelli minori e, molto più, di fine accorgimento politico. Da quanto

infatti sappiamo di Trasibulo e Polizelo, non sembra che costoro fossero uomini di molti scrupoli. Trasibulo, quando fu succeduto al fratello Jerone, dopo un governo di soli undici mesi si fece espellere dai Siracusani a cagione della sua crudeltà: Polizelo eccitò Terone, tiranno d'Agrigento, alla guerra contro Jerone. Non pare adunque lunge dal vero il supporre che Jerone, il quale, da quanto di lui ci è noto, non per niente fu re, accingendosi a compiere un atto di tanta gravità com'era quello di mandare a Delfi un ἀνάθημα che significasse a' Greci tutti com' egli si ritenesse per gloria militare pari a suo fratello, vincitore d'Imera, mandasse anche i due tripodi minori per i due fratelli più giovani. La difficoltà maggiore ad accogliere la mia ipotesi sarebbe costituita dal silenzio di Ateneo intorno ai due tripodi minori, ma a vincerla può essere sufficiente l'osservazione che in analoga circostanza già opponeva il Blass.

Come si spiega poi, secondo la mia soluzione, l'epigramma simonideo che parla di tripodi offerti dai quattro Dinomenidi? Secondo me, esso epigramma, della cui autenticità altri già dubitarono (1), non appartenne punto a Simonide. Esso fu dovuto probabilmente alla penna di un poeta più tardo, a cui, sebbene non ignaro dei più importanti avvenimenti storici della Sicilia, sfuggivano ormai i motivi particolari che aveano mosso i due diversi offerenti, mentre il luogo stesso, ove i tripodi erano collocati, bastava a farglieli considerare come altrettanti χαριστήρια per le vittorie dai Dinomenidi riportate sui barbari. Ed ecco perchè dell'epigramma, che or diremo pseudo-simonideo, non si trovò traccia alcuna a Delfi. Molto probabilmente la base comune dei due piedistalli minori, cui pensava l'Homolle, portò non già l'epigramma pseudo-simonideo, ma la dedica di Jerone a nome dei fratelli minori: per lo meno questa mia ipotesi non solo spiegherebbe, ma legittimerebbe la mancanza di inscrizione sui due piedistalli minori.

Tornando alla spiegazione generale della questione, noterò ancora com'essa permetta d' intendere letteralmente il plurale del v. 18 di Bacchilide senza che si debba pensare nè all'of-

---

(1) Ad es. A. Hauvette in *De l'authenticité des épigrammes de Simonide*, Paris, 1896.

ferta di Gelone nè ad una figura retorica, nel nostro caso stranissima. Nè alla mia soluzione fa ostacolo la tradizione riferita dallo scoliasta di Pindaro, che cioè Gelone per il suo amore ai fratelli offerse i tripodi anche in nome loro, poichè quella tradizione io credo abbia avuto origine dall'epigramma stesso. Davanti a questo qualche grammatico, che con le sue cognizioni storiche non riusciva a rendersi conto della parte che potevano fors'anco avere avuto Trasibulo e Polizelo in qualche fatto d'arme contro i barbari, riflettendo che debellatore dei barbari era stato precipuamente Gelone ad Imera, escogitò la trovata. La lezione τὸν τρίποδ' ἀνθέμεναι, più recente secondo me che non l'altra τοὺς τρίποδας θέμεναι, potè nascere o per opera di taluno che, come Diodoro, avesse dinanzi una fonte la quale non accennasse che al solo tripode dedicato da Gelone e magari non ignorasse l'invenzione a noi riferita dallo scoliasta di Pindaro, o semplicemente per opera di un grammatico che abbia voluto introdurre il verbo più proprio ἀνατίθημι, o, meglio, per influenza di entrambe queste cause combinate.

Un seguace di Quintiliano al principio del II secolo dell'êra volgare.

Nota di LORENZO DALMASSO.

I.

Il culto dell'antico è fenomeno che torna a più riprese nella storia. Popoli giunti a certi gradi di sviluppo, civiltà stanche e non più giovani, sentono il bisogno di riposarsi nella contemplazione di età meno complesse e meno faticose. Così si spiega quella tal specie d'entusiasmo romantico-sentimentale per l'antichità che appare nel sorgere dell'impero: da Augusto che, sapendo di cattivarsi la simpatia dei contemporanei, si presenta come un ristauratore dell'antico,. a Virgilio e a Livio che di questa tendenza si possono dire l'espressione letteraria. E tale parve essere quel periodo di quietismo raramente interrotto che abbraccia l'impero di Adriano, Antonino Pio e Marc'Aurelio. Alternative di azione e reazione spiegano questo fenomeno che, dapprima non letterario, viene poi ad avere un contraccolpo anche e specialmente nella letteratura.

Reazione prodotta nel nostro caso particolare dagli eccessi dell'altra scuola, quella scuola nuova, che, iniziatasi già ai tempi di Cicerone nel dibattito fra due opposte correnti di oratoria, era dalla prosa dilagata alla poesia coi *poetae novi*, i *cantores Euphorionis* (1) (come non senza disprezzo li aveva battezzati Cicerone già in sul loro primo apparire) e nell'una e nell'altra proseguita trionfante per quasi tutto il I sec. d. C.

---

(1) Per l'interpretazione ed i limiti di questa espressione Ciceroniana (*Tusc.*, III, 19, 45), vedi C. Marchesi, *I Cantores Euphorionis*, " Atene e Roma ", IV, pp. 183-91, e contro di lui C. Cessi, *Intorno ai " Cantores Euphorionis "*, " Ateneo Veneto ", XXV, fasc. 3°, pp. 52-58; più recentemente poi lo studio di A. Gandiglio, *" Cantores Euphorionis ". Sulle relazioni fra Cicerone e i poeti della nuova scuola romana.* Bologna, Zanichelli, 1904, e la recensione del Marchesi stesso in " Atene e Roma ", VII, 312-16.

Ma tra le due correnti, appunto per una nuova particolar forma di reazione, si viene determinando e a volte accentuando una corrente intermedia: quella dei moderati, dei concilianti, di coloro i quali (come felicemente li definisce il Norden (1)) " comprendono che il tempo nuovo dev'esser nuovo anche nello stile, ma sanno mantenere quella giusta misura, che è pur sempre così difficile a trovare „.

Questa tendenza appare in qualche modo già rappresentata da Cicerone con quella sua eloquenza così genialmente aliena sì dagli eccessi attici come dagli asiatici, e ancor meglio si delinea in Augusto, almeno secondo ci risulta dalla testimonianza di Svetonio in quel cap. 86 che ci accadrà più volte di ricordare. Ma il suo rappresentante più popolare e più tipico (forse perchè in lui la testimonianza teorica delle discussioni trova una felice corrispondenza pratica nello stile) è Quintiliano; il quale, mentre chiaramente afferma di preferire Orazio a Lucilio (2), non dissimula la poca simpatia per coloro i quali, usando parole morte, *famam eruditionis affectant, ut quaedam soli scire videantur* (3); e riconosce volentieri che certe concessioni si possono pur fare alla scuola nuova (4). Plinio il Giovane e Tacito, in varia misura e con diverse tendenze, stanno anch'essi in questa schiera di moderati.

E Svetonio? E. Norden in una nota del suo già citato volume (p. 387 n. 1), dottissimo contributo alla storia delle due scuole, ricercando i tentativi di conciliazione nell'ultimo periodo dell'impero, afferma senz'altro che " fra i latini non saprebbe nominare alcuno. Svetonio scrive scoloritamente (*farblos*) „. O non potrebbe sembrare che (pur tenendo nel debito conto le ragioni di economia che dovettero presiedere all'ampio lavoro) Svetonio meritasse maggior attenzione?

Non nego la freddezza e l'impassibilità del narratore, che in realtà devono spesso dipendere da impotenza artistica più

---

(1) *Die antike Kunstprosa von VI Jahrhundert v. Chr. bis in die Zeit d. Renaissance*, Leipzig, Teubner, 1898, p. 268.

(2) *Inst. Orat.*, X, 1, 94. Il suo libro X del resto dimostra chiaramente che quanto v'è prima di Cic. per lui ha solo valore storico.

(3) Ibid., VIII, 2, 12.

(4) Ibid., VIII, 5, 32.

che da deliberato proposito. Svetonio non fu uno scrittore di genio: lo riconosce il Macé stesso (1), che, entusiasta del tema, al quale ha dedicato nove anni di cure, assume nei giudizi più spesso gli atteggiamenti del panegirista che non del critico. Ma, appunto perchè tale, la sua figura di scrittore — pare a me e credo di non errare — è degna di studio. Figura piena di contraddizioni, è vero, mal definita e mal definibile (e come potrebbe non esserlo, quando della multiforme opera sua non ci rimane che un libro di storia e qualche frammento d'uno di storia letteraria?), ma non per questo men degna di essere attentamente considerata nella varia vicenda di tali tentativi di conciliazione fra le due scuole.

Questo mi propongo di far brevemente io, vedendo di cogliere la sua fisionomia personale in mezzo alle opposte tendenze, con le quali si dovette trovare a contatto in un'età di transizione come quella, che delle età di transizioni presenta tutte le incertezze e tutte le contraddizioni. Donde la necessità di una breve ricerca storica sulla vita del nostro autore, o piuttosto su quei punti della sua vita che possano meglio illuminarci intorno all'ambiente, in cui visse, ed agli influssi che questo potè su di lui esercitare; tenendo anche ben conto dei giudizi o spunti di giudizio che nell'opera sua si possano trovare al nostro proposito. Quanto alle particolarità di grammatica e di stile, in modo speciale istruttive al nostro caso, poichè già me ne occupai diligentemente in un altro mio studio (2), mi servirò qui senza discuterle delle principali conclusioni al riguardo, rimandando allo studio stesso chi ne desideri più ampia informazione.

II.

E cominceremo dal fissare alcune date: cosa non facile, data l'assoluta scarsità di notizie in proposito (3). Le difficoltà sorgono subito da principio per la data della nascita.

---

(1) *Essai sur Suétone*, Paris, Fontemoing, 1900, p. 240.

(2) *La Grammatica di C. Svetonio Tranquillo*, Torino, Casanova, 1906.

(3) Sono in tutto 12 brevi accenni: nei 12 Cesari (*Cal.* 19, *Ner.* 57, *Ott.* 10), nelle lettere di Plinio e in una breve risposta di Traiano (I, 18; III, 8; V, 10; IX, 34; I, 24; Tr. 94), in Spartiano (*Vit. Hadrian.*, 11, 3) e in Giovanni Lido (*De mag. reip. Rom.*, II, 6).

Svetonio nasce nel 69, come vuole il Macé (1), o nel 77, secondo l'opinione del Mommsen (2). Ma non abbiamo elementi sufficienti per risolver la questione, perchè nè l'argomento del Mommsen, fondato su una lettera di Plinio (III, 8), secondo la quale nel 109 Svetonio avrebbe sollecitato il tribunato, pare abbastanza sicuro: nè sono tutti egualmente concludenti e persuasivi (3) i molti del Macé (se ne togliamo quello risultante da una testimonianza del cap. 57 della vita di Nerone, che cioè nell'88 doveva essere *adulescens*; e tale non poteva dirsi, se avesse avuto 11 anni, come risulterebbe dalla data del Mommsen). Dovremo quindi contentarci di accettare i due estremi posti dal Mommsen e dal Macé, fra i quali si contengono anche gli altri studiosi che della questione si occuparono (4), e rinunciare a risolvere la questione, come fa del resto opportunamente lo Schanz (5).

E facciamo un altro passo. In un primo periodo della sua vita (non molto prima del 97 e non molto dopo del 101) insegna grammatica, tentando successivamente la carriera del foro e della milizia, come tenderebbe ad assodare la dimostrazione del Macé (6): fa soltanto l'avvocato, secondo il Boissier (7). Ed eccoci di fronte ad un'altra spinosissima questione, che pur sarebbe così utile poter risolvere. Ma purtroppo, se per i tentativi più o meno felici di Svetonio al foro abbiamo un documento nella lettera I, 18 di Plinio: per la sua professione di *grammaticus* non abbiamo che argomenti negativi, pur seducenti, ma sui quali non è possibile fondare nessuna sicura affermazione.

---

(1) Op. cit., pp. 35-43.

(2) Nel suo classico *Étude sur Pline le jeune*, trad. Morel, " Biblioth. de l'École des Hautes Études ", (15), 1873, pp. 13-14.

(3) Vedili discussi dal Boissier in una recensione al libro del Macé (" Journal des Savants ", 1901, pp. 69-71). Se poi si pensa che la cronologia delle lettere di Plinio, stabilita dal Mommsen, sulla quale egli fonda gran parte dei suoi argomenti, lascia luogo ancora a dubbi (basti vedere J. Asbach, *Zur Chronologie der Briefe des jüngeren Plinius*, " Rhein. Mus. ", XXXVI, 38-49), le difficoltà crescono sempre più.

(4) Per questi cfr. Macé, p. 35.

(5) 2ª ed., vol. III, p. 47.

(6) Op. cit., pp. 53-68.

(7) Recens. cit., p. 71.

Ecco quelli, in base ai quali il Macé crede di stabilire questa sua professione: gl'appellativi di γραμματικός e di φιλόλογος dati al nostro rispettivamente da Suida (1) e da Giovanni Lido (2), di *scholasticus* datogli da Plinio (3), il metodo della sua opera, lo stile e i dettagli proprii del grammatico, il panegirico e la difesa da lui fatta dei grammatici. Senonchè la denominazione di γραμματικός può riguardare il carattere dell'opera più che la professione dell'autore; quella di φιλόλογος la dottrina ed erudizione dello scrittore (e qui si può assai bene riportare il passo del *De grammaticis*, 10, 261, 38, dov' è detto di L. Ateio Filologo *philologi appellationem assumpsisse, quia... multiplici variaque doctrina censebatur*). Ed anche più lontano ci conduce la parola *scholasticus*, che o si riferisce al maestro (ma di rettorica, non di grammatica, cfr. *De rhet.*, 6, 271, 17), o allo scolaro (vedi fra l'altro Petronio, *Satyr.* 6: *Ingens scholasticorum turba in porticum venit*), o viene a indicare — e questo è il caso presente — l'uomo di studio (4). Le altre ragioni poi provano soltanto ch'egli aveva grande predilezione per la grammatica, ma da sole non servono per nulla a provare che l'abbia insegnata (5).

Certo Svetonio dovette essere alieno dalla vita pubblica in questo e nell'altro periodo della sua esistenza: tutte le notizie che abbiamo di lui mostrano che la sua fu vita essenzialmente di privato e di studioso.

Ed in questa disgraziata lacuna di fatti e di date ci dobbiamo portare fino a circa il 119, quando finalmente è possibile stabilire qualche cosa di sicuro. Nel 119 — e qui il ragionamento del Macé (6) è accettabile — entra alla corte di Adriano in qualità di *magister epistularum*. In quel tempo il

---

(1) Τράγκυλλος, ὁ Σουητώνιος χρηματίσας, γραμματικὸς Ῥωμαῖος (vedi Τράγκυλλος).

(2) Ὡς ὁ Τράγκυλλος εἶπε φιλόλογος (*De mag. reip. Rom.*, I, 34, Lipsia, Teubner, 1903, p. 35).

(3) *Epist.*, I, 24.

(4) Vedi il lessico del Forcellini.

(5) Vedi pure la già citata recensione del Boissier, p. 71.

(6) Op. cit., p. 89.

De vita Caesarum (1) doveva esser quasi finito; il *De viris illustribus* lo sarebbe stato assai prima, se si potesse identificare con l'opera che Plinio nel 105 lo invitava a pubblicare con parole assai lusinghiere (2). Nel 121 i *Cesari* sono pubblicati, sempre secondo la dimostrazione del Macé. Se pure la data precisa, così com'è fissata da lui, non è indiscutibile, tuttavia da questa non ci possiamo troppo allontanare; perchè la testimonianza di Giovanni Lido (3), che riferisce la dedica dei Cesari a Septicio Claro al tempo che questi era ancora prefetto del pretorio, viene a collocare la pubblicazione dell'opera stessa tra il 119 e il 122. Verso questo tempo la porta anche il Roth (4).

Non doveva passar che un anno, nel 122, nel momento più glorioso e più bello della sua vita, quando la pubblicazione delle due opere suddette aveva accresciuta intorno a lui la fama e l'autorità che già gli aveva data la carica importantissima che rivestiva, Svetonio cade in disgrazia dell'imperatore, è licenziato dal suo ufficio e travolto con altri nella rovina di Septicio Claro, il prefetto del pretorio che l'aveva introdotto a corte (5).

---

(1) Fra i molti titoli che si danno comunemente alla maggior opera di Svetonio giunta sino a noi, scelgo questo (accettato fra gli altri dal Roth e dallo Schanz), perchè più vicino alla testimonianza di Giovanni Lido (*De mag. reip. Rom.*, II, 6, p. 61): Τράγκυλλος τοὺς τῶν Καισάρων βίους ἐν γράμμασιν ἀποτίνων Σεπτικίῳ. In realtà questo titolo manca nelle fonti antiche e i nostri mss. più autorevoli sono tutti acefali. I titoli varii (*De XII Caesaribus, De vita XII Caesarum, De vita et moribus XII Caesarum*), nei quali si sono scapricciati editori antichi e moderni sono quindi senza fondamento (cfr. Roth, Pref. alla ediz. Teubner. del 1857, pp. x-xi. — Macé, p. 355, n. 1).

(2) *Perfectum opus absolutumque est, nec iam splendescit lima, sed atteritur. Patere me videre titulum tuum, patere audire describi legi venire volumina Tranquilli mei.* E che i *volumina* che Plinio invitava il suo amico a pubblicare fossero i *De viris illustribus*, dubita anche il Roth (Prefaz. già citata, p. viii).

(3) Τράγκυλλος τοὺς τῶν Καισάρων βίους ἐν γράμμασιν ἀποτίνων Σεπτικίῳ ὃς ἦν ὕπαρχος τῶν πραιτωριανῶν σπειρῶν ἐπ' αὐτοῦ, πραίφεκτον αὐτὸν τῶν πραιτωριανῶν ταγμάτων καὶ φαλάγγων ἡγεμόνα τυγχάνειν ἐδήλωσεν.

(4) V. la già citata prefaz., p. viii: *Libros non ante quadragesimum aetatis annum edidit* (si badi che il Roth a p. vi ne pone la nascita *primis Vespasiani annis*).

(5) La notizia c'è data da Spartiano (*Vit. Hadr.*, XI, 3). Sulla causa, si discute e c'è veramente da discutere; poichè non è possibile prendere sul serio la notizia di questo, secondo la quale Adriano avrebbe licenziato Septicio

Aggiungiamo soltanto che Svetonio se ne dovette consolare abbastanza facilmente, perchè amante della vita privata di studioso ed alieno dalla vita pubblica, come par di scorgere un po' sicuramente in mezzo ai dubbi ed alle lacune del primo periodo della sua esistenza. Ma qui non c'importa seguirlo: di questo secondo periodo, che dovette pur essere operoso, restano solo frammenti, non sempre databili in modo sicuro; quindi le nostre considerazioni vanno fermate al 121, quando Svetonio ormai cinquantenne pubblica i dodici Cesari, ai quali seguirà a non molta distanza il *De viris illustribus*, che però, come abbiamo visto, teneva già pronto da anni. Allora egli aveva letto certo le Storie di Tacito e i primi libri degli Annali, se non anche percorsi gli ultimi (1). Ma non si può dire che su di lui abbiano esercitato speciale influenza. Nella concezione della storia Svetonio è da Tacito troppo lontano; quanto alla forma poi, i frequenti particolari grammaticali comuni ad entrambi sono frutto piuttosto della progrediente dissoluzione della tradizione classica. e la concisione e stringatezza di stile, proprie d'entrambi, non possono mostrare altro che comune ricerca ed amor di brevità; se questa non fosse già una raffinatezza della scuola nuova, da essa anzi portata ad eccessi, dai quali Tacito e Svetonio seppero tenersi lontani (2).

Claro, Svetonio e *molti altri*, perchè *apud Sabinam uxorem... familiarius se tunc egerant quam reverentia domus aulicae postulabat*, chè sembra poco verosimile che molti insieme abbiano potuto rendersi colpevoli di soverchia famigliarità e poca etichetta verso l'imperatrice. Abbastanza persuasiva invece l'ipotesi del Macé (p. 215-6) che spiega la disgrazia di Svetonio come il risultato di una lotta d'influenze durante l'assenza d'Adriano, per la quale un partito, appoggiato all'imperatrice, avrebbe fatto cadere Septicio Claro e con lui i suoi protetti (Svetonio e i *multi alii* di cui parla Spartiano).

(1) Il Macé (p. 207) ammette che le Storie siano state pubblicate prima del 108. O che così sia o che si debba giungere sino all'estremo limite del 114 assegnato da F. Münzer (*Beiträge zur alten Gesch.*, I, 300 sgg.), resta sempre ampiamente la possibilità che Svetonio abbia potuto conoscere l'opera del maggiore storiografo del suo tempo.

(2) Un declamatore si vantava di raccogliere tutta una sentenza in due parole. Brevità divenne la parola d'ordine: furono lodati Tucidide ed anche più Sallustio per la loro concisione. Le testimonianze sono abbondantissime in Seneca e specialmente in Quintil. che a più riprese biasima il mal vezzo: *Alii brevitatem aemulati necessaria quoque orationi subtrahunt verba et, velut satis sit scire ipsos, quae dicere velint, quantum ad alios pertineat nihil putant* (*Inst. Or.*, VIII, 2, 19). Vedi Norden, op. cit., p. 283.

Così sgombrato il terreno dall'influsso del più grande scrittore contemporaneo, ci si presenta quello delle tendenze del suo tempo. Ed eccoci alle due scuole letterarie, tra le quali allora più che mai la lotta era accanita.

III.

È impossibile che Svetonio sia rimasto affatto estraneo alla scuola nuova. La scuola nuova attraversava allora — si direbbe — un periodo di crisi; la corrente arcaicizzante ingrossava e dal 119 intorno a un imperatore si stringerà il nucleo di quelli, che porranno poi capo a Frontone. Ma, se la scuola nuova nei primi anni del s. II non poteva più tenere quell'atteggiamento disdegnoso che viene dal predominio incontrastato, era ben lontana dal darsi per vinta: la forza della tradizione la sosteneva. A distanza minore di un secolo, nell'età augustea, essa aveva trionfato, e trionfante aveva attraversato tutto il I secolo, nonostante l'opposizione classicheggiante di Quintiliano e di Plinio il Giovane; ad essa avevano dato il nome tutti i grandi poeti augustei — e non si dimentichi mai che *est historia proxima poetis* — lo stesso Tacito moderato e conservatore più d' una volta aveva dovuto indulgere alle sue tendenze (1).

E si noti che la cultura greca, in nome della quale la scuola nuova aveva combattuto, non accennava punto a perdere il suo favore; chè anzi allora più che mai *Graecia capta ferum victorem cepit*; e per una di quelle contraddizioni proprie di ogni decadenza assistiamo all'entusiasmo filellenico di vieti arcaisti che si proclamano ristauratori delle più pure tradizioni romane. E maestri greci affluiscono a Roma ben accolti dagl' imperatori, che non disdegnano le dediche delle loro opere, mentre alle capitali della cultura greca si conviene da tutte le parti dell'Occidente. La forma dei frontoniani sarà egualmente ridondante di arcaismi e di grecismi. In greco scriveranno i frontoniani molte loro opere, alcuni anche disdegneranno la lingua latina (2).

(1) Vedi L. Valmaggi, *L'arcaismo in Tacito*, Torino, Bona, 1891, p. 21.

(2) Si noti però che il loro gusto arcaico e pedantesco si riflette anche nelle opere in greco. Nelle lettere greche di Frontone non è tutta la gre-

Un uomo dotto come Svetonio non poteva non amare il greco, fonte di tanta cultura (1). Il carattere stesso della sua storia, ricalcata sulle biografie scientifico-erudite degl'Alessandrini (2) lo avvicina alla letteratura ellenica. E con la letteratura ellenica Svetonio dovette esser famigliare; n'avrebbe conosciuto bene anche la lingua e la grammatica, se avesse scritto, come pare, anche opere in greco (cfr. il περὶ τῶν παρ' Ἕλλησι παιδιῶν βίβλιον).

Ma poichè le tendenze ellenistiche erano del suo tempo e la scuola arcaicizzante, come abbiam visto, andava perdendo quel carattere rigidamente nazionalista che aveva avuto dapprima, l'ellenofilia di Svetonio nulla o ben poco viene a significarci sui suoi rapporti con la scuola nuova.

Nè maggiori insegnamenti ci può dare il libero uso dei grecismi e neologismi, chè questi non sono moltissimi, nè tutti troppo arditi, e tutt'al più dimostrano che Svetonio, liberatosi da scrupoli puristici omai vieti, usò la parola greca o nuova, quando vide che essa, breve e pittorica, valeva assai meglio della faticosa perifrasi dei classici. E nemmeno sono molte le arditezze grecizzanti o modernizzanti della sua grammatica, sulle quali — si noti — può sempre ancor nascere il sospetto che si tratti di particolarità inconscie, anzichè volute. Qualche con-

---

cità che compare, ma solo una speciale grecità cosparsa di vocaboli attici e arcaici, e la chiusa della lettera a Domizia, dove si scusa εἴ τι τῶν ὀνομάτων ἐν ταῖς ἐπιστολαῖς ταύταις εἴη ἄκυρον ἢ βάρβαρον ἢ ἄλλως ἀδόκιμον καὶ μὴ πάνυ Ἀττικόν, mostra come, scrivendo il greco, non battessero via diversa da quando scrivevano il latino (Vedi Norden, op. cit., pp. 363 e sgg.).

(1) Ragioni dunque erudite più che artistiche devono aver condotto Svetonio ad una buona conoscenza del greco, come può mostrare l'indole stessa delle opere che cita; chè Svetonio è essenzialmente un erudito, se pur non privo di qualche genialità: non è un artista nel vero senso della parola, è un erudito (questo si può concederglielo, e non è poco) che scrive bene.

(2) Appunto alla forma biografica di tipo Alessandrino è dovuto il fatto che dei Cesari è studiata assai più la vita privata che non la pubblica: "Grande errore di Svetonio (osserva qui lo Schanz, 2ª ed., parte 3ª, p. 56) "l'aver estesa tale forma di biografia ai Cesari, ai quali più sarebbe convenuta la biografia peripatetica „. Per i precedenti della biografia Svetoniana, vedi G. Schmidt, *De Romanorum imprimis Suetonii arte biographica*, Diss. inaug., Marpurgi, 1891.

cessione adunque alla scuola nuova: ma nessuna prova positiva che Svetonio vi appartenesse.

Abbiamo invece ragione di credere che, se non fu alieno da qualche modernità, non mostrò però troppa simpatia per la scuola nuova, come tale costituita e ben definita, con tutti i suoi eccessi e le sue esagerazioni. I caratteri più notevoli di essa mancano nel suo stile. Non l'ha sedotto quella *cacozelia*, nella quale ogni forma di ricercatezza di linguaggio viene a riassumersi. Il vocabolo di Svetonio non risente dei pregiudizi di scuola, è anzitutto preciso: grecismo, o neologismo, o anche arcaismo, purchè in una brevità energica traduca l'idea; ma quando della parola nuova potè fare a meno, se n'astenne volentieri; nè cessò mai di schernire coloro che usavano neologismi troppo arditi o che nessuno capiva (1). È immune perciò dall'ampollosità strampalata e dalla leziosaggine barocca, che distingue quel seicento latino che fu il I secolo. Nè si trova quella sentenziosità (degenerata spesso nel gioco di parole) che pur sarebbe stata così naturale in una storia (2): nè la brevità, alla quale — e fu bene — non si sottrasse, scende a quegl'eccessi che hanno potuto trasformare in malvezzo una dote tanto preziosa dello stile. E così naturalmente viene a far difetto quel colorito poetico, che sempre ha fatto far la voce grossa a tante prose decadenti, e che anche allora si tradusse in una cura affannosa di evitare i *sordida et quotidiana vocabula*, disseminando senza risparmio parole poetiche, espressioni metaforiche, reminiscenze di frasi, quando non erano versi interi, di poeti celebrati. Il qual difetto sarebbe tanto più notevole in un'opera storica, dato il concetto che dello stile storico si formavano gli antichi (3);

---

(1) Vedi più frasi del già citato c. 86 della vita di Augusto.

(2) Arguzie, motti di spirito, giochi di parole si trovano cosparsi nei suoi Cesari; ma non sono originali. Sono detti degl'imperatori rimasti famosi o epigrammi popolari che corsero sulle bocche di tutti, e corrispondono interamente al carattere aneddotico della sua storia.

(3) Appena è il caso di ricordare i famosi passi di QUINT., X, 1, 31: *Est (historia) proxima poetis et quodam modo carmen solutum... et verbis remotioribus et liberioribus figuris narrandi taedium evitat*, e CIC., *De or.*, 20, 66: *Ab his non multo secus quam a poetis haec eloquentia quam quaerimus revocanda est* (Vedi pure CIC., *De leg.*, 1, 2). — Concetti analoghi troviamo in LUCIANO: Πῶς δεῖ ἱστορίαν συγγραφεῖν, 45 (ἡ μὲν γνώμη κοινωνεῖτο καὶ προσαπτέσθω τι καὶ ποιητικῆς) e DIONIGI D'ALICARNASSO: Περὶ Θουκιδίδου, 51.

se non corrispondesse all'indole del nostro scrittore e al genere della sua storia, come meglio potremo determinare in seguito.

Ma v'ha di più. Due passi, uno della vita di Nerone (52, 196, 35 e sgg.) (1), l'altro della vita di Lucano (pp. 299-300) sono per questo rispetto molto istruttivi. Il primo riguarda Seneca, che ci vien rappresentato a distogliere Nerone *a cognitione veterum oratorum* (qualunque estensione ed interpretazione si voglia dare a questa frase), soltanto *quo diutius in admiratione sui detineret*.

Lucano poi (ci dice Svetonio) in una prefazione osa paragonarsi a Virgilio, più tardi prende parte alla congiura di Pisone, *usque eo intemperans, ut Caesaris caput proximo cuique iactaret*. Ma, scoperta la cospirazione, il magniloquente predicatore del tirannicidio *ad humillimas devolutus preces* giunge anche al punto di accusare la madre. Quanto ai suoi versi, Svetonio si ricorda di averli uditi leggere in iscuola, ma *confici vero ac proponi venalia non tantum operose et diligenter, sed inepte quoque*. Non è chi non veda che tanto la minuzia, con cui insiste su un brutto episodio della vita di Lucano, quanto l'*inepte*, giudizio poco favorevole sia per l'opera (*confici*), sia per i modi di diffusione e di vendita dell'opera stessa (*proponi venalia*) — frase che riconduce all'epoca delle violenti dispute sollevate dalla Farsaglia e dell'accusa di Quintiliano (2), che lo raccomanda all'imitazione degl'oratori piuttostochè dei poeti (onde la famosa risposta di Marziale, XIV, 194) — non pongono certo Svetonio fra gli ammiratori di Lucano.

IV.

È lecito ora chiedersi in che rapporti si dovette trovare Svetonio con la scuola arcaicizzante. La scuola arcaicizzante era sopravvissuta al tempo di Augusto (3): ma è facile pensare che

---

(1) Cito l'ediz. Teubneriana del Roth nella ristampa del 1902 per i Cesari e anche per i framm. del *De viris illustribus*.

(2) *Ist. Or.*, X, 1, 90.

(3) Per questa sopravvivenza della scuola arcaicizzante ai tempi di Augusto, vedi L. Valmaggi, *I precursori di Frontone*, Ivrea, 1887, pp. 9-15, il quale in questo e in altri luoghi (*Un altro precursore di Tacito* [*Pollione*], " Bibl. delle scuole ital. ", II, 1890; *L'arcaismo in Tacito*, Torino, Bona, 1891) s'occupa a più riprese delle due scuole.

quegl'antiquari sistematici, i quali continuavano ad imporre nelle scuole e fuori i versi degli antichissimi poeti, non dovessero trovar troppo favorevole accoglienza in una società raffinata ed elegante, che poteva ben cantare arcadicamente talora la semplicità di un'età dell'oro, della quale nessuno auspicava il ritorno; ma che di fatto e apertamente s'era data con entusiasmo alla nuova cultura, che le veniva dalla Grecia. Ma essi contribuirono a tener desti certi gusti e certe tendenze che si vennero sempre più svolgendo e sempre più andarono acquistando terreno sino a Frontone.

E già al tempo di Svetonio la scuola arcaica appariva ben determinata; Adriano stesso si occupava di cultura e di questioni antiquarie, teneva discussioni con eruditi e grammatici, e, al dir di Spartiano (1), preferiva Catone a Cicerone, Ennio a Virgilio, Celio a Sallustio: intorno a lui già s'univano molti di coloro che sarebbero poi stati parte viva del movimento e della società frontoniana. Questo è il circolo, col quale Svetonio visse a contatto diretto dal 119, ma col quale, come uomo di studio e come erudito, dovette esser famigliare anche prima. È lecito inoltre pensare che, fuori delle relazioni ufficiali, si dovesse trattenere spesso con Adriano in conversazioni famigliari. Adriano d'altra parte viveva come un semplice privato (2), ed amava attorniarsi di una folla di grammatici, retori, musici, matematici, astrologi. La schiera non era sempre altrettanto scelta quanto numerosa, nè le questioni che l'imperatore poneva trovavano sempre soddisfacente soluzione (3). Non è dunque a stupire che Adriano si trattenesse volentieri in discussioni con Svetonio, tanto più se questa volta si trovava dinanzi non un erudito pedante, ma un uomo d'ingegno, col quale aveva comune l'amore alle ricerche erudite (4).

(1) *Vit. Hadr.*, c. 16, 6.

(2) Ibid., c. 8.

(3) Ibid., c. 16, 8.

(4) Basti ricordare l'episodio (narrato da Svetonio non senza compiacenza) della statuetta di Turio da lui trovata e donata all'imperatore che *inter cubiculi Lares colitur* (*Aug.*, 7, 40, 19-22). Si noti la minuzia con la quale ci viene descritta: *...puerilem imaguncula m eius aeream veterem, ferreis et paene iam exolescentibus litteris hoc nomine inscriptam.*

Tuttavia l'influenza che la corte di Adriano potè esercitare su di lui non fu che scarsa ed occasionale; chè Svetonio non ci appare aver mai avuto troppa simpatia per la scuola arcaicizzante. In questo ci sovvengono alcuni passi caratteristici delle sue opere.

In quel capitolo del *De grammaticis*, dove discorre di L. Ateio Filologo, sente il bisogno di scolparlo come da un'accusa, opponendosi alla testimonianza di Asinio Pollione, secondo il quale Ateio sarebbe stato il principale aiuto a Sallustio a contaminare i suoi scritti di soverchia affettazione d'antichità. Ed in una frase che par voglia definire il proprio stile ribatte vivacemente che anzi Ateio ebbe cura di servirsi di un *noto civilique et proprio sermone*, ed evitò massimamente l'oscurità di Sallustio e l'audacia nei traslati (1). E, quando descrive con tanta cura (sono tre capitoli) lo stile di Augusto, elegante e temperato, che evita egualmente la ricercatezza neologistica ed i fetori arcaistici, che egualmente disprezza *cacozelos et antiquarios* e specialmente Mecenate, che non perdona a Tiberio *exoletas interdum et reconditas voces aucupanti*, che chiama folle Antonio, il quale, incerto tra l'inanità asiatica e gl'arcaismi che Sallustio trasse dalle Origini di Catone, non si fa capire; che nell'ortografia sembra seguir l'opinione di quanti stimavano doversi scrivere come si parla (2): o che

---

(1) *De gr.*, c. 10: *...instruxit alterum* (Sallustio) *praeceptis de ratione scribendi. Quo magis miror Asinium credidisse, antiqua eum verba et figuras solitum esse colligere Sallustio: cum sibi sciat nihil aliud suadere quam ut noto civilique et proprio sermone utatur, vitetque maxime obscuritatem Sallustii et audaciam in translationibus.*

(2) *Aug.*, 86: *Genus eloquendi secutus est elegans et temperatum, vitatis sententiarum ineptiis atque concinnitate et reconditorum verborum, ut ipse dicit, foetoribus... Cacozelos et antiquarios ...pari fastidio sprevit... Sed nec Tiberio parcit et exoletas interdum et reconditas voces aucupanti... M. quidem Antonium ut insanum increpat, quasi ea scribentem quae mirentur potius homines quam intellegant: deinde ludens malum et incostans in eligendo genere dicendi ingenium eius, addit haec: Tu quidem dubitas Cimberne Annius an Veranius Flaccus imitandi sint tibi, ita ut verbis, quae Crispus Sallustius excerpsit ex Originibus Catonis, utaris? an potius Asiaticorum oratorum inanis sententiis verborum volubilitas in nostrum sermonem transferendo?* — *Aug.*, 88: *Ortographiam, id est formulam rationemque scribendi a grammaticis institutam, non adeo custodit ac videtur eorum potius sequi opinionem, qui perinde scribendum ac loquantur existiment...*

le osservazioni di Svetonio non hanno qui un valore ben più profondo, e non sembrano risentire il fastidio ch'egli doveva provare nell'essere a contatto con tanti *grammatistae* pedanti, non escluso lo stesso imperatore letterato, al quale le lodi dello stile d'Augusto non dovevano certo sonar troppo piacevoli?

Nè fanno difficoltà i citati passi su Seneca e Lucano, perchè questi mostrano in chi li scrive poca simpatia per i modernisti, ma non ne fanno punto un arcaista.

Invece potrebbe a tutta prima modificare il concetto che di Svetonio ci stiamo facendo e presentarcelo in una luce un po' diversa un luogo del *De grammaticis* (24, 267, 7-15); dove parlando del grammatico M. Valerio Probo di Berito esce in queste parole: *Legerat in provincia quosdam veteres libellos apud grammatistam, durante adhuc ibi antiquorum memoria, necdum omnino abolita sicut Romae* (1). E sembrerebbe di scorgervi l'arcaista rimpiangere il tempo, in cui non era ancor morta la memoria degli antichi, se appunto sull'estensione di questa parola non ci si dovesse intendere.

A. Reifferscheid nelle sue *Quaestiones Suetonianae* (2) osserva giustamente che col nome di *antiqui* non vi sono indicati solo Plauto, Ennio e gli altri antichissimi, ma anche alcuni più recenti. E qui abbiamo il soccorso di un frammento di Svetonio stesso (3): *Probus, qui illas (adnotationes) in Virgilio et Horatio et Lucretio apposuit ut Homero Aristarchus.* Dunque fra i poeti che Probo volle *emendare ac distinguere et annotare* vi sono anche poeti dell'età Augustea. Del resto non deve stupire che gli ammiratori della retorica e artificiosa sonorità della Farsaglia stimassero troppo semplice ed antica l'Eneide, e Virgilio acquistasse fama di amator dell'antico, come deduciamo da Quintiliano, il quale a più riprese (*Inst. Or.*, I, 7, 19; VIII, 3, 24; IX, 3, 14) lo dice *amantissimus vetustatis.* Nè si dimentichi che l'*arte idonea* dei

(1) E continua ritraendoci non senza compiacenza la figura di questo grammatico, che va contro il gusto dominante: *His cum diligentius repeteret atque alios deinceps cognoscere cuperet, quamvis omnes contemni magisque opprobrio legentibus quam gloriae et fructui esse animadverteret, nihilo minus in proposito mansit.*

(2) In *C. Suetoni Tranquilli praeter Caesarum libros reliquiae*, edidit A. Reifferscheid, Lipsia, Teubner, 1860, p. 395.

(3) Ibid., fr. 108*, p. 138, 6-8.

Frontoniani, quale appare dalle Notti Attiche di Aulo Gellio, che di quell'epoca sono il documento più insigne, ammetterà ancora Virgilio fra i poeti e fra i prosatori Cesare e Cicerone (1). Cicerone che ai suoi tempi era già stato un moderno, in quanto s'era opposto agli Atticisti della sua età (così nell'*Orator* e nel *Brutus*), era riguardato ora — cambiamento di tempi! — come antico (2). E che Svetonio stesso tale estensione desse alla parola *antiquus* parrebbe risultare dal già citato passo, riguardante Seneca (*Ner.*, 52, 196, 35), dove pare innegabile che anche Cicerone rientrava nei *veteres oratores.* Il luogo del *De grammaticis*, che abbiamo discusso, non sarebbe dunque ispirato a gretti criterî arcaistici.

Ma, stando anche alla lettera del passo, mi pare che, senza forzar troppo il senso, si potrebbe farne uscire una finezza di interpretazione utile al nostro assunto. Si badi bene che l'autore dice *necdum omnino abolita memoria sicut Romae.* O non sembra che il rimpianto stia nell'*omnino?* Non si duole che sia *abolita* la memoria degli antichi, ma che sia *omnino abolita*: quasi volesse ammonire che dal feticismo non si deve passare all'eccesso opposto dell'oblio completo dell'antichità, il cui ricordo va serbato non foss'altro che per il suo valore storico, o per temperare tendenze eccessivamente moderne.

Ma in qualunque modo il passo Svetoniano si consideri, un platonico rimpianto come questo non basta a far del nostro un arcaista. Anche Cicerone, che conosciamo per un modernista sia pur temperato, nelle *Tusc.*, III, 45, dopo aver riferito un saggio dell'*Andromacha Aechmalotis* di Ennio, con un lampo di sdegno, esclama: *O poetam egregium! quamquam ab his cantoribus Euphorionis contemnitur.* Anche Quintiliano, che a più riprese mostra di non esser certo un arcaista, ha giudizi temperati sul-

(1) Vedi Benedetto Romano, *La critica letteraria in Aulo Gellio*, Torino, Loescher, 1902, pp. 36 e 95.

(2) Due passi del Dialogo degli Oratori sono per questo molto istruttivi: *(antiqui) sunt horridi et impoliti et rudes et informes et quos utinam nulla parte imitatus esset Calvus vester aut Caelius aut ipse Cicero* (c. 18), e più oltre: *ad Ciceronem venio, cui eadem pugna cum aequalibus fuit quae mihi vobiscum est: illi enim antiquos mirabantur, ipse suorum temporum eloquentiam anteponebat* (c. 22).

l'antichità (1) e, quando viene a parlar di Lucilio, se rifiuta il giudizio di coloro che *omnibus poetis praeferre non dubitent*, non accetta quello esagerato di Orazio, affermando che v'è *eruditio in eo mira et libertas atque inde acerbitas et abundantia salis* (2). Sono reazioni prodotte in animi temperati da esagerati successi di scrittori modernisti; ma la reazione in uno scrittore contro gli eccessi della scuola nuova non sarà mai sufficiente argomento per parlare in lui di scuola vecchia.

Nel caso presente poi Svetonio, che andava egli stesso contro corrente, come nemico degli arcaicizzanti in un'età in cui l'arcaismo cominciava a diventar di moda, non poteva non ammirare l'indipendenza e la fierezza dell'erudito, che si ribellava all'indirizzo del tempo, anche quando tale indipendenza gli tornasse *magis opbrobrio quam gloriae et fructui.*

Il citato passo dunque non modifica punto il concetto che ci siam fatti sul poco amore di Svetonio per la scuola arcaicizzante.

E, se particolari arcaici — e non uno soltanto — ha la sua sintassi, questi vanno per lo più spiegati o come volgarismi o come arcaismi passati nella poesia, donde si estesero alla prosa (i caratteri della poesia estesi alla prosa sono una delle peculiarità dell'età argentea) (3).

Svetonio adunque che abbiam visto non fervente per la scuola nuova, non è nemmeno un arcaicizzante.

V.

Ed ora possiamo affrettarci alla conclusione. L'evidente compiacenza con cui esamina lo stile di Augusto, che è essenzialmente un contemperamento di tendenze (4); la condotta che

---

(1) *Inst. Or.*, VIII, 24 sgg.: *Cum sint autem verba propria, ficta, translata; propriis dignitatem dat antiquitas. Namque et sanctiorem et magis admirabilem faciunt orationem, quibus non quilibet fuerit usurus.*

(2) *Inst. Or.*, X, 1, 94.

(3) Questo ho mostrato nell'Introduzione e nello svolgimento del mio già citato studio sulla grammatica di Svetonio; qui non ne riassumo che le conclusioni.

(4) Vedi il framm. di lettera d'Augusto ad Antonio (*Aug.*, 86, 76, 13-17) già citato a pag. 12, n. 2, che par quasi voglia consigliare come stile ideale una saggia fusione dei due stili.

tiene di fronte alle due scuole, opposizione agli eccessi dell'una e dell'altra, savie concessioni ad entrambe (al qual criterio è anche tutta ispirata la sua grammatica ed il suo stile), ci lasciano scorgere in Svetonio un moderato, che attuò — consciamente o inconsciamente vedremo poi — una conciliazione fra le due scuole. Anche Tacito fu un moderato, ma più vicino fino a un certo punto alla scuola arcaica (1), benchè più lontano dalla classicità; mentre Svetonio (si permetta un contrapposto troppo simmetrico, ma istruttivo) fu in confronto di Tacito più vicino alla classicità che non all'età arcaica. Si può dire che l'arcaicismo di Svetonio in gran parte si fermava a Cicerone, mentre quello dei Frontoniani (ed entro certi limiti quello di Tacito) risaliva più in là.

E che Svetonio abbia avuto simpatia per Cicerone non è difficile dimostrare (2). La difesa ch'egli fece del *De Republica* in quel Περὶ τῆς Κικέρωνος πολιτείας βίβλιον: ἀντιλέγει Διδύμῳ, di cui non ci resta che la semplice testimonianza di Suida, difesa che potè essere anche (se pur non specialmente) dello stile, e le frequenti citazioni che fa di lui (sono 13 secondo il Macé), permettono di credere che avesse letto gran parte delle sue opere; come pure l'autorità che mostra di dare alla sua testimonianza, e il fatto abbastanza notevole che non l'ha mai contraddetto nè criticato, denotano il rispetto ch'egli ebbe per il grande prosatore, il quale entro certi limiti dovette essergli modello (3).

(1) Vedi Valmaggi, *L'arcaismo di Tacito*, pp. 21-22.

(2) Il Macé tratta ampiamente questo punto nelle pp. 293-99.

(3) Non conviene però esagerare, nè credere che gli sia sempre stato dinanzi come costante modello; l'orecchio e quel *quid* che noi diciamo il gusto nell'imitazione, si sostituiscono spesso al proposito deliberato. Così io non so se Svetonio rispetto al greco non abbia ceduto piuttosto a certo qual temperato amor di progresso, che non pensato a cercarne la legittimazione nell'uso Ciceroniano. E se giustamente il Macé osserva che, seguendo le tendenze ellenistiche del suo tempo, Svetonio non segue che una tradizione la quale parte da Cicerone, mi sembra invece che quasi gli sfugga dalla penna la frase in realtà poco felice " Suétone, l'admirateur " de Cicéron et d'Auguste, pouvait d'ailleurs croire de bonne foi qu'il con- " tinuait, sur ce point même, les traditions de ses modèles de l'époque " classique ". O che Svetonio non fa la figura di uno scrittorello novellino che s'attiene pedissequamente a un modello, fuor del quale per lui non c'è salvezza?

Un'osservazione fatta già dal Reifferscheid (1) e riprodotta dal Norden (2) ci pone qui sulla buona via. Nel *De viris illustribus* il primo oratore studiato è Cicerone, il primo storico Sallustio, gli altri scrittori anteriori probabilmente non sono nominati che alla sfuggita nella prefazione. Quest'osservazione è importantissima, perchè ci mostra entro quali limiti egli chiudeva lo studio della letteratura, quali erano per lui gli autori *idonei* della prosa, specialmente in quel tempo in cui gl'antichissimi cominciavano a diventar di moda. Così il nostro autore è collocato al punto di vista di Quintiliano, per il quale ciò che v'è prima di Cicerone non ha che valore storico (3). Ed a Quintiliano Svetonio si può realmente accostare. Di criterî equanimi, egli non segue decisamente nè l'una nè l'altra scuola, ma nel fatto partecipa d'entrambe, fuggendo d'entrambe le esagerazioni; quanto può s'attiene a Cicerone. Se ciò nonostante il suo stile è più lontano dai classici che non quello di Quintiliano, non è colpa sua, ma del mezzo secolo che da Quintiliano lo separa, nel quale gli opposti sforzi di entrambe le scuole giunsero a un risultato comune: quello di allontanare sempre più dai classici la prosa latina.

Come e perchè possa esser giunto Svetonio alla conciliazione delle due scuole, sarebbe studio di psicologia letteraria non privo d'interesse. Questione certo spinosa, come quant'altre di tal genere, potendosi al medesimo fatto assegnare diverse spiegazioni. Nel caso presente alcuno vorrà riferirsi a moderazione ed a spirito genialmente equilibrato, che faceva rifuggire il nostro autore dalle esagerazioni di qualunque scuola. E non a caso ho voluto qui scrivere la parola " genialmente ", perchè della genialità di Svetonio molto s'è detto, ma non tanto che non valga la pena di dirne qualche cosa ancora. Il Macé specialmente, innamorato del suo autore, ripete spesso la parola *geniale*, e ci dipinge il biografo che ama la sua lingua e prova diletto nell'udirne la bella armonia (quindi la prosa metrica, di cui si trovano in lui le tracce), e che " in questa sinfonia s'è *rassegnato* a intercalare, con la coscienziosità di un erudito moderno,

(1) *Quaestiones Suetonianae,* già citate, p. 406 e 422.
(2) Op. cit., p. 388, n. 1.
(3) Vedi retro p. 4, n. 2.

citazioni testuali; anche se queste rendessero meno armoniosa la fine del periodo „ (1). In realtà, con tutto il rispetto a chi ha studiato con tanto amore il suo argomento e il suo autore, credo che a Svetonio questa rassegnazione non sia costata troppo sacrificio. Svetonio non fu certo uomo privo di una qualche genialità; io non saprei esser d'accordo col giudizio un po' troppo grave che ne dà E. Thomas nella sua recensione del Macé (2), io non saprei dirlo un pedante; ma — fatta questa riserva — credo di non errare affermando che la genialità non fu certo fra le più caratteristiche doti del nostro autore. Carattere calmo, riflessivo, un po' freddo, non ebbe vedute troppo ampie, nè fu uomo da spinger lo sguardo tropp'oltre la cerchia dei suoi studi e delle sue ricerche, ispirate da amore erudito e talvolta anche dalla sola curiosità, in lui innata (così si spiegano gli aneddoti delle sue biografie, frutto spesso di pettegolezzi e di scandaluzzi privati). Lo spirito grammaticale (3) — anche se proprio Svetonio non insegnò grammatica — pervade tutta la varia enciclopedica opera sua. Si osservi il metodo minuzioso e talvolta un po' pedestre della sua storia (4), la ricerca del vero e l'amore del documento, sia pure inteso entro certi limiti (5),

(1) Macé, pp. 398-99.

(2) Nella “ Revue critique „, XXXV, 168, in una nota dice infatti che a nessun autore latino conviene di più l'epiteto di autore pedantesco in tutti i sensi (*nimium curiosus*): senza contare poi che l'agg. latino *curiosus* non mi pare che ci porti sempre al significato di *pedante*, come lo intendiamo noi moderni e come mostra ben chiaramente di intenderlo il Macé.

(3) Ed intendiamo pure lo spirito del *grammaticus*, non del *grammatista*, l'erudito, non il pedante; l'*absolute doctus*, non il *mediocriter doctus* (come Svetonio stesso distingue nel *De gr.*, 4, 259, 2).

(4) Il Boissier nella già tante volte citata recensione (p. 77) afferma che nella composizione della sua storia, più che vedervi l'effetto del *grammaticus*, dobbiamo scorgervi l'inaugurazione della nuova storia aneddotica che finirà per prevalere sulla grande storia. D'accordo; ma forsechè Svetonio non fu indotto a scegliere — appunto perchè amante di grammatica — una forma di storia più consona all'indole sua che non fosse la storia retorica di Tacito?

(5) Non bisogna infatti esagerare (come pare faccia il Macé) su questi pretesi studi, documenti e ricerche d'archivio che avrebbe fatto Svetonio; poichè egli potè attingere ai pettegolezzi dell' alta società (in mezzo alla quale l'amicizia di Plinio sembra indicare che ebbe accesso), come

la freddezza che mantiene davanti ai momenti più grandiosi e più tragici di quella grandiosa e tragica storia che fu l'impero romano (1), il difetto stesso di colorito poetico, che si trova in molto minor copia che negli altri storici (2).

Non dunque la genialità dovette far di Svetonio un conciliatore delle due scuole, ma piuttosto un certo equilibrio di mente (e qui non si potrebbe non dar ragione al Macé), e più ancora quella sua freddezza stessa di carattere, effetto di un certo predominio delle facoltà razionali sulle sentimentali. Il quale predominio certo non poteva far di lui il seguace della folla e delle tendenze dominanti, e nemmeno l'uomo dei partiti. Egli non sembra in politica essere stato veramente di nessun partito; si cercherebbe invano nelle sue opere qualche cosa che somigli a una professione di fede (3). Uomo senza entusiasmi e senza sdegni, riferisce i vizi e le virtù dei suoi Cesari con l'indifferenza propria di chi osserva oggettivamente la vita e il mondo e si diverte al suo spettacolo (4). O che quest'uomo, cui i partiti politici lasciano freddo, non doveva anche guardare con certa indifferenza e, diciamo pure, con certo disinteresse la lotta accanita delle due scuole, pensando che non fosse punto necessario il seguirne esclusivamente una, ma che si potessero assai bene conciliare insieme?

La qual domanda lascio senza risposta; chè, quand'io avessi affermato (e con esempi) di sì, altri potrebbe (con egual sicurezza e con egual messe d'esempi) risponder di no. Certo la questione farebbe qualche passo, se potessimo determinare quel tanto d'inconscio che accompagna — in questo caso come in ogni atto umano — il proposito deliberato; chè questa conciliazione potrebbe essere stata voluta od esser stata effettuata in gran parte inconsciamente. E forse a questo giungeremmo,

---

spesso i libelli satirici poterono riuscirgli più utili che non i documenti di archivio (G. Boissier, *Tacite*, Paris, Hachette, 1903, p. 96. — E. Ciaceri, Recens. del libro del Macé, in " Riv. stor. ant. ", VI, fasc. I, p. 135).

(1) La drammatica storia della fine di Vitellio è chiusa da Svetonio con un'osservazione grammaticale: *Tolosae nato, cui cognomen in pueritia Becco fuerat: id valet gallinacei rostrum* (*Vit.*, 18, 223, 15-16).

(2) Anche di questo m'occupai in un apposito capitolo del mio lavoro.

(3) Vedi Macé, p. 85. Boissier, già cit. recens., p. 75.

(4) Boissier, *Tacite*, p. 21.

se maggiori avanzi delle sue opere fossero pervenuti sino a noi, e specialmente quelli che più direttamente toccano la critica letteraria.

Ma forse, quando vi fossimo giunti, avremmo fatto opera di curiosità piuttosto che reso un qualche contributo agli studi. A me basta di aver raccolto qui tutto quel tanto che ci può mostrare in Svetonio un seguace di Quintiliano, un moderato conciliatore delle due scuole che per tanto tempo si contrastarono il campo in Roma. La conciliazione esiste di fatto, e la troverebbe non meno evidente chi per poco s'addentrasse nello studio della grammatica e dello stile.

La Cronaca di Filippo da Castel Seprio.

Nota del Socio FEDELE SAVIO.

È noto come nei secoli andati, quando la critica storica non esisteva, e la storia consideravasi dai più qual parte della rettorica, fosse generale l'andazzo di attribuire le origini delle città e delle famiglie più illustri a personaggi che avessero un nome celebre nella storia.

Milano anch'essa ebbe i suoi storici romanzieri, che lavorando di fantasia seppero narrare le vicende e tessere la serie dei suoi primi fondatori e re, cominciando nientemeno che da Noè e venendo sino ad Augusto.

Lo scrittore più noto, che ci ha conservata in gran parte questa storia romantica delle antichità milanesi, è il domenicano fra Galvano Fiamma, che tra il 6° e il 9° lustro del secolo XIV compose non poche opere storiche riguardanti Milano. Queste, massime per la parte antica di cui ora discorriamo, sono semplici compilazioni, anzi piuttosto spogli e quasi direi plagi di opere anteriori, alle quali per lo più Galvano non aggiunse di suo che certi ragionamenti scolastici, più degni talora d'un sofista, che d'un filosofo o storico serio. Siffatto giudizio, che intorno a Galvano diede già parzialmente il chiar. prof. Novati, dimostrando come la sua *Cronica extravagans* non sia altro che

una rifusione dell'opera *de Magnalibus urbis Mediolani* di Bonvesin della Riva (1), io non ho difficoltà di estenderlo a tutte le altre opere storiche del Fiamma (eccetto forse pel periodo posteriore al 1200 incirca), e credo che di mano in mano che si andranno scoprendo ed esaminando le cronache antiche, usufruite da Galvano, esse mi daranno ragione.

Ma non è di Galvano, che intendo ora discorrere, nè del suo valore storico, bensì d'un autore, da cui Galvano attinse, se non tutti, certo la parte più considerevole de' suoi racconti favolosi intorno a Milano antica.

È questi Filippo conte di Castel Seprio (così lo chiama Benzo di Alessandria (2), del quale in un testo, che mi fu prima cortesemente comunicato dal mio buon amico e collega P. Leonida Grazioli, e che poi io stesso potei verificare in fonte (3), Galvano afferma che scrisse diligentemente dei primi re di Milano: *Et dicit Philippus de Castro Seprio, qui de primis regibus istius civitatis diligenter conscripsit, quod iste Ianus Subres, primus nostrae civitatis conditor, reliquit ex XX uxoribus XXX filias et unum filium, qui dictus est Marchomedeus, quem sui regni haeredem constituit.*

Finora fu creduto che opera di Filippo di Castel Seprio fosse una cronaca, comprendente le vicende di Milano prima dell'èra volgare, contenuta nel codice trivulziano I, 218, scaf. 85, pal. 1 (4), cui tien dietro una serie di avvenimenti riguardanti Milano, per lo più di indole religiosa, dal principio dell'èra volgare sino all'anno 1271, serie disposta in forma di annali.

Questi ultimi furono usufruiti dal Giulini e creduti da lui e citati (eccetto una sola volta che mostrò dubitarne) come opera di Filippo di Castel Seprio.

Ma in un lavoro, che il suddetto P. Grazioli farà presto di pubblica ragione, egli dimostrerà con argomenti, a mio credere, assai forti e persuasivi, che gli annali, creduti sin qui di Filippo

---

(1) Bullettino dell'Istit. Stor. ital. „, n. 20, 1898, p. 46.

(2) “ Bullettino dell'Istit. Stor. ital. „, n. 9 (1890), pag. 30, *circa medium*.

(3) Nel codice A. 275 inf. dell'Ambrosiana a Milano.

(4) Una copia moderna del quale si trova nella biblioteca ambrosiana nel codice S. Q. I. 12. La cronaca, ma senza gli annali, si trova pure nel codice ambrosiano C. S. IV. 18 e nel codice AD. XII. 32 di Brera.

di Castel Seprio, sono opera di Goffredo di Bussero, vivente alla fine del secolo XIII e più noto per un'opera statistico-storica sulle chiese della diocesi di Milano, e sui Santi, a cui esse sono dedicate.

Quanto alla narrazione o cronaca del periodo anteriore alla nascita di Cristo, che nel codice trivulziano precede gli annali, tanto il P. Grazioli, come lo scrivente, avendola entrambi per proprio conto collazionata col *Manipulus Florum* di Galvano Fiamma, abbiamo trovato che, eccetto differenze di pochissimo peso, la pretesa cronaca di Filippo è nient'altro che una parte del *Manipulus Florum*, la parte cioè che va dal capo VIII del *Manipulus* sino a una porzione del capo LI (1).

Essa inoltre è posteriore a Galvano, poichè là dove finisce di parlare dei privilegi concessi dai Romani ai Milanesi (che è il racconto contenuto nel capo XXIII del *Manipulus*), la detta cronaca omette tutto il contenuto dei capi XXIV e XXV del *Manipulus*, rimandando appunto a Galvano con queste parole: *Et multas alias gratias et privilegia et beneficia Romani civitati Mediolani concesserunt similia Romanis, ut in cronica Galvagnana latius scribitur* (2).

Infine non si potrebbe dire con troppa esattezza che questa cronaca tratti diligentemente dei primi re di Milano, come, secondo il Fiamma, ne trattava la vera cronaca di Filippo, tanto più se la si confronti con un' altra opera, la *Politia Novella* di Galvano Fiamma, che, secondo ogni probabilità, riproduce la storia di Filippo, come tosto dirò.

Onde non è più il caso di prenderla in considerazione, nè di riscontrare in essa l'opera genuina di Filippo di Castel Seprio.

Questa perciò ci diventa ignota. Tuttavia considerando che in parecchie biblioteche pubbliche, per es. di Parigi e di Vienna, e in parecchie private, particolarmente a Milano, esistono opere di scrittori dei secoli XIV-XVI non ancora esplorate, non mi farebbe meraviglia che un dì o l'altro qualche assiduo ricercatore riuscisse a scovare l'opera integra e autentica di Filippo. Onde

(1) In Muratori, *Rer. It. Script.*, XI. Dalla colonna 543 in principio, sino alla colonna 574, sul fine, alle parole: *Quo mortuo, Odoacer..... multa praelia (magna victoria) commisit.*

(2) Così nel codice ambr. C. S. IV. 18, che preferisco al trivulziano, perchè più antico.

tanto più mi faccio animo a pubblicare queste osservazioni e raffronti, nella speranza di mettere altri sulla via del desiderato e desiderabile rinvenimento.

Se non tutta, una parte almeno notevole della cronaca di Filippo, io la credo rifusa, od usufruita forse di peso, da Galvano nell'opera, cui egli diede il titolo strano di *Politia Novella*, e che comprende appunto la storia di Milano antica, cominciando dalla sua fondazione per opera di Subres pronipote di Noè, fino ad Augusto.

A differenza del *Manipulus Florum*, dove dalla fondazione della città (capo VIII) fino all'invasione dei Sicambri, non si parla più di Milano che incidentalmente, per occasione della venuta in Italia di Giano (capo IX) e di Saturno (capo X), nella *Politia Novella* si fa passare in rassegna tutta una serie di re discendenti dal mitico Subres, che di padre in figlio si succedono nel dominio di Milano. Essi sono: Marchometes (capo 19); Mitroneo, che (*secundum Karinum*) regnò 50 anni; Iullius, che regnò (*secundum Karinum*) per 90 anni; Archilao, Manasen, e finalmente Athis, nel quale si spense la dinastia di Subres (*in quo tota progenies Iani Subris regis, primi fundatoris istius civitatis, finita est*). Indi Milano vien distrutta dai barbari, e giace nello squallore della ruina e dell'abbandono, finchè Mesapo re dei Tusci la riedifica e la nomina Mesapia (capo 30).

Poscia, dopo il regno del figlio Mesapo II (capo 39), Milano è di nuovo distrutta da Palladiano di Troia. Succede una 2ª riedificazione di Milano per opera di Calabro re barbaro, cui nel regno succede Mesenzio (capo 47), che viene ucciso da Enea.

Indi giungono in Italia i Sicambri per la prima volta. Sbollito il furore di costoro, regnano sovra Milano Ascanio I, Ascanio II, Giulio I, Giulio II, Abyda, Syscech (capo 66); poi di nuovo ritornano i Sicambri. Passa eziandio quest'altra tempesta, e Milano cade sotto il dominio di principi, che portano titolo d'imperatore e le insegne imperiali, poichè, dice Galvano, regnarono contemporaneamente in Italia ed in Allemagna. Questi imperatori, i cui nomi non si trovano certo nelle cronologie composte dai moderni, come neppure negli scrittori anteriori al secolo XIII, sono Elymach (capo 69), Gemebondo, Albanico, Astasio. Questi muore senza prole, ma per buona sorte dello storico, che non ha così il dispiacere d'incontrare delle lacune

nella sua narrazione, proprio allora giungono a tempo gli Edui con FALARAMONDO, che stende il suo scettro sovra Milano, e morendo lascia il regno al figlio RECHO. S'inaugura poscia una nuova dinastia, di cui è capostipite BRENNO, il cui figlio AGATHES riedifica Milano (capo 103), ch'era stata distrutta da Brenno. Per tal modo regnano BRENNO I, BRENNO II, RUTILAO, FALARAMONDO, BRIDOMARO, il cartaginese ALMIGAR e CUMIANE (capo 143), ed infine dopo la conquista romana i re di stirpe romana MARCELLO, GABINO, LUCIO, CAIO (cioè Cesare il dittatore) ed OTTAVIANO (cioè Augusto).

Noi non possiamo ora affermare con assoluta certezza che tutte le dette serie di re di Milano siano uscite fuori esclusivamente dalla fantasia di Filippo, e non si debbano ad alcun altro, almeno in parte, per es. a quell'ignoto Carino, che seppe dire con tanta esattezza gli anni di regno di Mitroneo e di Giulio. È tuttavia molto probabile, che qui Galvano, seguendo il suo metodo di espilare o per dir meglio di copiare di peso gli autori che gli stavan davanti, si sia più che d'altro servito della cronaca di Filippo, cui egli dà la gloria di aver trattato con diligenza dei primi re di Milano.

Ma ciò che parmi doversi ad ogni modo attribuire alla potenza creatrice di Filippo sono quei favolosi racconti che si vedono inventati con lo scopo di esaltare il villaggio o castello di Castel Seprio, di cui Filippo era signore, o almeno da cui prendeva nome e titolo di conte (1). Tal'è per es. la notizia che il Fiamma ci dà del re MARCHOMETE, che tenne sua dimora nel monte di Castel Seprio: *qui in monte Castri Seprii habitavit* (capo 19 della *Politia Novella*). Tal'è l'altra che il Seprio fosse già fortificato prima della fondazione di Subria (preteso nome primitivo di Milano). Secondo una cronaca cremonese, dice il Fiamma, la regione, dove fu eretta la nuova città, era coperta di una densa selva; ma attorno vi stavano dei castelli ben fortificati e dei ponti sul Ticino e sull'Adda: *Et concordat Philippus in Chronicis, qui videtur dicere quod Castrum Seprium erat communitum* (capo 10).

(1) Castel Seprio, ora piccolo villaggio sulla destra dell'Olona, non molto lungi da Varese, al sud, fu già un castello molto importante nel Medio Evo e capo della contea omonima che si estendeva a nord-ovest di Milano.

Alla stessa glorificazione del Seprio io ritengo sia diretta la prima di tutte le favole relative alle antichità di Milano, cioè l'esistenza del fantastico Giano Subres, figlio di Tubal, e l'esistenza della non meno fantastica città Subria, fondata da lui.

In effetto, Galvano nel capo VI del *Manipulus Florum* afferma (copiando da autori precedenti) che Subres diede il nome alla città Subria, e questa a tutta la regione, aggiungendo che al presente una parte del comitato milanese si dice comitato Seprio, quasi altri dicesse Subrio: *Unde usque hodie quaedam pars nostri Comitatus Seprium dicitur, quasi Subrium*. E più sotto, nel capo VII, ripete più espressamente che *Seprium* e *Subrium* sono la stessa cosa: *Item Castrum Seprii, in quo fuerunt Comites praeclarissimi, a quo Castro tota contrata Seprium sive Subrium appellatur*.

Che poi Galvano riferisse qui pensieri e fors'anche parole di scrittori più antichi si ricava evidententemente da Benzo d'Alessandria, che verso il 1328 compose un'enciclopedia storica, tuttora in massima parte inedita (1). Benzo, notaio del vescovo Lambertengo di Como (1295-1325) e poi cancelliere degli Scaligeri, essendo dotato di senso critico assai superiore a quello di Galvano e di altri contemporanei, discute di proposito la questione dell'esistenza di Subria e del suo fondatore Subres, ch'egli dice ignota a tutti gli antichi scrittori, e messa fuori solo da alcuni moderni. Ivi pure egli parla delle relazioni di etimologia tra Subria, o meglio Insubria, e Seprio, probabilmente perchè la trovò affermata dagli scrittori medesimi, di cui confuta o mette in dubbio le asserzioni.

" Del tempo della fondazione di Milano, dice Benzo, e dei suoi fondatori, alcuni moderni (*nonnulli moderni*) scrivono cose che a mio giudizio, anzi evidentemente, differenziano dai racconti, che ci trasmisero gli autori più antichi ed autorevoli. " Indi, soggiunto ch'egli non imiterà costoro nel vano proposito di procurar gloria alle città loro aumentandone arbitrariamente l'antichità, viene a confutare i loro detti, che prima riferisce.

(1) Sta nel codice B. 24 inf. dell'Ambrosiana. Copie parziali di esso stanno nel cod. O. 8 del secolo XV dell'Ambrosiana, e nel cod. AD. 14, 55, del secolo XVII a Brera. Il Ferrai pubblicò tutto il capitolo riguardante Milano, nel " Bullettino dell'Istit. Stor. Ital. ", n. 9, pag. 15 e seg. Si veda la Nota in fine della presente Memoria.

Ma meglio sarà sentire le parole stesse di Benzo:

Prius tamen inseram breviter eorum dicta sive scripta, qui nituntur ostendendo probare Mediolanum vetustate proecellere urbem Romam, non ut derogem antiquitati urbis huius, sed ut tenebris erroris lucem erogem veritatis. Dicunt enim quod Noe, conscensa rate, una cum filio suo Jano Biffronte et alio Jano bicorporeo filio Jafet et maxima populorum multitudine in Italiam veniens, venit ad Camensem filium Nembroth gigantis pronepotis Noe, qui paterno mandato iam transfretaverat, et ubi nunc est Roma elegeret. Audiverat enim Nembroth (a) Jano filio Japhet, cunctas mundi monarchias sub italico imperio annullari et constituendam fore civitatem in Italiam orbi dominaturam. Noe, cum venisset ibi iuxta locum ubi nunc Roma, civitatem construxit et eam ex suo nomine appellavit, in qua et laboris et vitae terminum dedit, cum regnasset in Italia annos CLII. Hoc autem testari dicunt Excodius (1), et in Graphia aurereurbis contineri (et) Martinus Polonus. Interea cum Noe per ora maris Romanorum ingrederetur, ex parte altera per ora maris Adriatici sive Veneciarum Tubal, filius Japhet in Italiam venit, et in ripa maris civitatem construxit quam a *ra*tibus et *na*vibus et *ven*to appellavit Ravennam. Filius vero Tubal nomine Subres, planum Lombardie ingressus, civitatem construxit, et ex suo nomine Subriam denominavit, a qua et caetera regio circumposita dicta est Subria. Haec autem ex chronicis Sicardi Cremonensis episcopi haberi dicunt, atque etiam ex Eutropio et Papia evidenter colligi (2).

Di Escodio, che è un autore già citato dalla *Graphia aureae urbis Romae* (3), nulla si conosce, ma quanto alla *Graphia* stessa ed a Martin Polono, ai quali si poteva aggiungere Pietro Comestore nella sua *Historia Scholastica*, composta verso l'anno 1188, è vero ch'essi hanno quasi tutto il racconto suddetto della venuta di Noè in Italia, di un suo figlio chiamato *Ionito* o *Ianus*, di Camese e simili altre favole.

Ma niuno di essi parla punto di Subres, e neppur Sicardo di Cremona nella sua cronaca. Il Ferrai che dapprima aveva messo la favolosa esistenza di Subres tra i racconti della *Graphia*, di Sicardo e di Martin Polono, poco appresso, trattandone più di proposito, dovette confessare che nella *Graphia* (e così

(1) Variante di un codice, presso il Ferrai, *Excodius Pedianus*.

(2) Loc. cit., pag. 16-17.

(3) Presso Ozanam, *Documents inédits pour servir à l'Histoire littéraire d'Italie*, Parigi, Lecoffre, 1850, pag. 155. L'Ozanam lo identificò con Esiodo; la variante suddetta *Excodius Pedianus* fa pensare ad Asconio Pediano, che nel I sec. di Cr. commentò le orazioni di Cicerone.

poteva dire di Martin Polono) non v'è motto di Subres. Quanto a Sicardo affermò che il racconto di Subres *con ogni probabilità leggevasi nel testo di Sicardo, che è andato smarrito* (pag. 125). Ma tutte le probabilità si riducono alle parole di Benzo, riguardo alle quali il Ferrai stesso non potè a meno di essere colpito dalla *curiosa espressione*, usata da Benzo: *haec autem ex chronicis Sicardi haberi dicunt*. Quest'espressione, a mio credere, significa che Benzo non trovava quel racconto nelle opere storiche di Sicardo. Queste sono note, e della cronaca finora fu stampata soltanto la parte posteriore ai tempi di Cesare e di Pompeo (1). Persona intelligentissima di studi storici, che per me consultò il manoscritto di Sicardo, che si conserva nella regia biblioteca di Monaco di Baviera, e contiene l'intera cronaca, mi assicura che ivi non si fa menzione di Subres, nè di Subria, nè della fondazione di Milano, e che di Tubal figlio di Iafet si dice solamente: *ex quo iberes et ispani et itali* (2).

Dal qual silenzio di Sicardo, e degli altri autori più antichi di lui (cioè la *Graphia* e Pietro Comestore), mentre si conferma, indirettamente almeno, che inventore di Subres e della città Subria fu Filippo di Castel Seprio, se ne trae eziandio ch'egli visse posteriormente a Sicardo di Cremona, se, come pare dedursi da Benzo, egli lo citava in appoggio di qualcuna delle sue invenzioni.

Ne verrebbe quindi che Filippo, al quale mi pare evidente che Benzo alluda, visse dopo Sicardo, e quindi dopo il 1212.

Segue poscia Benzo:

> Subiungunt etiam quod haec civitas Subria per Bellovesum Gallorum ducem postmodum raedificata, dicta est Mediolanum, et hoc V. Titi Livii (libro) contineri, sicque probari manifeste asserunt Mediolanum fuisse conditum antequam Roma conderetur per annos VIIIICXXXII seu fere mille, Subrium pro Mediolano ponentes.

Dopo riferite tutte queste varie asserzioni (che poi Galvano Fiamma riportò anch'egli, per es. nel *Manipulus Florum*, capo VIII), Benzo fa le più alte meraviglie, che tutti quei racconti siano stati ignoti a tanti scrittori antichi ed anche ad alcuni moderni, in particolare a Vincenzo di Beauvais, come

---

(1) Dall'Holder-Egger, nei *Mon. Germ. Hist. Script.*, XXXI.

(2) Fol. 12 verso, col. 1ª del codice 314.

eziandio a Dazio (ossia Landolfo il vecchio) *qui de gestis Mediolanensium scripsit* e a Paolo Diacono.

Quanto dice qui Benzo di Landolfo è verissimo; ed io aggiungo che egli non parla nè di *Subres* nè della città *Subria* neppure in quella descrizione storica di Milano, che forma il capo I della così detta *Datiana Historia*, la quale altrove ho provato essere opera sua (1), e dove, secondo il suo intento di narrare a grandi tratti la storia antica di Milano, avrebbe dovuto parlarne. Onde il silenzio di Landolfo conferma che l'invenzione di *Subres* e di *Subria* è posteriore al 1100, quando Landolfo scriveva.

Essa è posteriore eziandio alla cronaca di Daniele. Questa cronaca, pubblicata testè dal prof. Cinquini (2), piena anch'essa di favole, riguarda veramente il periodo posteriore all'anno 606, ma per incidenza si esalta Milano, *quae cognata Romae ab antiquis Augustis cognominata est* (3). Ora se già a quel tempo fosse stato scritto che Milano era stata fondata da un pronipote di Noè, l'autore della cronaca non avrebbe taciuta questa gloria milanese. L'invenzione quindi della città Subria e del suo fondatore Subres, è posteriore a questa cronaca, la quale fu certamente composta dopo l'anno 1167, che in essa è citato.

Seguiamo ancora Benzo:

> Quodque etiam validius est, in toto Veteri et Novo Testamento, aut in Historiis quae Scholasticae dicuntur, aut in aliquibus Ecclesiae doctorum glosis aut postilis non legitur, quod Noe transiverit in Italiam, aut quod filium habuerit nomine Janum, vel quod civitatem, maxime sibi aequivocam, alicubi aedificaverit, et quod Japhet habuerit filium (doveva dire *nepotem*) nomine Subrem. Unde igitur hoc habuerit Sicardus, sive Escodius scriptores novissimi, vel illius Graphiae aureae compilator, Deus novit, ego ignoro.

Quindi, dopo aver discusso sul tempo in cui i Galli vennero nell'Italia superiore ed ammesso che l'anno stesso della loro venuta fabbricassero Milano, soggiunge, che pure concedendo che prima nel luogo stesso fosse esistita la città Subria, non ne verrebbe che questa fosse più antica di Roma.

---

(1) Nella " Rivista di Scienze storiche di Pavia ", anno 1904.

(2) Nella " Miscellanea di storia e cultura ecclesiastica ", Roma, 1906, fascicolo di febbraio, pagg. 168-189.

(3) Ibid., pag. 173, lin. 238.

Posito praeterea quod in loco quo Galli Mediolanum condiderunt, fuisset antea Subria, vel alia civitas stans vel eversa, non propterea sequeretur quod Mediolanum antiquius esset Roma, cum eadem ratione antiquitatis Subria satis (forse *esset*) contemporanea. Non tamen esset prioritas illa quam asserunt, seu mille ferme annorum, cum non nisi transisse dicant CLII annos ex quo Janus, defuncto Noe, regnum accepit et Janiculum condidit. Sed si credatur assertis contemporanea fuit ipsi Subriae alia civitas, quam ut refert Martinus Polonus in chronicis, traducere se dicens ab Excodio, condidit Noe in loco in quo nunc est Roma et a suo nomine denominavit. Quod autem Mediolanum fuerit in Subria regione, non quod Subria fuerit civitas, multi produnt auctores, maxime praenominati, Titus (Livius), Orosius et etiam Eutropius... Patet igitur quod multa erant Insubrium oppida sive civitates, inter quas eminebat Mediolanum, et forte adhuc presens comitatus Mediolani, Seprium dictum, nomen inde sumpsit vel nomen retinuit mutata litera *u* in *e*.

Da queste ultime parole di Benzo risulta, a mio credere, che l'autore, a cui egli specialmente mirava, faceva molto risaltare nella sua opera l'analogia del Seprio colla fantastica Subria, analogia che Benzo accetta in parte, in quanto il nome Seprio ha qualche rassomiglianza col nome di *Insubria*, vero e storico della regione dove sorse Milano.

Non sappiamo fin dove si estendesse l'opera di Filippo di Castel Seprio. Però, partendo dal criterio che a lui si devano ascrivere i racconti favolosi, dai quali riceve qualche gloria il Castel Seprio, parmi certo che della narrazione di Filippo facesse parte quanto il Fiamma narra dei due re d'Italia, assolutamente favolosi, Diocleziano e Massimiano, vissuti negli ultimi tempi dell'impero d'Occidente, cioè poco prima di Odoacre (*Manipulus Florum*, capo LI). Ivi si dice che dopo Diocleziano gli Italiani *elegerunt sibi in regem Maximianum de Castro-Seprio natione Mediolanensem, virum nobilem et potentem*.

Ma in una cronaca milanese inedita del secolo XIV, di cui forse discorrerò altra volta e la quale in molti punti sembra rappresentar meglio il testo della cronaca, ora perduta, di Filippo, Massimiano è detto *de Comitibus Castri Seprii*, cioè della stessa famiglia a cui Filippo apparteneva, nè solo lo si chiama *virum nobilem et potentem*, come nel *Manipulus* (pag. 574), ma *virum utique habilem* (forse *nobilem*), *potentem, strenuum in armis, probum et expertum, largum, benignum, viduarum et orphanorum*

adiutorem et defensorem, circa protectionem et defensionem subditorum vigilem et intentum, cioè un modello di sovrano.

Credo anzi che qui non si arrestasse la cronaca di Filippo, ma che a lui pure si devano tutti quei favolosi ed assurdi racconti che il Fiamma riporta sui re che seguirono il mitico Massimiano, fino ad Autari (capo LXVIII) ed a Teodolinda, dove la narrazione del Fiamma comincia a seguire le tracce di Paolo Diacono e lascia perciò di essere interamente fantastica.

Nota su Benzo d'Alessandria. — Il Ferrai intorno a Benzo d'Alessandria (*Benzo d'Alessandria e i cronisti milanesi del secolo XIV*, in *Bullett. dell'Istituto storico italiano)* raccolse molte pregevoli notizie, ma pur troppo unendovi non poche inesattezze, di cui rilevo qui le principali. Erra egli dicendo che " la maggior parte delle tradizioni favolose riferite dal Fiamma nel *Manipulus Florum*, nella *Chronica maior* e nella *Politia Novella* sono tolte da Benzo, libro XIV, capo 144 „. Il vero è che Benzo ricorda solo alcune di queste tradizioni, e le ricorda per confutarle o per metterle in dubbio, come i miei lettori possono vedere dai tratti di Benzo, che qui sopra ho riferito.

Erra pure quando fa di Benzo un sacerdote e frate francescano e gli attribuisce l'asserzione di essere stato sul monte Gelboe nel 1283, mentre quest'asserzione è di *Brocardus* (cioè di Burcardo del Monte Sion), le cui parole riferite testualmente da Benzo stanno non già nel libro V, capo 28, ma nel libro XIII, capo 25 (fol. 125 *recto* del cod. B. 24 inf.): *Nam testatur Brocardus in libro Descriptionis Terre Sancte..... Alia insuper vice dicit se dormisse per noctem in eodem monte sub divo cum aliis multis, qui fuerunt omnes infusi rore super modum. Istud accidit, ut ipsemet scribit, anno Dni MCCLXXXIII in festo omnium Sanctorum.* Alle quali parole Benzo osserva: *Huic testimonio utique credendum est, quia vir iste religiosus* (fuit) *et fideliter si relata vulgo de imprecationis David* (cioè quando Davide disse: *Montes Gelboe nec vos nec pluvia cadat super vos*) *veritate niterentur, in laudem Sacre Scripture sue Descriptioni avide inseruisset.*

Il Ferrai a questo erroneo scambio di persone forse fu indotto da una nota marginale di persona ignota, che al fol. 28 *r.* scrisse: *Brocardus Teutonicus de anno 1283, author huius operis, erat in monte Gelboe, prout in XIII libro de monte Thabor, cap. 29.* Lo scrittore stesso della nota pare si accorgesse dello sbaglio, poichè di sua mano cancellò le parole *author huius operis.*

L'osservazione suddetta di Benzo alle parole di Burcardo dimostra, per lo meno, improbabile, che Benzo fosse religioso,

come senza prove asserì il Ferrai, probabilmente interpretando male il testo del Fiamma, dove si dice: *Bencius Alexandrinus, notarius episcopi Leonis de Lambertenghis, ordinis Minorum*. La frase *ordinis Minorum* non deve applicarsi a Benzo, come fece il Ferrai, ma al vescovo Leone, che fu veramente francescano, come vedesi dall'Ughelli e dal Gams.

Quanto al tempo in cui Benzo compose la sua enciclopedia, il Ferrai dice (pag. 106), che gli accenni cronologici a fatti contemporanei, da lui trovati nell'opera di Benzo, non vanno oltre il 1316, e tosto ne reca in prova il passo, dove Benzo afferma che quand'egli scriveva, Genova già omai da due anni stava assediata *(secundo iam labente anno ex quo miserabiliter obsessa)*. Siccome l'assedio di Genova per parte dei Visconti e dei fuorusciti ghibellini durò dal principio d'aprile del 1318 al febbraio 1319 e poi di nuovo dall'agosto del 1319 al febbraio del 1323, è chiaro che le parole di Benzo si devono riferire al 1321 o almeno all'inverno 1319-1320.

Riguardo al testo, dove Benzo dice di Como, che *in ea gratum et quietum domicilium sum nactus, ad compilandum praesens opus et maiora alia, exacto iam fere septennio*, il Raina (art. *I canti intorno a Orlando e Ulivieri nel teatro di Milano* in *Arch. stor. lomb.* del 1887, fasc. I) ed il Ferrai, pag. 104, intesero le parole *maiora alia* di altre opere letterarie maggiori dell'enciclopedia, ossia del *presens opus*. Non ci è nota altra opera di Benzo all'infuori di questo primo volume della sua enciclopedia. Onde mi parrebbe che, supponendo un *ad* prima di *maiora alia*, si possano intendere di opere non letterarie, ossia di affari pubblici, proprî del suo ufficio di notaio del vescovo di Como.

Nè punto apparisce dal testo suddetto quel che vi scorse il Ferrai (pag. 104), che Benzo dimorò a Como *per lunghi anni*, e vi passò *gran parte e forse la migliore della sua vita*, poichè nel testo manca qualsiasi designazione di tempo. Dal testo risulta solo che Benzo dimorò a Como e vi compose la sua opera, la quale pubblicò sette anni incirca dopo che più non soggiornava a Como. Che se la composizione fu, come dissi, nel 1321, la pubblicazione sarebbe avvenuta nel 1328. Quest'ultima data permetterebbe di attribuire a Benzo il passo, dov'egli afferma che Padova gemeva allora per la perdita della libertà, essendo venuta sotto il dominio di Cangrande (il che fu nel settembre del 1328). Sarebbe questo un passo aggiunto da Benzo, quando pubblicava l'opera sua. Esso d'altra parte conferma le due date della composizione e della pubblicazione.

Il Ferrai che pure attesta (pag. 108 in nota) d'aver visto in fonte nell'Archivio di Stato in Venezia i *Commemoriali della repubblica*, e di avervi letto *più volte* il nome di Benzo, non ebbe cura di dirci quando cominci a constare la presenza di

Benzo nell'ufficio di cancelliere degli Scaligeri, e quando cessi la sua memoria.

Nel documento che il Ferrai cita dal regesto del Pedrelli, del 23 giugno 1325, il doge di Venezia s'accorda con Cangrande della Scala che i Veneziani per le merci loro in Verona pagheranno denari 12 il carro ad *Alessandro de' Benzi*. Qui il Ferrai pare leggesse Benzo d'Alessandria, ma a ragione? Non credo, tanto più che l'originale ha proprio *Alexandri de Bencis*, come me ne assicura il sig. Giuseppe Dalla Santa dell'Archivio di Stato di Venezia, che per me vide il documento e me ne diede notizia, del che me gli dichiaro gratissimo. Onde, considerando pure l'improbabilità per non dire l'impossibilità che un cancelliere di Cangrande potesse dire che Padova gemeva sotto la dominazione degli Scaligeri, m'induco a credere che Benzo restasse col vescovo di Como Leone fino alla morte di costui il 10 luglio 1325 e non divenisse cancelliere di Cangrande che tra il settembre del 1328 e il 22 luglio seguente, che fu il giorno della morte dello Scaligero.

Quanto alla cessazione di Benzo dall'ufficio di cancelliere, il Ferrai, spogliando lo stesso vol. X del Verci, *Storia della Marca Trivigiana*, ch'egli cita, vi avrebbe potuto trovare accennati due documenti, dai quali risulta che il 2 gennaio 1333 era notaio di Mastino della Scala Teobaldo o Teobaldino del fu maestro Daniele (pag. 176, doc.), e che il dì 8 luglio del 1335 questi era non più solamente notaio, ma notaio e cancelliere (ib., pag. 90 del testo) del medesimo Mastino II.

Al documento del 18 ottobre 1329, che il Ferrai citò dal Verci (e questi prese dal Biancolini, *Chiesa di Verona*, dove si trova pure il nome errato *Boncium* in luogo di *Bencium*) posso aggiungere un documento del 17 agosto, Verona 1329, da cui s'impara il nome di famiglia di Benzo, poichè questi ivi si dice: *Bencius Chiona, natione alexandrinus, civis Veronensis, publicus imp. auctoritate notarius, dictorum DD. de la Scala officialis.* Il documento sarà tra poco pubblicato dal chiar. prof. Cipolla, che gentilmente me ne diede comunicazione e che perciò vivamente ringrazio.

Tralascio altre inesattezze di minor conto, che si trovano nel Ferrai, per es., che Bonincontro Morigia afferma Benzo essere stato notaio e gli dà il titolo di *ser*, mentre nel testo del Morigia, riportato dal Ferrai stesso, a pag. 101, non vi si trova nè la qualità di notaio, nè il titolo *ser*.

Un'ultima inesattezza meritevole di correzione. La parte che ci rimane dell'enciclopedia di Benzo non comprende solo 18 libri, ma 24. Ecco l'indice del loro contenuto:

I-XI. La Storia Sacra e la Storia degli Ebrei fino alla distruzione di Gerusalemme.
XII. Delle tre parti del mondo, Europa, Asia, Africa.
XIII. Dei monti e dei fiumi e dei popoli orientali. Maroniti, Armeni, Greci, Nestoriani, Giacobiti e Georgiani.
XIV. Delle città, loro origini e principali vicende.
XV. Storia dei Macedoni.
XVI. Di Alessandro Magno.
XVII-XIX. I successori di Alessandro in Macedonia, in Egitto e nella Siria.
XX-XXI. Storia antichissima della Grecia.
XXII. Guerra di Troia.
XXIII. Storia di Achille.
XXIV. Degli Dei, Semidei e Sapienti del mondo antico: loro detti e vicende.

Finito il 24°, nel codice, al folio 283 *recto*, sta scritto: *Explicit historia de moribus et vita philosophorum, quae est ultima primi voluminis.*

L'Accademico Segretario
RODOLFO RENIER.

Torino, VINCENZO BONA, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi.

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 13 Maggio 1906.

PRESIDENZA DEL PROF. CAV. ANDREA NACCARI
SOCIO ANZIANO DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: Jadanza, Fileti, Spezia, Guidi, Fusari, Foà, Somigliana, Segre, Guareschi, Parona e Camerano Segretario.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Il Presidente comunica una lettera del Dr. Prof. Richard, segretario dei lavori di S. A. R. il Principe di Monaco, relativa alla proposta di un primo Congresso internazionale di Oceanografia. La Classe delibera di associarsi alla proposta di detta lettera.

Presenta pure il questionario per la riforma della scuola media inviato per ordine del Ministro dell'Istruzione Pubblica all'Accademia dal Provveditore agli studi di Torino.

La Classe delibera di depositare tale questionario in Segreteria a disposizione dei Soci affinchè questi rispondano, se credono ad esso. Nella prossima adunanza i Soci che credono di rispondere a detto questionario comunicheranno alla Classe le loro risposte perchè esse possano venire dalla Classe discusse.

Il Socio Spezia presenta in dono alla Classe: 1° *Sulla Scheelite di Traversella*, del Dott. Luigi Colomba; 2° Ventotto foto-

grafie del Dr. O. Lehmann di Karlsruhe inviate in dono all'Accademia di Torino, le quali rappresentano i fenomeni di apparente vitalità dei cristalli liquidi e che furono descritti nella *Chemikerzeitung 30. 1. 1906* e negli *Annalen der Physik 19. 22. n. 407. 1906*. I fenomeni furono osservati adoperando il *Paraazoxyzimsäure* (etere etilico dell'acido paraazoossicinnamico) sciolto in piccolissima quantità di monobromonaftalina a caldo sino al punto di fusione. Il Socio Spezia fa rilevare l'importanza delle ricerche del Lehmann e l'interesse delle fotografie donate. — Eguale collezione di fotografie fu donata dal Prof. Lehmann alle Accademie di Berlino, Vienna, Parigi, Pietroburgo e Londra.

Il Prof. Somigliana, a nome del Socio Morera, presenta in dono all'Accademia la 2ª parte del volume II e il III volume del *Corso di meccanica razionale* del Comm. Francesco Calderara, Professore dell'Università di Palermo, e richiama in modo speciale l'attenzione dell'Accademia sui pregi di quest'opera di lunga lena.

Vengono presentate per l'inserzione negli *Atti* le Note seguenti:

1° Dr. Beppo Levi: *Saggio per una teoria aritmetica delle forme ternarie cubiche*, dal Socio Segre (1);

2° *Nuovi derivati di acidi δchetonici*, nota del Socio I. Guareschi;

3° Dr. G. Ponzio e G. Busti: *Azione dell'ipoclorito sodico sulle aldossime*, dal Socio Fileti;

4° Dr. Balbi e Nicolis: *Effemeridi stellari e fenomeni astronomici pel 1907*, dal Socio Jadanza;

5° *Sopra alcune formole fondamentali della dinamica dei mezzi isotropi,* del Socio Somigliana.

Il Prof. Parona, a nome anche del Socio Camerano, legge la relazione intorno alla Memoria del Dott. C. Parisch, intitolata: *Di alcune nummuliti ed orbitoidi dell'Appennino Ligure Pie-*

(1) Questa Nota comparirà in un prossimo fascicolo.

montese. La relazione conchiude favorevolmente per l'accoglimento della Memoria. La Classe approva la relazione e, con votazione segreta, la stampa del lavoro nelle *Memorie* accademiche.

Il Socio CAMERANO, a nome anche del Socio SALVADORI, legge la relazione intorno alla Memoria del Dr. Giuseppe NOBILI, intitolata: *Ricerche di Crostacei della Polinesia. Decapodi, Stomatopodi, Isopodi*. La relazione conchiude favorevolmente per l'accoglimento della Memoria. La Classe approva la relazione e, con votazione segreta, la stampa del lavoro nei volumi accademici delle *Memorie*.

Il Socio CAMERANO presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* la seconda parte del suo lavoro, intitolato: *Ricerche intorno allo Stambecco delle Alpi*. La Classe approva con votazione segreta la stampa di detto lavoro nei volumi accademici.

LETTURE

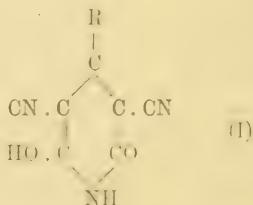
Nuovi derivati di acidi δ chetonici.

Nota del Socio ICILIO GUARESCHI.

Già da lungo tempo io avevo osservato che facendo agire le aldeidi su una miscela di eteri acetacetico e cianacetico, in presenza di ammoniaca, si formavano dei prodotti diversi da quelli che si ottengono separatamente dai due eteri. La difficoltà di separare i nuovi composti, le analisi non sempre concordanti che si avevano, l'occupazione mia in altre ricerche, fecero sì che ho dovuto rimandare la pubblicazione di questo lavoro, che in parte risale al 1897. Essendochè non continuerò forse più queste ricerche, credo bene pubblicare quella parte del lavoro che ho fatto, pur riconoscendo come in alcuni punti sia incompleto.

I nuovi composti che io ho ottenuto possono riguardarsi tanto come derivati glutarici, quanto, ancor meglio, come derivati a catena di sei atomi di carbonio corrispondenti all'acido δ aceto-butirrico $CH^3COCH^2CH^2CH^2COOH$, che è il primo acido δ chetonico.

Dalle mie ricerche eseguite in questi ultimi anni risulta chiaramente dimostrato che quando le aldeidi agiscono su 2 molecole di etere cianacetico in presenza di ammoniaca, la reazione è vivissima e si forma subito un prodotto di condensazione a catena chiusa:

```
              R
              |
              C
            /   \
       CN . C     C . CN
            |     |              (I)
       HO . C     CO
            \   /
              NH
```

insieme alle amidi non sature $R.CH = C\begin{matrix} \diagup CN \\ \diagdown CONH^2 \end{matrix}$ oppure sature $R.CH^2HC\begin{matrix} \diagup CN \\ \diagdown CONH^2 \end{matrix}$, a seconda delle aldeidi impiegate.

Nelle condizioni in cui mi sono posto sino ad ora non sono riuscito ad ottenere il prodotto intermedio:

$$\begin{array}{ccc} & R & \\ & | & \\ CN.HC - & CH & - CH.CN \\ | & & | \\ H^2NOC & & CONH^2 \end{array}$$

che dovrebbe formarsi; i due gruppi $CONH^2$ reagiscono subito e la catena si chiude per dare (I).

Quando invece si fanno reagire 2 mol. di etere acetacetico colle aldeidi e con ammoniaca, la reazione è più lenta e bisogna scaldare a b. m.; si forma un *etere diidropiridindicarbonico*:

$$\begin{array}{ccc} & R & \\ & | & \\ & CH & \\ & / \quad \backslash & \\ ROCO.C & & C.COOR \\ \| & & \| \\ R.C & & C.R \\ & \backslash \quad / & \\ & NH & \end{array} \qquad (II)$$

In questo secondo caso sono stati ottenuti anche i composti intermedî, come ad esempio:

$$\begin{array}{c} C^2H^5O.CO \\ CH_3CO \end{array}\!\!\!>\!HC.\overset{\displaystyle R}{\overset{|}{CH}}.CH\!<\!\!\!\begin{array}{c} COOC^2H^5 \\ COCH_3 \end{array}$$

Poi i due gruppi — $COCH^3$ reagiscono coll'ammoniaca e dànno:

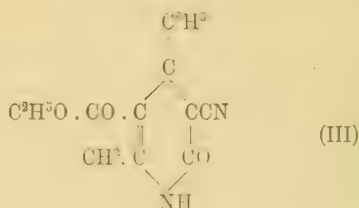
$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ CH^3.C & & C.CH^3 \\ & \backslash \quad / & \\ & NH & \end{array} \quad \text{e quindi (II)}$$

Io già dal 1897 (1) avevo annunziato che quando l'aldeide benzoica agisce su un miscuglio di 1 mol. di etere β chetonico

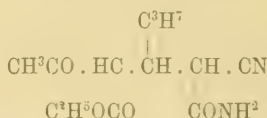
---

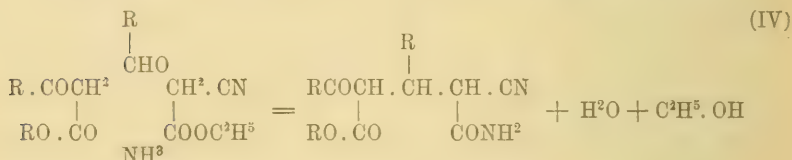
(1) GUARESCHI, *Sintesi di composti piridinici, ecc.* Comunicazione fatta il 27 marzo 1897 alla Soc. chimica di Milano, e *Nuove ricerche sulla sintesi di composti piridinici*, " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", 1897, vol. XXXII.

e 1 mol. di etere cianacetico, in presenza di ammoniaca si otteneva probabilmente un etere *cianodiidropiridincarbonico*:

$$\begin{array}{ccc} & C^2H^5 & \\ & C & \\ C^2H^5O.CO.C & & CCN \\ CH^3.C & & CO \\ & NH & \end{array} \qquad (III)$$

In questa reazione però il prodotto a catena chiusa (III) è relativamente poco, e non ho ancora trovato le condizioni buone per ottenerne molto, e puro.

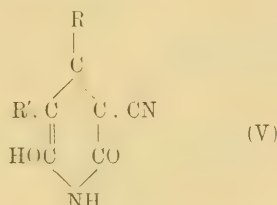
Invece a seconda dell'aldeide impiegata si forma una quantità più o meno notevole di un prodotto intermedio, il quale nel caso dell'aldeide butilica, ad esempio, è:

$$\begin{array}{c} C^3H^7 \\ | \\ CH^3CO.HC.CH.CH.CN \\ C^2H^5OCO \qquad CONH^2 \end{array}$$

La reazione generale che ho osservato è la seguente:

$$\begin{array}{ccc} & R & \\ & | & \\ & CHO & \\ R.COCH^2 & & CH^2.CN \\ | & & | \\ RO.CO & & COOC^2H^5 \\ & NH^3 & \end{array} = \begin{array}{c} R \\ | \\ RCOCH.CH.CH.CN \\ | \qquad\qquad | \\ RO.CO \qquad CONH^2 \end{array} + H^2O + C^2H^5.OH \qquad (IV)$$

Un residuo aldeidico collega una molecola di etere β chetonico ed una di etere cianacetico; si ha quindi un derivato di acido δ chetonico con funzione di nitrile, di amide, di etere e di δ chetone. Insieme a questo si forma anche il prodotto già conosciuto (I) derivante dalla condensazione di due molecole di etere cianacetico coll'aldeide, ed una piccola quantità anche del prodotto (II).

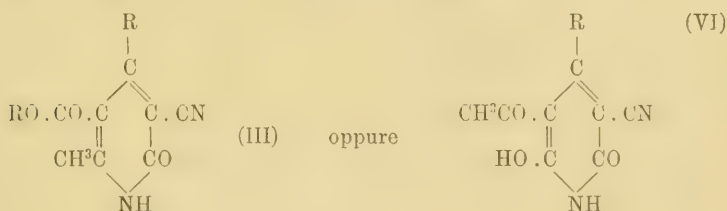
Quando dunque l'aldeide agisce sul miscuglio dei due eteri, si formano essenzialmente tre prodotti: 1° il prodotto di condensazione a catena aperta proveniente da una molecola di etere

acetacetico ed una di cianacetico cioè (IV); 2° il prodotto di condensazione a catena chiusa derivante da due molecole di etere cianacetico (I); 3° il prodotto da due molecole di etere acetacetico (II). Ma insieme a questi si formano pure i composti derivanti dall'azione dell'ammoniaca sola sui due eteri, cioè i composti:

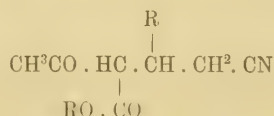
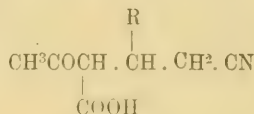
```
          R
          |
          C
        /   \
   R'.C      C.CN
      ||     |          (V)
   HOC       CO
       \    /
         NH
```

che io ottenni sino dal 1895.

La quantità dei nuovi composti intermedî (IV) varia assai secondo la natura dell'aldeide. Sino ad ora i prodotti più abbondanti sono stati ottenuti colle aldeidi: butilica normale e benzoica. Anzi dirò, che coll'aldeide isobutilica non sono riuscito ad avere un prodotto di questa natura.

Resta ancora da trovarsi le condizioni, per via secca, o per via umida con eccesso di ammoniaca, colle quali trasformare i composti a catena aperta (IV) in composti ossipiridinici:

```
               R                                         R         (VI)
               |                                         |
               C                                         C
             /  \\                                     /  \\
   RO.CO.C        C.CN                     CH3CO.C        C.CN
         ||       |       (III)    oppure        ||       |
     CH3C         CO                          HO.C        CO
          \      /                                 \     /
             NH                                       NH
```

a seconda che si eliminerà acqua e idrogeno, od alcol e idrogeno; dato che anche in questa reazione si debba eliminare dell'idrogeno, come in altre reazioni analoghe.

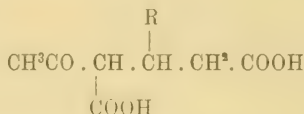
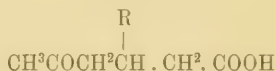
I nuovi composti (IV) per l'azione dell'acido cloridrico si trasformano in nitrili degli *acidi* β*alchil*γ*carbossialchil*δ*acetobutirrici*:

```
                    R
                    |
   CH3CO . HC . CH . CH2. CN
             |
          RO . CO
```

dai quali è facile prevedere si otterranno delle nuove serie di nitrili chetoacidi a sei atomi di carbonio come ad esempio:

$$CH^3COCH(COOH) . CH(R) . CH^2 . CN$$

gli acidi α cheto γ alchilglutarici:

$$CH^3CO . CH(COOH) . CH(R) . CH^2 . COOH$$

e gli acidi δ acetobutirrici β sostituiti:

$$CH^3COCH^2CH(R) . CH^2 . COOH$$

Come si vede, è questo un metodo elegante per congiungere due molecole di corpi diversi, e da catene a tre e due atomi di carbonio passare a composti derivanti da catene aperte, a sei atomi cioè a *composti essanici.*

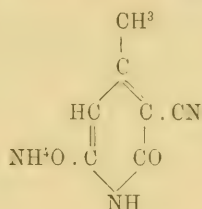
È una reazione generale tanto colle aldeidi grasse quanto colle aldeidi aromatiche.

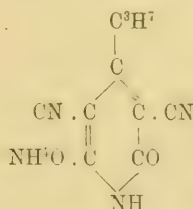
I.

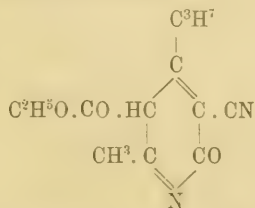
Aldeide butilica normale.

Ad una miscela di 13 cm³ di etere acetacetico (1 mol.) e 11.3 cm³ di etere cianacetico (1 mol.) aggiunsi gr. 7.2 (1 mol.) di aldeide butilica norm., poi 30 a 35 cm³ di ammoniaca al 22.5 %. Si sviluppa molto calore, e, dibattendo, dopo poco tempo il liquido torbido si fa limpido, omogeneo, giallognolo. Lasciando raffreddare il liquido, dopo poche ore comincia a depositare dei bellissimi cristalli incolori, prismatici: dopo 24 ore si raccoglie la poltiglia cristallina e si spreme bene al torchio per togliere un poco di prodotto oleoso. La massa lavata poi con etere rimane affatto incolora e pesa 7.7 a 7.8 gr. Ricristallizato il prodotto dall'acqua bollente si ha purissimo, fusibile a 205°-206°.

Nelle acque ammoniacali da cui fu separato il composto precedente, si trovano altri composti; i cristalli incolori, brillanti, fusibili 205°-206° sono i primi a depositarsi, e bisogna avvertir bene di separarli subito, prima che si formino altri cristalli più leggieri, bianchi e piccoli. Dalle acque madri infatti si ottiene il sale ammoniaco della *cianmetilglutaconimide*:

```
            CH³
             |
             C
           /   \\
         HC     C . CN
         ||     |
  NH⁴O . C      CO
          \    /
            NH
```

la cui soluzione si colora all'aria in verde azzurro e precipita col cloruro ferrico in violetto. Insieme a questo si trova anche il sale ammonico della *propildiciandiossipiridina*:

```
              C³H⁷
               |
               C
             /   \\
     CN . C       C . CN
          ||      |
  NH⁴O . C        CO
          \      /
             NH
```

in aghi leggieri incolori, con sapore amarissimo e già da me descritto in altra memoria (1). Non sono invece riuscito a trovare il composto corrispondente, a catena chiusa, cioè l'*etere* γ*propil*β*cian*β′ *carboossietilpiridinico*:

```
                        C³H⁷
                         |
                         C
                       /   \\
  C²H⁵O.CO . HC             C . CN
               |            |
        CH³. C              CO
               \\          /
                    N
```

nè l'*etere* γ*propillutidindiidrocarbonico* di Engelmann (2).

(1) *Condensazioni delle aldeidi coll'etere cianacetico*, Nota I, " Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino „, 1902, t. XXXVII e " Chem. Centralb. „.

(2) A. 231, p. 47.

Il nuovo composto da me separato e fusibile 205°-206° fornì all'analisi i seguenti risultati:

I. Gr. 0.1699 diedero 0.3642 di CO^2 e 0.1168 di H^2O.
II. Gr. 0.2303 „ 0.4978 di CO^2 e 0.1496 di H^2O.
III. Gr. 0.1528 „ 14.2 cm^3 di N a 22°.5 e 740 mm.
IV. Gr. 0.1302 „ 12.8 cm^3 a 31° e 742 mm.

Da cui:

	trovato			
	I	II	III	IV
C =	58.46	58.95	—	—
H =	7.63	7.21	—	—
N =	—	—	10.28	10.49

Numeri che concordano abbastanza colla formola $C^{13}H^{20}N^2O^4$ per la quale si calcola:

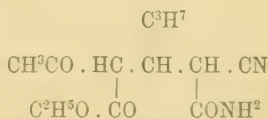
$$C = 58.21$$
$$H = 7.46$$
$$N = 10.44$$

Un dosamento dell'*etossile* col metodo di Zeisel eseguito dal Dr. Piccinini diede infatti i seguenti risultati:

Gr. 0.4061 di sostanza fornirono 0.3590 di AgI, corrispondenti a 0.0688 di OC^2H^5, cioè:

	trovato	calcolato per $C^{11}H^{15}(OC^2H^5)N^2O^3$
OC^2H^5 %	16.94	16.75

Il modo di formazione, le proprietà, ecc., tutto, porta a considerare questo composto come l'α*amide* del *nitrile* β *propil* γ *carbossietil* δ *acetobutirrico*:

```
                C³H⁷
CH³CO . HC . CH . CH . CN
              |         |
      C²H⁵O . CO      CONH²
```

ossia come la *monoamide* dell'*etere* α *cian* β *propil* α' *acetilglutarico* od anche come un derivato malonico.

L'α amide del nitrile β propil γ carbossietil δ acetobutirrico cristallizza in bei prismi, brillanti, fusibili a 205°-206° in un liquido

incoloro che ricristallizza per raffreddamento e a temperatura alta carbonizza. È poco solubile nell'acqua fredda, molto più a caldo, solubile nell'alcol e nell'acido acetico, quasi insolubile nell'etere. La soluzione ha reazione neutra. Non assorbe il bromo anche in soluzione acetica. È solubile nella soda caustica sviluppando ammoniaca, specialmente a caldo. La soluzione acquosa non si colora col cloruro ferrico, nè si colora col KNO^2 solo, coll'acido solforico diluito. Non precipita col nitrato d'argento. Coll'acido cloridrico perde facilmente il gruppo amidico $CONH^2$.

Questo composto riscaldato con acqua di barite dà dell'ammoniaca, ma la quantità di ammoniaca teorica, cioè corrispondente a $2NH^3$, non si ottiene se non con un eccesso di barite.

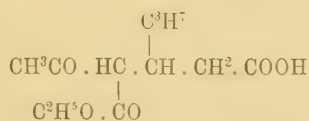
Infatti con 1 molecola di $Ba(OH)^2$ per 1 molecola di sostanza si ottiene:

4.4 % di NH^3, calcolato 6.3 % per 1 molecola NH^3.

Con 3 molecole di $Ba(OH)^2$ per 1 molecola di sostanza si ha:

12.39 % di NH^3 calcolato 12.67 % per 2 molecole NH^3.

Non ho esaminato l'acido che in questo caso si forma, ma essendochè nella reazione si produce del carbonato di bario è probabile si formi l'acido β*propil*γ*carbossietil*δ*acetobutirrico* (v. pag. 12):

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad C^3H^7 \\ \qquad\qquad | \\ CH^3CO\,.\,HC\,.\,CH\,.\,CH^2.\,COOH \\ | \qquad\qquad \\ C^2H^5O\,.\,CO \qquad\qquad \end{array}$$

Il suo *sale di bario* è cristallizzato, e solubile nell'acqua.

Azione dell'acido cloridrico. — Se si scaldano per alcuni minuti 4 gr. del composto fusibile a 205°-206° con 16-18 cm^3 di acido cloridrico a 1.19 si scioglie, con sviluppo di anidride carbonica ed il liquido fornisce un olio; ma dopo evaporazione completa a b. m. rimane un residuo bianco cristallino, che è un miscuglio di cloruro di ammonio, con un nuovo prodotto solido e una sostanza oleosa. Questo residuo, spremuto fra carta, fu estratto ripetutamente con etere anidro. La parte oleosa rimasta dopo spremitura con carta, viene tolta colle prime estrazioni con poco etere.

Meglio però è adoperare l'acido cloridrico a 1.12; circa 1 p. del composto 205°-206° per 4 a 5 p. di acido. Allora la

sostanza oleosa che si forma è in assai piccola quantità ed il prodotto estratto dall'etere è purissimo, ben cristallizzato.

La sostanza oleosa, che si forma piuttosto in piccola quantità, non è stata da me esaminata; ho esaminato invece il prodotto più abbondante, solido, estratto dall'etere. Cristallizza benissimo dall'alcol, o anche da molta acqua bollente, e si ha in bei prismi incolori fusibili a 125°-126°:

I. Gr. 0.1674 diedero 0.3920 di CO^2 e 0.1260 di H^2O.
II. Gr. 0.1378 „ 7.4 cm³ di N a 15° e 744.4 mm.

Da cui:

	I	II
C =	63.86	—
H =	8.36	—
N =	—	6.25.

Numeri che conducono alla formola $C^{12}H^{19}NO^3$ per la quale si calcola:

C =	64.00
H =	8.44
N =	6.22.

Un dosamento di etossile diede:

Gr. 0.2691 fornirono 0.2750 di Ag corrispondenti a 0.0528 di OC^2H^5.

Cioè:

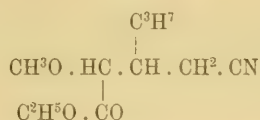
	trovato	calcolato per $C^{10}H^{14}(OC^2H^5)NO^2$
OC^2H^5 %	19.62	20.00

La quantità di cloruro di ammonio che si forma nella reazione coll'acido cloridrico corrisponde esattamente ad una molecola, cioè alla eliminazione di $CONH^2$.

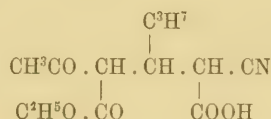
Il composto $C^{12}H^{19}NO^3$ cristallizza assai bene dall'alcol: è pochissimo solubile nell'acqua fredda, un poco più nella bollente dalla quale cristallizza bene, in lunghi aghi. Fonde a 125°-126°, e sublima inalterato. Col cloruro ferrico non si colora. La soluzione ha reazione neutra. Riduce il permanganato.

Il modo di formazione, le proprietà, le analisi, la quantità

di cloruro di ammonio prodotta, ecc., conducono ad ammettere per questo composto la formola:

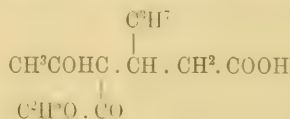
$$\begin{array}{lll} & & C^3H^7 \\ & & \vert \\ CH^3O\,. & HC\,. & CH\,.\,CH^2.\,CN \\ & \vert & \\ C^2H^5O\,. & CO & \end{array}$$

Deve essere cioè riguardato come il *nitrile* β*propil* γ *carbossietil* δ *acetobutirrico.*

Nel primo periodo della reazione si forma probabilmente l'acido:

$$\begin{array}{llll} & & C^3H^7 & \\ & & \vert & \\ CH^3CO\,. & CH\,. & CH\,. & CH\,.\,CN \\ & \vert & & \vert \\ C^2H^5O\,. & CO & & COOH \end{array}$$

che poi si scinde in CO^2 e nel nitrile sovradescritto.

Se si fa agire a lungo l'acido cloridrico a 1.19 sul composto 205°-206°, oppure sul nitrile 125°-126° si ottiene una sostanza oleosa, più sopra già accennata, quasi incolora, non azotata, acida, che raffreddata a — 10° non solidifica ma si fa molto densa e che pare identica col medesimo prodotto acido, che si ha per l'azione dell'acido solforico.

Azione dell'acido solforico al 60 %. — Scaldando il composto fusibile a 205°-206° con acido solforico al 60 % si scioglie e si sviluppa subito dell'anidride carbonica. Cessato lo sviluppo di anidride carbonica e lasciato raffreddare il liquido, si diluisce con acqua, poi si estrae con etere. Lavato ripetutamente l'etere con acqua, e disseccato sul cloruro di calcio e lasciato evaporare, fornisce un prodotto che anche dopo altro trattamento etereo rimane allo stato di olio denso, rifrangente, che non solidifica in miscela refrigerante, quasi insolubile nell'acqua, privo di azoto, acido, il cui *sale di bario* è cristallizzabile, e che molto probabilmente è l'*acido* β*propil* γ *carbossietil* δ *acetobutirrico*:

$$\begin{array}{ll} & C^3H^7 \\ & \vert \\ CH^3COHC\,. & CH\,.\,CH^2.\,COOH \\ \vert & \\ C^2H^5O\,.\,CO & \end{array}$$

ma che non ho esaminato (V. pag. 10 e 11).

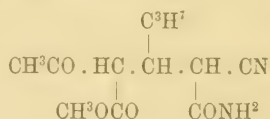
Aldeide butilica normale con etere acetacetico metilico ed etere cianacetico. — Se la reazione avviene veramente come ho indicato nelle pagine precedenti, adoperando l'etere acetacetico metilico $CH^3COCH^2CO.OCH^3$ avrei dovuto ottenere l'omologo inferiore del composto fusibile 205°-206°, come era facile prevedere.

Operai nello stesso modo impiegando 1 molecola di etere cianacetico, 1 molecola di etere acetacetico metilico, 1 molecola di aldeide butilica normale e 3 molecole di ammoniaca al 22 %. I primi cristalli che si depositano hanno caratteri corrispondenti a quelli del composto fusibile 205°-206° e per ricristallizzazione dall'acqua si hanno puri, fusibili a 248°-249°.

I. Gr. 0.1950 diedero 0.4082 di CO^2 e 0.1258 di H^2O.
II. Gr. 0.1342 „ 12.9 cm³ di N a 12° e 727 mm.
Da cui:

	trovato		calcolato per $C^{12}H^{18}N^2O^4$
	I	II	
C =	57.04	—	56.69
H =	7.11	—	7.08
N =	—	11.02	11.02

composto che si può rappresentare con:

```
                C³H⁷
                 |
CH³CO . HC . CH . CH . CN
         |         |
     CH³OCO      CONH²
```

formola confermata dal dosamento del metossile:

Gr. 0.315 col metodo di Zeisel diedero 0.2848 di AgI corrispondenti a 0.0376 di OCH^3.

Da cui:

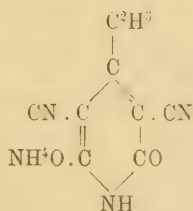
	trovato	calcolato per $C^{11}H^{15}(OCH^3)N^2O^3$
OCH^3 %	11.93	12.20

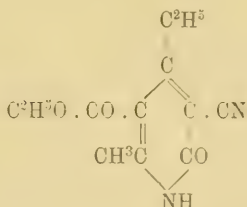
II.

Aldeide propilica.

Ho fatto reagire 1 molecola di propilaldeide su 1 molecola di etere acetacetico e 1 molecola di etere cianacetico in presenza di ammoniaca, nelle stesse condizioni in cui ho fatto reagire l'aldeide butilica normale. La reazione è vivissima, si sviluppa molto calore ed il liquido prima torbido si fa omogeneo e giallo. Dopo 12-24 ore cominciano a depositarsi dei cristalli che bisogna separare al più presto, perchè spesse volte sono già mescolati coi prodotti di condensazione a catena chiusa ed è resa allora difficile la separazione. Se si riesce a separare subito i primi cristalli, questi fondono bene e dopo una sola cristallizzazione si hanno puri e fusibili a 199°-200°.

Insieme a questo nuovo composto si formano poi, come dissi, altri prodotti, fra i quali il sale ammoniaco della *etildiciandiossipiridina*:

```
              C^2H^5
                |
                C
              /   \
      CN . C         C . CN
           ||        |
    NH^4O . C        CO
              \    /
                NH
```

ed un altro composto che molto probabilmente è:

```
                   C^2H^5
                     |
                     C
                   /   \\
 C^2H^5O . CO . C        C . CN
                ||       |
           CH^3C         CO
                 \     /
                   NH
```

cioè *l'etere* γ *carbossietildidrocian* α' *metilpiridinico.*

Il nuovo composto fusibile 199°-200° diede all'analisi i risultati seguenti:

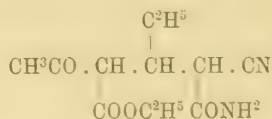
I. Gr. 0.1011 diedero 9.9 cm³ di N a 18° e 748 mm.
II. Gr. 0.1258 „ 12.2 cm³ di N a 19° e 746 mm.
III. Gr. 0.0944 „ 8.25 cm³ di N a 16° e 729 mm.
IV. Gr. 1090 diedero 0.2280 di CO^2 e 0.0662 di H^2O.

Da cui:

	trovato				calcolato per $C^{12}H^{18}N^2O^4$
	I	II	III	IV	
C =	—	—	—	57.05	56.70
H =	—	—	—	6.73	7.08
N =	11.0	10.84	11.3	—	11.02

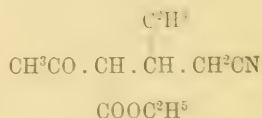
analisi queste fatte già dal prof. E. Quenda quando era mio assistente. Questo prodotto è isomero col composto ottenuto dall'etere acetacetico metilico coll'aldeide butilica normale.

A questo composto spetta senza dubbio la formola:

$$\begin{array}{c} C^2H^5 \\ | \\ CH^3CO . CH . CH . CH . CN \\ COOC^2H^5 \; CONH^2 \end{array}$$

È cioè l'α*amide* del *nitrile* β*etil*γ*carbossietil*δ*acetobutirrico.*

Ha caratteri perfettamente analoghi a quelli del composto fusibile 205°-206° ottenuto dall'aldeide butilica normale.

Scaldato con acido cloridrico a 1.12 sviluppa anidride carbonica e dà una quantità di cloruro di ammonio che corrisponde a una molecola di $CONH^2$ decomposta e fornisce un prodotto cristallizzato, solubile nell'etere, solubile nell'alcol, cristallizzabile dall'acqua bollente in lunghi aghi, con reazione neutra, fusibile a 92°-94° e che molto probabilmente è il *nitrile* β*etil*-γ*carbossietil*δ*acetobutirrico*:

$$\begin{array}{c} C^2H^5 \\ | \\ CH^3CO . CH . CH . CH^2CN \\ COOC^2H^5 \end{array}$$

III.

Aldeide etilica.

L'aldeide etilica, agendo su un miscuglio dei due eteri sovracennati, in presenza di ammoniaca, produce una reazione vivissima e bisogna raffreddare. Insieme ad altri prodotti, fra i quali la *metildicianglutaconimide* e l'*etere idrocollidindicarbonico* fusibile a 130°-131°, si ottenne un composto fusibile 212°-213°, che all'analisi diede:

I. Gr. 0.1149 fornirono 12.6 cm^3 di N a 19° e 730 mm.
II. Gr. 0.1143 „ 12.2 cm^3 di N a 19° e 740 mm.
III. Gr. 0.112 „ 0.2286 di CO^2 e 0.0612 di H^2O.

Cioè:

	trovato			calcolato per $C^{11}H^{16}N^2O^3$
	I	II	III	
C =	—	—	55.62	55.00
H =	—	—	6.07	6.66
N =	11.99	11.83	—	11.66

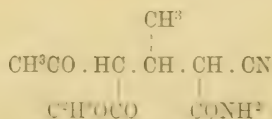
Gr. 0.200 diedero col metodo Zeisel 0.1793 di AgI pari a 0.0343 di OC^2H^5. Ossia:

	trovato	calcolato per $C^9H^{11}(OC^2H^5)N^2O^3$
OC^2H^5 %	17.15	17.8

Il composto così ottenuto fonde a 212°-213° in liquido incoloro e scaldato sublima in gran parte senza alterarsi: la soluzione acquosa è neutra. È solubile nell'alcol, quasi insolubile nell'etere. La soluzione acquosa non precipita le soluzioni metalliche; non dà ammoniaca col latte di magnesia. Scaldato con acido cloridrico fornisce anidride carbonica, del cloruro di ammonio e un composto cristallino. Con soda a caldo sviluppa ammoniaca.

Lo stesso composto si forma in piccola quantità nella reazione dell'ammoniaca e dell'etere cianacetico sull'etere etilidenacetacetico (Quenda).

Il modo di formazione, le analisi (alcune però non troppo concordanti) ed il modo di comportarsi analogo a quello dei composti precedenti, rendono molto probabile, quasi certo, che questo composto sia l'α*amide* del *nitrile* β*metil* γ*carbossietil* δ*acetobutirrico*:

$$
\begin{array}{c}
\qquad\quad CH^3 \\
\qquad\quad | \\
CH^3CO\,.\,HC\,.\,CH\,.\,CH\,.\,CN \\
\qquad | \qquad\qquad | \\
\quad C^2H^5OCO \quad CONH^2
\end{array}
$$

IV.

Aldeide benzoica.

I risultati ottenuti coll'aldeide butilica normale spiegano ora l'anormalità dei risultati che avevo ottenuto già da lungo tempo studiando nelle stesse condizioni l'azione dell'aldeide benzoica. Con un miscuglio di aldeide benzoica, etere acetacetico ed etere cianacetico, e poi con ammoniaca, si aveva sempre una massa cristallina che anche dopo ripetuti lavaggi con acqua, alcol, etere, e ricristallizzazione dall'alcol non dava all'analisi quasi mai risultati concordanti; fondeva a 224°-226° ed anche a 227°. I prodotti anche frazionati davano all'analisi delle quantità di carbonio variabili da 63.6 a 68.7 e di azoto da 9.1 a 9.9 %.

Ho ripreso da qualche tempo questa reazione ed ho ottenuti dei risultati che concordano con quelli ottenuti dall'aldeide butilica normale.

Quando si mescola 1 molecola di aldeide benzoica con 1 molecola di etere acetacetico e 1 molecola di etere cianacetico poi si aggiungono 3 molecole di ammoniaca in soluzione acquosa al 22 %, si nota sviluppo di calore e reazione viva; dibattendo bene, dopo poco tempo si ha una poltiglia cristallina. Dopo 24-48 ore si aggiunge un poco d'acqua, circa egual volume, si lascia a sè ancora 24 ore, poi si raccoglie su filtro, si lava e si spreme al torchio. Il prodotto asciutto si esaurisce con etere il quale toglie anche un poco di prodotto oleoso. Il residuo si scalda con alcol a 95 %, si lascia raffreddare, si raccoglie tutto, si lava con alcol freddo, poi si fa bollire con acqua per scacciare un poco di ammoniaca che vi esiste allo stato di un sale ammoniaco instabile; infine si ricristallizza il residuo dall'alcol a 98 %, bollente. Dopo un'altra cristallizzazione dall'alcol il prodotto è puro e fonde a 225°-226°. Questo fu analizzato:

I.	Gr. 0.1430	diedero	0.3338 di CO^2 e 0.0790 di H^2O.
II.	Gr. 0.1976	„	0.4612 di CO^2 e 0.1068 di H^2O.
III.	Gr. 0.1754	„	14.5 cm³ di N a 15° e 744 mm.
IV.	Gr. 0.1182	„	10 cm³ di N a 22° e 742 mm.
V.	Gr. 0.1206	„	9.9 cm³ di N a 17° e 736 mm.
VI.	Gr. 0.1700	„	13.5 cm³ di N a 13°.5 e 738.9 mm.

VII. Gr. 0.1592 diedero 0.3744 di CO^2 e 0.0858 di H^2O.
VIII. Gr. 0.1672 „ 0.3913 di CO^2 e 0.0894 di H^2O.
IX. Gr. 0.1764 „ 14.3 cm^3 di N a 15° e 734.8 mm.
X. Gr. 0.1330 „ 10.8 cm^3 di N a 20°.5 e 738 mm.
XI. Gr. 0.1589 „ 0.3652 di CO^2 e 0.0895 di H^2O.
XII. Gr. 0.1382 „ 11.2 cm^2 di N a 15°.3 e 737 mm.
XIII. Gr. 0.1452 „ 0.3404 di CO^2 e 0.0754 di H^2O.

Da queste analisi, fatte dai D[ri] Quenda, Beccari, Issoglio e Piccinini, si ha:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
C =	63.66	63.6	—	—	—	—	64.14	63.82
H =	6.13	6.1	—	—	—	—	6.02	6.25
N =	—	—	9.43	9.26	9.12	9.2	—	—

IX	X	XI	XII	XIII
—	—	62.68	—	63.93
—	—	6.25	—	5.76
9.28	9.02	—	9.31.	—

Queste analisi conducono alla formola $C^{16}H^{18}N^2O^4$ per la quale si calcola:

C = 63.57
H = 5.96
N = 9.27.

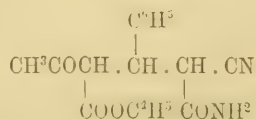
Lo stesso composto fusibile 225°-226° fu preparato coll'etere cianacetico metilico invece che l'etere cianacetico etilico. Un dosamento di azoto sul composto così ottenuto diede:

Gr. 0.1375 fornirono 11.4 cm^3 di N a 24° e 742 mm.

Cioè:

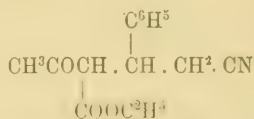
	trovato	calcolato per $C^{16}H^{18}N^2O^4$
N %	9.11	9.27

Il modo di formazione, le proprietà, ecc., dimostrano che questo composto è l'α*amide* del *nitrile*β*fenil*γ*carbossietil*δ*aceto-butirrico*:

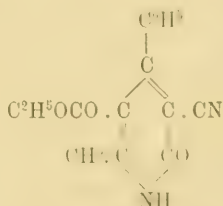
```
                    C⁶H⁵
                     |
CH³COCH . CH . CH . CN
          |         |
     COOC²H⁵   CONH²
```

Analogo ai composti ottenuti dalle aldeidi grasse.

Anche il dosamento dell'etossile concorda con questa formola.

L'*αamide* del *nitrile*β*fenil*γ*carbossietil*δ*acetobutirrico* è quasi insolubile nell'acqua fredda, un poco più nell'acqua bollente da cui cristallizza in lunghi aghi. È insolubile nell'etere. Si scioglie poco nell'alcol concentratissimo freddo, più a caldo, dal quale cristallizza in bei prismi aghiformi brillanti. Fonde a 225°-226°. È solubile negli alcali a caldo con sviluppo di ammoniaca. Non sviluppa ammoniaca colla magnesia anche per distillazione. La soluzione acquosa è neutra. Non assorbe il bromo. La soluzione acquosa non reagisce colle soluzioni metalliche. È intaccato difficilmente dall'acido cloridrico acquoso, un poco più coll'acido cloridrico 1.19 in presenza di alcol assoluto, nel qual caso si forma del cloruro di ammonio e un composto cristallizzato solubile nell'etere che fonde a 152°-154° e che è il *nitrile*β*fenil*-γ*carbossietil*δ*acetobutirrico*:

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad C^6H^5 \\ \qquad\qquad | \\ CH^3COCH\,.\,CH\,.\,CH^2.\,CN \\ | \qquad\qquad \\ COOC^2H^5 \qquad\qquad \end{array}$$

Se si scalda il composto fusibile 225°-226° con acido solforico concentrato, si scioglie, sviluppa anidride carbonica e dà un prodotto oleoso denso, non azotato, estraibile coll'etere, che ha funzione acida e che è l'acido corrispondente al nitrile sovracennato.

Nella reazione fra l'aldeide benzoica e i due eteri cianacetico ed acetacetico si forma molto probabilmente anche il composto a catena chiusa corrispondente al precedente, per eliminazione di H^2O e di H^2 cioè $C^{16}H^{14}N^2O^3$, vale a dire l'*etere*-β*cian*γ*fenil*β'*carbossietil*α'*metil*α*ossipiridico*:

$$\begin{array}{ccc} & C^6H^5 & \\ & | & \\ & C & \\ & \diagup \;\diagdown\!\!\diagdown & \\ C^2H^5OCO\,.\,C & & C\,.\,CN \\ \| & & | \\ CH^3.\,C & & CO \\ & \diagdown \;\diagup & \\ & NH & \end{array}$$

Alcune analisi fatte dal dottor Quenda nel 1897 su un prodotto fusibile 226°-227° diedero C = 67.3, 67.78 e 68.27

H = 5.71; 5.65 e 5.06; N = 9.9, 9.93 e 9.97, mentre per $C^{16}H^{14}N^2O^3$ si calcola C = 68.06; H = 4.9 e N = 9.9; ma non si è potuto trovare le condizioni precise in cui questo composto si forma. Anche un dosamento di etossile eseguito su un campione fusibile 226°-227° diede OC^2H^5 = 15.66 % mentre per $C^{16}H^{14}N^2O^3$ si calcola 15.95 % e per $C^{16}H^{18}N^2O^4$ si calcola 14.9 %.

L'esistenza del composto a catena chiusa sarebbe comprovata anche da due dosamenti di ammoniaca che diedero: N (ammoniacale) = 4.43 e 4.10, mentre per $C^{16}H^{13}(NH^4)N^2O^3$ si calcolerebbe N = 4.69 %.

Ma su questo composto di cui non ho potuto stabilire bene le condizioni di formazione non voglio insistere.

ALDEIDE BENZOICA CON ETERE ACETACETICO METILICO ED ETERE CIANACETICO. — Ho voluto fare anche questa esperienza per vedere se la reazione va nello stesso senso come nel caso analogo dell'aldeide butilica normale (pag. 13).

Mescolai l'etere acetacetico metilico $CH^3COCH^2CO.OCH^3$ con etere cianacetico e l'aldeide benzoica, poi aggiunsi l'ammoniaca. Dopo non molto tempo la miscela si fa omogenea, limpida, gialla, e deposita dei bei cristalli brillanti incolori, pesanti. Questi cristalli quasi insolubili nell'acqua fredda, si sciolgono abbastanza bene nell'acqua bollente e meglio nell'alcol.

Il prodotto così ottenuto fonde a 234°-235°; le sue soluzioni sono neutre, non precipitano coi sali metallici, sviluppa ammoniaca cogli alcali, non assorbe il bromo, ecc.

Anche la composizione, come le proprietà, corrisponde a quella dell'omologo del composto precedente.

Gr. 0.1259 diedero 10.9 cm³ di N a 19°.5 e 727.4 mm.

Da cui:

	trovato	calcolato per $C^{15}H^{16}N^2O^4$
N %	9.67	9.73

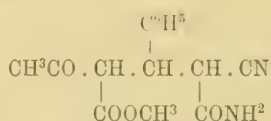
Formola confermata anche da un dosamento di metossile.

Gr. 0.3209 diedero 0.2673 di AgI corrispondente a 0.03533 di OCH^3.

Cioè:

	trovato	calcolato per $C^{14}H^{13}(OCH^3)N^2O^4$
OCH^3 %	11.00	10.76

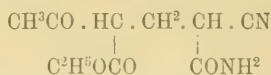
Questo composto è dunque l'α *amide* del β *fenil* γ *carbossimetil* δ *acetobutirrico*:

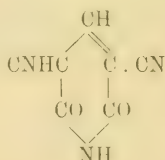
```
                C^6H^5
                  |
CH^3CO . CH . CH . CH . CN
          |         |
       COOCH^3    CONH^2
```

di cui non ho creduto necessario proseguire lo studio.

V.

Aldeide formica.

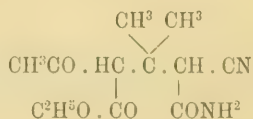
Anche l'aldeide formica reagisce bene coi due eteri, nelle condizioni indicate. Dopo 12 a 18 ore dal liquido giallo omogeneo si depositano dei cristalli formati da prismi corti, pesanti, quasi incolori o giallognoli, mescolati con altri cristalli gialli, più piccoli. Il composto cristallizzato in prismi fonde a 178°-180° e pare:

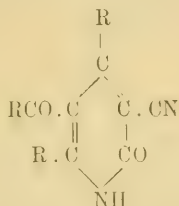
```
CH^3CO . HC . CH^2. CH . CN
          |          |
     C^2H^5OCO     CONH^2
```

Ma più abbondante è un derivato dicianico:

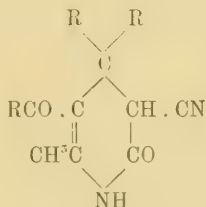
```
          CH
         /  \\
   CNHC      C . CN
      |      |
      CO    CO
        \  /
         NH
```

che avevo già ottenuto prima coll'etere cianacetico solo, e del quale dovrò forse occuparmi ancora.

Come si vede, colle aldeidi sulle quali sino ad ora ho sperimentato, la reazione avviene in parte nel senso dell'equazione (IV), si formano cioè dei composti intermedî stabili.

Composti analoghi si otterranno probabilmente dagli acetoni, come ad esempio:

```
               CH^3 CH^3
                  \/
CH^3CO . HC . C . CH . CN
          |          |
     C^2H^5O . CO  CONH^2
```

Avevo ideato anche di far agire le aldeidi e l'ammoniaca sull'etere cianacetico misto con β dichetoni, come già avevo fatto (1) per l'azione dell'ammoniaca sola, allo scopo di ottenere composti cianchetopiridinici della forma:

```
          R
          |
          C
         / \
  RCO.C     C.CN
      ||    |
   R.C      CO
       \   /
        NH
```

ma forse ritornerò su questo argomento. Anche l'azione degli acetoni invece delle aldeidi potrebbe condurre a composti interessanti, quali:

```
          R    R
           \  /
            C
           / \
  RCO . C     CH . CN
        ||    |
  CH³C        CO
        \    /
          NH
```

È tutto un campo di nuove ricerche. »

Torino. R. Università, Maggio 1906.

---

(1) *Ossipiridine dai βdichetoni*, " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino „, 1898, vol. XXXIV.

Azione dell'ipoclorito sodico sulle aldossime.

Nota di G. PONZIO e G. BUSTI.

Per completare lo studio che uno di noi (1) ha iniziato sin dallo scorso anno sul comportamento degli ossimidocomposti verso l'ipoclorito sodico, abbiamo eseguito alcune esperienze sulle aldossime aromatiche allo scopo di verificare se coll'impiego di tale ossidante era possibile ottenerne i corrispondenti perossidi.

Di questi ultimi, all'inizio delle nostre ricerche, ne era conosciuto uno solo: quello della benzaldossima, preparato da Beckmann (2) mediante il ferricianuro potassico in soluzione alcalina o col così detto *acido nitroso* in soluzione eterea; recentemente però comparvero due lavori sull'azione del nitrito di amile sulle aldossime: nel primo, di Minunni e Ciusa (3) è descritto anche il perossido della m-nitrobenzaldossima, nel secondo, di Franzen e Zimmermann (4), è descritto anche quello dell'anisaldossima.

Noi abbiamo ottenuto gli stessi composti coll'ipoclorito sodico, ed abbiamo trovato che la reazione

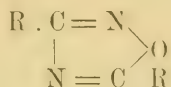
$$\begin{matrix} R.CH:NOH \\ R.CH:NOH \end{matrix} \xrightarrow{O} \begin{matrix} R.CH:N.O \\ | \\ R.CH:N.O \end{matrix}$$

avviene anche colla furfuraldossima. È da notarsi però che i punti di fusione dei perossidi, ottenuti col nostro metodo, sono notevolmente più alti di quelli dei composti ottenuti da Minunni e Ciusa e da Franzen e Zimmermann, ma li riteniamo esatti perchè identici con quelli degli stessi perossidi che, per

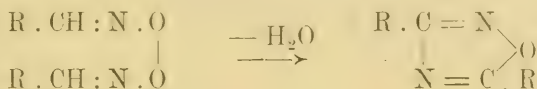
(1) Atti, vol. XLI (1905-906).
(2) Berichte *22*, 1591 (1889).
(3) Lincei *14*, II, 518 (1905).
(4) Journ. f. Prakt. Chemie *73*, 253 (1906).

controllo, abbiamo preparato facendo l'ossidazione delle aldossime col cosidetto *acido nitroso.*

Abbiamo inoltre trovato che l'ipoclorito sodico agendo sulle aldossime, le trasforma parzialmente nelle azossime corrispondenti

$$\begin{array}{l} R\,.\,C = N\diagdown \\ \;\;\;\;\;| \qquad\quad\; \rangle O \\ \;\;\;\;\;N = C\diagup.\,R \end{array}$$

le quali si riscontrano in quantità press'a poco eguale ai perossidi nei prodotti insolubili della reazione.

La formazione di questi composti eterociclici si può spiegare ammettendo una disidratazione dei perossidi delle aldossime accompagnata da una trasposizione molecolare:

$$\begin{array}{l} R\,.\,CH:N\,.\,O \\ \qquad\qquad\quad\;| \\ R\,.\,CH:N\,.\,O \end{array} \quad \xrightarrow{-\,H_2O} \quad \begin{array}{l} R\,.\,C = N\diagdown \\ \;\;\;\;\;| \qquad\quad\; \rangle O \\ \;\;\;\;\;N = C\diagup.\,R \end{array}$$

ed ha luogo, come già fu osservato da Beckmann (loc. cit.) per semplice riscaldamento dei perossidi con cloroformio o con benzolo.

Benzaldossima.

Mescolando una soluzione diluita di benzaldossima con una soluzione pure diluita di ipoclorito sodico raffreddata con ghiaccio, si osserva immediatamente la separazione di una sostanza bianca dalla quale, dopo disseccamento e trattamento con etere, si può separare il perossido della benzaldossima, che è insolubile in detto solvente, dalla dibenzenilazossima che vi è solubile.

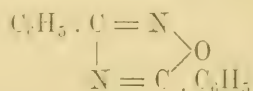
Il *perossido della benzaldossima* $\begin{array}{l} C_6H_5\,.\,CH:N\,.\,O \\ \qquad\qquad\qquad\;\;| \\ C_6H_5\,.\,CH:N\,.\,O \end{array}$ si purifica poi sciogliendolo in cloroformio a 50° e precipitandolo con alcool. Si presenta allora in laminette bianche fusibili a 105° con decomposizione.

Grammi 0,1692 di sostanza fornirono cc. 17,4 di azoto ($H_0 = 739,970$ $t = 15°$), ossia gr. 0,019911.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{14}H_{12}N_2O_2$
Azoto	11,76	11,67

La *dibenzenilazossima*

$$\begin{array}{l} C_6H_5 . C = N \\ \quad\quad\;\; | \quad\quad\;\; \rangle O \\ \quad\quad\;\; N = C . C_6H_5 \end{array}$$

che si ottiene per svaporamento dell'etere, si cristallizza poi dall'alcool e la si ha così in aghi bianchi fusibili a 108°.

Grammi 0,1217 di sostanza fornirono cc. 13,8 di azoto ($H_0 = 729,762$ $t = 13°$), ossia gr. 0,015571.

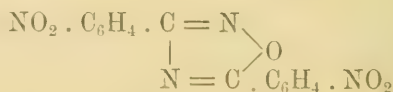
Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{14}H_{10}N_2O$
Azoto	12,72	12,61

I punti di fusione e le proprietà di questi due composti coincidono perfettamente con quelli dati da Beckmann (loc. cit.).

m-nitrobenzaldossima.

Trattando, come nel caso precedente, una soluzione diluita di m-nitrobenzaldossima con una soluzione diluita di ipoclorito sodico raffreddata in ghiaccio si separa subito una sostanza fioccosa la quale, dopo disseccamento, agitata a freddo, e ripetutamente, con molto etere abbandona a questo solvente la *di-m-nitrobenzenilazossima*

$$\begin{array}{l} NO_2 . C_6H_4 . C = N \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad | \quad\quad\;\; \rangle O \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad N = C . C_6H_4 . NO_2 \end{array}$$

che cristallizzata dall'alcool, o dallo xilolo, o dall'acido acetico glaciale, si presenta in laminette bianche fusibili costantemente a 169°.

Grammi 0,1273 di sostanza fornirono cc. 19,5 di azoto (H_0=732,860 t=15°), ossia gr. 0,022097.

Cioè su cento parti:

	trovato	calc. per $C_{14}H_8N_4O_5$
Azoto	18,14	17,95

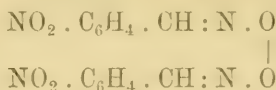
Questo composto era già stato ottenuto da Stieglitz (1) dal m-nitrobenzenilidrazossima-amido-m-nitrobenzilidene per riscaldamento con acido acetico glaciale ed inoltre per azione del cloruro di m-nitrobenzoile sulla m-nitrobenzenilamidossima e si fonde, secondo detto chimico (che lo descrive sotto il nome di m-nitrobenzenilazossima-m-nitrobenzenile) a 168°, previa cristallizzazione dall'alcool. Fu poi ottenuto da Krümmel (2) per azione dell'alcool sul bromidrato di m-nitrobenzenilidrazossima-amido-m-nitrobenzilidene, e secondo detto autore si fonde, dopo cristallizzazione dell'acido acetico, a 138°. Bamberger e Scheutz (3) l'ottennero facendo agire il reattivo di Caro sulla m-nitrobenzaldossima e dopo cristallizzazione della ligroina e dell'alcool, trovarono il punto di fusione 147°,5-149°,5. Minunni e Ciusa (4) l'ebbero per azione del nitrito d'amile sulla m-nitrobenzaldossima in soluzione eterea a freddo e, cristallizzandolo dall'alcool, riuscirono a portarne il punto di fusione a 166°,5-167°,5. Franzen e Zimmermann (5) lo prepararono per riscaldamento della m-nitrobenzaldossima in soluzione benzolica con nitrito di amile e cristallizzandolo dallo xilolo, trovarono come punto di fusione 184°.

Anche sulla solubilità i diversi autori forniscono dati assai discordanti, però il comportamento da noi osservato verso i comuni solventi organici si accorda assai bene con quello osservato da Stieglitz (loc. cit.), il quale inoltre dà un punto di fusione che differisce solo di un grado da quello da noi trovato ed è anche abbastanza prossimo a quello riferito da Minunni e Ciusa (loc. cit.).

---

(1) Berichte *22*, 3158 (1889).
(2) Berichte *28*, 2231 (1895).
(3) Id. *34*, 2028 (1901).
(4) Atti Lincei *14*, II, 518 (1905).
(5) Journ. f. Prakt. Chemie *73*, 253 (1906).

Riguardo al *perossido della m-nitrobenzaldossima*

$$\begin{array}{l} NO_2 . C_6H_4 . CH : N . O \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad | \\ NO_2 . C_6H_4 . CH : N . O \end{array}$$

il quale rimane indisciolto dopo il trattamento con etere, esso fu purificato sciogliendolo in cloroformio a 50° e precipitandolo, dopo raffreddamento, con alcool. Si presenta allora in laminette leggermente giallognole, le quali a 131° si decompongono con leggiera esplosione, ed è insolubile anche a caldo negli ordinari solventi organici, eccetto il cloroformio.

Grammi 0,1141 di sostanza fornirono cc. 17,3 di azoto ($H_0 = 721,011$ $t = 14°$), ossia gr. 0,019372.

Cioè su cento parti:

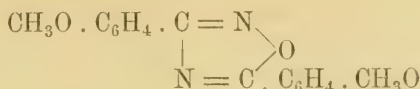
	trovato	calcolato per $C_{14}H_{10}N_4O_6$
Azoto	16,97	16,96

Siccome il punto di fusione da noi osservato per questo perossido (131°) è molto superiore a quello dato da Minunni e Ciusa (105°) e da Franzen e Zimmermann (124°) abbiamo pensato di fare, come controllo, l'ossidazione della m-nitrobenzaldossima col cosidetto *acido nitroso*. A tale scopo abbiamo trattato l'ossima sciolta in etere anidro e raffreddata in ghiaccio con una corrente di vapori nitrosi (ottenuti scaldando leggermente anidride arseniosa con acido nitrico $d = 1,4$). Abbiamo così ottenuto una sostanza cristallina che raccolta e lavata con etere si fonde senz'altro a 131° con leggiera esplosione. Sciolta in cloroformio e precipitata con alcool si fonde ancora alla stessa temperatura ed è assolutamente identica col perossido della m-nitrobenzaldossima preparato coll'ipoclorito sodico.

Anisaldossima.

Ossidando l'anisaldossima con ipoclorito sodico in soluzione alcalina si ottiene, come nei casi precedenti, un miscuglio del perossido e dell'azossima corrispondenti, i quali si possono facilmente isolare mediante ripetuti trattamenti con etere, ove il primo è insolubile e la seconda abbastanza solubile a freddo.

La *di-p-metossibenzenilazossima*

$$\begin{array}{l} CH_3O\,.\,C_6H_4\,.\,C = N \searrow \\ \quad\quad\quad\quad\quad\;\; | \quad\quad\;\; > O \\ \quad\quad\quad\quad\quad\; N = C \nearrow .\,C_6H_4\,.\,CH_3O \end{array}$$

ottenuta per svaporamento della soluzione eterea, e finora non descritta, cristallizza dall'alcool o dall'acido acetico glaciale in aghi bianchi appiattiti splendenti, i quali dopo breve tempo ingialliscono leggermente e si fondono a 175°-76°.

I. Gr. 0,1124 di sostanza fornirono gr. 0,2813 di anidride carbonica, e gr. 0,0542 di acqua.

II. Grammi 0,1748 di sostanza fornirono cc. 15,5 di azoto ($H_0 = 739,97$ $t = 14°$), ossia gr. 0,017818.

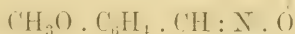
III. Grammi 0,1316 di sostanza fornirono cc. 12 di azoto ($H_0 = 720,327$ $t = 17_0$), ossia gr. 0,013282.

Cioè su cento parti:

	trovato			calcolato per $C_{16}H_{14}N_2O_3$
	I	II	III	
Carbonio	68,25	—	—	68,08
Idrogeno	5,35	—	—	4,96
Azoto	—	10,19	10,09	9,92

È molto solubile a freddo nel cloroformio e un po' anche nell'etere; solubile a caldo nell'alcool e nell'acido acetico; quasi insolubile negli eteri di petrolio.

Il *perossido dell'anisaldossima* $CH_3O\,.\,C_6H_4\,.\,CH : N\,.\,O$ inso-

$CH_3O\,.\,C_6H_4\,.\,CH : N\,.\,O$

lubile nell'etere, si purifica sciogliendolo in cloroformio a 50° e precipitandolo con alcool a freddo. Lo si ottiene così in laminette giallognole che si decompongono con leggiera esplosione a 126°.

Grammi 0,1224 di sostanza fornirono cc. 10 di azoto ($N_0 = 729,233$ $t = 13°$), ossia gr. 0,011396.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{16}H_{16}N_2O_4$
Azoto	9,31	9,33

Anche per questo perossido esiste una differenza fra il punto di fusione da noi trovato (126°) e quello dato da Franzen e Zimmermann (119°,5). Per controllo abbiamo perciò voluto fare anche l'ossidazione dell'anisaldossima col cosidetto *acido nitroso* in soluzione eterea ed abbiamo così ottenuto delle laminette giallognole le quali, lavate con etere, si decompongono a 126° con leggiera esplosione, precisamente come il perossido dell'anisaldossima ottenuto coll'ipoclorito.

Furfuraldossima.

Aggiungendo a poco a poco la soluzione alcalina diluita di furfuraldossima ad una soluzione pure diluita di ipoclorito sodico raffreddato in ghiaccio, si separa subito il *perossido di furfuraldossima* $C_4H_3O . CH : N . O$ il quale cristallizzato rapida-

$$\begin{array}{l} C_4H_3O . CH : N . O \\ \qquad\qquad\qquad\quad | \\ C_4H_3O . CH : N . O \end{array}$$

mente dal cloroformio si presenta in laminette giallognole, che a 130° si decompongono con leggiera esplosione.

I. Grammi 0,3966 di sostanza fornirono gr. 0,7893 di anidride carbonica e gr. 0,1452 di acqua.

II. Grammi 0,1864 di sostanza fornirono cc. 20,8 di azoto ($H_0 = 737,627$ $t = 13°$), ossia gr. 0,023978.

Cioè su cento parti:

	trovato I	trovato II	calcolato per $C_{10}H_8N_2O_4$
Carbonio	54,27	—	54,54
Idrogeno	4,06	—	3,63
Azoto	—	12,86	12,72

Questo perossido, a differenza di quelli finora conosciuti, è pochissimo solubile a freddo nel cloroformio ove può sciogliersi a caldo senza alterarsi: è invece insolubile nell'alcool, nell'etere, nel benzolo e nella ligroina.

L'identico composto, colla stessa temperatura di decomposizione, l'abbiamo pure ottenuto ossidando la furfuraldossima in soluzione eterea mediante il cosidetto *acido nitroso.*

Torino - Istituto Chimico della Rª Università.
Maggio 1906.

Sopra alcune formole fondamentali della dinamica dei mezzi isotropi.

Nota 1ª del Socio CARLO SOMIGLIANA.

In una Memoria pubblicata parecchi anni or sono *Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo* (“ Nuovo Cimento „, S. III, T. XVIII, XIX, XX) io ho dimostrato che, partendo dalla formola di Green e senza far uso del teorema di Betti, si possono stabilire con facilità delle formole di rappresentazione per le componenti di spostamento di un corpo elastico isotropo in equilibrio, dalle quali si ricavano immediatamente, con semplici derivazioni, quelle per la dilatazione e le componenti della rotazione elementare che Betti ha posto a fondamento della sua statica dei corpi elastici, dopo averle dedotte dal suo celebre teorema.

Mi propongo ora di trovare con procedimento completamente analogo, le formole corrispondenti nel caso del movimento, le quali non credo siano state finora considerate. Queste formole hanno pure una forma analoga a quelle della statica e da esse si deducono anche immediatamente le formole di rappresentazione per le componenti della rotazione. Non sembra invece che sia possibile il dedurne con pari facilità quella per la dilatazione. Di questa formola mi occuperò in una nota successiva.

È ben conosciuta l'importanza che queste formole-integrali di rappresentazione hanno per la teoria generale dei movimenti oscillatori dei mezzi elastici isotropi. Esse permettono un enunciato completamente generale e preciso del principio fondamentale di Huyghens e inoltre riducono questa teoria — la quale ha una base un po' indeterminata ed incerta, allorchè viene fondata sulle equazioni differenziali del moto — alla teoria di determinate espressioni analitiche, il cui studio è inoltre assai facilitato dalle analogie notevolissime che esse presentano cogli ordinari potenziali newtoniani.

§ 1.

La formola di Kirchhoff, completata del termine integrale di spazio, che risulta dal teorema di Lorenz, analogo a quello di Poisson, corrisponde a quella di Green, quando si considera in rapporto all'equazione:

$$(D_t^2 - a^2\Delta_2)\varphi = \Phi \tag{1}$$

ove Φ è una funzione conosciuta del tempo t e delle variabili geometriche x, y, z; a una costante. Sotto questa forma generale fu considerata da Beltrami (" Atti della R. Acc. dei Lincei ", 1892) e può essere scritta nel modo che segue.

Data una funzione $\varphi(x, y, z, t)$ regolare in uno spazio S, limitato da una superficie s, per tutti i valori del tempo, e che soddisfaccia la (1), e introdotta la notazione:

$$[\varphi]_a = \varphi\left(x, y, z, t - \frac{r}{a}\right)$$

dove r rappresenta la distanza del punto (x, y, z) da un altro fissato (x', y', z') interno ad S, e indicando con n la normale interna di s, si ha:

$$4\pi\varphi(x', y', z', t) = \tag{2}$$

$$= \int_s \left\{ [\varphi]_a \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]_a - \frac{1}{ar}\frac{\partial r}{\partial n}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]_a \right\} ds + \frac{1}{a^2}\int_S [\Phi]\frac{dS}{r}.$$

Lo spazio S può anche estendersi all'infinito, purchè in questo caso all'infinito la funzione φ si comporti come le ordinarie funzioni potenziali.

La formola precedente, quando $\Phi = o$, si riduce a quella di Kirchhoff, la cui dimostrazione è stato oggetto di molte ricerche, le quali portarono ad eliminare alcuni procedimenti di passaggio al limite, usati da Kirchhoff, che non sembrarono dapprima perfettamente rigorosi e che poi apparvero superflui. Maggi [1] e recentemente Love [2] hanno dimostrato come si possa

[1] Maggi, *Sulla propagazione libera e perturbata delle onde luminose*, (" Ann. di Mat. ", Vol. XVI, S. II, 1888).

[2] Love, *Wave motions with Discontinuities at wave-fronts* (" Proc. of the London Math. Society ", Vol. I, S. 2, 1904).

stabilire la (2) con considerazioni simili a quelle che portano alla formola di Green; e Gutzmer [1] e Beltrami [2] hanno mostrato anche come essa può dedursi, con trasformazioni assai semplici, dalla formola stessa.

Noi porremo la (2) sotto una forma più concisa, ma un po' differente da quella ben nota usata da Kirchhoff: e che forse ne mette maggiormente in evidenza l'analogia con la formula di Green.

Osservando che si ha:

$$[\varphi]_a \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{ar}\frac{\partial r}{\partial n}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right]_a = \left[\varphi + \frac{r}{a}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right]_a \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}$$

noi introdurremo la notazione:

$$[\varphi]_a^* = \left[\varphi + \frac{r}{a}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right]_a$$

e la (2) diviene:

$$(3)\quad 4\pi\varphi(x',y',z',t) = \int_s \left\{[\varphi]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right]_a\right\} ds + \frac{1}{a^2}\int_S [\Phi]_a \frac{dS}{r}.$$

Notiamo che quando sulla superficie s sia nota φ per tutti i valori del tempo, anche la espressione $[\varphi]_a^*$ potrà considerarsi come conosciuta sulla superficie stessa.

Ricordiamo anche che gli integrali di superficie, che compaiono nella formola precedente, attraversando la superficie stessa, si comportano in modo analogo agli ordinarii potenziali di semplice e doppio stato. Se infatti si considerano le funzioni

$$U = \int_s [h]_a \frac{ds}{r} \qquad V = \int_s [h]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} ds$$

ove h è una funzione regolare sopra s per tutti i valori del

---

[1] Gutmer, *Ueber den analytischen Ausdruck des Huygens'schen Princips* (" Crelle ", T. 114, 1895).

[2] Beltrami, *Sull'espressione data da Kirchhoff al principio di Huygens* (" Atti Acc. dei Lincei ", 1895).

tempo, si ha [1], indicando con n' la normale contrapposta ad n, in un punto di s,

$$(4)\qquad \begin{aligned} &U_n - U_{n'} = 0 \qquad && V_n - V_{n'} = 4\pi h \\ &\frac{\partial U}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial n'} = -4\pi h \qquad && \frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial n'} = 0. \end{aligned}$$

Entrambe le funzioni U, V soddisfano la (1) per $\Phi = 0$. Notiamo infine che, ammessa la validità dello sviluppo in serie di Taylor, si ha, almeno per r abbastanza piccolo,

$$[h]_a = h(t) - \frac{r}{a}\, h'(t) + \frac{1}{2}\frac{r^2}{a^2}\, h''(t) - \ldots;$$

$$[h]_a^* = h(t) + \frac{1}{2}\frac{r^2}{a^2}\, h''(t) - \ldots$$

e che mediante questi sviluppi le formole precedenti risultano una conseguenza pressochè immediata di quelle relative ai potenziali ordinari.

La formola (3) sarà il fondamento di tutte le considerazioni che seguono.

§ 2.

Le equazioni indefinite del movimento per un mezzo elastico isotropo possono essere poste sotto una forma che, rispetto a ciascuna delle componenti del moto u, v, w, è analoga alla (1). Infatti usando le stesse notazioni di cui mi sono servito nella Nota *Sulla propagazione delle onde nei mezzi isotropi* (" Atti della R. Acc. delle Scienze ", in questo stesso volume) si ha:

$$(5)\qquad \left\{ \begin{aligned} (D_t^2 - b^2\Delta_2)u &= (a^2 - b^2)\,\frac{\partial\theta}{\partial x} + X \\ (D_t^2 - b^2\Delta_2)v &= (a^2 - b^2)\,\frac{\partial\theta}{\partial y} + Y \\ (D_t^2 - b^2\Delta_2)w &= (a^2 - b^2)\,\frac{\partial\theta}{\partial z} + Z. \end{aligned} \right.$$

[1] VOLTERRA, *Sul principio di Huyghens* (" Nuovo Cimento ", S. III, T. XXXII, XXXIII, 1892-93).

Se ora noi rappresentiamo ciascuna delle funzioni u, v, w mediante la (3), applicata allo spazio S occupato dal corpo vibrante, e supponendo che in esso le u, v, w siano ovunque regolari per qualunque valore del tempo, noi potremo negli integrali di spazio, al posto della Φ, sostituire i secondi membri delle (5). Analogamente negli integrali di superficie alle derivate $\frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial v}{\partial n}, \frac{\partial w}{\partial n}$ potremo sostituire i valori che per esse risultano dalle equazioni che debbono essere verificate al contorno. La questione della rappresentazione analitica delle u, v, w sarà così ridotta ad eliminare dalle formole così ottenute quegli elementi che alla superficie o all'interno si vogliono considerare come non conosciuti. Noi ci proporremo di esprimere le u, v, w mediante: 1° i valori delle X, Y, Z, in tutto S; 2° i valori delle pressioni superficiali esterne L, M, N; 3° i valori delle u, v, w stesse sulla superficie, considerando tutte queste quantità come date per qualunque valore di t. Potranno perciò comparire nelle nostre formole anche le derivate delle stesse quantità, rispetto al tempo, di qualunque ordine. Una rappresentazione siffatta si dirà eseguita mediante gli *elementi fondamentali* del problema del movimento.

Le equazioni che debbono essere verificate sulla superficie s, sono le seguenti:

$$-b^2\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{1}{k}L+(a^2-2b^2)\theta\frac{\partial x}{\partial n}+b^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\right)$$

$$-b^2\frac{\partial v}{\partial n}=\frac{1}{k}M+(a^2-2b^2)\theta\frac{\partial y}{\partial n}+b^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial n}\right)$$

$$-b^2\frac{\partial w}{\partial n}=\frac{1}{k}N+(a^2-2b^2)\theta\frac{\partial z}{\partial n}+b^2\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial n}\right)$$

dove k rappresenta la densità del corpo, ed n la normale diretta verso l'interno di S.

Mediante le sostituzioni indicate la formola di rappresentazione della u, per un punto interno ad S, come risulta dalla (3), può scriversi:

$$4\pi b^2 u(x', y', z', t)=b^2\int_s [u]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}ds+\int_s\left[\frac{L}{k}+(a^2-2b^2)\theta\frac{\partial x}{\partial n}\right]_b\frac{ds}{r}+$$

$$+b^2\int_s\left[\sum\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}\right]_b\frac{ds}{r}+\int_S\left[(a^2-b^2)\frac{\partial\theta}{\partial x}+X\right]_b\frac{dS}{r}$$

ove per brevità si è posto:

$$\sum \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}.$$

Raggruppando più opportunamente i diversi termini, possiamo anche scrivere:

$$\begin{aligned}
4\pi b^2 u(x', y', z', t) = (a^2 - b^2) \left\{ \int_s [\theta] \frac{\partial x}{\partial n} \frac{ds}{r} + \int_S \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} \right] \frac{dS}{r} \right\} + \\
(6) \qquad + \int_S [X]_b \frac{dS}{r} + \frac{1}{k} \int_s [L]_b \frac{ds}{r} + \int_s [u]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} ds + \\
+ b^2 \int_s \left[\sum \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} - \theta \frac{\partial x}{\partial u} \right]_b \frac{ds}{r}.
\end{aligned}$$

Se in questa formola consideriamo dapprima come nota la θ, il problema di esprimere il secondo membro mediante gli elementi fondamentali si riduce a calcolare mediante questi elementi l'ultimo degli integrali del 2° membro. Vedremo che esso si può trasformare in un altro in cui compaiono soltanto i valori superficiali di $[v]_b^*$, $[w]_b^*$; ma per questo è necessario premettere alcune formole semplici di trasformazione di integrali definiti.

§ 3.

Sia U una funzione qualsiasi di x, y, z, t regolare in uno spazio S, limitato da una superficie s, per qualunque valore di t. Consideriamo l'integrale:

$$A = \int_S \left\{ \frac{\partial [U]_b}{\partial y} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \frac{\partial [U]_b}{\partial z} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \right\} dS$$

supponendo il punto x', y', z' interno ad S. Questo integrale può essere trasformato in integrale di superficie in due modi. Si ha infatti per formole note:

$$A = -\int_s \left\{ \frac{\partial [U]_b}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial n} - \frac{\partial [U]_b}{\partial z} \frac{\partial y}{\partial n} \right\} \frac{ds}{r}.$$

Inoltre, escludendo con una piccola sfera τ di raggio ϵ il punto (x', y', z') si ha anche:

$$\int_{S-\tau} \left\{ \frac{\partial [U]_b}{\partial y} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \frac{\partial [U]_b}{dz} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \right\} dS = - \int_s [U]_b \left\{ \frac{\partial y}{\partial n} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial n} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \right\} ds.$$

E osservando che l'integrale del 1° membro è *proprio*, e facendo tendere ϵ a zero:

$$A = - \int_s [U]_b \left\{ \frac{\partial y}{\partial n} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial n} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \right\} ds.$$

Per cui, confrontando le due espressioni trovate per A, si ha:

$$\int_s \left\{ \frac{\partial [U]_b}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial n} - \frac{\partial [U]_b}{\partial z} \frac{\partial y}{\partial n} \right\} \frac{ds}{r} = \int_s [U]_b \left\{ \frac{\partial y}{\partial n} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \frac{\partial y}{\partial n} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right\} ds.$$

Questa formola può essere scritta in modo più opportuno per le applicazioni che abbiamo di mira.

Infatti essendo:

$$\frac{\partial [U]_b}{\partial x} = \left[\frac{\partial U}{\partial x} \right]_b - \frac{1}{b} \frac{\partial r}{\partial x} \left[\frac{\partial U}{\partial t} \right]_b$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

possiamo scrivere:

$$\int_s \left[\frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial n} - \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial y}{\partial n} \right]_b \frac{ds}{r} = \int_s [U]_b \left(\frac{\partial y}{\partial n} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial n} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \right) ds +$$
$$+ \frac{1}{b} \left[\frac{\partial U}{\partial t} \right]_b \left(\frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial n} - \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial y}{\partial n} \right) \frac{ds}{r}$$

o anche colla notazione già usata:

$$(7) \qquad \int_s \left[\frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial n} - \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial y}{\partial n} \right]_b \frac{ds}{r} = \int_s [U]_b^* \left(\frac{\partial y}{\partial n} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial n} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \right) ds.$$

È questa la formola di cui abbiamo bisogno. Con essa naturalmente ne esistono altre due analoghe che si ottengono mutando le y, z in z, x oppure x, y.

§ 4.

Dalle due formole analoghe alla (7) prendendo successivamente per U le funzioni v e w si trova:

$$\int_s \left[\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial n}\right]_b \frac{ds}{r} = \int_s [v]_b^* \left(\frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial n}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right) ds.$$

$$\int_s \left[\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n} - \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial n}\right]_b \frac{ds}{r} = \int_s [w]_b^* \left(\frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial n}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right) ds.$$

A queste due relazioni aggiungiamo l'identità:

$$\int_s \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}\right]_b \frac{ds}{r} = 0$$

e sommiamo membro a membro; si trova:

$$\int_s \left[\sum \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} - \theta \frac{\partial x}{\partial n}\right]_b \frac{ds}{r} = \int_s [v]_b^* \left(\frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial n}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right) ds +$$

$$+ \int_s [w]_b^* \left(\frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial n}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right) ds.$$

Per brevità di scrittura introdurremo le notazioni seguenti:

$$\Omega_{yz} = -\Omega_{zy} = \frac{\partial y}{\partial n}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial n}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}$$

$$\Omega_{zx} = -\Omega_{xz} = \frac{\partial z}{\partial n}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}$$

$$\Omega_{xy} = -\Omega_{yx} = \frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial n}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}.$$

La formola precedente si può scrivere così:

$$(8) \qquad \int_s \left[\sum \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} - \theta \frac{\partial x}{\partial n}\right]_b \frac{ds}{r} = \int_s \left\{[v]_b^* \Omega_{xy} + [w]_b^* \Omega_{xz}\right\} ds.$$

Prima di fare la sostituzione in (6) osserviamo anche che in questa formola compare l'espressione:

$$\int_s [\theta]_b \frac{\partial x}{\partial n} \frac{ds}{r} + \int_S \left[\frac{\partial \theta}{\partial x}\right]_b \frac{dS}{r}.$$

Ora si ha:

$$\int_S \frac{\partial [\theta]_b}{\partial x} \frac{dS}{r} = \int_S \left\{ \left[\frac{\partial \theta}{\partial x}\right]_b - \frac{1}{b} \frac{\partial r}{\partial x} \left[\frac{\partial \theta}{\partial t}\right]_b \right\} \frac{dS}{r}$$

e inoltre:

$$\int_S \frac{\partial [\theta]_b}{\partial x} \frac{dS}{r} = - \int_s [\theta]_b \frac{\partial x}{\partial n} \frac{ds}{r} - \int_S [\theta]_b \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dS$$

da cui risulta:

$$\int_S \left[\frac{\partial \theta}{\partial x}\right]_b \frac{dS}{r} + \int_s [\theta]_b \frac{\partial x}{\partial n} \frac{ds}{r} = \int_S [\theta]_b \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} - \frac{1}{rb} \frac{\partial r}{\partial x'} \left[\frac{\partial \theta}{\partial t}\right] \Big\} dS =$$

$$= \int_S \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{[\theta]_b}{r} \right) dS$$

ossia:

$$\int_S \left[\frac{\partial \theta}{\partial x}\right] \frac{dS}{r} + \int_s [\theta]_b \frac{\partial x}{\partial n} \frac{ds}{r} = \frac{\partial}{\partial x'} \int_S [\theta]_b \frac{dS}{r}. \tag{9}$$

Mediante queste relazioni (8), (9) la (6) prende la forma seguente:

$$4\pi b^2 u(x', y', z', t) = (a^2 - b^2) \frac{\partial}{\partial x'} \int_S [\theta]_b \frac{dS}{r} + \int_S [X]_b \frac{dS}{r} + \tag{10}$$

$$+ \frac{1}{k} \int_s [L]_b \frac{ds}{r} + b^2 \int_s \left\{ [u]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} + [v]_b^* \Omega_{xy} + [w]_b^* \Omega_{xz} \right\} ds.$$

Formole analoghe si possono avere con sostituzioni circolari per v e w.

In queste, quando si faccia astrazione dalla θ, non compaiono più che le forze di massa e superficiali ed i valori alla superficie delle componenti del moto u, v, w insieme alle loro derivate prime rispetto al tempo. Possiamo quindi dire che il

problema della rappresentazione delle u, v, w in un punto interno di S, mediante gli elementi fondamentali, è ridotto al calcolo mediante questi elementi della dilatazione θ, oppure della funzione:

$$\Phi = \int_S [\theta]_b \frac{dS}{r}. \tag{11}$$

Le formole corrispondenti alle (10), nel caso statico, sono quelle che risultano da queste formole stesse sopprimendo tutti i segni $[\ ]_b$ e $[\ ]_b^*$, come risulta anche dalle considerazioni precedenti. Sono appunto queste le formole da me trovate nella citata Memoria nel *Nuovo Cimento*. In quel caso derivando rispettivamente rapporto ad x', y', z' e sommando, tenuto conto del teorema di Poisson, si ottiene una relazione che non è altro che la formola di Betti per rappresentare la θ mediante gli elementi fondamentali. Quelle formole quindi, si può dire, risolvono completamente il problema della rappresentazione delle u, v, w.

Nel caso attuale invece non sembra che la eliminazione della θ dalle (10) sia possibile con un procedimento simile. Difatti per la funzione Φ abbiamo bensì l'equazione:

$$(D_t^2 - b^2\Delta_2)\Phi = 4\pi b^2\theta \tag{12}$$

che corrisponde a quella di Poisson, ma in essa compare anche la $\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}$, che non si vede come possa essere eliminata.

D'altra parte le formole definitive ottenute per questa via vengono a contenere degli integrali sestupli e quindi si presenta ancora la quistione di ridurle a contenere soltanto integrali doppi e tripli, come effettivamente è possibile. Ora tutte queste difficoltà vengono superate quando si possa calcolare direttamente mediante gli elementi fondamentali la funzione Φ. In tal caso anche la formola per la θ si può poi immediatamente ricavare dalla (12). Noi ci occuperemo di questo calcolo in una nota successiva.

Qui osserveremo invece che eliminando con derivazioni la Φ dalle (10) accoppiate due a due, se ne deducono immediatamente, come nel caso della statica, le formole di rappresentazione per le componenti della rotazione elementare. Ci occuperemo perciò della determinazione di queste formole.

Per eseguire tale calcolo senza eccessive ed inutili complicazioni gioverà dapprima mettere in evidenza tutto ciò che nelle (10) ha, per così dire, carattere longitudinale e quindi non ha influenza sulla rotazione.

§ 5.

Cominciamo a stabilire alcune formole semplici di derivazione dei potenziali ritardati.

Poniamo

$$I = \int_\Sigma [h]_b \frac{d\Sigma}{r}$$

ove Σ è un campo a due o tre dimensioni, ed il punto (x', y', z') si suppone esterno al campo.

Derivando si trova:

$$\frac{\partial I}{\partial x'} = \int_\Sigma \left[h + \frac{r}{b} \frac{\partial h}{\partial t} \right]_b \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \, d\Sigma.$$

Quindi colla nostra notazione:

$$\frac{\partial I}{\partial x'} = \int_\Sigma [h]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \, d\Sigma = - \int_\Sigma [h]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \, d\Sigma. \tag{13}$$

Posto ora:

$$I' = \int_\Sigma [h]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \, d\Sigma$$

avremo, quando sia lecita la derivazione sotto il segno:

$$\frac{\partial I'}{\partial x'} = \int_\Sigma [h]_b^* \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial x'} \, d\Sigma + \int_\Sigma \frac{\partial}{\partial x'} [h]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \, d\Sigma$$

ma si trova facilmente:

$$\frac{\partial}{\partial x'} [h]_b^* = - \frac{r}{b^2} \frac{\partial r}{\partial x'} \left[\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \right]_b$$

per cui si ha sostituendo:

$$(14) \qquad \frac{\partial I'}{\partial x'} = \int_\Sigma [h]_b^* \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial x'} d\Sigma + \frac{1}{b^2} \int_\Sigma \left[\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \right]_b \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial x'} \frac{d\Sigma}{r}.$$

Perchè la derivazione sia lecita, e quindi valida questa formola, il punto (x', y', z') dovrà essere esterno a Σ, se il campo è a tre dimensioni, o a distanza finita da Σ, se si tratta di un campo superficiale.

Altre formole analoghe si potrebbero stabilire per le derivate d'ordine superiore, ma per le applicazioni che seguono, sono sufficienti le (13), (14) insieme alle altre simili che si hanno per le derivate rispetto ad y', z'.

§ 6.

È assai facile verificare la seguente identità:

$$(15) \qquad \int_s \{ [v]_b^* \Omega_{xy} + [w]_b^* \Omega_{xz} \} =$$

$$= \int_s \left\{ [u]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + [v]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + [w]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right\} \frac{\partial x}{\partial n} ds - \int_s [U_n]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} ds.$$

ove si è posto:

$$U_n = u \frac{\partial x}{\partial n} + v \frac{\partial y}{\partial n} + w \frac{\partial z}{\partial n}$$

cioè si è indicato con U_n la componente del moto alla superficie nella direzione della normale interna. Analogamente si ha:

$$(15') \qquad \int_s \{ [w]_b^* \Omega_{yz} + [u]_b^* \Omega_{yx} \} ds =$$

$$= \int_s \left\{ [u]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + [v]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + [w]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right\} \frac{\partial y}{\partial n} ds - \int_s [U_n]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} ds$$

$$\int_s \{ [u]_b^* \Omega_{zx} + [v]_b^* \Omega_{zy} \} ds =$$

$$= \int_s \left\{ [u]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + [v]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + [w]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right\} \frac{\partial z}{\partial n} ds - \int_s [U_n]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} ds.$$

Poniamo ora:

$$A = \int_S [X]_b \frac{dS}{r} + \frac{1}{k} \int_s [L]_b \frac{ds}{r} + b^2 \int_s [u]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} ds +$$

$$+ b^2 \int_s \left\{ [u]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + [v]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + [w]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right\} \frac{\partial x}{\partial n} ds$$

$$(16) \qquad B = \int_S [Y]_b \frac{dS}{r} + \frac{1}{k} \int_s [M]_b \frac{ds}{r} + b^2 \int_s [v]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} ds +$$

$$+ b^2 \int_s \left\{ [u]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + [v]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + [w]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right\} \frac{\partial y}{\partial n} ds$$

$$C = \int_S [Z]_b \frac{dS}{r} + \frac{1}{k} \int_s [L]_b \frac{ds}{r} + b^2 \int_s [w]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} ds -$$

$$+ b^2 \int_s \left\{ [u]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + [v]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + [w]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right\} \frac{\partial z}{\partial u} ds$$

e osserviamo che per la (13) si ha:

$$- \int_s [U_n]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} ds = \frac{\partial}{\partial x'} \int_s [U_n]_b \frac{ds}{r} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'}$$

quando si ponga:

$$(17) \qquad \varphi = \int_s [U_n]_b \frac{ds}{r} .$$

e quindi anche:

$$- \int_s [U_n]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} ds = \frac{\partial \varphi}{\partial y'}, \qquad - \int_s [U_n]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} ds = \frac{\partial \varphi}{\partial z'}.$$

Tenendo conto di tutte queste relazioni e posizioni, le formole (10) prendono la forma seguente:

$$4\pi b^2 u(x', y', z', t) = (a^2 - b^2) \frac{\partial \Phi}{\partial x'} + b^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x'} + A$$

$$(18) \qquad 4\pi b^2 v(x', y', z', t) = a^2 - b^2) \frac{\partial \Phi}{\partial y'} + b^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y'} + B$$

$$4\pi b^2 w(x', y', z', t) = (a^2 - b^2) \frac{\partial \Phi}{\partial z'} + b^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z'} + C$$

ove la Φ è definita dalla (11), la φ dalla (17), le A, B, C dalle (16).

Queste formole, in cui la parte longitudinale è messa in evidenza, si prestano immediatamente a dare le espressioni delle componenti della rotazione elementare, che risultano così indipendenti da Φ e φ. Indicando con ξ, η, ζ queste componenti, cioè ponendo:

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y'} - \frac{\partial v}{\partial z'}\right) \quad \eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z'} - \frac{\partial w}{\partial x'}\right) \quad \zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x'} - \frac{\partial u}{\partial y'}\right)$$

si trova:

$$(19) \qquad \begin{aligned} 8\pi b^2 \xi &= \frac{\partial C}{\partial y'} - \frac{\partial B}{\partial z'} \\ 8\pi b^2 \eta &= \frac{\partial A}{\partial z'} - \frac{\partial C}{\partial x'} \\ 8\pi b^2 \zeta &= \frac{\partial B}{\partial x'} - \frac{\partial A}{\partial y'}. \end{aligned}$$

Questa forma sotto cui si presentano le componenti della rotazione elementare è perfettamente simile a quella sotto cui furono poste dal prof. Cerruti [1], le formole corrispondenti della statica, trovate dal Betti.

Per avere un'idea completa della legge secondo cui sono formati i secondi membri delle (19), converrà eseguire le derivazioni indicate servendoci delle (13), (14). Si trova così con qualche ovvia riduzione:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial y'} - \frac{\partial B}{\partial z'} = \int_S \left\{ [Z]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} - [L]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right\} dS + \frac{1}{k} \int_s \left\{ [N]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} - [M]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right\} ds + \\ + b^2 \int_s \left\{ [w]_b^* \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} - [v]_b^* \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right\} ds + \int_s \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \frac{\partial r}{\partial y'} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \frac{\partial r}{\partial z'} \right]_b \frac{\partial r}{\partial n} \frac{ds}{r} + \\ + b^2 \int_s \left\{ [u]_b^* \frac{\partial \Omega_{zy}}{\partial x'} + [v]_b^* \frac{\partial \Omega_{zy}}{\partial y'} + [w]_b^* \frac{\partial \Omega_{zy}}{\partial z'} \right\} ds - \\ - \int_s \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial r}{\partial x'} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \frac{\partial r}{\partial y'} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \frac{\partial r}{\partial z'} \right]_b \Omega_{zy} r ds. \end{aligned}$$

---

[1] Cerruti, *Ricerche intorno all'equilibrio dei corpi elastici isotropi*, "Memorie della R. Acc. dei Lincei", 1882.

Sostituendo questa espressione e le analoghe nelle (19) si trova che, salvo il modo diverso di scrittura, esse coincidono con quelle, a cui, con procedimenti assai laboriosi, è arrivato il prof. Tedone nella Memoria *Sulle vibrazioni dei corpi solidi, omogenei ed isotropi* (Memorie di questa R. Accademia, 1896-97, pag. 217-219).

Anche queste formole si riducono immediatamente a quelle corrispondenti del Betti pel caso statico, supponendo indipendenti dal tempo tutte le quantità che in esse compaiono.

Le (19) rappresentano così le ξ, η, ζ mediante gli elementi fondamentali; però di queste quantità compaiono i valori non relativi al tempo t, ma quelli relativi al tempo $t - \frac{r}{b}$, cioè ad un istante che precede quello che si considera del tempo necessario ad un'onda piana o sferica per percorrere colla velocità b la distanza che esiste fra l'elemento di spazio o di superficie di ciascuno degli integrali ed il punto (x', y', z') nel quale si considerano i valori della ξ, η, ζ. Possiamo quindi dire che ogni elemento del corpo e della sua superficie porta un contributo alla rotazione in un punto $(x'. y', z')$ mediante le forze che in esso agiscono od il movimento da cui esso è animato e che questo contributo si trasmette colla velocità b delle onde trasversali.

§ 7.

Le formole (10) o (18), quantunque in esse compaia ancora la funzione Φ che non è espressa mediante gli elementi fondamentali possono prestarsi anche ad altre applicazioni, oltre quella che ora abbiamo visto della determinazione delle formole di rappresentazione delle rotazioni. Ad esempio, quando si sappia *a priori* che il movimento è trasversale, cioè che $\theta = o$, esse dànno senz'altro le formole definitive di rappresentazione del movimento.

Ed è appunto questo il caso che si presenta nell'ottica e nella teoria delle oscillazioni elettriche.

Ma anche quando si considerano movimenti generali e sia determinata la funzione Φ mediante gli elementi fondamentali.

può essere utile in certi casi il mantenere le formole stesse sotto la forma concisa (10) o (18). Così supponiamo, ad esempio, che non si voglia ammettere *a priori* l'esistenza delle funzioni u, v, w, ma che, *considerando come del tutto arbitrari gli elementi fondamentali che compaiono nelle formole stesse*, si voglia verificare se esse rappresentano effettivamente funzioni soddisfacenti alle condizioni imposte alle componenti del movimento. Si vide subito che l'applicazione della operazione $D_t^2 - b^2\Delta_2$ ai due membri delle (8) porta immediatamente a ritrovare le equazioni indefinite (5).

Supponiamo poi di voler determinare come si comportano le espressioni trovate quando si attraversa la superficie s, anche nel caso in cui questa superficie non è il limite di un corpo dato, ma una superficie chiusa od aperta qualsiasi.

È chiaro per le proprietà fondamentali dei potenziali ritardati, che qualunque siano θ, X, Y, Z, L, M, N, purchè non affette da singolarità, le funzioni:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x'}, \ldots, \int_S [X]_b \frac{dS}{r}, \ldots, \int_s [L]_b \frac{dS}{r}, \ldots$$

si mantengono continue attraversando s. Perciò le discontinuità dei secondi membri delle (10) sono quelle delle espressioni:

$$b^2 \int_s \left\{ [u]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} + [v]_b^* \Omega_{xy} + [w]_b^* \Omega_{xz} \right\} ds$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ora, a cagione delle (7), le funzioni:

$$\int_s [v]_b^* \Omega_{xy} ds, \quad \int_s [w]_b^* \Omega_{xz} ds, \ldots$$

possono essere considerate come potenziali ritardati di superficie e sono quindi continue. Le discontinuità delle espressioni precedenti sono quindi quelle di

$$b^2 \int_s [u]_b^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} ds, \ldots\ldots$$

discontinuità che sono note (§ 1). Indicando quindi con u_n, $u_{n'}$; v_n, $v_{n'}$; w_n, $w_{n'}$ i valori dei secondi membri della (10), e analoghe, da una parte e dall'altra della superficie s, divisi per $4\pi b^2$ si ha:

$$u_n - u_{n'} = u \quad v_n - v_{n'} = v \quad w_n - w_{n'} = w, \tag{20}$$

ove u, v, w rappresentano i valori delle u, v, w dati in quel punto della superficie s e nel tempo t.

Non volendo applicare la (7) (il che implica la possibilità di continuare le u, v, w, date sulla superficie, con funzioni regolari anche nelle immediate vicinanze di questa) si può dimostrare la continuità dell'espressione:

$$\int_s \{ [v]_b{}^* \Omega_{xy} + [w]_b{}^* \Omega_{xz} \} \, ds,$$

osservando che per le formole (13) questa espressione si può scrivere:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_s [U_n]_b \frac{ds}{r} - \frac{\partial}{\partial x} \int_s [u]_b \frac{\partial x}{\partial n} \frac{ds}{r} - \frac{\partial}{\partial y} \int_s [v]_b \frac{\partial x}{\partial n} \frac{ds}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \int_s [w]_b \frac{\partial x}{\partial n} \frac{ds}{r}$$

e che la somma delle discontinuità di queste derivate di integrali è nulla.

Le formole (20) possono essere il punto di partenza per lo studio del problema dinamico analogo al problema statico *delle distorsioni elastiche* studiato recentemente dal prof. Volterra [1], cioè del problema delle vibrazioni di un corpo non soggetto a forze, nel quale sia stato fatto un taglio, che non ne interrompe la connessione, quando i lembi del taglio subiscono spostamenti relativi arbitrariamente variabili col tempo.

I movimenti di questa specie hanno poi interesse anche per il fatto che, come vedremo, essi compaiono come uno degli elementi costitutivi delle formole rappresentanti i movimenti più generali.

---

[1] " Atti della R. Acc. dei Lincei ", 1905.

Effemeridi stellari e fenomeni astronomici pel 1907

pei Dottori BALBI e NICOLIS.

Posizione Geografica del R. Osservatorio di Torino.

Latitudine boreale	45° 4′ 7″.9	
Longitudine da Greenwich	7° 41′ 48″.2 Est	= 0ʰ 30ᵐ 41ˢ.21 E
„ da Berlino	5° 41′ 54″.9 Ovest	= 0ʰ 22ᵐ 47ˢ.66 W
„ da Parigi	5° 21′ 33″.1 Est	= 0ʰ 21ᵐ 26ˢ.21 E
„ da Roma (Coll. Romano)	4° 47′ 5″.3 Ovest	= 0ʰ 19ᵐ 8ˢ.35 W
„ da Milano	1° 29′ 41″.1 Ovest	= 0ʰ 5ᵐ 58ˢ.74 W
„ dal meridiano dell'Europa Centrale . . .	7° 18′ 11″.8 Ovest	= 0ʰ 29ᵐ 12ˢ.79 W

Altitudine sul livello del mare (al pozzetto del barometro) 276ᵐ,4.

Principali articoli del Calendario per l'anno comune 1907.

L'anno 1907 dell'êra cristiana corrisponde all'anno:

6620 del periodo Giuliano;

2683 delle Olimpiadi ossia al 3° anno della 671ª Olimpiade che incomincia nel luglio del 1907, fissando l'êra alle Olimpiadi 775, 5 anni a. G. C. ossia verso il 1° luglio dell'anno 3938 del periodo Giuliano;

2660 della fondazione di Roma secondo Varrone;

2654 dell'êra di Nabonassar, fissata il mercoledì 26 febbraio dell'anno 3967 del periodo Giuliano, ossia 747 anni a. G. C. secondo i cronologisti e 746 secondo gli astronomi (i quali chiamano anno 0 quello che precede immediatamente l'anno 1° dell'êra cristiana);

1907 del calendario Giuliano o russo che incomincia 13 giorni più tardi ossia il lunedì 14 gennaio;

5667 dell'êra israelitica che incomincia giovedì 20 settembre 1906 e finisce lunedì 9 settembre 1907 (principio dell'anno 5668);

1324 dell'êra Maomettana (Egira) che incomincia domenica 25 febbraio 1906 e finisce giovedì 14 febbraio 1907 (principio dell'anno 1325);

43 del 76° ciclo del calendario cinese, da giovedì 25 gennaio 1906 a mercoledì 13 febbraio 1907 (principio dell'anno 44).

Computo Ecclesiastico.

Numero d'oro 8 Epatta 16 Ciclo solare 12 Indizione romana 5
Lettera domenicale F.

Quattro tempora.

Febbraio 20, 22, 23 Maggio 22, 24, 25 Settembre 18, 20, 21
Dicembre 18, 20, 21.

Feste mobili.

Settuagesima	27 gennaio
Le Ceneri	13 febbraio
Pasqua di risurrezione . . .	31 marzo
Rogazioni	6, 7 e 8 maggio
Ascensione	9 maggio
Pentecoste	19 maggio
S.S. Trinità	26 maggio
Corpus Domini	30 maggio
1ª Domenica dell'Avvento . .	1° dicembre.

Ingressi del Sole nei segni dell'Eclittica (1).

Il Sole entra nel segno:

Acquario	il 21 gennaio a $5^h 31^m$
Pesci	„ 19 febbraio a $19^h 58^m$
Ariete	„ 21 marzo a $19^h 33^m$ (principio della Primavera)
Toro	„ 21 aprile a $7^h 17^m$
Gemelli	„ 22 maggio a $7^h 4^m$
Cancro	„ 22 giugno a $15^h 23^m$ (principio dell'Estate)
Leone	„ 24 luglio a $2^h 18^m$
Vergine	„ 24 agosto a $9^h 4^m$
Libra	„ 24 settembre a $6^h 9^m$ (principio dell'Autunno)
Scorpione	„ 24 ottobre a $14^h 52^m$
Sagittario	„ 23 novembre a $11^h 52^m$
Capricorno	„ 23 dicembre a $0^h 52^m$ (principio dell'Inverno).

---

(1) Le ore sono contate di seguito da 0 a 24 in tempo medio secondo l'uso civile, cioè a partire dalla mezzanotte del meridiano origine che è quello passante per l'Etna (15° all'Est di Greenwich) ossia sono espresse in tempo medio civile dell'Europa Centrale.

Fasi lunari.

7	Gennaio	U.Q.	a	15^h	47^m
14	„	L.N.	„	6	57
21	„	P.Q.	„	9	42
29	„	L.P.	„	14	45
6	Febbraio	U.Q.	„	1	52
12	„	L.N.	„	18	43
20	„	P.Q.	„	5	35
28	„	L.P.	„	7	23
7	Marzo	U.Q.	„	9	42
14	„	L.N.	„	7	5
22	„	P.Q.	„	2	10
29	„	L.P.	„	20	44
5	Aprile	U.Q.	„	16	20
12	„	L.N.	„	20	6
20	„	P.Q.	„	21	38
28	„	L.P.	„	7	5
4	Maggio	U.Q.	„	22	54
12	„	L.N.	„	9	59
20	„	P.Q.	„	14	27
27	„	L.P.	„	15	18
3	Giugno	U.Q.	„	6	20
11	„	L.N.	„	0	50
19	„	P.Q.	„	3	55
25	„	L.P.	„	22	27
2	Luglio	U.Q.	„	15	34
10	Luglio	L.N.	a	16^h	17^m
18	„	P.Q.	„	14	12
25	„	L.P.	„	5	30
1	Agosto	U.Q.	„	3	25
9	„	L.N.	„	7	36
16	„	P.Q.	„	22	6
23	„	L.P.	„	13	15
30	„	U.Q.	„	18	28
7	Settembre	L.N.	„	22	4
15	„	P.Q.	„	4	40
21	„	L.P.	„	22	34
29	„	U.Q.	„	12	37
7	Ottobre	L.N.	„	11	21
14	„	P.Q.	„	11	2
21	„	L.P.	„	10	16
29	„	U.Q.	„	8	51
5	Novembre	L.N.	„	23	39
12	„	P.Q.	„	18	14
20	„	L.P.	„	1	4
28	„	U.Q.	„	5	21
5	Dicembre	L.N.	„	11	22
12	„	P.Q.	„	3	16
19	„	L.P.	„	18	55
28	„	U.Q.	„	0	10

Minime e massime distanze della Luna dalla Terra.

Luna perigea.

13	Gennaio	a	3^h
10	Febbraio	„	8
9	Marzo	„	9
3	Aprile	„	6
30	„	„	14
28	Maggio	„	18
26	Giugno	a	3^h
24	Luglio	„	13
21	Agosto	„	20
18	Sett.	„	17
14	Ottobre	„	15
9	Nov.	„	7
7	Dicembre	a	4^h

Luna apogea.

25	Gennaio	a	7^h
22	Febbraio	„	2
21	Marzo	„	22
18	Aprile	„	18
16	Maggio	„	10
12	Giugno	„	20
9	Luglio	a	23^h
6	Agosto	„	6
2	Sett.	„	19
30	„	„	14
28	Ott.	„	10
25	Nov.	„	7
22	Dicembre		22^h

ECLISSI

Nell'anno 1907 avvengono due eclissi di Sole e due di Luna. Nelle nostre regioni è solo parzialmente visibile la seconda eclisse di Luna.

I. *Eclisse totale di* Sole *il 14 gennaio 1907* (*invisibile in Italia*).

La Luna e in congiunzione col Sole il 14 gennaio a $7^h 12^m$.
Questa eclisse è visibile nella parte Nord-Est dell'Africa, nell'Europa orientale e in quasi tutta l'Asia.

II. *Eclisse parziale di* Luna *il 29 gennaio 1907* (*invisibile in Italia*).

La Luna è in opposizione col Sole il 29 gennaio $14^h 26^m$. Grandezza dell'eclisse in parti del diametro lunare: 0,72.
Questa eclisse è visibile nell'America settentrionale, nel Grande Oceano, nell'Australia, nell'Asia, nell'Oceano indiano e nell'Europa orientale.

III. *Eclisse anulare di* Sole *il 10 luglio 1907* (*invisibile in Italia*).

La Luna è in congiunzione col sole il 10 luglio a $16^h 27^m$.
Questa eclisse è visibile nella parte Sud-Est del Grande Oceano, nell'America meridionale, nella metà Australe dell'Oceano Atlantico e nella costa Sud-Ovest dell'Africa.

IV. *Eclisse parziale di* Luna *il 25 luglio 1907* (*visibile in parte in Italia*).

La Luna è in opposizione col Sole il 25 luglio a $5^h 14^m$. Grandezza dell'eclisse in parti del diametro lunare: 0,62.

Primo contatto colla penombra	a	2^h	59^m
Primo contatto coll'ombra (principio dell'eclisse)	„	4	4
Istante medio	„	5	22
Ultimo contatto coll'ombra (fine dell'eclisse) .	„	6	41
Ultimo contatto colla penombra	„	7	46.

Questa eclisse è visibile nella metà occidentale dell'Europa, nell'Africa, nell'Oceano Atlantico, in America e nella parte orientale del Grande Oceano.

A Torino la Luna tramonta il 25 luglio a $5^h\ 3^m$.

La posizione della Luna rispetto all'orizzonte di Torino al principio dell'eclisse è la seguente:

Azimut contato da S verso W	49°
Altezza apparente	8°.

Il primo contatto coll'ombra avviene a 41° dal punto N del disco lunare e per Torino a 6° dal punto più alto verso sinistra (immagine diritta).

Passaggio di Mercurio sul disco del Sole *il 14 novembre 1907 (visibile in Italia).*

La congiunzione di Mercurio col Sole avviene il 14 novembre a $14^h\ 2^m\ 9^s$. Per Torino si hanno i dati seguenti:

1° Contatto esterno . . .	a	11^h	23^m	6^s
1° Contatto interno . . .	„	11	25	45
Minima distanza dei centri	„	13	6	37
2° Contatto interno . . .	„	14	47	42
2° Contatto esterno . . .	„	14	50	21

Il primo contatto esterno avviene a 63° dal punto Nord del disco solare verso l'Est, e il secondo contatto esterno a 15° da Nord verso Ovest (immagine diritta).

A Torino il primo contatto esterno avviene a 73° dal punto più alto del disco solare verso sinistra, e il secondo contatto esterno a 43° dal punto più alto verso destra (immagine diritta).

Questo fenomeno potrà essere osservato nella metà occidentale dell'Asia, in Europa, nell'Africa, nell'America meridionale e nella parte orientale dell'America del nord.

GIORNO DEL MESE	35 Piscium gr.: 6,1		27 ρ Andromedae gr.: 5,4		15 κ Cassiopeiae gr.: 4,2		59 Heis Cassiopeiae gr.: 5,5		68 h Piscium gr.: 5,7	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1907	$0^h.10^m$	$8°.18'$	$0^h.16^m$	$37°.26'$	$0^h.27^m$	$62°.24'$	$0^h.15^m$	$63°.44'$	$0^h.52^m$	$28°.29'$
	s	"	s	"	s	"	s	"		"
Genn. 1	10,41	12,2	12,41	77,8	42,06	78,1	4,25	40,0	47,37	23,7
11	10,29	11,4	12,24	76,9	41,68	77,6	3,85	39,8	47,22	23,1
21	10,18	10,5	12,06	75,7	41,30	76,6	3,44	39,0	47,06	22,2
31	10,08	9,7	11,90	74,2	40,94	75,1	3,05	37,7	46,91	21,1
Febbr. 10							2,69	35,9	46,37	19,8
20										
Marzo 2										
12										
22										
Aprile 1										
11										
21										
Maggio 1										
11										
21	10,90	10,9	12,66	59,8	41,50	51,0				
31	11,19	12,5	12,99	60,3	41,99	50,6	3,77	12,8	47,58	11,9
Giugno 10	11,49	14,3	13,34	61,3	42,52	50,7	4,30	12,6	47,90	13,0
20	11,80	16,3	13,70	62,7	43,06	51,4	4,87	13,0	48,23	14,3
30	12,11	18,3	14,07	64,5	43,61	52,5	5,44	13,9	48,57	15,9
Luglio 10	12,42	20,3	14,42	66,5	44,15	54,1	6,01	15,3	48,90	17,8
20	12,72	22,4	14,76	68,8	44,67	56,2	6,56	17,2	49,23	19,8
30	12,99	24,4	15,07	71,3	45,15	58,6	7,08	19,4	49,55	22,0
Agosto 9	13,23	26,2	15,36	74,0	45,58	61,4	7,56	22,0	49,84	24,3
19	13,45	27,9	15,60	76,7	45,96	64,5	7,98	24,9	50,10	26,6
29	13,63	29,5	15,80	79,4	46,28	67,7	8,35	28,1	50,33	28,9
Sett. 8	13,76	30,8	15,96	82,1	46,53	71,1	8,65	31,4	50,52	31,1
18	13,87	31,9	16,08	84,7	46,71	74,5	8,87	34,6	50,68	33,2
28	13,93	32,8	16,16	87,2	46,82	78,0	9,03	38,2	50,79	34,2
Ottobre 8	13,96	33,4	16,19	89,5	46,87	81,1	9,12	41,6	50,87	37,0
18	13,96	33,8	16,18	91,6	46,84	84,6	9,13	44,8	50,91	38,7
28	13,93	34,0	16,14	93,4	46,75	87,6	9,08	48,0	50,92	40,1
Nov. 7	13,88	34,0	16,06	94,9	46,60	90,3	8,96	50,9	50,90	41,3
17	13,81	33,9	15,96	96,1	46,39	92,6	8,77	53,4	50,85	42,2
27	13,72	33,6	15,83	97,0	46,13	94,6	8,53	55,6	50,78	42,9
Dic. 7	13,61	33,1	15,69	97,5	45,83	96,1	8,24	57,3	50,68	43,3
17	13,51	32,5	15,53	97,6	45,49	97,1	7,90	58,5	50,56	43,4
27	13,39	31,8	15,36	97,4	45,13	97,5	7,52	59,2	50,43	43,2
37	13,28	31,1	15,19	96,8	44,75	97,3	7,12	59,3	50,29	42,7
Posizione media	$0^h.10^m.11^s,38$ $+8°.18'.16'',6$		$0^h.16^m.13^s,17$ $+37°.27'.12'',6$		$0^h.27^m.42^s,43$ $+62°.25'.6'',9$		$0^h.15^m.4^s,42$ $+63°.44'.28'',9$		$0^h.52^m.47^s,97$ $+28°.29'.22'',0$	

Giorno del mese	72 Piscium gr. : 5,9		83 τ Piscium gr. : 4,7		91 *l* Piscium gr. : 5,3		46 ξ Andromedae gr. : 4,9		48 ω Andromedae gr. : 4,9	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1907	1h.0m	14°.26′	1h.6m	29°.35′	1h.15m	28°.14′	1h.16m	45°.2′	1h.22m	44°.55′
	s	″	s	″	s	″	s	″	s	″
Genn. 1	10,02	42,7	31,61	47,6	58,11	68,6	51,30	35,4	4,89	42,7
11	9,89	42,0	31,45	47,1	57,97	68,1	51,09	35,2	4,68	42,6
21	9,76	41,2	31,29	46,3	57,81	67,4	50,87	34,7	4,46	42,0
31	9,63	40,4	31,13	45,3	57,65	66,5	50,65	33,7	4,24	41,1
Febbr. 10	9,51	39,5	30,98	44,1	57,50	65,4	50,44	32,3	4,03	39,8
20					57,36	64,1	50,24	30,7	3,83	38,3
Marzo 2										
12										
22										
Aprile 1										
11										
21										
Maggio 1										
11										
21										
31	10,23	39,5	31,66	35,6						
Giugno 10	10,52	40,9	31,97	36,5	58,38	58,4	51,35	16,5	4,87	24,0
20	10,83	42,6	32,30	37,7	58,70	59,6	51,73	17,1	5,25	24,5
30	11,14	44,4	32,64	39,2	59,04	61,1	52,13	18,2	5,65	25,5
Luglio 10	11,46	46,4	32,98	41,0	59,38	62,9	52,53	19,5	6,05	26,8
20	11,77	48,4	33,32	42,9	59,71	64,7	52,92	21,3	6,45	28,5
30	12,07	50,4	33,64	45,0	60,04	66,7	53,30	23,4	6,83	30,5
Agosto 9	12,35	52,3	33,94	47,3	60,34	68,9	53,66	25,6	7,19	32,7
19	12,60	54,2	34,22	49,5	60,62	71,1	53,99	28,0	7,53	35,1
29	12,82	56,0	34,46	51,8	60,87	73,2	54,28	30,6	7,83	37,7
Sett. 8	13,00	57,6	34,67	54,0	61,08	75,4	54,53	33,3	8,09	40,3
18	13,16	59,0	34,84	56,1	61,26	77,4	54,74	36,1	8,31	43,0
28	13,28	60,2	34,97	58,1	61,40	79,3	54,91	38,8	8,48	45,7
Ottobre 8	13,36	61,2	35,07	60,0	61,51	81,1	55,03	41,4	8,61	48,3
18	13,41	62,0	35,13	61,7	61,58	82,7	55,11	43,9	8,69	50,8
28	13,43	62,5	35,15	63,2	61,62	84,1	55,15	46,2	8,74	53,1
Nov. 7	13,42	62,9	35,14	64,5	61,62	85,3	55,14	48,3	8,75	55,3
17	13,39	63,1	35,11	65,5	61,59	86,3	55,10	50,2	8,71	57,1
27	13,33	63,2	35,05	66,3	61,54	87,0	55,02	51,8	8,64	58,7
Dic. 7	13,25	63,0	34,96	66,8	61,47	87,5	54,90	53,0	8,53	60,0
17	13,16	62,7	34,85	67,0	61,37	87,7	54,75	53,9	8,39	60,9
27	13,05	62,2	34,72	66,9	61,24	87,7	54,58	54,4	8,22	61,5
37	12,93	61,6	34,58	66,3	61,10	87,4	54,38	54,4	8,02	61,8
Posizione media	1h.0m.10s,67 +14°.26′.45″,8		1h.6m.32s,13 +29°.35′.45″,8		1h.15m.58s,59 +28°.15′. 7″,5		1h.16m.51s,60 +45°.2′.29″,3		1h.22m.5s,16 +44°.55′.36″,7	

Giorno del mese	98 μ Piscium gr.: 5,1		53 τ Andromedae gr.: 5,3		5 γ Arietis gr.: 4,7		9 λ Arietis gr.: 5,0		53 Cassiopeiae gr.: 5,6	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1907	$1^h.25^m$	5°.39′	$1^h.35^m$	40°.6′	$1^h.48^m$	18°.50′	$1^h.52^m$	23°.8′	$1^h.56^m$	63°.56′
	s	″	s	″	s	″	s	″	s	″
Genn. 1	18,11	46,9	4,93	26,9	25,16	14,4	44,33	32,5	6,98	37,5
11	17,99	46,2	4,75	26,8	25,03	14,0	44,20	32,1	6,61	38,2
21	17,87	45,6	4,56	26,3	24,89	13,4	44,06	31,6	6,21	38,3
31	17,74	45,0	4,35	25,5	24,75	12,7	43,90	30,9	5,79	38,0
Febbr. 10	17,61	44,4	4,15	24,4	24,60	11,9	43,74	30,1	5,37	37,1
20	17,48	43,9	3,97	23,0	24,46	11,1	43,59	29,2	4,98	35,7
Marzo 2					24,33	10,3	43,45	28,3	4,62	33,9
12										
22										
Aprile 1										
11										
21										
Maggio 1										
11										
21										
31										
Giugno 10	18,36	51,0	4,84	10,9						
20	18,65	52,8	5,19	11,6	25,43	11,7	44,53	27,2	6,12	13,0
30	18,95	54,7	5,56	12,6	25,74	13,2	44,85	28,6	6,68	13,0
Luglio 10	19,26	56,7	5,94	13,9	26,06	14,9	45,17	30,2	7,27	13,5
20	19,57	58,6	6,31	15,5	26,38	16,7	45,50	31,9	7,86	14,5
30	19,87	60,5	6,68	17,4	26,69	18,5	45,82	33,7	8,45	15,9
Agosto 9	20,16	62,2	7,03	19,5	27,00	20,4	46,13	35,6	9,01	17,7
19	20,43	63,8	7,35	21,8	27,28	22,3	46,42	37,5	9,55	19,8
29	20,66	65,2	7,64	24,2	27,54	24,0	46,69	39,4	10,04	22,3
Sett. 8	20,86	66,3	7,90	26,6	27,77	25,7	46,94	41,2	10,48	25,1
18	21,04	67,2	8,12	29,0	27,97	27,2	47,15	42,8	10,87	28,0
28	21,18	67,9	8,31	31,4	28,14	28,5	47,32	44,4	11,20	31,1
Ottobre 8	21,29	68,4	8,45	33,8	28,28	29,7	47,46	45,8	11,46	34,3
18	21,36	68,6	8,55	36,0	28,39	30,7	47,57	47,1	11,65	37,5
28	21,41	68,6	8,61	38,1	28,46	31,5	47,65	48,1	11,78	40,7
Nov. 7	21,43	68,5	8,64	40,0	28,50	32,2	47,70	49,0	11,83	43,7
17	21,42	68,2	8,63	41,6	28,51	32,6	47,72	49,8	11,80	46,6
27	21,38	67,8	8,58	43,1	28,50	32,9	47,71	50,3	11,71	49,3
Dic. 7	21,32	67,3	8,50	44,2	28,46	33,1	47,67	50,6	11,54	51,6
17	21,25	66,7	8,38	45,0	28,39	33,0	47,60	50,8	11,31	53,5
27	21,15	66,1	8,24	45,4	28,30	32,8	47,50	50,8	11,02	55,0
37	21,04	65,5	8,07	45,5	28,18	32,5	47,39	50,6	10,67	56,0
Posizione media	$1^h.25^m.18^s,67$ +5°.39′.53″,6		$1^h.35^m.5^s,19$ +40°.6′.22″,6		$1^h.48^m.25^s,52$ +18°.50′.17″,0		$1^h.52^m.44^s,65$ +23°.8′.33″,8		$1^h.56^m.6^s,51$ +63°.56′.28″,4	

Giorno del mese	35 Arietis gr. : 4,6		15 η Persei gr. : 3,9		91 λ Ceti gr. : 5,0		ι Persei gr. : 4,2		35 σ Persei gr. 4,4	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1907	$2^h.37^m$	$27^\circ.18'$	$2^h.43^m$	$55^\circ.30'$	$2^h.54^m$	$8^\circ.32'$	$3^h.2^m$	$49^\circ.15'$	$3^h.23^m$	$47^\circ.40'$
	s	"	s	"	s	"	s	"	s	"
Genn. 1	59,40	41,4	54,84	41,7	43,64	7,6	21,36	33,4	61,23	31,4
11	59,28	41,3	54,61	42,7	43,55	7,1	21,19	34,3	61,09	32,4
21	59,14	41,1	54,34	43,2	43,43	6,5	20,99	34,8	60,90	33,1
31	58,97	40,7	54,05	43,3	43,29	6,0	20,75	34,9	60,68	33,4
Febbr. 10	58,80	40,2	53,74	42,9	43,14	5,6	20,49	34,7	60,43	33,4
20	58,62	39,5	53,42	42,1	42,98	5,1	20,23	34,1	60,17	33,0
Marzo 2	58,45	38,6	53,12	40,9	42,82	4,8	19,97	33,1	59,91	32,3
12	58,30	37,7	52,85	39,4	42,68	4,5	19,73	31,9	59,67	31,3
22									59,45	30,3
Aprile 1										
11										
21										
Maggio 1										
11										
21										
31										
Giugno 10										
20										
30	59,41	35,7	54,18	22,7	43,54	12,9	20,77	17,8		
Luglio 10	59,74	36,8	54,64	22,9	43,82	14,6	21,17	18,0	60,77	17,9
20	60,07	38,2	55,12	23,5	44,12	16,3	21,60	18,5	61,17	18,2
30	60,41	39,7	55,60	24,4	44,43	17,9	22,04	19,4	61,59	18,8
Agosto 9	60,74	41,3	56,08	25,7	44,74	19,5	22,47	20,5	62,01	19,8
19	61,06	42,9	36,55	27,3	45,03	20,9	22,90	21,9	62,43	21,0
29	61,36	44,6	57,00	29,2	45,31	22,2	23,31	23,6	62,83	22,4
Sett. 8	61,64	46,3	57,42	31,3	45,58	23,4	23,70	25,5	63,22	24,0
18	61,89	47,9	57,80	33,7	45,82	24,3	24,06	27,6	63,59	25,8
28	62,12	49,5	58,14	36,2	46,04	25,0	24,39	29,7	63,93	27,7
Ottobre 8	62,32	51,0	58,43	38,8	46,24	25,4	24,68	31,9	64,24	29,7
18	62,49	52,3	58,68	41,5	46,40	25,7	24,93	34,2	64,51	31,8
28	62,62	53,5	58,88	44,1	46,54	25,8	25,15	36,5	64,75	33,9
Nov. 7	62,72	54,6	59,02	46,7	46,67	25,7	25,32	38,8	64,94	36,0
17	62,79	55,6	59,12	49,3	46,73	25,4	25,43	41,0	65,09	38,0
27	62,83	56,4	59,15	51,7	46,77	25,1	25,50	43,1	65,19	40,0
Dic. 7	62,83	57,1	59,12	53,9	46,79	24,7	25,52	44,9	65,24	41,9
17	62,79	57,6	59,03	55,8	46,77	24,2	25,48	46,6	65,23	43,6
27	62,72	57,9	58,89	57,4	46,73	23,7	25,39	48,0	65,17	45,0
37	62,62	58,0	58,69	58,6	46,65	23,2	25,26	49,1	65,06	46,2
Posizione media	$2^h.37^m.59^s,46$ $+27^\circ.18'.42'',4$		$2^h.43^m.54^s,39$ $+55^\circ.30'.36'',1$		$2^h.54^m.43^s,73$ $+8^\circ.32'.14'',5$		$3^h.2^m.20^s,99$ $+49^\circ.15'.29'',7$		$3^h.24^m.0^s,81$ $+47^\circ.40'.28'',9$	

Giorno del mese	11 Heis Cameleop. gr. : 5,2		38 o Persei gr. : 3,9		17 Tauri gr. : 3,8		27 Tauri gr. : 3,8		47 λ Persei gr. : 4,3	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1907	$3^h.34^m$	62°.54′	$3^h.38^m$	31°.59′	$3^h.39^m$	23°.49′	$3^h.43^m$	23°.46′	$3^h.59^m$	50°.5′
	s	″	s	″	s	″	s	″	s	″
Genn. 1	5,64	62,1	29,18	36,8	21,19	13,6	37,97	6,8	39,72	59,6
11	5,40	63,8	29,10	37,3	21,11	13,7	37,90	6,9	39,61	61,0
21	5,10	65,1	28,97	37,6	21,00	13,7	37,79	6,9	39,45	62,1
31	4,75	65,9	28,81	37,6	20,86	13,6	37,65	6,8	39,23	62,8
Febbr. 10	4,35	66,2	28,63	37,5	20,70	13,3	37,49	6,6	38,98	63,2
20	3,93	66,1	28,44	37,2	20,52	12,9	37,31	6,3	38,71	63,2
Marzo 2	3,52	65,5	28,24	36,7	20,33	12,5	37,12	5,8	38,42	62,9
12	3,13	64,4	28,04	36,0	20,15	12,0	36,94	5,3	38,15	62,1
22	2,77	62,9	27,86	35,2	19,99	11,4	36,78	4,8	37,89	61,1
Aprile 1									37,67	59,8
11										
21										
Maggio 1										
11										
21										
31										
Giugno 10										
20										
30										
Luglio 10	4,21	43,6	28,88	31,1	20,95	12,0	37,69	5,2		
20	4,76	43,3	29,21	31,9	21,26	13,0	38,00	6,2	39,18	47,1
30	5,33	43,4	29,55	32,8	21,58	14,1	38,32	7,3	39,61	47,3
Agosto 9	5,92	43,9	29,89	33,8	21,90	15,3	38,64	8,5	40,04	47,7
19	6,52	44,8	30,24	35,0	22,22	16,6	38,96	9,7	40,48	48,4
29	7,10	46,1	30,58	36,3	22,54	17,8	39,28	10,9	40,92	49,4
Sett. 8	7,66	47,6	30,90	37,6	22,84	19,0	39,58	12,1	41,34	50,6
18	8,19	49,5	31,21	38,9	23,13	20,2	39,88	13,2	41,76	52,0
28	8,69	51,6	31,50	40,3	23,40	21,3	40,15	14,3	42,15	53,6
Ottobre 8	9,14	53,9	31,77	41,6	23,65	22,3	40,40	15,3	42,51	55,4
18	9,55	56,5	32,01	42,9	23,88	23,2	40,62	16,2	42,84	57,2
28	9,89	59,1	32,22	44,2	24,07	23,9	40,82	16,9	43,14	59,2
Nov. 7	10,17	61,9	32,40	45,3	24,24	24,6	41,00	17,6	43,40	61,2
17	10,38	64,7	32,54	46,4	24,38	25,3	41,15	18,2	43,61	63,3
27	10,52	67,4	32,65	47,5	24,48	25,8	41,25	18,7	43,77	65,3
Dic. 7	10,58	70,1	32,72	48,4	24,55	26,2	41,32	19,1	43,87	67,3
17	10,55	72,6	32,74	49,3	24,57	26,6	41,35	19,5	43,91	69,2
27	10,44	74,8	32,72	50,0	24,56	26,8	41,35	19,7	43,90	70,9
37	10,25	76,7	32,66	50,5	24,51	27,0	41,30	19,9	43,82	72,4
Posizione media	$3^h.34^m.4^s,57$ +62°.54′.57″,5		$3^h.38^m.28^s,96$ +31°.59′.38″,3		$3^h.39^m.21^s,03$ +23°.49′.16″,9		$3^h.43^m.37^s,79$ +23°.46′.10″,2		$3^h.59^m.39^s,11$ +50°.5′.58″,2	

Giorno del mese	42 ψ Tauri gr. : 5,4		44 p Tauri gr. : 5,6		51 μ Persei gr. : 4,3		54 Persei gr. : 5,1		68 Tauri gr. : 4,6	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1907	4h.1m	28°.44′	4h.5m	26°.14′	4h.8m	48°.10′	4h.14m	34°.20′	4h.20m	17°.42′
	s	″	s	″	s	″	s	″	s	″
Genn. 1	15,64	58,3	10,16	16,1	4,49	25,6	22,53	31,7	6,68	50,9
11	15,58	58,7	10,10	16,4	4,40	26,9	22,47	32,4	6,64	50,8
21	15,48	59,0	10,00	16,5	4,26	28,0	22,37	32,9	6,56	50,6
31	15,34	59,0	9,87	16,6	4,06	28,7	22,23	33,3	6,45	50,5
Febbr. 10	15,17	59,0	9,70	16,5	3,82	29,1	22,05	33,4	6,30	50,3
20	14,98	58,8	9,52	16,3	3,56	29,2	21,85	33,4	6,13	50,1
Marzo 2	14,78	58,5	9,33	16,0	3,29	28,9	21,63	33,1	5,95	49,9
12	14,59	58,0	9,14	15,6	3,02	28,3	21,42	32,7	5,77	49,6
22	14,41	57,4	8,96	15,1	2,77	27,4	21,23	32,1	5,60	49,4
Aprile 1	14,26	56,8	8,81	14,6	2,55	26,3	21,05	31,3	5,44	49,1
11										
21										
Maggio 1										
11										
21										
31										
Giugno 10										
20										
30										
Luglio 10										
20	15,49	55,5	9,98	14,6	3,93	14,3	22,23	26,6	6,42	53,7
30	15,81	56,4	10,30	15,5	4,34	14,4	22,54	27,1	6,71	54,7
Agosto 9	16,14	57,3	10,62	16,4	4,76	14,8	22,88	27,8	7,02	55,8
19	16,48	58,3	10,95	17,5	5,18	15,5	23,24	28,6	7,32	56,9
29	16,81	59,4	11,28	18,5	5,60	16,3	23,59	29,6	7,63	57,9
Sett. 8	17,13	60,5	11,59	19,6	6,02	17,4	23,94	30,6	7,94	58,8
18	17,44	61,6	11,91	20,5	6,43	18,7	24,27	31,6	8,23	59,6
28	17,74	62,7	12,20	21,6	6,81	20,2	24,59	32,7	8,52	60,3
Ottobre 8	18,02	63,7	12,47	22,5	7,17	21,8	24,89	33,9	8,78	60,8
18	18,27	64,7	12,72	23,4	7,50	23,5	25,17	35,0	9,03	61,2
28	18,50	65,7	12,95	24,2	7,80	25,3	25,43	36,1	9,26	61,5
Nov. 7	18,70	66,5	13,15	24,9	8,06	27,2	25,65	37,3	9,46	61,7
17	18,86	67,4	13,31	25,5	8,27	29,1	25,84	38,4	9,63	61,8
27	18,99	68,2	13,45	26,2	8,44	31,0	25,99	39,4	9,77	61,8
Dic. 7	19,09	68,9	13,54	26,7	8,56	32,9	26,10	40,5	9,88	61,8
17	19,14	69,5	13,60	27,2	8,62	34,7	26,17	41,4	9,95	61,7
27	19,14	70,1	13,61	27,6	8,62	36,3	26,19	42,3	9,97	61,6
37	19,10	70,5	13,58	27,9	8,56	37,7	26,16	43,1	9,96	61,5
Posizione media	4h.1m.15s,37 +28°.45′.1″,1		4h.5m.9s,89 +26°.14′.19″,4		4h.8m.3s,90 +48°.10′.24″,9		4h.14m.22s,16 +34°.20′.33″,6		4h.20m.6s,42 +17°.42′.56″,3	

Giorno del mese	[illegible] gr. : 5,5		50 Tauri gr. : 6,0		86 ρ Tauri gr. : 4,9		3 π^3 Orionis gr. : 4,0		4 o^1 Orionis gr. : 4,8	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1907	$4^h.24^m$	53°.42′	$4^h.24^m$	15°.25′	$4^h.28^m$	14°.38′	$4^h.46^m$	5°.26′	$4^h.47^m$	14°.5′
	s	″	s	″	s	″	s	″	s	″
Genn. [illegible]	40,44	35,2	50,57	61,6	34,44	51,7	15,46	39,9	16,54	40,3
11	40,35	36,8	50,52	61,3	34,41	51,5	15,43	39,1	16,53	40,0
21	40,19	[illegible]	50,44	[illegible]	[illegible]	51,2	15,37	[illegible]	16,47	39,7
31	39,97	39,2	50,34	60,9	34,23	51,0	15,27	37,9	16,37	39,4
Febbr. 10	39,71	40,0	50,20	60,7	34,09	50,7	15,14	37,5	16,24	39,2
20	39,42	40,3	50,03	60,4	33,92	50,5	14,98	37,1	16,08	39,0
Marzo 2	39,11	40,3	49,85	60,2	33,74	50,3	14,80	36,9	15,90	38,8
12	38,79	39,8	49,67	60,0	33,56	50,1	14,62	36,8	15,72	38,7
22	38,50	39,0	49,50	59,8	33,39	50,0	14,45	36,8	15,54	38,6
Aprile 1	38,23	37,9	49,33	59,7	33,23	49,8	14,29	37,0	15,38	38,5
11							14,15	37,3	15,24	38,5
21										
Maggio 1										
11										
21										
31										
Giugno 10										
20										
30										
Luglio 10										
20	39,47	22,8	50,27	65,4	34,11	55,9				
30	39,91	22,6	50,55	66,5	34,40	57,0	15,22	49,2	16,36	45,3
Agosto 9	40,37	22,6	50,85	67,6	34,69	58,1	15,50	50,5	16,65	46,6
19	40,84	23,0	51,16	68,7	35,00	59,2	15,78	51,6	16,94	47,6
29	41,31	23,6	51,46	69,7	35,30	60,2	16,08	52,6	17,24	48,4
Sett. 8	41,78	24,5	51,76	70,5	35,60	61,0	16,37	53,4	17,54	49,2
18	42,24	25,6	52,06	71,3	35,89	61,7	16,66	53,9	17,84	49,8
28	42,68	27,0	52,34	71,9	36,18	62,2	16,93	54,2	18,13	50,3
Ottobre 8	43,10	28,5	52,60	72,3	36,44	62,7	17,20	54,3	18,41	50,6
18	43,49	30,2	52,85	72,6	36,69	62,9	17,45	54,1	18,67	50,7
28	43,84	32,2	53,07	72,8	36,92	63,0	17,69	53,7	18,91	50,7
Nov. 7	44,15	34,2	53,28	72,8	37,13	63,0	17,90	53,1	19,13	50,5
17	44,42	36,2	53,46	72,7	37,31	63,0	18,08	52,4	19,33	50,3
27	44,63	38,4	53,60	72,6	37,45	62,7	18,24	51,6	19,49	50,0
Dic. 7	44,78	40,5	53,71	72,4	37,57	62,4	18,36	50,7	19,62	49,7
17	44,86	42,6	53,78	72,2	37,64	62,2	18,45	49,9	19,71	49,4
27	44,87	44,6	53,81	72,0	37,67	61,9	18,49	49,1	19,76	49,1
37	44,82	46,4	53,80	71,8	37,66	61,7	18,49	48,3	19,77	48,7
Posizione media	$4^h.24^m.39^s,63$	+53°.42′.34″,4	$4^h.24^m.50^s,30$	+15°.26′.7″,4	$4^h.28^m.34^s,16$	+14°.38′.57″,7	$4^h.46^m.15^s,13$	+5°.26′.47″,5	$4^h.47^m.16^s,22$	+14°.5′.46″,4

Giorno del mese	98 *k* Tauri gr. : 6,1		25 Orionis gr. : 5,2		37 φ¹ Orionis gr. : 4,5		130 Tauri gr. : 5,5		66 Orionis gr. : 5,7	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1907	$4^h.52^m$	$24°.54'$	$5^h.19^m$	$1°.45'$	$5^h.29^m$	$9°.25'$	$5^h.41^m$	$17°.41'$	$6^h.0^m$	$4°.9'$
	s	"	s	"	s	"	s	"	s	"
Genn. 1	28,21	21,4	55,55	33,9	43,27	30,5	61,27	35,2	3,95	44,7
11	28,20	21,7	55,55	32,9	43,28	29,9	61,30	35,0	3,99	43,8
21	28,14	22,0	55,51	32,0	43,25	29,4	61,29	34,9	3,99	42,9
31	28,04	22,2	55,43	31,2	43,18	29,0	61,23	34,9	3,94	42,2
Febbr. 10	27,90	22,3	55,31	30,6	43,07	28,7	61,12	34,9	3,84	41,6
20	27,73	22,3	55,16	30,2	42,93	28,4	60,98	34,9	3,71	41,2
Marzo 2	27,54	22,2	55,00	30,0	42,76	28,3	60,81	34,9	3,56	41,0
12	27,34	22,1	54,82	29,9	42,58	28,2	60,63	34,9	3,39	40,9
22	27,15	21,9	54,63	29,9	42,40	28,2	60,44	34,9	3,20	40,9
Aprile 1	26,97	21,6	54,46	30,1	42,23	28,3	60,26	34,9	3,02	41,0
11	26,82	21,2	54,31	30,5	42,07	28,5	60,10	35,0	2,86	41,3
21			54,19	31,0	41,94	28,8	59,95	35,0	2,71	41,7
Maggio 1									2,59	42,3
11										
21										
31										
Giugno 10										
20										
30										
Luglio 10										
20										
30	27,98	22,0								
Agosto 9	28,29	22,6	55,30	44,8	43,04	38,0	61,01	39,3		
19	28,61	23,3	55,58	45,9	43,32	39,0	61,29	39,9	3,76	54,0
29	28,93	24,0	55,86	46,9	43,60	39,8	61,59	40,4	4,03	54,8
Sett. 8	29,25	24,7	56,15	47,6	43,89	40,4	61,89	40,9	4,31	55,4
18	29,57	25,4	56,44	48,0	44,19	40,8	62,19	41,2	4,60	55,8
28	29,88	26,0	56,72	48,2	44,48	41,0	62,50	41,3	4,89	55,9
Ottobre 8	30,17	26,5	57,00	48,1	44,77	41,0	62,80	41,4	5,18	55,7
18	30,46	27,0	57,27	47,7	45,04	40,8	63,10	41,4	5,46	55,2
28	30,73	27,4	57,52	47,0	45,31	40,4	63,38	41,2	5,74	54,5
Nov. 7	30,97	27,8	57,76	46,2	45,56	39,8	63,65	41,0	6,00	53,7
17	31,18	28,2	57,97	45,2	45,79	39,2	63,90	40,7	6,25	52,7
27	31,37	28,6	58,16	44,0	45,99	38,5	64,12	40,4	6,47	51,6
Dic. 7	31,52	29,0	58,31	42,9	46,15	37,7	64,31	40,1	6,66	50,4
17	31,62	29,2	58,42	41,7	46,28	37,0	64,46	39,8	6,82	49,2
27	31,68	29,5	58,50	40,6	46,37	36,3	64,57	39,6	6,93	48,1
37	31,69	29,8	58,53	39,9	46,42	35,6	64,63	39,4	7,00	47,1
Posizione media	$4^h.52^m.27^s,84$ $+24°.54'.26'',0$		$5^h.19^m.55^s,13$ $+1°.45'.41'',6$		$5^h.29^m.42^s,85$ $+9°.25'.37'',3$		$5^h.42^m.0^s,85$ $+17°.41'.41'',1$		$6^h.0^m.3^s,49$ $+4°.9'.51'',6$	

Giorno del mese	74 *k* Orionis gr. : 5,4		2 Lyncis gr : 4,3		6 Lyncis gr. : 6,0		58 ψ⁷ Aurigae gr. : 5,0		45 Geminorum gr. : 5,5	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1907	$6^h.11^m$	12°.17′	$6^h.11^m$	59°.2′	$6^h.22^m$	58°.13′	$6^h.44^m$	41°.53′	$7^h.3^m$	16°.4′
	s	″	s	″	s	″	s	″	s	″
Genn. 1	13,74	48,9	26,34	39,5	43,76	50,0	11,93	23,5	2,48	40,8
11	13,80	48,3	26,42	41,8	43,86	52,2	12,05	24,7	2,59	40,4
21	13,81	47,9	26,40	43,9	43,87	54,3	12,10	26,0	2,65	40,1
31	13,77	47,6	26,30	46,0	43,78	56,3	12,08	27,3	2,66	40,0
Febbr. 10	13,69	47,4	26,11	47,8	43,62	58,2	12,00	28,6	2,62	40,0
20	13,56	47,3	25,86	49,3	43,39	59,8	11,87	29,7	2,53	40,0
Marzo 2	13,41	47,3	25,55	50,5	43,10	61,1	11,69	30,7	2,41	40,2
12	13,24	47,3	25,20	51,3	42,77	62,0	11,48	31,5	2,26	40,4
22	13,06	47,4	24,83	51,7	42,42	62,4	11,25	32,1	2,08	40,6
Aprile 1	12,88	47,5	24,47	51,6	42,06	62,5	11,01	32,4	1,90	40,9
11	12,71	47,7	24,13	51,1	41,72	62,2	10,78	32,4	1,73	41,1
21	12,56	47,9	23,82	50,3	41,41	61,5	10,56	32,2	1,56	41,4
Maggio 1	12,44	48,2	23,56	49,1	41,15	60,4	10,38	31,8	1,42	41,6
11							10,23	31,1	1,30	41,9
21										
31										
Giugno 10										
20										
30										
Luglio 10										
20										
30										
Agosto 9										
19	13,57	55,2	25,36	30,8	42,74	42,0				
29	13,85	55,7	25,86	29,9	43,22	41,0	11,77	20,5	2,36	45,2
Sett. 8	14,13	56,1	26,38	29,3	43,72	40,2	12,12	19,9	2,62	45,2
18	14,42	56,3	26,91	28,9	44,24	39,7	12,49	19,3	2,91	45,1
28	14,72	56,3	27,46	28,8	44,77	39,4	12,88	18,9	3,21	44,8
Ottobre 8	15,02	56,2	28,01	29,0	45,31	39,4	13,27	18,6	3,51	44,4
18	15,32	55,9	28,55	29,5	45,85	39,7	13,66	18,4	3,82	43,8
28	15,61	55,4	29,08	30,3	46,37	40,3	14,06	18,3	4,13	43,1
Nov. 7	15,89	54,8	29,58	31,4	46,88	41,2	14,44	18,5	4,44	42,4
17	16,15	54,1	30,05	32,7	47,35	42,4	14,81	18,8	4,74	41,6
27	16,39	53,4	30,47	34,3	47,78	43,8	15,15	19,3	5,03	40,7
Dic. 7	16,60	52,7	30,83	36,1	48,15	45,5	15,46	20,0	5,29	39,9
17	16,78	52,0	31,12	38,2	48,46	47,4	15,72	20,9	5,51	39,2
27	16,91	51,3	31,34	40,4	48,69	49,5	15,93	21,9	5,70	38,6
37	17,00	50,7	31,47	42,6	48,84	51,7	16,08	23,1	5,84	38,1
Posizione media	$6^h.11^m.13^s,30$ + 12°.17′.55″,1		$6^h.11^m.25^s,22$ + 59°.2′.43″,6		$6^h.22^m.42^s,70$ + 58°.13′.54″,6		$6^h.44^m.11^s,35$ + 41°.53′.29″,4		$7^h.3^m.2^s,06$ + 16°.4′.46″,8	

GIORNO DEL MESE	64 Aurigae gr. : 5,7		6 Canis Minoris gr. : 4,8		69 υ Gemin. gr. : 4,3		71 ο Gemin. gr. : 4,3		10 μ Cancri gr. : 5,6	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1907	7h.11m	41°.2′	7h.24m	12°.11′	7h.30m	27°.5′	7h.33m	34°.47′	8h.2m	21°.50′
	s	″	s	″	s	″	s	″	s	″
Genn. 1	34,91	49,8	37,64	52,1	12,00	64,2	6,28	45,8	17,91	61,4
11	35,06	50,9	37,77	51,4	12,16	64,4	6,45	46,5	18,09	61,0
21	35,14	52,1	37,85	50,8	12,26	64,7	6,56	47,3	18,22	60,9
31	35,16	53,4	37,88	50,4	12,29	65,2	6,60	48,2	18,29	61,0
Febbr. 10	35,12	54,7	37,86	50,1	12,28	65,8	6,58	49,2	18,31	61,3
20	35,01	56,0	37,79	50,0	12,21	66,4	6,51	50,3	18,27	61,7
Marzo 2	34,86	57,1	37,68	50,0	12,10	67,1	6,39	51,3	18,19	62,2
12	34,67	58,1	37,54	50,1	11,95	67,7	6,23	52,2	18,07	62,7
22	34,45	58,9	37,38	50,3	11,78	68,3	6,05	53,0	17,92	63,3
Aprile 1	34,22	59,4	37,21	50,6	11,59	68,8	5,84	53,6	17,76	63,8
11	33,99	59,7	37,03	50,9	11,40	69,2	5,63	54,0	17,58	64,3
21	33,77	59,7	36,86	51,2	11,22	69,5	5,43	54,2	17,41	64,8
Maggio 1	33,58	59,5	36,71	51,6	11,05	69,6	5,25	54,3	17,24	65,1
11	33,42	59,0	36,59	52,0	10,91	69,6	5,10	54,4	17,10	65,4
21							4,98	54,3	16,99	65,8
31										
Giugno 10										
20										
30										
Luglio 10										
20										
30										
Agosto 9										
19										
29	34,62	48,1	37,43	56,9	11,80	66,1				
Sett. 8	34,95	47,2	37,68	57,0	12,07	65,5	6,30	45,3	17,89	63,6
18	35,31	46,4	37,95	56,8	12,36	64,9	6,61	44,5	18,15	63,0
28	35,67	45,7	38,23	56,5	12,67	64,2	6,94	43,6	18,43	62,2
Ottobre 8	36,05	45,1	38,52	56,0	12,99	63,5	7,29	42,8	18,73	61,3
18	36,45	44,6	38,83	55,3	13,33	62,7	7,65	42,0	19,04	60,4
28	36,84	44,2	39,14	54,5	13,67	62,0	8,02	41,3	19,37	59,4
Nov. 7	37,24	44,0	39,45	53,5	14,01	61,3	8,39	40,8	19,70	58,3
17	37,62	44,0	39,75	52,5	14,35	60,7	8,75	40,3	20,04	57,3
27	37,98	44,2	40,04	51,4	14,67	60,1	9,10	40,0	20,37	56,3
Dic. 7	38,31	44,6	40,31	50,3	14,97	59,7	9,43	40,0	20,68	55,4
17	38,60	45,2	40,55	49,3	15,24	59,4	9,72	40,1	20,96	54,7
27	38,84	46,0	40,75	48,3	15,47	59,3	9,96	40,5	21,21	54,1
37	39,03	47,1	40,91	47,5	15,66	59,5	10,16	41,1	21,42	53,7
Posizione media	7h.11m.34s,38	+41°.2′.56″,4	7h.24m.37s,23	+12.11′.57″,6	7h.30m.11s,62	+27°.6′.10″,6	7h.33m.5s,86	+34°.47′.52″,7	8h.2m.17s,60	+21°.51′.7″,3

Giorno del anno	18 χ Cancri gr.: 5,3 Ascens. retta	Declinaz. boreale	29 Cancri gr.: 6,2 Ascens. retta	Declinaz. boreale	27 (Bode) Urs. Maj. gr.: 6,0 Ascens. retta	Declinaz. boreale	55 ρ¹ Cancri gr.: [illegible] Ascens. retta	Declinaz. boreale	60 Cancri gr.: [illegible] Ascens. retta	Declinaz. boreale
1907	$8^h.14^m$	$27°.30'$	$8^h.23^m$	$14°.30'$	$8^h.32^m$	$53°.1$	$8^h.47^m$	$28°.40'$	$8^h.50^m$	$11°.58'$
	s	″	s	″	s	″	s	″	s	″
Genn. 1	25,34	62,9	26,28	63,5	24,99	67,8	3,94	[illegible]	51,17	[illegible]
11	25,54	62,9	26,48	62,7	25,28	69,2	4,18	[illegible]	51,38	[illegible]
21	25,69	63,1	26,62	62,1	25,51	70,9	4,36	[illegible]	51,55	48,0
31	25,77	63,5	26,71	61,7	25,65	72,8	4,48	[illegible]	51,66	[illegible]
Febbr. 10	25,80	64,1	26,75	61,5	25,71	74,8	4,55	[illegible]	51,73	[illegible]
20	25,78	64,8	26,73	61,5	25,69	76,9	4,56	[illegible]	51,74	[illegible]
Marzo 2	25,71	65,6	26,67	61,6	25,59	78,9	4,52	67,4	51,70	46,7
12	25,59	66,4	26,57	61,9	25,43	80,8	4,43	68,4	51,62	46,9
22	25,45	67,2	26,44	62,3	25,22	82,5	4,30	69,4	51,51	47,1
Aprile 1	25,28	67,9	26,29	62,7	24,97	83,9	4,15	70,3	51,38	47,5
11	25,09	68,6	26,13	63,1	24,70	85,0	3,98	71,1	51,23	47,9
21	24,91	69,1	25,96	63,6	24,42	85,7	3,80	71,8	51,08	48,4
Maggio 1	24,74	69,4	25,81	64,1	24,14	86,1	3,62	72,4	[illegible]	49,0
11	24,59	69,7	25,67	64,5	23,88	86,1	3,47	72,8	[illegible]	[illegible]
21	24,46	69,8	25,55	64,9	23,66	85,6	3,32	73,0	[illegible]	50,0
31	24,36	69,7	25,46	65,3	23,47	84,9	3,21	73,1	50,55	50,5
Giugno 10					23,33	83,8	3,12	73,0	50,48	51,0
20										
30										
Luglio 10										
20										
30										
Agosto 9										
19										
29										
Sett. 8										
18	25,54	63,7	26,44	66,2						
28	25,83	62,3	26,70	65,5	25,10	62,8	4,31	64,0	51,50	51,5
Ottobre 8	26,13	61,2	26,97	64,7	25,52	61,1	4,60	62,7	51,76	50,6
18	26,46	60,1	27,27	63,7	25,97	59,6	4,91	61,3	52,04	49,6
28	26,80	59,0	27,58	62,6	26,44	58,3	5,24	59,9	52,34	48,3
Nov. 7	27,15	57,9	27,90	61,3	26,93	57,3	5,59	58,5	52,66	46,9
17	27,49	56,9	28,23	60,0	27,43	56,6	5,95	57,2	52,98	45,5
27	27,84	56,0	28,55	58,7	27,92	56,3	6,30	56,1	53,31	44,0
Dic. 7	28,17	55,2	28,85	57,4	28,39	56,4	6,65	55,2	53,63	42,4
17	28,48	54,7	29,14	56,2	28,83	56,9	6,99	54,4	53,93	41,0
27	28,75	54,4	29,40	55,1	29,23	57,7	7,29	53,9	54,20	39,6
37	28,98	54,2	29,62	54,2	29,59	58,9	7,55	53,7	54,44	38,5
Posizione media	$8^h.14^m.25^s,06$	$+27°.31'.9'',6$	$8^h.23^m.26^s,02$	$+14°.31'.8'',5$	$8^h.32^m.24^s,55$	$+53°.2'.17'',5$	$8^h.47^m.3^s,77$	$+28°.41'.11'',6$	$8^h.50^m.50^s,97$	$+11°.58'.54'',0$

GIORNO DEL MESE	44 (Bode) Urs. Maj. gr.: 5,6		69 ν Cancri gr.: 5,7		18 ω Hydrae gr.: 5,2		77 ξ Cancri gr.: 5,3		36 Lyncis gr.: 5,3	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1907	$8^h.57^m$	54°.38′	$8^h.57^m$	[illegible]	$9^h.1^m$	5°.27′	$9^h.4^m$	22°.25′	$9^h.7^m$	43°.35′
	s	″	s	″	s	″	s	″	s	″
Genn. 1	12,40	52,6	18,29	63,5	4,89	49,9	1,00	13,5	43,67	56,5
11	12,74	53,8	18,52	63,2	5,11	48,4	1,24	13,0	43,97	57,2
21	13,01	55,5	[illegible]	[illegible]	5,28	47,1	1,43	12,7	44,21	58,1
31	13,20	57,4	18,84	63,2	5,40	46,0	1,57	12,7	44,38	59,4
Febbr. 10	13,30	59,4	18,92	63,6	5,47	45,2	1,65	12,9	44,49	60,9
20	13,31	61,6	18,94	64,2	5,49	44,6	1,68	13,3	44,52	62,5
Marzo 2	13,25	63,8	18,91	64,9	5,46	44,2	1,66	13,9	44,49	64,2
12	13,12	65,8	18,84	65,7	5,39	44,0	1,59	14,6	44,40	65,9
22	12,93	67,8	18,73	66,6	5,29	44,0	1,49	15,4	44,27	67,5
Aprile 1	12,69	69,5	18,59	67,4	5,16	44,2	1,36	16,2	44,10	69,0
11	12,42	70,8	18,43	68,2	5,02	44,4	1,20	16,9	43,90	70,3
21	12,13	71,8	18,26	68,9	4,87	44,8	1,04	17,6	43,68	71,3
Maggio 1	11,85	72,4	18,10	69,5	4,72	45,3	0,88	18,2	[illegible]	[illegible]
11	11,58	72,6	17,94	70,0	4,58	45,8	0,73	18,7	43,26	72,4
21	11,33	72,4	17,80	70,4	4,46	46,4	0,60	19,2	43,07	72,5
31	11,11	71,8	17,69	70,6	4,35	47,1	0,48	19,5	42,91	72,3
Giugno 10	10,93	70,9	17,60	70,6	4,26	47,7	0,39	19,6	42,77	71,9
20										
30										
Luglio 10										
20										
30										
Agosto 9										
19										
29										
Sett. 8										
18										
28	12,34	48,3	18,66	63,6	5,15	51,7	1,36	13,9	43,87	54,4
Ottobre 8	12,75	46,3	18,93	62,[illegible]	5,40	51,0	1,63	12,6	44,20	52,5
18	13,20	44,5	19,23	60,9	5,67	50,0	1,92	11,2	44,56	50,7
28	13,67	42,9	19,55	59,5	5,96	48,9	2,23	9,8	44,94	49,0
Nov. 7	14,18	41,6	19,89	58,1	6,27	47,5	2,56	8,3	45,35	47,5
17	14,69	40,6	20,24	56,8	6,59	45,9	2,91	6,8	45,77	46,2
27	15,20	40,0	20,59	55,4	6,91	44,3	3,25	5,5	46,20	45,2
Dic. 7	15,71	39,8	20,93	54,2	7,22	42,5	3,59	4,2	46,62	44,6
17	16,18	40,1	21,26	53,3	7,51	40,8	3,92	3,0	47,02	44,3
27	16,61	40,7	21,56	52,5	7,79	39,1	4,22	2,1	47,39	44,3
37	16,99	41,8	21,82	52,0	8,03	37,6	4,48	1,4	47,72	44,7
Posizione media	$8^h.57^m.12^s,07$ +54°.39′.3″,0		$8^h.57^m.18^s,15$ +24°.49′.9″,9		$9^h.1^m.4^s,69$ +5°.27′.52″,5		$9^h.4^m.0^s,89$ +22°.25′.19″,4		[illegible] +43°.36′.5″,9	

Giorno del mese	10 Leonis gr.: 5,3		16 ψ Leonis gr.: 5,6		27 ν Leonis gr.: 5,7		37 Urs. Maj. gr.: 5,2		48 Leonis gr.: 5,4	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1907	$9^h.32^m$	$7°.14'$	$9^h.38^m$	$14°.26'$	$9^h.53^m$	$12°,53'$	$10^h.29^m$	$57°,33'$	$10^h.29^m$	$7°.25'$
	s	"	s	"	s	"	s	"	s	"
Genn. 1	18,17	68,8	40,12	46,8	13,19	15,8	10,45	30,5	56,80	56,9
11	18,41	67,3	40,38	45,7	13,45	14,6	10,93	31,0	57,08	55,2
21	18,61	66,0	40,59	44,8	13,67	13,5	11,34	32,0	57,33	53,8
31	18,77	65,0	40,76	44,1	13,85	12,7	11,68	33,5	57,53	52,6
Febbr. 10	18,87	64,2	40,87	43,7	13,98	12,2	11,95	35,4	57,69	51,6
20	18,92	63,6	40,93	43,7	14,05	12,0	12,13	37,5	57,80	51,0
Marzo 2	18,92	63,3	40,94	43,9	14,08	12,0	12,22	39,9	57,86	50,6
12	18,88	63,2	40,91	44,1	14,06	12,2	12,23	42,4	57,88	50,6
22	18,80	63,3	40,84	44,5	14,00	12,5	12,16	44,9	57,86	50,5
Aprile 1	18,70	63,5	40,74	45,0	13,91	13,0	12,03	47,3	57,80	50,7
11	18,58	63,8	40,62	45,6	13,80	13,6	11,83	49,5	57,71	51,1
21	18,43	64,3	40,48	46,3	13,67	14,2	11,59	51,4	57,61	51,6
Maggio 1	18,29	64,8	40,33	46,9	13,54	14,9	11,33	53,0	57,50	52,2
11	18,16	65,3	40,19	47,6	13,40	15,5	11,04	54,2	57,37	52,8
21	18,03	65,9	40,06	48,1	13,27	16,2	10,75	54,9	57,25	53,5
31	17,92	66,6	39,95	48,7	13,15	16,8	10,47	55,2	57,13	54,1
Giugno 10	17,82	67,2	39,85	49,2	13,05	17,3	10,21	55,0	57,02	54,8
20	17,75	67,8	39,77	49,6	12,96	17,8	9,97	54,4	56,93	55,4
30					12,90	18,1	9,76	53,4	56,85	56,0
Luglio 10										
20										
30										
Agosto 9										
19										
29										
Sett. 8										
18										
28										
Ottobre 8	18,66	68,6	40,66	46,1						
18	18,91	67,6	40,92	44,8	13,95	13,6	10,67	25,5	57,51	53,9
28	19,19	66,3	41,20	43,3	14,23	12,1	11,08	22,8	57,76	52,5
Nov. 7	19,50	64,8	41,51	41,7	14,53	10,4	11,53	20,4	58,04	50,9
17	19,81	63,1	41,84	40,0	14,85	8,7	12,03	18,2	58,34	49,1
27	20,14	61,4	42,17	38,3	15,18	6,9	12,56	16,4	58,67	47,2
Dic. 7	20,46	59,6	42,50	36,6	15,52	5,1	13,10	15,1	59,00	45,2
17	20,78	57,8	42,83	35,0	15,84	3,4	13,65	14,3	59,33	43,2
27	21,07	56,1	43,14	33,5	16,15	1,8	14,18	13,9	59,65	41,3
37	21,34	54,5	43,42	32,2	16,44	0,4	14,68	14,1	59,95	39,5
Posizione media	$9^h.32^m.18^s,10$	$+7°.15'.11'',0$	$9^h.38^m.40^s,12$	$+14°.26'.50'',5$	$9^h.53^m.13^s,24$	$+12°.53'.18'',9$	$10^h.29^m.10^s,72$	$+57°.33'.42'',9$	$10^h.29^m.56^s,99$	$+7°.25'.57'',6$

Giorno del mese	47 Urs. Maj. gr. : 5,1		73 *n* Leonis gr. : 5,6		237 (Bode) Urs. Maj. gr. : 6,0		58 Urs. Maj. gr. : 5,9		95 *o* Leonis gr. : 5,8	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1907	$10^h.54^m$	$40°.55'$	$11^h.10^m$	$13°.48'$	$11^h.11^m$	$49°.58'$	$11^h.25^m$	$43°.40'$	$11^h.50^m$	$16°.9'$
	s	"	s	"	s	"	s	"	s	"
Genn. 1	15,28	28,6	59,59	51,6	27,09	50,6	28,73	51,4	52,97	49,9
11	15,66	28,2	59,91	50,0	27,52	50,5	29,13	50,8	53,30	48,2
21	15,99	28,2	60,19	48,7	27,91	50,8	29,50	50,6	53,61	46,8
31	16,27	28,6	60,43	47,7	28,26	51,5	29,83	51,0	53,88	45,7
Febbr. 10	16,50	29,5	60,63	47,0	28,54	52,7	30,10	51,8	54,12	45,0
20	16,67	30,8	60,79	46,6	28,76	54,3	30,32	53,0	54,32	44,6
Marzo 2	16,78	32,3	60,89	46,6	28,91	56,3	30,47	54,6	54,46	44,6
12	16,83	34,1	60,95	46,8	28,99	58,5	30,56	56,5	54,56	44,9
22	16,83	36,0	60,97	47,2	29,00	60,8	30,60	58,6	54,63	45,4
Aprile 1	16,77	37,9	60,95	47,8	28,95	63,1	30,58	60,7	54,65	46,1
11	16,67	39,8	60,90	48,6	28,84	65,4	30,51	62,8	54,63	47,1
21	16,54	41,6	60,83	49,4	28,69	67,5	30,40	64,8	54,59	48,2
Maggio 1	16,38	43,1	60,74	50,3	28,52	69,3	30,26	66,7	54,52	49,2
11	16,21	44,4	60,63	51,2	28,32	70,9	30,10	68,3	54,44	50,3
21	16,04	45,5	60,51	52,0	28,10	72,1	29,92	69,6	54,34	51,3
31	15,86	46,2	60,40	52,8	27,88	72,9	29,74	70,6	54,23	52,3
Giugno 10	15,69	46,6	60,29	53,4	27,67	73,3	29,56	71,2	54,12	53,1
20	15,54	46,6	60,18	54,0	27,46	73,3	29,38	71,5	54,01	53,8
30	15,40	46,3	60,08	54,5	27,27	72,9	29,22	71,3	53,90	54,3
Luglio 10	15,28	45,7	59,99	54,9	27,10	72,1	29,07	70,8	53,80	54,7
20							28,94	69,9	53,71	54,9
30									53,62	54,9
Agosto 9										
19										
29										
Sett. 8										
18										
28										
Ottobre 8										
18										
28	16,18	23,2	60,59	46,7	27,75	45,4				
Nov. 7	16,49	20,7	60,85	44,7	28,10	42,5	29,81	44,1		
17	16,84	18,3	61,14	42,7	28,49	39,9	30,16	41,4	54,49	40,7
27	17,22	16,0	61,45	40,6	28,92	37,6	30,54	38,9	54,79	38,4
Dic. 7	17,63	14,0	61,79	38,4	29,37	35,6	30,95	36,7	55,12	36,1
17	18,04	12,5	62,13	36,4	29,84	34,0	31,37	34,9	55,46	33,9
27	18,45	11,5	62,46	34,5	30,31	32,9	31,80	33,5	55,80	31,9
37	18,84	10,8	62,79	32,7	30,76	32,4	32,22	32,6	56,14	30,0
Posizione media	$10.54^m.15^s,75$ $+40°.55'.38'',0$		$11^h.11^m.0^s,04$ $+13°.48'.53'',4$		$11^h.11^m.27^s,68$ $+49°.59'.1'',9$		$11^h.25^m.29^s,40$ $+43°.41'.1'',2$		$11^h.50^m.53^s,65$ $+16.9'.51'',5$	

Giorno del mese	74 Ursae Maj gr.: 5,6		9 Canum Venat. gr.: 6,2		32 d^2 Virginis gr.: 5,5		14 Canum Venat. gr.: 5,5		17 Canum Venat. gr.: 6,1	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1907	$12^h.25^m$	$58°.54'$	$12^h.34^m$	$41°.22'$	$12^h.40^m$	$8°.10'$	$13^h.1^m$	$36°.17'$	$13^h.5^m$	$38°.59'$
	s	″	s	″	s	″	s	″		″
Genn. 1	35,74	50,6	16,82	62,7	54,23	55,7	22,46	40,3	45,84	27,7
11	36,28	49,7	17,26	61,3	54,56	53,6	22,85	38,5	46,23	26,0
21	36,80	49,4	17,65	60,4	54,87	51,8	23,22	37,1	46,61	24,7
31	37,29	49,7	18,01	60,0	55,16	50,3	23,57	36,4	46,98	24,0
Febbr. 10	37,73	50,7	18,34	60,2	55,43	49,0	23,90	36,1	47,32	23,8
20	38,10	52,2	18,62	60,9	55,66	48,1	24,19	36,4	47,62	24,1
Marzo 2	38,40	54,1	18,85	62,0	55,85	47,5	24,43	37,2	47,87	25,0
12	38,62	56,3	19,03	63,6	55,99	47,3	24,63	38,4	48,07	26,3
22	38,75	59,0	19,15	65,5	56,10	47,4	24,77	39,9	48,23	27,9
Aprile 1	38,81	61,8	19,22	67,6	56,18	47,7	24,87	41,8	48,34	29,9
11	38,79	64,6	19,24	69,8	56,22	48,2	24,93	43,8	48,40	32,0
21	38,71	67,3	19,21	72,0	56,22	48,8	24,94	45,9	48,41	34,3
Maggio 1	38,57	69,8	19,15	74,2	56,20	49,6	24,91	48,0	48,39	36,5
11	38,37	72,1	19,05	76,2	56,16	50,5	24,85	50,1	48,33	38,7
21	38,14	74,1	18,93	78,1	56,10	51,3	24,77	52,0	48,24	40,7
31	37,88	75,7	18,78	79,6	56,02	52,3	24,66	53,7	48,12	42,4
Giugno 10	37,60	76,8	18,63	80,9	55,93	53,2	24,53	55,1	47,99	43,9
20	37,30	77,4	18,46	81,8	55,83	54,0	24,39	56,2	47,83	45,1
30	37,01	77,5	18,29	82,3	55,73	54,7	24,24	57,0	47,67	45,9
Luglio 10	36,72	77,2	18,11	82,4	55,62	55,2	24,08	57,4	47,50	46,4
20	36,44	76,4	17,94	82,1	55,51	55,7	23,92	57,5	47,33	46,4
30	36,18	75,1	17,79	81,4	55,40	56,1	23,76	57,2	47,16	46,1
Agosto 9	35,95	73,3	17,64	80,3	55,30	56,3	23,61	56,5	47,00	45,3
19							23,45	55,5	46,86	44,2
29										
Sett. 8										
18										
28										
Ottobre 8										
18										
28										
Nov. 7										
17										
27	36,94	38,8	18,43	51,8	56,03	44,2				
Dic. 7	37,41	36,1	18,79	48,9	56,32	42,0	24,37	27,2	47,68	14,9
17	37,92	33,8	19,17	46,4	56'64	39,7	24,71	24,5	48,04	12,1
27	38,46	32,0	19,57	44,3	56,97	37,4	25,08	22,1	48,42	9,7
37	39,01	30,8	19,98	42,6	57,30	35,3	25,47	20,1	48,81	7,7
Posizione media	$12^h.25^m.37^s,00$	$+58°.55'.2'',6$	$12^h.34^m.17^s,96$	$+41°.23'.11'',0$	$12^h.40^m.55^s,14$	$+8°.10'.53'',6$	$13^h.1^m.23^s,68$	$+36°.17'.46'',6$	$13^h.5^m.47^s,11$	$+38°.59'.34'',7$

Giorno del mese	19 Canum Venat. gr. : 5,7		23 Canum Venat. gr. : 5,7		81 Ursae Maj. gr. : 5,4		9 (Hev.) Bootis gr. : 5,4		21 ι Bootis gr. : 4,8	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1907	$13^h.11^m$	$41^\circ.20'$	$13^h.16^m$	$40^\circ.37'$	$13^h.30^m$	$55^\circ.49'$	$14^h.4^m$	$44^\circ.17'$	$14^h.12^m$	$51^\circ.47'$
	s	"	s	"	s	"	s	"	s	"
Genn. 1	19,77	38,1	7,66	71,5	31,25	19,7	10,95	37,3	50,56	37,6
11	20,17	36,4	8,04	69,7	31,74	18,0	11,34	35,1	51,00	35,3
21	20,56	35,2	8,43	68,4	32,24	16,8	11,75	33,4	51,45	33,6
31	20,94	34,4	8,81	67,6	32,72	16,3	12,15	32,2	51,90	32,5
Febbr. 10	21,29	34,3	9,16	67,4	33,18	16,4	12,54	31,6	52,33	32,0
20	21,60	34,7	9,47	67,7	33,59	17,2	12,90	31,7	52,74	32,2
Marzo 2	21,87	35,6	9,74	68,5	33,95	18,5	13,22	32,3	53,11	33,0
12	22,09	37,0	9,96	69,9	34,25	20,3	13,50	33,4	53,43	34,3
22	22,25	38,7	10,13	71,6	34,49	22,5	13,73	35,1	53,70	36,1
Aprile 1	22,37	40,7	10,25	73,6	34,65	25,0	13,92	37,1	53,92	38,4
11	22,43	43,0	10,32	75,8	34,75	27,8	14,05	39,4	54,08	41,0
21	22,45	45,4	10,35	78,1	34,78	30,6	14,13	41,9	54,18	43,7
Maggio 1	22,43	47,7	10,34	80,4	34,75	33,4	14,17	44,5	54,22	46,5
11	22,37	50,0	10,28	82,7	34,67	36,1	14,17	47,0	54,20	49,3
21	22,28	52,1	10,19	84,8	34,53	38,6	14,12	49,5	54,14	51,9
31	22,16	53,9	10,08	86,7	34,35	40,7	14,04	51,8	54,04	54,4
Giugno 10	22,02	55,5	9,95	88,3	34,14	42,5	13,92	53,8	53,89	56,6
20	21,86	56,7	9,79	89,5	33,90	43,9	13,77	55,5	53,70	58,5
30	21,69	57,5	9,62	90,4	33,64	44,9	13,60	56,9	53,49	60,0
Luglio 10	21,51	57,9	9,45	90,9	33,36	45,3	13,41	57,8	53,25	60,9
20	21,32	58,0	9,27	91,0	33,07	45,3	13,20	58,3	53,00	61,4
30	21,14	57,7	9,09	90,7	32,79	44,8	12,99	58,4	52,73	61,4
Agosto 9	20,97	56,9	8,91	90,0	32,52	43,8	12,77	58,0	52,46	61,0
19	20,81	55,7	8,75	88,9	32,26	42,3	12,56	57,2	52,20	60,1
29							12,35	55,9	51,94	58,7
Sett. 8										
18										
28										
Ottobre 8										
18										
28										
Nov. 7										
17										
27										
Dic. 7	21,56	25,5	9,43	58,9	32,60	7,7				
17	21,91	22,7	9,79	56,1	33,01	4,7	12,84	23,6	52,20	24,5
27	22,30	20,2	10,17	53,6	33,47	2,1	13,20	20,7	51,58	21,5
37	22,71	18,1	10,56	51,5	33,96	0,0	13,59	18,2	53,00	19,0
Posizione media	$13^h.11^m.21^s,10$ $+41^\circ.20'.45'',7$		$13^h.16^m.8^s,99$ $+40^\circ.38'.18'',7$		$13^h.30^m.32^s,95$ $+55^\circ.49'.29'',7$		$14^h.4^m.12^s,63$ $+44^\circ.17'.44'',0$		$14^h.12^m.52^s,44$ $+51^\circ.47'.45'',5$	

GIORNO DEL MESE	24 *g* Bootis gr. : 5,7		204 (Bode) Bootis gr. : 5,7		56 (Bode) Draconis gr. : 6,1		28 σ Bootis gr. : 4,7		34 Bootis gr. : 4,9	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1907	$14^h.25^m$	50°.15′	$14^h.25^m$	42°.12′	$14^h.29^m$	60°.37′	$14^h.30^m$	30°.8′	$14^h.39^m$	26°.55′
	s	″	s	″	s	″	s	″	s	″
Genn. 1	21,89	31,2	55,09	51,1	9,03	57,7	36,27	53,4	18,53	20,8
11	22,30	28,8	55,46	48,6	9,53	55,4	36,60	51,0	18,86	18,4
21	22,73	26,9	55,85	46,7	10,06	53,6	36,95	48,9	19,20	16,3
31	23,16	25,7	56,24	45,2	10,60	52,4	37,30	47,3	19,53	14,6
Febbr. 10	23,59	25,0	56,62	44,4	11,13	52,0	37,64	46,2	19,86	13,3
20	23,99	25,0	56,98	44,2	11,63	52,2	37,96	45,6	20,18	12,6
Marzo 2	24,36	25,6	57,31	44,5	12,10	53,0	38,25	45,6	20,47	12,4
12	24,69	26,8	57,60	45,4	12,51	54,4	38,52	46,1	20,73	12,7
22	24,97	28,5	57,85	46,9	12,87	56,4	38,74	47,0	20,96	13,5
Aprile 1	25,19	30,6	58,06	48,7	13,15	58,8	38,93	48,3	21,16	14,7
11	25,36	33,0	58,22	50,9	13,36	61,5	39,09	50,0	21,32	16,1
21	25,48	35,7	58,33	53,3	13,49	64,4	39,20	51,9	21,44	17,9
Maggio 1	25,54	38,5	58,40	55,8	13,56	67,5	39,28	54,0	21,53	19,9
11	25,55	41,3	58,42	58,4	13,54	70,5	39,32	56,2	21,58	21,9
21	25,51	44,0	58,40	60,9	13,46	73,4	39,33	58,3	21,60	24,0
31	25,42	46,5	58,34	63,3	13,32	76,0	39,30	60,4	21,59	25,9
Giugno 10	25,29	48,8	58,25	65,4	13,12	78,4	39,25	64,3	21,55	27,8
20	25,13	50,7	58,13	67,3	12,88	80,4	39,16	64,0	21,48	29,5
30	24,93	52,3	57,98	68,9	12,59	82,0	39,06	65,5	21,38	30,9
Luglio 10	24,71	53,4	57,80	70,0	12,27	83,1	38,93	66,6	21,26	32,1
20	24,47	54,1	57,61	70,8	11,92	83,7	38,78	67,4	21,12	33,0
30	24,22	54,3	57,40	71,1	11,56	83,8	38,62	67,9	20,97	33,6
Agosto 9	23,95	54,1	57,19	70,9	11,18	83,4	38,44	68,1	20,80	33,8
19	23,68	53,3	56,97	70,4	10,81	82,4	38,27	67,8	20,63	33,7
29	23,42	52,1	56,76	69,4	10,45	81,0	38,10	67,2	20,46	33,2
Sett. 8			56,56	68,0	10,11	79,1	37,94	66,2	20,30	32,4
18										
28										
Ottobre 8										
18										
28										
Nov. 7										
17										
27										
Dic. 7										
17	23,50	18,6								
27	23,85	15,5	57,30	35,2	10,61	42,2	38,68	38,1	20,96	5,7
37	24,25	12,8	57,66	32,6	11,09	39,6	39,01	35,4	21,28	3,1
Posizione media	$14^h.25^m.23^s,80$ +50°.15′.38″,4		$14^h.25^m.56^s,85$ +42°.12′.56″,6		$14^h.29^m.11^s,30$ +60°.38′.6″,4		$14^h.30^m.37^s,90$ +30°.8′.55″,9		$14^h.39^m.20^s,18$ +26°.55′.22″,3	

Giorno del mese	295 (Bode) Bootis gr.: 6,4		37 Ξ Bootis gr.: 4,8		44 *i* Bootis gr.: 4,9		45 *c* Bootis gr.: 5,2		9 τ¹ Serpentis gr.: 5,5	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1907	$14^h.45^m$	$38^\circ.11'$	$14^h.47^m$	$19^\circ.28'$	$15^h.0^m$	$48^\circ.0'$	$15^h.3^m$	$23^\circ.13'$	$15^h.21^m$	$15^\circ.45'$
	s	"	s	"	s	"	s	"	s	"
Genn. 1	25,89	35,5	4,39	72,4	41,70	53,6	11,24	51,1	26,76	18,9
11	26,24	32,8	4,70	69,9	42,07	50,9	11,55	48,5	27,05	16,5
21	26,60	30,7	5,03	67,8	42,47	48,7	11,87	46,3	27,36	14,3
31	26,97	29,1	5,35	66,0	42,88	47,0	12,21	44,5	27,67	12,4
Febbr. 10	27,33	28,0	5,67	64,6	43,29	45,9	12,54	43,1	27,99	10,9
20	27,68	27,5	5,98	63,7	43,69	45,5	12,85	42,2	28,30	9,8
Marzo 2	28,01	27,6	6,26	63,3	44,07	45,7	13,15	41,8	28,59	9,1
12	28,30	28,2	6,52	63,3	44,41	46,5	13,42	41,9	28,86	8,9
22	28,55	29,4	6,75	63,7	44,71	47,9	13,67	42,5	29,11	9,1
Aprile 1	28,77	31,0	6,94	64,5	44,97	49,7	13,89	43,5	29,33	9,6
11	28,94	32,9	7,10	65,6	45,18	52,0	14,07	44,9	29,52	10,5
21	29,08	35,2	7,23	67,0	45,34	54,6	14,22	46,6	29,68	11,7
Maggio 1	29,17	37,6	7,33	68,6	45,45	57,3	14,33	48,5	29,81	13,2
11	29,21	40,1	7,40	70,3	45,51	60,1	14,41	50,4	29,91	14,8
21	29,23	42,6	7,43	72,1	45,52	62,9	14,45	52,4	29,98	16,4
31	29,20	45,0	7,44	73,8	45,49	65,6	14,46	54,4	30,02	18,1
Giugno 10	29,14	47,2	7,41	75,5	45,41	68,1	14,44	56,4	30,03	19,8
20	29,04	49,2	7,36	77,0	45,28	70,3	14,39	58,2	30,01	21,3
30	28,92	50,9	7,28	78,3	45,12	72,2	14,31	59,8	29,95	22,7
Luglio 10	28,77	52,2	7,18	79,4	44,93	73,7	14,21	61,1	29,87	24,0
20	28,60	53,1	7,06	80,3	44,71	74,8	14,08	62,1	29,77	25,0
30	28,40	53,6	6,92	81,0	44,47	75,5	13,93	62,8	29,64	25,8
Agosto 9	28,20	53,8	6,77	81,3	44,21	75,6	13,77	63,2	29,49	26,3
19	27,99	53,6	6,61	81,4	43,94	75,3	13,59	63,3	29,33	26,6
29	27,78	52,9	6,45	81,1	43,68	74,5	13,42	63,0	29,17	26,6
Sett. 8	27,58	51,7	6,30	80,5	43,42	73,3	13,25	62,5	29,00	26,3
18									28,85	25,7
28										
Ottobre 8										
18										
28										
Nov. 7										
17										
27										
Dic. 7										
17										
27	28,08	20,8	6,93	57,4	43,56	39,7	13,66	37,0	29,30	5,8
37	28,41	18,0	7,23	54,9	43,92	36,8	13,96	34,2	29,58	3,3
Posizione media	$14^h.45^m.27^s,69$ $+38^\circ.11'.39'',4$		$14^h.47^m.6^s,02$ $+19^\circ.29'.11'',6$		$15^h.0^m.43^s,74$ $+48^\circ.0'.59'',1$		$15^h.3^m.12^s,98$ $+23^\circ.13'.51'',5$		$15^h.21^m.28^s,52$ $+15^\circ.45'.16'',7$	

Giorno del mese	4 θ Coronae bor. gr. : 4,2		54 φ Bootis gr. : 5,4		7 ζ Cor. bor. gr. : 4,6		8 γ Cor. bor. gr. : 3,9		12(Hev.) Draconis gr. 5,2	
	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale	Ascens. retta	Declinaz. boreale
1907	$15^h.29^m$	$31^\circ.40'$	$15^h\ 34^m$	$40^\circ.39'$	$15^h.35^m$	$36^\circ.55'$	$15^h.38^m$	$26^\circ.35'$	$15^h.45^m$	$62^\circ.52'$
	s	"	s	"	s	"	s	"	s	"
Genn. 1	8,86	20,3	27,20	18,2	50,57	72,5	48,37	23,2	11,97	67,1
11	9,17	17,5	27,52	15,2	50,88	69,6	48,66	20,5	12,40	64,1
21	9,49	15,1	27,87	12,7	51,21	67,1	48,97	18,1	12,88	61,5
31	9,83	13,1	28,23	10,7	51,56	65,1	49,29	16,1	13,40	59,4
Febbr. 10	10,17	11,6	28,60	9,2	51,91	63,6	49,62	14,5	13,94	58,0
20	10,50	10,6	28,96	8,3	52,26	62,6	49,94	13,4	14,50	57,3
Marzo 2	10,82	10,2	29,31	8,1	52,60	62,2	50,25	12,8	15,04	57,3
12	11,12	10,4	29,64	8,4	52,92	62,5	50,55	12,8	15,55	58,0
22	11,40	11,1	29,95	9,3	53,21	63,3	50,82	13,3	16,02	59,3
Aprile 1	11,64	12,2	30,22	10,7	53,47	64,6	51,06	14,2	16,44	61,1
11	11,85	13,8	30,45	12,6	53,69	66,3	51,27	15,6	16,79	63,4
21	12,03	15,7	30,64	14,8	53,88	68,4	51,45	17,3	17,07	66,1
Maggio 1	12,17	17,9	30,79	17,3	54,03	70,7	51,60	19,2	17,28	69,0
11	12,27	20,2	30,90	19,9	54,14	73,2	51,72	21,3	17,41	72,1
21	12,33	22,5	30,96	22,6	54,21	75,8	51,80	23,5	17,46	75,3
31	12,36	24,9	30,98	25,3	54,24	78,4	51,84	25,7	17,43	78,4
Giugno 10	12,36	27,2	30,96	27,8	54,22	80,9	51,85	27,9	17,33	81,3
20	12,31	29,3	30,90	30,2	54,17	83,2	51,82	29,9	17,16	84,0
30	12,23	31,2	30,80	32,3	54,09	85,2	51,76	31,7	16,92	86,4
Luglio 10	12,13	32,8	30,66	34,1	53,97	87,0	51,67	33,3	16,62	88,3
20	11,99	34,1	30,49	35,5	53,82	88,4	51,55	34,6	16,27	89,9
30	11,83	35,1	30,30	36,6	53,64	89,4	51,41	35,6	15,88	91,1
Agosto 9	11,65	35,7	30,09	37,2	53,44	90,0	51,24	36,3	15,46	91,5
19	11,45	35,8	29,85	37,3	52,22	90,2	51,06	36,6	15,01	91,6
29	11,25	35,6	29,61	37,0	53,00	90,0	50,87	36,5	14,56	91,2
Sett. 8	11,05	35,0	29,38	36,3	52,78	89,4	50,68	36,1	14,11	90,2
18	10,86	34,0	29,15	35,1	52,57	88,3	50,50	35,3	13,68	88,6
28									13,27	87,5
Ottobre 8										
18										
28										
Nov. 7										
17										
27										
Dic. 7										
17										
27	11,10	7,8	29,21	6,2	52,67	60,5	50,69	11,3		
37	11,39	4,9	29,51	3,1	52,96	57,5	50,97	8,5		
Posizione media	$15^h.29^m.10^s,76$ $+31^\circ.40'.21'',6$		$15^h.34^m.29^s,44$ $+40^\circ.39'.21'',0$		$15^h.35^m.52^s,56$ $+36^\circ.56'.14'',6$		$15^h.38^m.50^s,26$ $+26^\circ.35'.23'',2$		$15^h.45^m.14^s,80$ $+62^\circ.53'.12'',5$	

Relazione sulla Memoria della sig.^{na} Dott. Clelia Parisch: *Di alcune nummuliti ed orbitoidi dell'Appennino ligure-piemontese.*

Gli studi sulle faune cenozoiche hanno in questi ultimi anni allargato d'assai le nostre cognizioni sulla struttura dei foraminiferi spettanti ai gruppi dei nummulitidi e degli orbitoidi e, colla verifica del dimorfismo, hanno chiarita e precisata l'interpretazione delle forme specifiche: nel tempo stesso hanno confermato e più sicuramente dimostrato l'importanza dei foraminiferi stessi come fossili fra i più adatti a stabilire sicuri riferimenti cronologici per i terreni che li contengono ed alla verifica dei sincronismi fra depositi geologici anche assai lontani.

Il lavoro della Sig.na Clelia Parisch, intorno al quale dobbiamo riferire, segue questo moderno indirizzo di ricerche, porta un notevole contributo allo studio della fauna nummulitica del bacino ligure-piemontese, e nuovi ed utili elementi di confronto colle faune nummulitiche di altri bacini, nonchè di controllo ai riferimenti fondati sui risultati dello studio delle altre faune diverse, ma sincrone, della stessa regione ligure-piemontese.

Le forme descritte sono quarantacinque, e precisamente trentasei nummuliti, cinque operculine e quattro lepidocicline, provenienti dalle località di Carrosio, Voltaggio, Lerma, Belforte, Cassinelle, Grognardo, Ponzone, Sassello, Costalupara, Montalero, Carcare, Molere. In buon numero sono le forme e varietà nuove (15), le quali sono descritte dettagliatamente in confronto colle forme affini, e delle altre, più numerose, appartenenti a forme già note si giustifica il riferimento col corredo delle citazioni bibliografiche e sinonimiche strettamente necessarie.

È nota la difficoltà di ottenere sezioni sottili di questi piccoli e spesso delicati fossili in due direzioni normali fra di loro e passanti per la camera iniziale; le quali sezioni sono indispensabili per lo studio al microscopio e per riuscire a deter-

minazioni specifiche sicure. Orbene, questa difficoltà fu ben superata, come ne fanno fede le numerose figure fotografiche con ingrandimento (N. 86) raccolte nelle due tavole.

Dallo studio in esame, diligente e ben condotto, resta dimostrato, che nella regione dalla quale provengono i fossili sono presenti non soltanto i terreni oligocenici, come dapprima si riteneva, ma anche degli strati più antichi (parte superiore dell'eocene) e degli strati più recenti (aquitaniano): e per questo risultato il lavoro della Sig.na Parisch acquista maggiore importanza per le sue applicazioni alla Geologia.

Così i relatori, riconoscendo utile la pubblicazione di questo lavoro per i notevoli suoi risultati, ne propongono all'Accademia l'accoglimento per la stampa nei volumi delle sue *Memorie*, osservando, a dimostrare maggiormente l'opportunità di questa pubblicazione, il fatto che, mentre sono numerosi i lavori sulle nummuliti eoceniche, sono assai scarse le notizie su quelle oligoceniche, che costituiscono appunto la parte maggiore della fauna studiata dalla Sig.na Parisch.

L. Camerano.
C. F. Parona, *relatore*.

Relazione intorno alla memoria del Dott. Giuseppe Nobili, intitolata: *Ricerche sui Crostacei della Polinesia* - *Decapodi, Stomatopodi, Isopodi e Anisopodi.*

La fauna carcinologica della Polinesia Occidentale non fu oggetto finora di lavori speciali. Indicazioni più o meno estese, la maggior parte però antiche e che necessitano una revisione, si trovano nelle pubblicazioni relative ai grandi viaggi scientifici di circumnavigazione, come quello promosso dal Governo degli Stati Uniti nel 1852, quello promosso dal Governo Austriaco colla nave " Novara „ nel 1865, come i viaggi francesi di Dumont d'Urville, ecc. Recentemente, spedizioni inglesi ed australiane studiarono la fauna di alcune isole e atolli della parte orientale della Polinesia.

Il dott. G. Seurat il quale diresse per parecchi anni il laboratorio zoologico di Rikitea, nell'isola di Mangareva (Arcipelago Gambier) eseguì pesche diligentissime in molte isole dell'Arcipelago delle Tuamotù ed a Tahiti, e raccolse un materiale amplissimo che inviò al Museo di Parigi.

Il Museo di Parigi affidò al dott. G. Nobili, assistente al Museo di Torino, il quale già si è acquistato buona fama nelle ricerche intorno ai crostacei, lo studio della collezione del Seurat.

La collezione del Seurat, studiata dal dott. Nobili, è anche molto importante pel fatto che il Seurat ricercò anche le specie di crostacei viventi coll'ostrica perlifera (*Margaritifera panasesae*) e con alcune specie di Echinodermi (*Echinometra lucunter*, *Echinothrix turcarum*) per cui ne vennero messi in evidenza fatti interessantissimi di commensalismo.

Il dott. Nobili nel suo lavoro ha studiato anche la collezione riunita dagli Ufficiali della R. nave " Liguria „ al comando di S. A. R. il Duca degli Abruzzi, a Bora-Bora ed alle Isole Samoa e donata al Museo Zoologico di Torino.

A dare una idea del lavoro del dott. Nobili, ricorderemo che esso riguarda oltre a 190 specie delle quali 35 sono nuove

per la scienza e molte altre vengono ridescritte cogli intendimenti ed i metodi voluti dalla sistematica moderna. Vi sono inoltre i seguenti generi nuovi: *Stegopontonia*, *Dacryopilumnus*, *Parapleurophrycoides* fra i Decapodi, *Bagatus*, *Paracassidinopsis*, *Otocepon* fra gli Isopodi.

I vostri commissari ritengono che il lavoro del dott. Nobili è diligente, ben condotto e ricco di fatti nuovi ed interessanti. Essi ne propongono la stampa nei volumi accademici.

T. Salvadori.
L. Camerano, *Relatore.*

L'Accademico Segretario
Lorenzo Camerano.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 20 Maggio 1906.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA.

Sono presenti i Soci: FERRERO, Direttore della Classe, ROSSI, CARLE, CIPOLLA, BRUSA, CARUTTI, PIZZI, CHIRONI, SAVIO, DE SANCTIS e RENIER Segretario. — Scusano l'assenza il Vice-Presidente BOSELLI ed i Soci MANNO, GRAF e RUFFINI.

Viene approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 6 maggio 1906.

Il Socio RENIER, incaricato col Socio GRAF di riferire intorno alla Memoria del Dr. Augusto BECCARIA, *I biografi di maestro Cecco d'Ascoli e le fonti per la sua storia e per la sua leggenda*, legge la relazione, che è approvata e compare negli *Atti*. La Classe, presa conoscenza dello scritto del Dr. BECCARIA, ne approva a voti segreti unanimi l'inserzione nelle *Memorie* accademiche.

È presentata la riproduzione in eliotipia del Messale Rosselli, codice miniato del sec. XIV, edito dalla Casa Bocca, a cura della Commissione eletta dalla Classe, costituita dai Soci MANNO, CIPOLLA e RENIER, con l'aggregazione di due studiosi estranei, il Cav. Carlo FRATI e il Conte Alessandro BAUDI DI VESME. La Classe fa plauso all'opera, ringrazia i commissari e delibera che

siano ringraziati il Dr. Frati e il Conte Baudi di Vesme. Un ringraziamento sarà pure rivolto alla Casa editrice Bocca ed un meritato elogio al valente esecutore delle eliotipie Ing. Molfese.

In conformità al voto 7 febbraio 1904, la Classe delibera che ora si ponga mano alla riproduzione del celebre Codice K (Evangeliario) della Nazionale di Torino, che ha valore paleografico eminente, ed a curarne l'edizione sono designati i Soci Cipolla, Savio e De Sanctis. Su proposta del Socio Chironi si stabilisce che al più presto possibile si attenda, in seguito, alla riproduzione del Codice Teodosiano di Ivrea, per curare il quale sarà a suo tempo nominata una Commissione.

Costituitasi poscia la Classe in seduta privata, procede all'elezione di Soci. Riesce eletto, salvo l'approvazione sovrana, a Socio residente, il Prof. Ettore Stampini, della Regia Università di Torino.

Relazione intorno alla Memoria del Dott. Augusto Beccaria: *I biografi di maestro Cecco d'Ascoli e le fonti per la sua storia e per la sua leggenda.*

È trascorso ormai più di un quarto di secolo dacchè il prof. Felice Bariola prometteva l'edizione critica dell'*Acerba* e pubblicava, nel 1879, nella *Rivista Europea* di Firenze un suo erudito articolo su Cecco d'Ascoli, che doveva essere precursore di un lavoro ampio e definitivo sul soggetto. Da allora in poi più d'un critico si adoperò ad indagare le vicende fortunose dell'Ascolano ed a studiarne, sotto vari rispetti, il curioso processo. S'ebbe anche, nel 1892, il tentativo di un lavoro di complesso nel libro di Giuseppe Castelli, *La vita e le opere di Cecco d'Ascoli*, che la critica giudicò assai severamente; ma, convien riconoscerlo, gli studi fatti valsero, da poche eccezioni in fuori, piuttosto a far risaltare le molte e gravi dubbiezze che vi sono intorno a quel personaggio, anzichè a darne spiegazione soddisfacente.

Ci è grato, pertanto, presentare e raccomandare alla Classe di scienze morali, storiche e filologiche dell'Accademia delle Scienze di Torino, il lavoro d'un giovane egregio, che da più anni si affatica intorno a Cecco d'Ascoli ed ha maturato sulla storia di lui una Memoria, che per importanza si lascia addietro quanto fu scritto sinora sull'arduo soggetto.

Augusto Beccaria prende in esame particolareggiato quanti furono biografi di maestro Cecco, a cominciare dal Tiraboschi, ne nota i giudizi e le tendenze, ne valuta l'importanza. Man mano che si vengono svolgendo codeste testimonianze, appaiono chiaramente le principali questioni concernenti la vita dell'astrologo e si delineano a poco a poco le cause soggettive ed oggettive del disaccordo fra gli storici. Delle prime l'Autore non si occupa se non per quel tanto che può chiarire la sua esposizione; ma, terminata questa, in una rapida sintesi concreta le altre attorno a due fatti, la condanna dell'Inquisizione e la con-

troversia con Dante, sui quali fa opportune e concludenti osservazioni.

Si rilevano poscia tutti gli elementi biografici fornitici dalle opere dello Stabili, e tenendo questi elementi come termine di paragone, si analizzano tutte le testimonianze che scrittori relativamente antichi ci lasciarono intorno all'astrologo di Ascoli. Queste fonti sono divise in tre grandi categorie, date dai tre luoghi ove lo Stabili svolse la sua attività: ciascuna categoria poi è ordinata cronologicamente. Delle testimonianze, sempre riferite secondo la loro lezione originale, si studiano la natura, il valore, i rapporti. Le conclusioni principali, a cui l'Autore è giunto, sono queste: 1°, le fonti ascolane sono assai ricche di dati, ma questi hanno tutti carattere leggendario; 2°, le attestazioni bolognesi ci dànno, fra molte notizie erronee, qualche asserzione valida; 3°, le testimonianze fiorentine sono le più utili, sia per la ricostruzione della biografia, che per lo studio della leggenda. Dalla notizia del Villani, che contiene dati per l'una e per l'altra ad un tempo, l'Autore toglie le mosse per mostrare lo svolgimento della tradizione popolare nei primi secoli e per far vedere come essa abbia influito nell'alterare le attestazioni a noi rimaste. Nel lavoro è pure inserito un documento inedito, cioè un racconto leggendario della vita e della morte di Cecco del sec. XVII.

Lo scritto del dottor Beccaria è condotto con straordinaria diligenza, solidissima preparazione e buon metodo. La Commissione, proponendone la lettura alla Classe, s'augura, pel vantaggio degli studi, ch'essa ne approvi l'inserzione nelle *Memorie* accademiche.

A. Graf,
R. Renier, *relatore*.

L'Accademico Segretario
Rodolfo Renier.

Torino, Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 27 Maggio 1906.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: SALVADORI, Direttore della Classe, JADANZA, NACCARI, GUIDI, FOÀ, SEGRE, SOMIGLIANA, GRASSI, GUARESCHI, MATTIROLO, SPEZIA e CAMERANO Segretario.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Il Socio PARONA scusa la sua assenza.

Il Presidente comunica:

1° la lettera del Socio corrispondente Simone NEWCOMB il quale ringrazia per l'incarico avuto di rappresentare l'Accademia alle onoranze tributate a Beniamino FRANKLIN;

2° l'annunzio del Congresso Geologico internazionale al Messico nel settembre 1906. Se qualche Socio si recherà a quel Congresso la Presidenza gli darà mandato di rappresentare l'Accademia.

Il Socio GUARESCHI presenta in dono il suo lavoro: *Notizie biografiche su Wöhler Liebig e Mitscherlich*. Il Presidente ringrazia a nome della Classe.

Il Socio CAMERANO presenta in dono, a nome del Socio PARONA, il lavoro del Socio corrispondente A. ISSEL, intitolato: *Torriglia e il suo territorio*.

Vengono presentate per l'inserzione negli *Atti* le Note seguenti:

1° Dal Dr. Umberto PERAZZO: *Sopra la geometria descrittiva di uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni*, dal Socio SEGRE;

2° Dr. Giovanni Issoglio: *Derivati del benzoilacetone*, dal Socio Guareschi;

3° *Note intorno ai passeri italiani*, del Socio T. Salvadori.

Il Socio Camerano, anche a nome del Socio Salvadori, legge la relazione intorno alla Memoria del Dr. Cesare Artom, intitolata: *La variazione dell'Artemia salina (Linn.) di Cagliari sotto l'influsso della salsedine*. La relazione conchiude favorevolmente per l'accoglimento della Memoria. La Classe approva la relazione e con votazione segreta la stampa di detta Memoria nei volumi delle sue *Memorie*.

Il Socio Segre presenta per l'inserzione nelle *Memorie* il lavoro del Dr. Ugo Amaldi, intitolato: *Sui gruppi continui infiniti di trasformazioni di contatto dello spazio*. Il Presidente delega i Soci Segre e Somigliana all'esame di questa Memoria.

Il Socio Jadanza presenta per la stampa nelle *Memorie* il lavoro del Socio corrispondente Prof. Paolo Pizzetti, intitolato: *Intorno al grado di approssimazione che si raggiunge nel risolvere i triangoli geodetici sopra una superficie qualunque*. La Classe con votazione segreta approva la stampa del lavoro nel volume delle *Memorie*.

Il Socio Naccari presenta per l'inserzione nelle *Memorie* il lavoro del Dr. Ottolenghi, intitolato: *Ricerche sperimentali sulla conduttività termica e sul calore specifico dei tessuti di lana e cotone*. Il Presidente delega i Soci Naccari e Somigliana per esaminare questo lavoro.

Il Socio Naccari presenta per l'inserzione nelle *Memorie* il lavoro del Prof. G. B. Rizzo, intitolato: *Sulla velocità di propagazione delle onde sismiche nel terremoto delle Calabrie dell'8 settembre 1905*. Il Presidente delega, ad esaminare il lavoro del Prof. Rizzo, i Soci Naccari e Jadanza.

La Classe per ultimo delibera che ciascun Socio mandi individualmente le risposte che crede di fare al questionario trasmesso dal Ministero intorno alla riforma della scuola media.

LETTURE

Sopra la geometria descrittiva di uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni.

Nota di UMBERTO PERAZZO.

Della geometria descrittiva di un iperspazio, ovvero dei " metodi di rappresentazione degli elementi, punti e spazi, di uno spazio a più di tre dimensioni su di un piano o su di uno spazio ordinario, e della risoluzione dei problemi fondamentali relativi ", trattano varî lavori, di cui alcuni recentissimi. Essi riguardano quasi esclusivamente la rappresentazione dell'S_4. Il VERONESE (*) introduce e tratta, in un lavoro fondamentale su tale argomento, varî tipi di rappresentazione (proiezione centrale, ortogonale, assonometrica), il LORIA (**), il DE VRIES (***) trattano esclusivamente del metodo della proiezione centrale, lo SCHOUTE (****) pure accennando a tale metodo, si occupa più particolarmente di proiezione ortogonale. Il MÜLLER (+) accenna ad un nuovo procedimento, col quale i punti di un S_4 vengono ad esser rappresentati mediante le coppie di punti del piano rappresentativo, le rette mediante coppie di punteggiate simili, i piani mediante affinità, ecc. — Ci occuperemo brevemente nel presente lavoro della rappresentazione di un iperspazio, su di uno spazio di dimensione qualunque (≥ 2) in esso contenuto (in particolare: piano od S_3), e dei problemi grafici relativi, secondo

---

(*) G. VERONESE, *Sulla geometria descrittiva a quattro dimensioni,* " Atti del R. Ist. Veneto " (V), vol. VIII (1882).

(**) G. LORIA, *Sur quelques problèmes élémentaires de la Géometrie descriptive à 3 et 4 dimensions,* " Archiv der Math. u. Physik. " (III). B. II (1902).

(***) H. DE VRIES, *Die Lehre von der Zentralprojektion im vierdimensionalen Raume* (Leipzig 1905).

(****) P. H. SCHOUTE, *Mehrdimensionale Geometrie,* Sammlung Schubert, XXXV, I Teil. § 5.

(+) E. MÜLLER, *Die darstellende Geometrie als eine Versinnlichung der abstrakten projektiven Geometrie,* " Jahresbericht der deutschen Math. Vereinigung ", 14 B. (1905).

un procedimento (non esposto sinora, per quanto ci è noto) che si presenta come estensione dell'ordinario metodo della proiezione bicentrale su di un piano. — Accenneremo in seguito (Cap. II) — come caso particolare — alla rappresentazione dell'S_4 su di un piano o su di uno spazio ordinario.

Alcuni problemi grafici, proposti in un iperspazio, possono tradursi — trattati col sistema di rappresentazione di cui ci occupiamo — in notevoli problemi grafici di geometria piana e solida. Nel Cap. III porteremo esempi di tali problemi. In vista appunto di queste applicazioni abbiam creduto non inutile esporre le linee generali del presente sistema di rappresentazione.

Capitolo I.

Proiezione $(l+1)$*-centrale di un* S_{m+l} *su di un* S_m *in esso contenuto.*

§ 1.

Rappresentazione dei punti e degli spazî dell'S_{m+l}.

1. — Vogliasi rappresentare un dato S_{m+l} su di un $S_m : \Pi$, in esso contenuto. Si fissi nell'S_{m+l} un $S_l : \Sigma$, che incontri in un sol punto: Ω l'S_m di proiezione. Ed in Σ si fissino $l+1$ punti C', C'', ..., $C^{(l+1)}$ vertici di un $(l+1)$-edro completo, in posizione generica rispetto ad Ω. Chiameremo tale $(l+1)$-edro: $(l+1)$-*edro fondamentale*, ed Ω: *punto fondamentale della rappresentazione.* Stabiliremo, relativamente all'$(l+1)$-edro le notazioni seguenti: $\mathfrak{C}_1 \equiv C''C''' \dots C^{(l+1)}, \dots, \mathfrak{C}_{l+1} \equiv C'C'' \dots C^{(l)}$; $c^{','' } \equiv C'C'' \equiv \mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4 \dots \mathfrak{C}_{l+1} \equiv \equiv c_{3,4\dots(l+1)}, \dots, c^{l,(l+1)} \equiv C^{(l)}C^{(l+1)} \equiv \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2 \dots \mathfrak{C}_{l-1} \equiv c_{1,2\dots(l-1)}$; $\gamma^{','',''' } \equiv \equiv C'C''C''' \equiv \mathfrak{C}_4 \dots \mathfrak{C}_{l+1} \equiv \gamma_{4,\dots(l+1)}, \dots; \dots \Gamma^{','' \dots (l-1)} \equiv C'C''' \dots C^{(l-1)} \equiv \equiv \mathfrak{C}_l\mathfrak{C}_{l+1} \equiv \Gamma_{l,l+1}, \dots$ — Ai punti o spazi proiezioni di un dato elemento, punto o spazio, sopra Π porremo i medesimi indici dello spazio dell'$(l+1)$-edro da cui venne proiettato.

2. — Un punto generico P dell'S_{m+l} sarà proiettato su Π dalle $l+1$ faccie iperpiane dell'$(l+1)$-edro fondamentale: $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots, \mathfrak{C}_{l+1}$ secondo $l+1$ punti $P_1, P_2, \dots, P_{l+1}$ allineati con Ω sulla traccia dell'$S_{l+1}\Sigma P$ sopra Π. — Una retta generica r verrà

proiettata (supposto $m \geq 2$) dalle medesime faccie $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_{l+1}$ secondo $l+1$ rette $r_1, r_2, \ldots, r_{l+1}$, giacenti in un piano per $\mho$ (piano comune a Π ed all'$S_{l+2} \Sigma r$); un piano α (per $m \geq 3$) secondo $l+1$ piani giacenti in un S_3 per Ω, ecc. In generale: " un S_h, la cui dimensione non superi $m-1$ $(h \leq m-1)$, verrà proiettato dalle faccie $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_{l+1}$ secondo $l+1$ S_h giacenti in un S_{h+1} uscente dal punto Ω (l'S_{h+1} traccia su Π dell'S_{h+l+1} congiungente Σ all'S_h). Per $h=m-1$ le proiezioni saranno $l+1$ S_{m-1} (iperpiani) di Π, comunque disposti. — Assegnati viceversa in Π, nell'ipotesi $h \leq m-1$, $l+1$ $S_h : R_1, R_2, \ldots, R_{l+1}$, giacenti in un S_{h+1} per Ω, essi sono in generale le proiezioni di un determinato S_h: l'S_h comune (nell'S_{l+h+1} congiungente Σ all'S_{h+1} che contiene gli S_h proiezioni) agli $l+1$ S_{l+h} congiungenti $R_1, R_2, \ldots, R_{l+1}$ ordinatamente alle $l+1$ faccie $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_{l+1}$. — Sempre nell'ipotesi $h \leq m-1$, gli S_h proiezioni di un S_h generico costituiscono, nell'S_{h+1} a cui appartengono, $l+1$ iperpiani; gli $\binom{l+1}{2}$ S_{h-1} comuni a tali S_h, presi due a due, saranno le proiezioni dell'S_h oggettivo dagli $\binom{l+1}{2}$ S_{l-2} dell'$(l+1)$-edro fondamentale, gli $\binom{l+1}{3}$ S_{h-2} comuni agli stessi S_h presi tre a tre, le proiezioni dell'S_h dagli $\binom{l+1}{3}$ S_{l-3} dell'$(l+1)$-edro, ecc.; infine gli $\binom{l+1}{h+1}$ punti comuni (nell'ipotesi $l>h$) agli stessi S_h presi $h+1$ ad $h+1$ saranno le proiezioni del dato S_h dagli $\binom{l+1}{h+1}$ S_{l-h-1} dell'$(l+1)$-edro fondamentale. Se $l \leq h$, il dato S_h avrà a comune con Π un S_{h-l} (traccia), per cui passeranno le proiezioni dell'S_h.

3. — Nell'ipotesi $h \geq m$, un S_h in posizione generica non può venir proiettato dalle faccie $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_{l+1}$. Rappresenteremo in tal caso l'S_h mediante $h+1$ suoi punti — assegnando cioè $h+1$ $(l+1)$-ple di punti allineati con Ω, rappresentanti $h+1$ punti dell'S_h — oppure mediante più spazi di dimensioni minori di m, di cui l'S_h sia lo spazio congiungente. — Si presenteranno però, anche nell'ipotesi $h \geq m$ proiezioni dell'S_h da elementi dell'$(l+1)$-edro fondamentale, eccettuato il caso $h=l+m-1$. L'S_h verrà proiettato dagli $\binom{l+1}{h-m+2}$ $S_{l-h+m-2}$ dell'$(l+1)$-edro fondamentale secondo $\binom{l+1}{h-m+2}$ iperpiani (S_{m-1}) in posizione par-

ticolare: concorrenti $h-m+3$ ad $h-m+3$ in $\binom{l+1}{h-m+3}$ S_{m-2}: proiezioni del medesimo S_h dagli $\binom{l+1}{h-m+3}$ $S_{l-h+m-3}$ dell'$(l+1)$-edro fondamentale: e questi S_{m-2} alla loro volta concorreranno $h-m+4$ ad $h-m+4$ in $\binom{l+1}{h-m+4}$ S_{m-3} $\left(\text{per i quali gli } S_{m-1} \text{ passano } \binom{h-m+4}{2} \text{ ad } \binom{h-m+4}{2}\right)$, ecc. — Ognuno degli S_{m-1} contiene $l-h+m-1$ degli S_{m-2}, $\binom{l-h+m-1}{2}$ S_{m-3}, ecc.; ognuno degli S_{m-2} contiene $l-h+m-2$ degli S_{m-3}, ecc. Un S_h nell'ipotesi $h \geq m$ non è in generale individuato dalle sue proiezioni.

4. — Allorchè uno spazio S_h appartiene a Σ, le sue proiezioni coincidono col punto Ω. Potrà rappresentarsi un S_h in tali condizioni assumendo un generico S_{h+1} come rappresentante dell'S_h sua intersezione con Σ. — Nell'ipotesi $h<m$: Se un S_h è " incidente " a Σ: ha cioè uno spazio $S_i (i \geq 0)$ a comune con Σ, le sue proiezioni dagli S_{l-1} $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_{l+1}$ coincidono in un unico S_{h-i} uscente da Ω, traccia su Π dell'S_{h+l-i} congiungente Σ all'S_h. Si individuerà un S_h in tali condizioni assegnando $h+1$ punti, le cui proiezioni costituiscano $h+1$ $(l+1)$-ple di punti allineati con Ω, e tutte giacenti in un medesimo S_{h-i} uscente da Ω. — Nell'ipotesi $h \geq m$: Se un S_h è " incidente " a Σ: giace cioè con Σ in uno stesso S_k, ove $k \leq l+m-1$, le proiezioni dell'S_h su Π dagli S_{l-1}, dagli S_{l-2}, ecc., sino agli S_{k-h-1} dell'$(l+1)$-edro fondamentale coincidono in un unico S_{k-l} per Ω. Si rappresenterà l'S_h come dianzi, mediante $h+1$ punti, le cui $(l+1)$-ple di punti proiezioni appartengano tutte ad un medesimo S_{k-l} uscente da Ω. — Uno spazio S_h uscente da Σ potrà rappresentarsi mediante $h-l$ punti, linearmente indipendenti, non contenuti in Σ. — Faremo astrazione nel seguito, per brevità, dai casi particolari ora esposti.

5. — Il problema: " Costruire le proiezioni di un S_h, individuato mediante $h+1$ suoi punti $A^1, A^2, \ldots, A^{h+1}$ (ovvero mediante più spazi " congiunti " dall'S_h) " si risolve immediatamente nel caso $h \leq m-1$: gli $l+1$ S_h proiezioni dell'S_h congiungeranno le proiezioni omonime dei punti dati (o, più in generale, dei dati spazi): essi risulteranno giacenti in un S_{h+1} per Ω. —

Nel caso $h \geq m$, congiunte le proiezioni omonime dei primi $m-1$ punti $A^1, A^2, \ldots, A^{m-1}$ alle proiezioni pure omonime di un m-esimo punto A^m, si otterranno gli iperpiani (S_{m-1}) proiezioni di un S_{m-1} contenuto nel dato S_h: E tali S_{m-1} s'incontreranno due a due secondo $\binom{l+1}{2}$ S_{m-2}, proiezioni dell'S_{m-1}. In modo analogo si potranno costruire gli S_{m-1}, e poscia gli S_{m-2}, proiezioni dell'S_{m-1} $A^1A^2 \ldots A^{m-1}A^{m+1}$. Congiungendo gli S_{m-2} proiezioni omonime dei due S_{m-1}, si otterranno gli $\binom{l+1}{2}$ S_{m-1} proiezioni dell'S_m $A^1A^2 \ldots A^{m-1}A^mA^{m+1}$. Tali S_{m-1} concorreranno 3 a 3 in $\binom{l+1}{3}$ S_{m-2} (proiezioni dell'S_m stesso dagli $\binom{l+1}{3}$ S_{l-3} dell'($l+1$)-edro fondamentale). In modo analogo si potranno determinare gli $\binom{l+1}{3}$ S_{m-2} proiezioni dell'S_m $A^1A^2 \ldots A^{m-1}A^mA^{m+2}$. Congiungendo gli S_{m-2} proiezioni omonime dei due S_m si otterranno gli $\binom{l+1}{3}$ S_{m-1} proiezioni dell'S_{m+1} $A^1A^2 \ldots A^{m-1}A^mA^{m+1}A^{m+2}$. Essi concorreranno quattro a quattro in $\binom{l+1}{4}$ S_{m-2} proiezioni dell'S_{m+1} stesso dagli $\binom{l+1}{4}$ S_{l-4} dell'($l+1$)-edro, ecc. (*). Se il dato S_h è un iperpiano ($h=l+m-1$), costruiti gli ($l+1$) S_{m-1} proiezioni dell'S_{l+m-2} $A^1A^2 \ldots A^{l+m-1}$ in esso contenuto, questi concorreranno in un S_{m-2}: traccia dell'S_{l+m-2}. Costruito analogamente l'S_{m-2} traccia dell'S_{l+m-2} $A^1A^2 \ldots A^{l+m-2}A^{l+m}$, i due S_{m-2} risulteranno giacenti in un medesimo S_{m-1} (iperpiano), traccia del dato S_{l+m-1}.

6. — Si presenta ora il problema — fondamentale per il presente sistema di rappresentazione —: " Individuato un S_h mediante $h+1$ suoi punti ($h+1$ ($l+1$)-ple di punti allineati con Ω) rappresentare un punto generico dell'S_h ". Per $h < m$ il

(*) Potrebbero gli S_{m-1} proiezioni di un S_i ($i \geq m-1$), congiungente $i+1$ dei punti dati $A^1, A^2, \ldots A^{h+1}$ risultare coincidenti, allorchè l'S_i stesso fosse incidente a Σ (n° 4). Supposto però il dato S_h non incidente a Σ (cioè le ($l+1$)-ple di punti proiezioni dei punti $A^1, A^2, \ldots A^{h+1}$ non contenute in un medesimo S_{m-1} per Ω), un S_i generico dell'S_h non sarà incidente a Σ, e si potranno assumere — per i qualunque — quanti si vogliano S_i non incidenti a Σ, tenendo presente ad es. che ad uno o più fra i punti $A^1, A^2, \ldots A^{h+1}$ possono sostituirsi uno o più punti, presi sulle rette congiungenti due a due i punti dati $A^1, A^2, \ldots A^{h+1}$.

problema ha soluzione immediata: Una generica retta per Ω, nell'S_{l+1} che contiene gli S_h proiezioni del dato S_h, seca tali spazi nelle proiezioni di un punto generico dell'S_h oggettivo. — Per $h > m$ si ha che: " Assegnati sopra un'arbitraria, generica retta per Ω, $h-m+1$ punti $P_1, P_2, \ldots, P_{h-m+1}$, risultano individuati in conseguenza altri $l+m-h$ punti $P_{h-m+2}, \ldots, P_{l+1}$, i quali coi primi costituiscono ordinatamente la 1ª, 2ª, ..., $(l+1)$ª proiezione di un punto P dell'S_h ". Invero, nell'S_{l+1} congiungente Σ alla retta $\Omega P_1 P_2 \ldots$, gli $h-m+1$ S_l (iperpiani) $\mathfrak{S}_1 P_1, \mathfrak{S}_2 P_2, \ldots, \mathfrak{S}_{h-m+1} P_{h-m+1}$ avranno in comune un S_{l+m-h}: e questi taglierà il dato S_h in un punto P, le cui proiezioni: 1ª, 2ª, ..., $(h-m+1)$ª coincideranno ordinatamente con $P_1, P_2, \ldots, P_{h-m+1}$. — Gli ∞^h punti quindi di un dato S_h dell'S_{l+m} si potranno rappresentare, per $h \geq m$, colle $\infty^h (h-m+1)$-ple di punti di Π allineati con Ω.

7. — Passando all'effettiva risoluzione del problema proposto, notiamo sin d'ora che le costruzioni relative saranno lineari, valide per ogni valore di m, maggior di 1; e che potranno separatamente determinarsi i punti ulteriori proiezioni cercate. Pongasi $h = (m-1)+i$. (Sarà $i > 0$). Sieno poi $A_1^1, A_2^1, \ldots, A_{l+1}^1$; $A_1^2, A_2^2, \ldots, A_{l+1}^2$; ...; $A_1^{h+1}, A_2^{h+1}, \ldots, A_{l+1}^{h+1}$ i punti determinanti l'S_h. E sieno $P_1, P_2, \ldots, P_i$ le prime proiezioni assegnate di un punto P dell'S_h. Vogliasi costruirne la $(i+1)$ª proiezione (P_{i+1}). Il punto $D_{1,2,\ldots,i+1}$ proiezione dell'$S_i \Delta \equiv A^1 A^2 \ldots A^i P$ (dall'$S_{l-i-1} \mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2 \ldots \mathfrak{S}_{i+1}$ dell'$(l+1)$-edro fondamentale) (*) deve appartenere alla proiezione omonima (di indici $1, 2, \ldots, i+1$) del dato S_h, iperpiano costruibile secondo il procedimento del n° 5, e contemporaneamente alla retta $d_{1,2,\ldots,i}$ proiezione dell'$S_i \Delta$ (dall'$S_{l-i} \mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2 \ldots \mathfrak{S}_i$), pure costruibile, essendo note le proiezioni $P_1, P_2, \ldots, P_i$ di P. Determinato il punto $D_{1,2,\ldots,i+1}$ come intersezione della $d_{1,2,\ldots,i}$ coll'iperpiano, si potrà determinare la retta $d_{2,3,\ldots,i+1}$ proiezione di Δ (dall'$S_{l-i} \mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}_3 \ldots \mathfrak{S}_{i+1}$), osservando ch'essa dovrà passare per $D_{1,2,\ldots,i+1}$

(*) Quando l'S_h assegnato è un iperpiano ($h = l+m-1$, ossia $i = l$), in luogo della proiezione $D_{1,2\ldots i+1}$ dell'$S_i \Delta \equiv A^1 A^2 \ldots A^i P$, compare la traccia del medesimo S_i su Π: punto il quale dovrà appartenere all'S_{m-1} traccia del dato S_h (costruibile: v^i n° 5 in fine). L'intersezione di tale S_{m-1} colla $d_{1,2,\ldots i}$ sarà la traccia dell'$S_i \Delta$, per cui dovrà passare la $d_{2,3,\ldots i+1}$, ecc.

e per il punto proiezione omonima (di indici $2, 3, \ldots, i+1$) dell'$S_{i-1} A^1 A^2 \ldots A^i$. Determinata la $d_{2,3,\ldots,i-1}$, sopra essa dovrà trovarsi il punto proiezione omonima dell'$S_{i-1} \Phi \equiv A^1 A^2 \ldots A^{i-1} P$: Ma tale punto deve contemporaneamente giacere per es. sulla retta $f_{2,\ldots,i}$ proiezione di Φ (dall'$S_{l-i+1} \mathfrak{C}_2 \ldots \mathfrak{C}_i$): risulterà pertanto coincidente col punto comune alle due rette (le quali sono effettivamente complanari). Risulterà determinata in conseguenza p. es. la retta $f_{3,\ldots,i+1}$ proiezione di Φ (dall'$S_{l-i+1} \mathfrak{C}_3 \ldots \mathfrak{C}_{i+1}$), la quale deve passare per tale punto e per la proiezione omonima (di indici $3, \ldots, i+1$) dell'$S_{i-2} A^1 A^2 \ldots A^{i-1}$. — Procedendo in modo affatto analogo si potrà determinare la retta proiezione di indici $4, \ldots, i+1$ dell'$S_{i-2} A^1 A^2 \ldots A^{i-2} P$, poscia la retta proiezione di indici $5, \ldots, i+1$ dell'$S_{i-3} A^1 A^2 \ldots A^{i-3} P$, ecc. sino alla retta proiezione di indici $i, i+1$ del piano $A^1 A^2 P$ ed infine alla retta proiezione di indice $i+1$ della retta $A^1 P$, cioè alla $A^1_{i+1} P_{i+1}$. Sopra tale retta, e sopra la $\Omega P_1 \ldots$ dovrà trovarsi la proiezione richiesta P_{i+1}.

Assegnate le prime $h - m + 1 = i$ proiezioni $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_i$ di un $S_d \Delta$, di dimensione minore di m, contenuto nel dato S_h, se ne potranno costruire le ulteriori $l + m - h$ proiezioni, determinando le ulteriori proiezioni di $(d+1)$ suoi punti, le cui prime proiezioni sieno assunte negli $S_d\, \Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_i$ (intersezioni degli spazi stessi $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_i$ con $d+1$ rette linearmente indipendenti condotte per Ω nell'S_{d+1} che li contiene): congiungendo le proiezioni omonime così determinate si otterranno gli S_d ulteriori proiezioni richieste.

8. — Le costruzioni precedenti dànno anche naturalmente modo di costruire, nell'ipotesi $h \geq m$, un punto che " non appartenga " ad un dato S_h (poichè basterà, assegnate di tale punto le prime $h - m + 1$ proiezioni, assumere la $(h - m + 2)^a$ diversa da quella, che si otterrebbe considerando le date proiezioni come le $h - m + 1$ prime proiezioni di un punto dell'S_h). (Il problema stesso è ovvio pel caso $h < m$). Conseguentemente esse dànno modo di assegnare, per h qualunque, $h+1$ punti linearmente indipendenti: basterà invero, seguendo un noto procedimento, assumere due punti distinti, un terzo punto che non appartenga alla retta congiungente i primi due, un quarto non appartenente al piano dei primi tre, e così via. — Analogamente si procede-

rebbe per riconoscere se certi $h+1$ punti assegnati sono linearmente indipendenti (determinano cioè effettivamente un S_h) e per ridursi, in caso negativo, a punti linearmente indipendenti.

§ 2.

Risoluzione dei problemi grafici fondamentali.

9. — Accenneremo nel presente § alla risoluzione dei due problemi grafici: determinazione dello " spazio congiungente " e dello " spazio intersezione " di due dati spazî. Ogni problema grafico nell'S_{l+m} potrà decomporsi in più problemi elementari dei due tipi precedenti. Discenderà dalla risoluzione effettiva dei due problemi che " ogni problema grafico, proposto relativamente ad una configurazione qualsiasi di punti e spazî nell'S_{l+m}, può risolversi nell'S_m di proiezione, operando sugli elementi rappresentativi, quando sia assegnata nell'S_m la posizione del punto fondamentale Ω ".

Spazio congiungente due dati spazî S_h, S_i. — Se la dimensione k dello spazio congiungente è $\leq m-1$, l'S_k congiungente sarà individuato dagli S_l sue proiezioni, congiungenti le coppie di spazî proiezioni omonime dei due dati spazî. Nel caso contrario, supposto l'S_h e l'S_i individuati: il primo mediante $h+1$ suoi punti $A^1, A^2, \ldots A^{h+1}$, il secondo mediante $i+1$ suoi punti $B^1, B^2, \ldots B^{i+1}$, lo spazio congiungente potrà ritenersi rappresentato, nell'ipotesi in cui i due spazî sieno in posizione reciproca generica (senza punti a comune), mediante gli $h+i+2$ punti $A^1, A^2, \ldots A^{h+1}, B^1, B^2, \ldots B^{i+1}$. Occorrerà in caso diverso (v.[i] n° 8) ridursi a punti linearmente indipendenti: risulterà determinata in conseguenza la dimensione dello spazio congiungente. (Si potrebbe altresì, a tale effetto, determinare (n° 10) l'eventuale spazio comune ai due dati, ecc.).

10. — *Spazio intersezione di due dati spazî* Δ_h, Φ_i. — Distingueremo tre casi: I. Le dimensioni h ed i dei due spazi Δ, Φ sieno entrambi minori di m, cioè i due spazî rappresentabili mediante le loro proiezioni $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_{l+1}$ e $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_{l+1}$ (dagli S_{l-1} $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots \mathfrak{S}_{l+1}$ dell'$(l+1)$-edro fondamentale): Le proiezioni, dai medesimi S_{l-1}, dello spazio intersezione apparterranno

agli spazî comuni alle proiezioni omonime $\Delta_1, \Phi_1; \ldots$ dei due spazî dati. Nel caso più generale relativo a tali ipotesi, in cui cioè l'S_h e l'S_i abbiano un $S_{h+i-l-m}$ (soltanto) a comune (*), le proiezioni omonime dei due spazî s'incontreranno secondo $l+1$ S_{h+i-m} $\Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_{l+1}$ contenuti nell'$S_{h+i-m+2}$ comune all'S_{h+1} ed all'S_{i+1} che contengono risp. le proiezioni $\Delta_1, \ldots; \Phi_1, \ldots$ dei due spazî. In tale $S_{h+i-m+2}$ gli $l+1$ $S_{h+i-m+1}$ (iperpiani) che da Ω proiettano gli S_{h+i-m} $\Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_{l+1}$ si taglieranno secondo un $S_{h+i-l-m+1}$, il quale a sua volta taglierà gli S_{h+i-m} $\Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_{l+1}$ stessi secondo $l+1$ $S_{h+i-l-m}$ proiezioni dell'$S_{h+i-l-m}$ comune ai due spazî dati Δ e Φ. — Lo stesso procedimento potrà tenersi anche quando gli spazî dati Δ e Φ sono " incidenti ": hanno cioè a comune uno spazio di dimensione maggiore di $h+i-l-m$, o — ciò che fa lo stesso — son contenuti in un medesimo S_k $(k \leq l+m-1)$: In tal caso gli spazî proiettanti da Ω le intersezioni $\Psi_1 \equiv \Delta_1 \Phi_1, \ldots \Psi_{l+1} \equiv \Delta_{l+1} \Phi_{l+1}$ si taglieranno secondo un $S_{h+i-k+1}$, secante a sua volta $\Psi_1, \ldots \Psi_{l+1}$ secondo $l+1$ S_{h+i-k}, rappresentanti lo spazio intersezione richiesto. — II. Sia $h<m$ e $i \geq m$. Lo spazio $S_{h+i-l-m}$ comune ai due spazî, supposti assegnati in posizione generica ed individuati: il primo mediante le sue proiezioni $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_{l+1}$, il 2° mediante $i+1$ suoi punti, potrà determinarsi col procedimento seguente (**): Si costruiscano (n° 7, in fine) gli $l+m-i$ S_h ulteriori proiezioni di un S_h, contenuto in Φ e di cui $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_{i-m+1}$ sieno le prime proiezioni. Chiameremo ordinatamente $\Psi_{i-m+2}, \ldots \Psi_{l+1}$ tali spazî. Le proiezioni omonime ($(i-m+2)^a, \ldots (l+1)^a$) dell'$S_{h+i-l-m}$ comune agli spazî dati saranno contenute negli S_{h-1} intersezioni delle coppie di proiezioni omonime Δ_{i-m+2} $\Psi_{i-m+2}, \ldots$ Δ_{l+1} Ψ_{l+1}. Proiettando da Ω tali S_{h-1}, l'$S_{h+i-l-m+1}$ comune agli $l+m-i$ S_h proiettanti secherà sopra le proiezioni $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_{l+1}$ di Δ gli spazî $(S_{h+i-l-m})$ proiezioni dell'$S_{h+i-l-m}$ intersezione richiesta. — Nell'ipotesi in cui Δ e Φ fossero incidenti, appar-

---

(*) Dovrà essere $h+i-l-m \geq 0$, e quindi (per le: $h \leq m-1$, $i \leq m-1$): $m-2 \geq h+i-m \geq l$, da cui $m-2 \geq l$.

(**) Se $h \geq l+1$ (caso per cui, essendo $h \leq m-1$, occorre che sia $m \geq l+2$), si potranno determinare, come nel caso I°, le intersezioni con Δ di quanti si vogliano S_{m-1} od $S_{m-2}, \ldots$, od $S_{m-(h-l)}$ assunti in Φ. Esse apparterranno allo spazio intersezione $\Delta\Phi$. Si potrà pertanto seguire, per determinare tale spazio il procedimento del caso III, parte *a)*.

tenessero cioè ad un medesimo S_k $(k \leq l+m-1)$, determinati come sopra gli S_h $\Psi_{i-m+2}, \ldots \Psi_{l+1}$, e poscia gli S_{h-1} $\Delta_{i-m+2} \Psi_{i-m+2}, \ldots \Delta_{l+1} \Psi_{l+1}$, lo spazio comune agli S_h proiettanti da Ω tali intersezioni, risulterebbe un $S_{h+i-k+1}$, secante gli spazî $\Delta_1 . \Delta_2 \ldots . \Delta_{l+1}$ secondo gli S_{h+i-k} proiezioni dello spazio (S_{h+i-k}) intersezione richiesta. — III. Sia $h \geq m$, $i > m$ e si supponga $h < i$. Distingueremo ancora, in tali ipotesi, due casi: *a*) È $i > l+1$ (e quindi $(m-1)+i \geq l+m$). In tal caso ogni S_{m-1}, $S_{m-2}, \ldots$ $S_{m-(i-l)}$ dell'S_h Δ incontra l'S_i Φ, e lo spazio intersezione è determinabile secondo il procedimento precedente. Ricorrendo a tali spazî si potranno determinare quanti punti o spazî si vogliono dell'intersezione $\Delta \Phi$. Se gli spazî Δ e Φ sono in posizione generica (non incidenti) basterà per esempio ricorrere ad $h+i-l-m+1$ $S_{m-(i-l)}$ generici (linearmente indipendenti) di un sistema lineare contenuto in Δ (*): i punti comuni a tali spazî ed a Φ determinano l'$S_{h+i-l-m}$ intersezione. Nel caso in cui Δ e Φ sieno incidenti, contenuti cioè in un medesimo S_k $(k < l+m-1)$ non solo gli S_{m-1}, $S_{m-2} \ldots S_{m-(i-l)}$ ma altresì gli $S_{m-(i-l)-1}, \ldots S_{k-i}$ incontreranno Φ; si potrà ricorrere in tal caso ad $h+i-k+1$ S_{k-i}, linearmente indipendenti da un sistema lineare contenuto in Δ. — *b*) È $i \leq l$. (Non sarà applicabile in tal caso la costruzione precedente, se i due spazî Δ, Φ non sono " incidenti ", anzi, contenuti in un medesimo S_{i+m-1}.): Lo spazio Φ si potrà considerare come l'S_i comune a più spazî le cui dimensioni siano maggiori di l (p. es. $l+m-i$ iperpiani). Sieno Θ, $\Lambda, \ldots$ tali spazî. Determinando come sopra lo spazio comune a Δ ed a Θ, poi dello spazio così determinato l'intersezione con Λ, ecc. si giungerà alla determinazione dello spazio intersezione richiesto.

(*) Se lo spazio Δ è individuato mediante $h+1$ punti $A^1, A^2, \ldots, A^{h+1}$, basterà considerare gli $S_{m-(i-l)}$ che congiungono l'$S_{m-(i-l)-1}$ determinato da $m-(i-l)$ di essi: $A^1, A^2, \ldots, A^{m-(i-l)}$, successivamente agli $h+i-l-m+1$ rimanenti: $A^{m-(i-l)+1}, \ldots, A^{h+1}$. — Si noti in generale che per " condurre per uno spazio qualsiasi S_k, determinato mediante $k+1$ suoi punti, un S_{k+g} ", basterà considerare coi $k+1$ punti che determinano l'S_k, g punti linearmente indipendenti, assunti fuori dell'S_k.

Capitolo II.

Supponendo nella trattazione precedente $m = 2$, si ottiene come caso particolare, notevole, la rappresentazione di uno spazio di dimensione qualunque n su di un piano: " proiezione $(n-1)$-centrale di un S_n su di un piano „; per $m = 3$: la " proiezione $(n-2)$-centrale di un S_n su di uno spazio ordinario „. Per $l = 1$ si avrebbe la " proiezione bicentrale di un S_n su di un iperpiano, in esso contenuto „.

Applicheremo brevemente la precedente trattazione (§§ 1-2) alla rappresentazione di un S_4 su di un piano (proiezione tricentrale) e su di uno spazio ordinario (proiezione bicentrale).

§ 3.

Proiezione tricentrale di un S_4 su di un piano.

11. — Sia π il piano di proiezione; e sieno C', C'', C''' tre centri di proiezione, non allineati. Il loro piano $\sigma \equiv C' C'' C'''$ incontri π in un punto (unico) Ω. Ogni punto P dell'S_4 verrà proiettato su π dai lati $c_1 \equiv C'' C'''$, $c_2 \equiv C' C'''$, $c_3 \equiv C' C''$ secondo tre punti P_1, P_2, P_3, allineati con Ω (sulla retta comune a π ed all'S_3 σP). Ogni retta r sarà proiettata dai medesimi lati c_1, c_2, c_3 secondo tre rette r_1, r_2, r_3 costituenti in generale un trilatero, i cui vertici $R' \equiv r_2 r_3$, $R'' \equiv r_1 r_3$, $R''' \equiv r_1 r_2$ rappresentano le proiezioni della retta stessa dai centri C', C'', C'''. Ogni piano α verrà proiettato da C', C'', C''' secondo tre rette a', a'', a''' concorrenti nella traccia T_α del piano su π. I punti e le rette dell'S_4 vengono individuati, in generale, dalle loro proiezioni. — Affinchè un punto P appartenga ad una retta r, sarà necessario, ed in generale sufficiente, che le proiezioni P_1, P_2, P_3 del punto appartengano alle omonime r_1, r_2, r_3 della retta: affinchè due rette r, s si taglino, sarà necessario, ed in generale sufficiente, che i trilateri $r_1 r_2 r_3$, $s_1 s_2 s_3$ sieno omologici rispetto ad un asse uscente da Ω; i punti $P_1 \equiv r_1 s_1$, $P_2 \equiv r_2 s_2$, $P_3 \equiv r_3 s_3$ comuni ai lati omologhi rappresenteranno il punto d'incidenza $P \equiv r s$: le congiungenti i vertici omologhi $R' \equiv r_2 r_3$, $S' \equiv s_2 s_3$:... le proiezioni del piano contenente le due rette, il centro d'omologia, la traccia del piano stesso su π. Un piano potrà rappresentarsi

mediante tre punti non allineati o due rette incidenti. — Analogamente rappresenteremo un S_3 mediante quattro punti, non in un piano o mediante due rette sghembe, ecc. Individuato un S_3 mediante due rette sghembe $r \equiv (r_1, r_2, r_3)$, $s \equiv (s_1, s_2, s_3)$ (caso cui possiamo sempre ridurci), e costruito un trilatero $p_1\, p_2\, p_3$ omologico ai due trilateri $r_1\, r_2\, r_3$, $s_1\, s_2\, s_3$, rispetto a due assi condotti ad arbitrio per il punto fondamentale Ω, la congiungente i centri d'omologia (traccie dei piani rp, sp) sarà la traccia dell'S_3 rs (*). Un piano δ od un S_3 Φ potranno altresì rappresentarsi comodamente mediante la loro traccia (T_δ o t_Φ) ed una retta $r \equiv (r_1, r_2, r_3)$.

12. — Si presentano, per la rappresentazione di quanti si vogliano elementi (punti, rette ed eventualmente piani) di un dato piano od S_3, i due problemi seguenti (v[i] n[i] 6-7): I. " Individuato un piano δ, costruire le ulteriori proiezioni di un punto P del piano, di cui sia assegnata una proiezione „: Sia il piano δ individuato mediante tre punti non allineati $A \equiv (A_1, A_2, A_3)$, $B \equiv (B_1, B_2, B_3)$, $C \equiv (C_1, C_2, C_3)$, e sia P_1 la (prima) proiezione assegnata di un punto P del piano. Si determinino (n° 11) le proiezioni d', d'', d''' del piano, concorrenti nella traccia T_δ del piano stesso: la retta $r_1 \equiv A_1\, P_1$, prima proiezione della oggettiva $r \equiv A\,P$ del piano, incontrerà d'' e d''' nelle proiezioni $R'' \equiv r_1\, r_3$, $R''' \equiv r_1\, r_2$ della r stessa; le r_2, r_3 congiungeranno tali punti R''', R'' alle proiezioni omonime A_2, A_3 del punto A. E le intersezioni delle r_2, r_3 colla $\Omega\, P_1$ saranno le ulteriori proiezioni richieste del punto P. — II. " Individuato un S_3 Φ, costruire l'ulteriore proiezione di un punto P dell'S_3, di cui sieno assegnate due proiezioni „: Sia l'S_3 Φ individuato p. es. mediante quattro punti, non in un piano: $A \equiv (A_1, A_2, A_3)$, $B \equiv (B_1, B_2, B_3)$, $C \equiv (C_1, C_2, C_3)$, $D \equiv (D_1, D_2, D_3)$ e sieno P_1, P_2 le (prime) proiezioni assegnate di un punto P dell'S_3. Si costruisca (n° 11) la traccia t_Φ dell'S_3. Le proiezioni m', m'', m''' del piano $\mu \equiv A\,B\,P$ (di Φ) concorreranno in un punto (T_μ) della t_Φ. Si chiamino risp. r ed s le

(*) Immaginati dunque gli ∞^2 triangoli omologici contemporaneamente a due dati (fra loro riferiti), rispetto a tutte le possibili coppie di rette uscenti da un medesimo punto, qualsiasi, tutti i centri d'omologia apparterranno ad una medesima retta (si sottintendono riferiti gli elementi di ogni triangolo omologico ai dati ad elementi corrispondenti dei triangoli stessi).

rette AP ed AB (di cui son note le proiezioni: $r_1 \equiv A_1 P_1$; $r_2 \equiv A_2 P_2$; ed $s_1 \equiv A_1 B_1$, $s_2 \equiv A_2 B_2$, $s_3 \equiv A_3 B_3$). La proiezione m''' del piano μ. nota poichè congiungente i punti $R''' \equiv r_1 r_2$, $S''' \equiv s_1 s_2$, taglierà sulla t_Φ il punto T_μ per cui dovranno ulteriormente passare le m', m''. Queste si otterranno pertanto congiungendo tal punto risp. ad $S' \equiv s_2 s_3$ e ad $S'' \equiv s_1 s_3$. Determinata la m' ad es. risulterà su di essa individuato il punto $R' \equiv r_2 r_3$ (come intersezione colla r_2), e quindi individuata la r_3, che sulla $\Omega P_1 P_2$ determinerà la proiezione P_3 richiesta. — Dalla risoluzione dei problemi I., II. discende senz'altro la costruzione delle ulteriori proiezioni di una retta di un dato piano od S_3, di cui sieno assegnate risp. una o due proiezioni: basterà determinare le ulteriori proiezioni di due punti della retta, ecc.

13. — *Problemi grafici.* — È ovvio, come nel caso generale (n° 9), il problema della determinazione dello spazio congiungente due o più dati spazî; le considerazioni del n° 11 dànno modo poi di costruire le proiezioni e le traccie di tali spazî congiungenti. — Ci limiteremo pertanto ad un breve esame dei problemi d'intersezione di rette, piani ed S_3. (Riterremo in posizione reciproca generica gli spazi di cui determineremo le intersezioni; nel caso " d'incidenza „ di due spazi si potrebbero però tenere in sostanza i medesimi procedimenti, come si è visto nel caso generale). — I. *Punto* P *comune ad una retta* $r \equiv (r_1, r_2, r_3)$ *e ad un* S_3 Δ: Si determini la terza proiezione r_3^0 (n° 12) della retta di Δ di cui r_1, r_2 son le prime proiezioni: il punto $P_3 \equiv r_3 r_3^0$ sarà la terza proiezione del punto P comune ad r e a Δ; le ulteriori proiezioni risulteranno le intersezioni della ΩP_3 colle r_1, r_2. — II. *Retta comune ad un piano* $\delta \equiv ABC$ *e ad un* S_3: Si determinino col procedimento precedente i punti comuni a due rette del piano δ (p. es. AB ed AC) ed all'S_3: la loro congiungente sarà la retta intersezione richiesta. — III. *Piano comune a due* S_3: $\Delta \equiv (t_\Delta, d)$, $\Phi \equiv (t_\Phi, f)$: Si potrebbero determinare, e poscia congiungere, le intersezioni di tre rette dell'S_3 Δ con Φ: converrà però nel caso presente assumere come S_3 ausiliario l'S_3 $\Psi \equiv df$, del quale si determinerà la traccia t_Ψ (n° 11). Il piano δ comune agli S_3 Δ e Ψ avrà per traccia il punto $T_\delta \equiv t_\Delta t_\Psi$ e conterrà la retta $d \equiv (d_1, d_2, d_3)$: le sue proiezioni congiungeranno dunque il punto T_δ ai vertici $D' \equiv d_2 d_3$, $D'' \equiv d_1 d_3$,

$D''' \equiv d_1\, d_2$ del trilatero $d_1\, d_2\, d_3$. In modo analogo si otterranno la traccia ($T_\varphi \equiv t_\Phi\, t_\Psi$) e le proiezioni del piano φ comune agli S_3 Φ e Ψ. I punti comuni alle proiezioni omonime dei due piani saranno le proiezioni R', R'', R''' di una retta r comune agli S_3 Δ e Φ. Il piano richiesto conterrà tale retta ed avrà per traccia il punto $t_\Delta\, t_\Phi$. — IV. *Punto* P *comune a due piani* $\delta \equiv ABC$, $\varphi \equiv LMN$. Si immaginino condotti per φ ad es. i due S_3 ausiliari φA e φB: si determinino (probl. I.): il punto H comune alla retta BC ed all'S_3 φA ed il punto K comune alla AC ed all'S_3 φB. Le rette AH e BK (comuni al piano δ ed ai due S_3 ausiliari) s'incontreranno nel punto P comune ai due piani.

§ 4.

Proiezione bicentrale di un S_4 su di uno spazio ordinario.

14. — Sia Π l'S_3 di proiezione e sieno C_1, C_2 due arbitrari centri di proiezione: la loro congiungente $s \equiv C_1\, C_2$ incontri Π in un punto Ω. Ogni punto P dell'S_4 verrà proiettato da C_1, C_2 secondo due punti P_1, P_2 allineati con Ω; ogni retta r secondo due rette r_1, r_2 in un piano con Ω, ogni piano α secondo due piani α_1, α_2, comunque disposti rispetto ad Ω. Il punto $T_r \equiv r_1\, r_2$, comune alle proiezioni di una retta r, costituisce la traccia della r su Π, la retta $t_\alpha \equiv \alpha_1\, \alpha_2$ comune alle proiezioni di un piano α: la traccia del piano. I punti, le rette, i piani dell'S_4 vengono individuati, in generale, dalle loro proiezioni. Un iperpiano (S_3) Δ potrà rappresentarsi mediante il piano δ sua traccia su Π ed un punto $D \equiv (D_1, D_2)$. La traccia di un S_3 individuato mediante quattro suoi punti A, B, C, D, od in modo equivalente, potrà determinarsi costruendo le traccie di tre sue rette (p. es. AB, AC, AD). — Individuato un S_3 mediante la sua traccia δ ed un punto $D \equiv (D_1, D_2)$, ed assegnata la 1ª proiezione P_1 di un suo punto P, se ne determinerà la 2ª, osservando che le proiezioni $P_1\, D_1$, $P_2\, D_2$ della retta PD dell'S_3, concorrono in un punto del piano δ. Determinata la $P_2\, D_2$, nella sua intersezione colla ΩP_1 si troverà la richiesta proiezione P_2.

15. *Problemi grafici.* — Ci limiteremo, come nel § precedente, ai problemi d'intersezione di rette, piani, S_3, assegnati

in modo generico. I. *Punto* P *comune ad una retta* $r \equiv (r_1, r_2, r_3)$ e *ad un* S_3 $\Delta \equiv (\delta; D_1, D_2)$: Il piano $\rho \equiv Dr$ (di cui i piani $\rho_1 \equiv D_1 r_1$, $\rho_2 \equiv D_2 r_2$ son le proiezioni) taglia l'S_3 Δ secondo una retta s uscente da D ed avente per traccia il punto T_s comune al piano δ (traccia di Δ) ed alla retta $t_\rho \equiv \rho_1 \rho_2$ (traccia del piano ρ). Le proiezioni $s_1 \equiv T_s D_1$, $s_2 \equiv T_s D_2$ della s incontreranno le omonime r_1, r_2 della data r, secondo le proiezioni P_1, P_2 del punto d'intersezione richiesto. — II. *Retta comune ad un piano* $\alpha \equiv (\alpha_1, \alpha_2)$ e *ad un* S_3 $\Delta \equiv (\delta; D_1, D_2)$: Avrà per traccia il punto comune alla retta $t_\alpha \equiv \alpha_1 \alpha_2$ (traccia del piano α) ed al piano δ (traccia dell'S_3 Δ). Basterà determinarne un ulteriore punto, assumendo una retta in (α_1, α_2) e costruendone (probl. I.) l'intersezione con Δ. — III. *Piano comune a due* S_3 $\Delta \equiv (\delta; D_1, D_2)$, $\Phi \equiv (\varphi; F_1, F_2)$. Avrà per traccia la retta $\delta\varphi$ comune alle traccie. Basterà determinarne, come nel problema precedente, un ulteriore punto. — IV. *Punto* P *comune a due piani* $\alpha \equiv (\alpha_1, \alpha_2)$, $\beta \equiv (\beta_1, \beta_2)$: Si conduca per Ω la retta incidente alle due rette $\alpha_1 \beta_1$, $\alpha_2 \beta_2$; i punti d'appoggio di tal retta colle $\alpha_1 \beta_1$, $\alpha_2 \beta_2$ stesse, saranno le proiezioni P_1, P_2 del punto comune ai due piani.

Capitolo III.

La risoluzione di problemi grafici iperspaziali, condotta sugli elementi rappresentativi dei punti e dei diversi spazi sopra un piano o sopra uno spazio ordinario, secondo il sistema generale proposto, può dar luogo, come si disse, ad alcune costruzioni e proposizioni grafiche notevoli. Gli esempi di cui ci occuperemo riguarderanno specialmente (§§ 6 e 7) la rappresentazione di un S_4 e di un S_5 su di uno spazio ordinario.

§ 5.

Proiezione tricentrale di un S_4 su di un piano.

16. — " Nell'S_4 v'ha un'unica retta r incidente a tre date a, b, c, in posizione generica: la retta comune ai tre S_3 ab, ac, bc ". Sieno a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3 le proiezioni delle a, b, c. Le proiezioni r_1, r_2, r_3 della retta r incidente ad a, b, c, incideranno alle $a_1, a_2, a_3, b_1, \ldots c_3$ in guisa che i tre punti $a_1 r_1$, $a_2 r_2$, $a_3 r_3$

risulteranno allineati con Ω, punto fondamentale (§ 3), e così pure i tre punti $b_1 r_1$, $b_2 r_2$, $b_3 r_3$ ed i tre punti $c_1 r_1$, $c_2 r_2$, $c_3 r_3$. Pertanto: *Assegnati in un piano tre triangoli* $a_1 b_1 c_1$; $a_2 b_2 c_2$; $a_3 b_3 c_3$, *fra loro riferiti ed un punto* Ω, *in posizione generica, sui lati di uno qualsiasi dei tre triangoli esistono tre (soli) punti allineati, le cui proiezioni da* Ω *sui lati omologhi dei rimanenti triangoli son pure allineate.* Per la costruzione effettiva di tali terne di punti basterà costruire " in proiezione tricentrale „ (§ 3) la retta intersezione dei tre S_3 congiungenti le coppie di rette $(a_1 a_2 a_3)$, $(b_1 b_2 b_3)$; $(a_1 a_2 a_3)$, $(c_1 c_2 c_3)$; $(b_1 b_2 b_3)$, $(c_1 c_2 c_3)$, essendo Ω punto fondamentale. — Costruite le traccie di tali S_3 (n° 11), i vertici del trilatero costituito da queste rette si potranno considerare come le traccie dei piani comuni ai tre S_3, presi due a due. E le proiezioni di tali piani si otterranno congiungendo le loro traccie ai " punti „ proiezioni delle tre rette a, b, c (vertici dei trilateri $a_1 a_2 a_3$, $b_1 b_2 b_3$, $c_1 c_2 c_3$). Le proiezioni omonime dei tre piani concorreranno nei vertici del trilatero $r_1 r_2 r_3$ richiesto (*).

§ 6.

Proiezione bicentrale di un S_4 su di uno spazio ordinario.

17. — " Assegnati in un S_4, in modo generico, tre piani α, β, γ: esiste nell'S_4 un solo piano σ incidente — secondo rette — ai tre piani stessi: il piano congiungente i punti αβ, αγ, βγ comuni ai tre piani, presi due a due; esistono poi nel-

(*) Alle *medesime costruzioni* si potrebbe pervenire elementarmente osservando che il problema proposto equivale al seguente: " Dati in un piano tre triangoli $a_1a_2a_3$, $b_1b_2b_3$, $c_1c_2c_3$, costruire un triangolo omologico ad essi, in guisa che i tre assi d'omologia concorrano in un punto fissato Ω del piano „. Ora è noto che, considerato un triangolo omologico ad $a_1a_2a_3$ e $b_1b_2b_3$ (p. es.), rispetto ad una fissata, arbitraria coppia di rette uscenti da Ω, i centri d'omologia descrivono, al variare della coppia considerata di rette, nel fascio (Ω), una medesima retta (vi la nota (*) al n° 11). Le stesse considerazioni potendo ripetersi per i due triangoli $a_1a_2a_3$, $c_1c_2c_3$ e per i triangoli $b_1b_2b_3$, $c_1c_2c_3$, sempre in relazione al punto Ω, si giunge alla determinazione di certe tre rette costituenti un trilatero, i cui vertici sono i centri d'omologia del triangolo cercato rispetto ai dati $a_1a_2a_3$, $b_1b_2b_3$, $c_1c_2c_3$: detto triangolo può allora costruirsi immediatamente.

l'S_4 ∞^3 rette incidenti ai tre piani: da un punto generico dell'S_4 esse vengono proiettate su di un S_3, secondo rette costituenti un complesso tetraedrale „ (*).

Sieno α_1, α_2; β_1, β_2; γ_1, γ_2 le tre coppie di piani (in posizione generica rispetto al punto fondamentale Ω) rappresentanti i piani α, β, γ. I punti d'appoggio delle tre rette condotte per Ω ad incidere alle coppie di rette $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$; $\alpha_1\gamma_1$, $\alpha_2\gamma_2$; $\beta_1\gamma_1$, $\beta_2\gamma_2$ colle rette stesse, rappresenteranno ordinatamente i tre punti $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$ (n° 15). Sieno C_1, C_2; B_1, B_2; A_1, A_2 tali punti: i due piani $\delta_1' \equiv A_1B_1C_1$; $\delta_2' \equiv A_2B_2C_2$ rappresenteranno il piano δ' incidente ai tre dati. Il triedro, di vertice Ω, di cui A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sono spigoli è omologico ai due triedri $\alpha_1\beta_1\gamma_1$; $\alpha_2\beta_2\gamma_2$: i piani δ_1', δ_2' rappresentano i due piani d'omologia (**). E si avrà: *Fissati comunque nello spazio due triedri $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ riferiti fra loro, ed un punto Ω, esistono ∞^3 rette secanti le faccie del primo triedro secondo terne di punti, le cui proiezioni da Ω sulle omologhe del secondo son pure allineate: Tali rette e le rette contenenti le terne di punti proiezioni costituiscono complessi tetraedrali: (R_1) ed (R_2). Appartengono al primo complesso i piani rigati di cui sono sostegni le faccie α_1, β_1, γ_1 del 1° triedro e il piano δ_1' dianzi costruito, e conseguentemente le quattro stelle aventi i centri nei vertici del tetraedro $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1'$. Analogamente al secondo complesso appartengono i piani rigati e le stelle di cui son sostegni le faccie risp. ed i vertici del tetraedro $\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2'$.*

18. — È noto (***) che: “ assegnati in posizione generica nell'S_4 quattro piani α, β, γ, δ, i quattro piani α', β', γ', δ', i quali incidono ordinatamente alle quattro terne β,γ,δ; α,γ,δ; α,β,δ; α,β,γ, incontrano risp. α, β, γ, δ in quattro punti d'un

---

(*) C. Segre, *Alcune considerazioni elementari sull'incidenza di rette e piani nello spazio a quattro dimensioni*, “ Rend. del Circolo Mat. di Palermo „, T. II (1888): n. 2.

(**) Poichè il piano δ' incide ad α, β, γ, la sua traccia $\delta_1'\delta_2'$ (n° 14) inciderà alle tre rette $\alpha_1\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$, $\gamma_1\gamma_2$ traccie dei piani α, β, γ. Dunque: *Fissati comunque nello spazio due triedri $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$, riferiti fra loro, ed un punto Ω: se si costruisce il triedro di vertice Ω che è omologico ad entrambi, la retta d'intersezione dei due piani d'omologia risulta incidente alle tre rette comuni alle faccie omologhe dei due triedri. E dualmente.* Tali proposizioni possono pure dimostrarsi direttamente in modo immediato.

(***) C. Segre, nota cit., n. 3.

medesimo piano: ϵ. — I quattro piani α, β, γ, δ si possono alla loro volta considerare come i piani incidenti alle quattro terne β', γ', δ'; $\alpha', \gamma', \delta'$; α', β', δ'; α', β', γ' „.

Sieno α_1, α_2; β_1, β_2; γ_1, γ_2; δ_1, δ_2 le quattro coppie di piani rappresentanti ordinatamente i piani α, β, γ, δ. Si avrà: *Fissati comunque nello spazio due tetraedri* $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2$, *fra loro riferiti, ed un punto* Ω; *e costruiti i quattro triedri di vertice* Ω *che sono omologici alle quattro coppie di triedri* $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$; $\alpha_1\beta_1\delta_1$, $\alpha_2\beta_2\delta_2$;... *le quattro coppie di piani d'omologia* δ_1', δ_2'; γ_1', γ_2'; ... *costituiranno due nuovi tetraedri* $\alpha_1'\beta_1'\gamma_1'\delta_1'$, $\alpha_2'\beta_2'\gamma_2'\delta_2'$ *tali che*: 1°. *Le quattro rette* $\alpha_1'\alpha_2'$, $\beta_1'\beta_2'$,... *comuni alle faccie omologhe* α_1', α_2'; β_1', β_2'; ... *incidono alle quattro rette* $\alpha_1\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$, $\gamma_1\gamma_2$, $\delta_1\delta_2$ (*comuni alle faccie omologhe dei due dati tetraedri*) *prese tre a tre*; 2°. *Condotte per* Ω *le quattro rette incidenti alle quattro coppie di rette* $\alpha_1\alpha_1'$—$\alpha_2\alpha_2'$; $\beta_1\beta_1'$—$\beta_2\beta_2'$; $\gamma_1\gamma_1'$—$\gamma_2\gamma_2'$; $\delta_1\delta'_1$—$\delta_2\delta_2'$ *secondo le quattro coppie di punti* A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2; D_1, D_2 *i quattro punti d'appoggio* A_1, B_1, C_1, D_1, *ed i quattro punti* A_2, B_2, C_2, D_2 *risultano giacenti risp. in due piani* ϵ_1, ϵ_2; 3°. *Le due coppie di tetraedri* $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$—$\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2$; $\alpha_1'\beta_1'\gamma_1'\delta_1'$—$\alpha_2'\beta_2'\gamma_2'\delta_2'$ *sono in posizione reciproca rispetto ad* Ω (*applicate cioè ai tetraedri* $\alpha_1'\beta_1'\gamma_1'\delta_1'$, $\alpha_2'\beta_2'\gamma_2'\delta_2'$, *in relazione al punto* Ω, *le medesime costruzioni di cui sopra, si riottengono i primitivi tetraedri* $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2$).

E dualmente.

19. — " Le rette incidenti nell'S_4 ai quattro piani α, β, γ, δ incidono altresì al piano ϵ; esse costituiscono nell'S_4 un sistema ∞^2, contenuto in una forma del 3° ordine, e tale che ogni iperpiano generico contiene due rette del sistema „ (*).

Pertanto: *Assegnati ad arbitrio nello spazio due tetraedri* $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2$ *ed un punto* Ω, *esiste una congruenza* (R_1) *di rette secanti le faccie del 1° tetraedro secondo quaterne di punti, le cui proiezioni da* Ω *sulle omologhe del 2° son pure allineate. Risulta determinata, e costruibile linearmente* (n° 18) *una coppia* ϵ_1, ϵ_2 *di piani, tali che anche gli* ∞^2 *gruppi di cinque punti secati dalle rette della congruenza sui piani* α_1, β_1, γ_1, δ_1, ϵ_1 *vengon da* Ω *proiettati sugli omologhi* α_2, β_2, γ_2, δ_2 ϵ_2 *secondo gruppi di cinque punti allineati. La congruenza* (R_1), *e la congruenza* (R_2) *delle*

(*) C. Segre, nota cit., n[i] 3 e 5.

rette contenenti i gruppi di punti proiezioni sono del 3° ordine e della 2ª classe.

Per la costruzione effettiva delle congruenze (R_1), (R_2) basterebbe osservare che, condotto per Ω, ad arbitrio, un piano σ a secare i due tetraedri secondo due quadrilateri $a_1b_1c_1d_1$, $a_2b_2c_2d_2$, la determinazione delle eventuali rette delle congruenze (R_1), (R_2) giacenti in σ equivale al problema seguente " nell'ordinaria proiezione bicentrale di un S_3 su di un piano ": costruire le eventuali rette incidenti a quattro date sghembe (le rette di cui (a_1, a_2); (b_1, b_2); (c_1, c_2); (d_1, d_2) son le coppie di proiezioni). Ma si possono costruire altresì linearmente quante si vogliono rette delle congruenze (R_1), (R_2) osservando che, assunto ad arbitrio in uno dei piani oggettivi $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ un punto: ad es. un punto A su α, i tre S_3 $A\beta$, $A\gamma$, $A\delta$ che lo congiungono ai rimanenti, si tagliano secondo una retta incidente ai piani stessi (e ad ϵ): basterà eseguire " in proiezione bicentrale " tali costruzioni (v. n° 15): Assunti pertanto su α_1, α_2 risp. due punti A_1, A_2, allineati con Ω, rappresentanti un punto A di α, potranno costruirsi i piani traccie dei tre S_3 $A\beta$, $A\gamma$, $A\delta$, conducendo per Ω una seconda retta, a secare le coppie di piani omologhi β_1, β_2; γ_1, γ_2; δ_1, δ_2 nelle coppie di punti B_1, B_2; C_1, C_2; D_1, D_2 e congiungendo ordinatamente le tre rette $s_\beta \equiv \beta_1\beta_2$; $s_\gamma \equiv \gamma_1\gamma_2$; $s_\delta \equiv \delta_1\delta_2$ ai tre punti comuni alle tre coppie di rette $A_1B_1 - A_2B_2$, $A_1C_1 - A_2C_2$, $A_1D_1 - A_2D_2$. — Il punto comune ai tre piani (traccie) così costruiti, congiunto ad A_1 e ad A_2 darà luogo alle rette delle congruenze (R_1), (R_2) uscenti risp. dal punto A_1 e dal punto A_2.

20. — Applicando, in modo analogo, note proprietà (*) dei sistemi di rette incidenti in un S_4 a cinque piani indipendenti $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda$ si ha: *Assegnati nello spazio due gruppi di cinque piani fra loro riferiti*: $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \lambda_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2, \lambda_2$ *ed un punto* Ω, *in modo generico, esistono* ∞^1 *rette secanti i piani* $\alpha_1, \ldots \lambda_1$ *secondo gruppi di punti, le cui proiezioni da* Ω *sugli omologhi* $\alpha_2, \ldots \lambda_2$ *son pure allineate. Tali rette, e le rette contenenti i gruppi di punti proiezioni, costituiscono due rigate ellittiche* F_1, F_2 *del 5° ordine; le sviluppabili bitangenti delle due rigate son pure ellittiche e della*

(*) C. Segre, nota cit., nⁱ 7 ed 8.

5^a classe; ai piani delle sviluppabili appartengono risp. $\alpha_1, \ldots \lambda_1$, *e* $\alpha_2, \ldots \lambda_2$. Le due rigate, e quindi anche le loro sviluppabili bitangenti, risultano riferite biunivocamente fra loro, omologhe essendo le generatrici proiezioni di una medesima generatrice della rigata F delle rette incidenti ad $\alpha, \ldots \lambda$. *Considerate due n-ple qualunque di piani corrispondenti delle due sviluppabili bitangenti, ogni generatrice della rigata* F_1 *secherà la prima n-pla secondo punti, le cui proiezioni da* Ω *sui piani omologhi della seconda n-pla son pure allineate* (*).

Si ha ancora: *Assegnati nello spazio due gruppi di sei piani* $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \lambda_1, \mu_1 : \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2, \lambda_2, \mu_2$ *fra loro riferiti ed un punto* Ω, *in modo generico, esistono cinque rette secanti i piani* $\alpha_1, \ldots, \mu_1$ *secondo gruppi di punti, le cui proiezioni da* Ω *sopra gli omologhi* $\alpha_2, \ldots, \mu_2$ *son pure allineate.*

§ 7.

Proiezione tricentrale di un S_5 su di uno spazio ordinario.

21. — " Nell'S_5 il sistema delle rette incidenti a tre piani α, β, γ costituisce la nota M_3 cubica razionale normale; ogni S_4 contiene una sola retta del sistema; le rette del sistema punteggiano collinearmente i piani α, β, γ ed ∞^1 altri piani contenuti nella M_3^3, ecc. „ — Sieno $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ le terne di piani proiezioni dei dati α, β, γ. Si avrà: *Assegnati nello spazio tre triedri, fra loro riferiti:* $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$, $\alpha_3\beta_3\gamma_3$ *ed un punto* Ω, *in modo generico, esiste una congruenza* (R_1) *di rette, le quali secano le faccie del 1° triedro secondo terne di punti, le cui proiezioni da* Ω *sulle omologhe del 2° e del 3° triedro son pure terne di punti allineati. — La congruenza* (R_1) *e le congruenze* (R_2), (R_3) *contenenti le terne di punti proiezioni sono del 3° ordine e della 1^a classe. Le generatrici della congruenza* (R_1) *punteggiano collinearmente le faccie* $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ *e gli* ∞^1 *piani osculatori di una determinata cubica sghemba (fra cui* $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$*). Esse si possono considerare come le intersezioni delle* ∞^2 *coppie di piani osculatori alla cubica; compaiono tra esse gli spigoli* $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_1\gamma_1$, $\beta_1\gamma_1$. *Analogamente dicasi per le congruenze* (R_2), (R_3), *ecc.* — Condotto ad arbitrio

(*) Analoghe osservazioni potranno farsi ai n[i] 22 e 23.

per Ω un piano, a secare i tre triedri $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$, $\alpha_3\beta_3\gamma_3$ secondo tre triangoli $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_2$, $a_3b_3c_3$, si possono in tale piano determinare le tre rette r_1, r_2, r_3 delle tre congruenze (R_1), (R_2), (R_3). ivi contenute, osservando che tale determinazione si riduce alla risoluzione del problema trattato al n° 16.

22. — " Le ∞^1 rette incidenti in un S_5 a tre piani α, β, γ e ad un S_3 Π costituiscono una rigata razionale del 4° ordine: si appoggiano ad ∞^1 piani e ad ∞^1 S_3 risp. secondo coniche e secondo cubiche sghembe, punteggiate proiettivamente dalle generatrici " (*). — Si supponga Π coincidente coll'S_3 di proiezione, e sieno $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ le proiezioni dei piani α, β, γ. Le proiezioni di una retta r incidente a Π appartengono ad un medesimo fascio (il cui centro è la traccia della retta). Pertanto: *Assegnati nello spazio tre triedri* $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, $\beta_1\beta_2\beta_3$, $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ *ed un punto* Ω, *in modo generico, per il punto* Ω *si posson condurre* ∞^1 *terne di rette secanti i tre triedri secondo terne di punti prospettive rispetto ad un medesimo centro. Il luogo dei centri di prospettiva è una cubica sghemba; le rette* (r_1, r_2, r_3) *congiungenti i punti corrispondenti costituiscono tre rigate razionali del 4° ordine, dotate di* ∞^1 *coniche e cubiche sghembe direttrici, ecc.*

23. — " Assegnati in un S_5, in modo generico sei piani, da ogni punto dell'S_5 escono 5 piani che ad essi si appoggiano (secondo punti); assegnati 7 piani, i piani che ad essi si appoggiano costituiscono un sistema ∞^2, contenuto in una forma del 21° ordine, e tale che per ogni S_3 fissato nell'S_5 v'hanno 21 piani del sistema ad esso incidenti; assegnati 8 piani, i piani che ad essi si appoggiano costituiscono un sistema ∞^1: esso è contenuto in una M_3 del 42° ordine, o — in altri termini — fissati 9 piani in modo generico, esistono 42 piani che ad essi si appoggiano " (**). — Ora, se due piani $\alpha \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\beta \equiv (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ dell'S_5 hanno un punto P a comune, le proiezioni P_1, P_2, P_3 di tal punto, allineate con Ω, dovranno appartenere rispettivamente alle tre rette $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$, $\alpha_3\beta_3$. Cioè la quadrica contenente le tre

(*) Cfr. la mia mem.ª: *Sulla incidenza di rette, piani e spazi ordinarî in uno spazio a cinque dimensioni, ecc.* " Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino ", (II), T. LIV (1904): n. 24.

(**) Id., ni 36, 37.

rette $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$, $\alpha_3\beta_3$ dovrà passare per Ω. Tale condizione sarà necessaria, ed in generale sufficiente, affinchè due piani dell'S_5 abbiano un punto a comune. Quindi: " *Assegnati in modo generico nello spazio 6 triedri ed un punto Ω, ogni punto dello spazio è in generale vertice di 5 triedri, ognuno dei quali può riferirsi ai triedri dati, in guisa tale che le quadriche determinate dalle rette comuni alle faccie omologhe passino per il punto dato Ω. — Assegnati con Ω, in modo generico, 7 triedri, esisteranno ∞^2 triedri nelle condizioni precedenti rispetto ai triedri dati: i loro vertici costituiranno una superficie del 21° ordine, le loro faccie inviluppperanno tre superficie della 21ª classe. — Assegnati con Ω — in modo generico — 8 triedri, esisteranno ∞^1 triedri nelle condizioni di cui sopra rispetto ai triedri dati: i loro vertici costituiranno una curva del 42° ordine, le loro faccie tre sviluppabili della 42ª classe. — Assegnati finalmente con Ω 9 triedri — in modo generico — esisteranno 42 triedri, ognuno dei quali riferibile ai dati in modo che le (9) quadriche determinate dalle rette intersezioni delle faccie omologhe, passino pel punto Ω. — E dualmente.*

§ 8.

Altri casi particolari di rappresentazione.

24. *Proiezione h-centrale di un* S_{2h-1} *su di un* S_h. — " Assunto ad arbitrio in un S_{2h-1} un punto O e due S_{h-1} Δ e Φ, dal punto O esce una sola retta r incidente a Δ e Φ (l'intersezione dei due S_h $O\Delta$, $O\Phi$) ". Sia O un punto assegnato dell'S_h di proiezione, e sieno $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_h$; $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_h$ le proiezioni degli S_{h-1} dati Δ e Φ: le proiezioni $r_1, r_2, \ldots r_h$ della retta r (incidente all'S_h di proiezione in O) apparterranno ad un medesimo fascio di centro O. Pertanto: *Assegnati in modo generico in un* S_h *due gruppi di* h *iperpiani* $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_h$; $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_h$ *fra loro riferiti, da ogni punto fissato* Ω *dell'*S_h *esce una, ed in generale una sola, coppia di rette secanti i due gruppi d'iperpiani secondo due* h*-ple di punti prospettive rispetto ad un " fissato " centro di prospettiva* O. Per la determinazione effettiva di tali rette basterà " in proiezione h-centrale " costruire la retta (di traccia O) comune agli S_h $O\Delta$, $O\Phi$ (*). — Per $h=3$ si ha che *assegnati in modo generico in uno spazio ordinario due triedri* $\delta_1\delta_2\delta_3$, $\varphi_1\varphi_2\varphi_3$ *fra loro riferiti,*

(*) All'esistenza ed all'effettiva determinazione di tale coppia di rette, si giungerebbe elementarmente considerando nell'S_h l'omologia di cui O è

da ogni punto fissato Ω dello spazio esce una, ed in generale una sola, coppia di rette secanti i due triedri secondo due terne di punti prospettive rispetto ad un " fissato " centro di prospettiva O.

25. *Proiezione* 2h-*centrale di un* S_{3h-1} *su di un* S_h. — " Esiste in un S_{3h-1} una ed una sola retta incidente a due S_{h-1} Δ e Φ e ad un S_h Π, assegnati in modo generico (la retta comune ai due S_h proiettanti Δ e Φ dal punto O, comune a Π ed all'S_{2h-1} che congiunge Δ a Φ "). — Si supponga Π coincidente coll'S_h di proiezione e sieno $\delta_1, \delta_2,\dots \delta_{2h}$: $\varphi_1, \varphi_2,\dots \varphi_{2h}$ le proiezioni dei due S_{h-1} Δ e Φ. Si avrà: *Assegnati in un* S_h (Π) *due gruppi di* 2h *iperpiani* $\delta_1, \delta_2,\dots \delta_{2h}$; $\varphi_1, \varphi_2,\dots \varphi_{2h}$, *fra di loro riferiti, ed un punto* Ω, *in posizione generica, pel punto* Ω *passa una sola coppia di rette secanti i due gruppi di iperpiani secondo due* 2h-*ple di punti prospettive* (*). Il centro di prospettiva O coinciderà colla traccia su Π dell'S_{2h-1} congiungente Δ a Φ: determinato tale centro (n° 5), il problema è ridotto al seguente: " condurre per due rette secanti le due h-ple di S_{h-1} $\delta_1, \delta_2, \dots \delta_h$; $\varphi_1, \varphi_2,\dots \varphi_h$ (p. es.) secondo due h-ple di punti prospettive rispetto ad O (v. n° 24) ". — Per $h=2$ ed $h=3$ si avrà: *Assegnati in un piano due quadrilateri* $a_1a_2a_3a_4$, $b_1b_2b_3b_4$, *fra loro riferiti ed un punto* Ω, *in modo generico, dal punto* Ω *esce una ed una sola coppia di rette secanti i due quadrilateri secondo due quaterne di punti prospettive. — Assegnati nello spazio due gruppi di sei piani fra loro riferiti ed un punto* Ω, *in modo generico, dal punto* Ω *esce una ed una sola coppia di rette secanti i due dati gruppi di sei piani secondo due gruppi di punti fra loro prospettivi.*

---

centro, δ_1 e $\varphi_1 \equiv \delta_1'$ sono iperpiani omologhi, e l'iperpiano d'omologia congiunge l'$S_{h-2}\delta_1\delta_1'$ al punto Ω. Chiamati ordinatamente $\delta_2', \dots, \delta_h'$ gli iperpiani omologhi agli iperpiani $\delta_2, \dots, \delta_h$, si conduca per Ω la retta m' incidente agli $h-1$ $S_{h-2}\delta_2'\varphi_2, \dots, \delta_h'\varphi_h$ (retta comune agli $h-1$ iperpiani che da Ω proiettano tali S_{h-2}). Questa, colla sua corrispondente m nell'omologia, costituisce la coppia di rette richiesta.

(*) All'esistenza ed alla determinazione di tale coppia di rette si giungerebbe elementarmente considerando nell'S_h la collineazione nella quale è Ω punto unito e sono coppie di iperpiani omologhi δ_1 e $\varphi_1 \equiv \delta_1', \dots, \delta_{h+1}$ e $\varphi_{h+1} \equiv \delta'_{h+1}$, in numero di $h+1$. Costruiti nella collineazione stessa gli iperpiani $\delta'_{h+2}, \dots, \delta'_{2h}$ omologhi agli iperpiani $\delta_{h+2}, \dots, \delta_{2h}$, si conduca per Ω la retta m' incidente agli $h-1$ $S_{h-2}\delta'_{h+2}\varphi_{h+2}, \dots, \delta'_{2h}\varphi_{2h}$ (v[i] la nota (*) al n° 24). Essa, colla corrispondente m nella collineazione, costituirà la coppia richiesta.

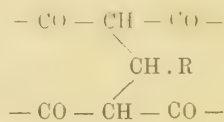
Derivati del Benzoilacetone.

Nota del Dott. GIOVANNI ISSOGLIO.

Dagli studi di Hantzsch (1), di Beyer (2) e di Knoevenagel (3) risulta che per azione dell'ammoniaca concentrata su due molecole di composti a funzione β chetonica in presenza delle aldeidi si ottengono dei composti a catena piridica.

Come prodotti intermedî si possono anche avere dei composti aminici od alchilidenici.

Così dai β dichetoni si hanno delle sostanze, derivanti da due molecole di β dichetone collegate fra loro dal gruppo bivalente alchilidenico R.CH< ; questi composti si devono considerare come chetoni 1-5, che contengono il gruppo caratteristico:

```
– CO — CH — CO —
        \
         CH . R
        /
— CO — CH — CO —
```

Alcuni di essi reagiscono coll'ammoniaca per trasformarsi nei derivati diidropiridinici di Hantzsch (4). Altri o non reagiscono affatto coll'ammoniaca, oppure reagiscono in modo da perdere una sola molecola di acqua e da formare degli amino-derivati. Subiscono questa trasformazione tutti i derivati a forma *enolica* o β composti, da distinguersi dai composti α a funzione *chetonica* e che non reagiscono coll'ammoniaca alcoolica.

L'ammoniaca concentrata reagendo sopra i composti a funzione β chetonica in presenza delle aldeidi dà luogo a sostanze caratteristiche, che servono a distinguere la funzione chetonica β da tutte le altre.

(1) " Ber. ", *14*, p. 1637; " Liebig's Ann. ", *215*, p. 1.

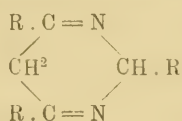
(2) " Ber. ", *24*, p. 1662 (1891).

(3) " Liebig's Ann. ", *281*, p. 104; " Ber. ", *31*, p. 743; *33*, p. 3806; *36*, p. 3131.

(4) " Ber. ", *30*, p. 2295 (1897).

Ricordo a questo proposito, che gli α dichetoni in contatto colle aldeidi e l'ammoniaca dànno dei derivati delle gliossaline (1).

I β dichetoni, qualora reagissero in modo analogo agli α, dovrebbero dare delle diidrometadiazine dalla formola generale:

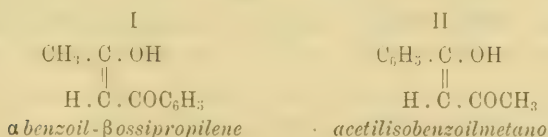
```
R . C = N
 /       \
CH²       CH . R
 \       /
R . C = N
```

Però ciò non avviene, come cercherò di dimostrare nella reazione fra il benzoilacetone, l'acetaldeide e l'ammoniaca.

Io intrapresi questa reazione per verificare se si ottenessero dei composti diidrocollidinici analoghi a quelli di Hantzsch. Ho potuto con questa condensazione non solo affermare la formazione delle diidropiridine, ma anche ottenere altri composti di qualche importanza, perchè spiegano il modo di comportarsi dei β dichetoni in condensazioni di tal genere.

Già Knoevenagel (2) ed i suoi allievi avevano tentato di condensare alcuni β dichetoni colle aldeidi adoperando, come mezzo condensante, l'ammoniaca; ma non avevano proseguito i loro studî in causa della grande alterabilità dei reagenti e del piccolo rendimento delle reazioni.

Io, benchè sia stato, nel caso da me studiato, più fortunato di loro nell'ottenere composti ben definiti, ho dovuto però concludere che il rendimento è sempre piccolo e che durante la reazione si formano molte sostanze resinose, le quali impacciano e rendono difficile la purificazione degli altri composti più importanti.

Il benzoilacetone, come osserva il Nef (3) può reagire secondo queste due formole enoliche:

I	II
$CH_3 . C . OH$	$C_6H_5 . C . OH$
‖	‖
$H . C . COC_6H_5$	$H . C . COCH_3$
α *benzoil*-β *ossipropilene*	*acetilisobenzoilmetano*

(1) “ Journal of the Chemical Society „, vol. LVII (1890), p. 8.
(2) “ Ber. „, *36*, p. 2172.
(3) “ Liebig's Ann. „, *277*, p. 74.

Quindi nel mio caso avrei dovuto ricavare dalla reazione fra il benzoilacetone, l'acetaldeide e l'ammoniaca i due seguenti isomeri, secondo la sintesi di Hantzsch:

I

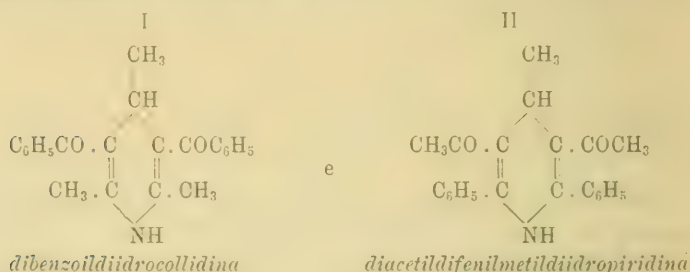
CH_3 — CH — $C_6H_5CO . C$ $C . COC_6H_5$ — $CH_3 . C$ $C . CH_3$ — NH

dibenzoildiidrocollidina

e

II

CH_3 — CH — $CH_3CO . C$ $C . COCH_3$ — $C_6H_5 . C$ $C . C_6H_5$ — NH

diacetildifenilmetildiidropiridina

Però a me non fu possibile di ottenere l'isomero II, e ciò in relazione col fatto che il benzoilacetone reagisce sempre nella forma enolica I, come dimostra il suo comportamento verso le soluzioni di soda caustica (1), verso l'anilina (2), l'ammoniaca (2), e verso l'idrossilamina (3). Eccezioni a questa regola sono il modo di comportarsi verso la fenilidrazina (4), colla quale il benzoilacetone reagisce di preferenza secondo la formola II, ed il comportamento verso l'etere cianacetico (5) in presenza di ammoniaca, nel qual caso reagisce tanto secondo la formola I, come secondo la formola II. Il rendimento però dei derivati, che si ottengono in quest'ultima condensazione, dimostra la preferenza che ha il benzoilacetone di reagire sempre sotto forma di α *benzoil* β *ossipropilene*. Bülow ed Issler (6) dimostrano nei loro lavori, che il benzoilacetone entra in reazione ancora sotto questa formola.

L'ossidrile enolico ha un grande potere elettronegativo, quindi ha tendenza ad unirsi coll'ammoniaca.

Infatti è cosa nota, che il benzoilacetone reagisce coll'ammoniaca per dare benzoilacetonamina; se la soluzione ammoniacale è acquosa, bisogna scaldare in tubi chiusi, se invece

---

(1) Fischer e Kugel, " Ber. ", *16*, p. 2240.

(2) Beyer, " Ber. ", *20*, p. 1170.

(3) Claisen-Lowmann, *21*, p. 1150.

(4) Knorr, " Ber. ", *20*, 1097.

(5) Issoglio, " Atti R. Accad. delle Scienze di Torino ", vol. XL.

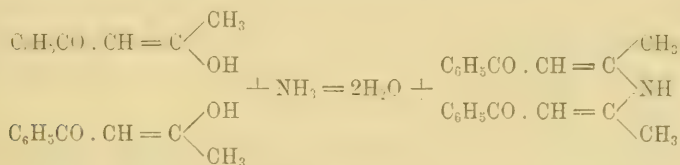
(6) " Ber. ", *36*, 2447.

l'ammoniaca è in soluzione alcoolica, la reazione avviene anche a freddo.

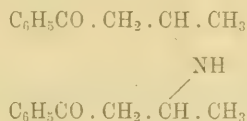
Nella condensazione, da me studiata, non ho potuto affermare la presenza della benzoilacetonamina, ma i composti che ne derivano sono alquanto diversi.

L'ammoniaca acquosa agendo sulla miscela del benzoilacetone e dell'acetaldeide, dà come prodotto finale della reazione un composto bianco, ben cristallizzato, che presenta un carattere alcaloideo spiccato.

Questo composto deriva dalla riduzione di un'altra sostanza intermedia, che io non ho potuto separare allo stato libero, ma che si formerebbe secondo questa equazione:

$$\begin{array}{l} C_6H_5CO\,.\,CH = C\begin{cases} CH_3 \\ OH \end{cases} \\ C_6H_5CO\,.\,CH = C\begin{cases} OH \\ CH_3 \end{cases} \end{array} + NH_3 = 2H_2O + \begin{array}{l} C_6H_5CO\,.\,CH = C\begin{cases} CH_3 \\ \end{cases} \\ \qquad\qquad\qquad\quad NH \\ C_6H_5CO\,.\,CH = C\begin{cases} \\ CH_3 \end{cases} \end{array}$$

Questa sostanza instabile contiene due doppi legami, e può trasformarsi in un derivato con due molecole in più di idrogeno, che io ho ottenuto come prodotto principale nella reazione fra il benzoilacetone, l'acetaldeide e l'ammoniaca.

Questo derivato stabile, ben cristallizzato, a carattere basico è la *dibenzoildisopropilamina*:

$$\begin{array}{l} C_6H_5CO\,.\,CH_2\,.\,CH\,.\,CH_3 \\ \qquad\qquad\qquad\quad NH \\ C_6H_5CO\,.\,CH_2\,.\,CH\,.\,CH_3 \end{array}$$

La riduzione profonda e la trasformazione del composto di transizione, non saturo, in quello più idrogenato sovrascritto è dovuta all'acetaldeide, la quale a sua volta si ossida e si trasforma in acido acetico.

Come avvenga questa riduzione ancora non è ben chiaro, questo è certo però, che, come prodotti finali di questa prima condensazione, si ottengono *dibenzoildiisopropilamina* ed *acetato di ammonio*.

Una piccola quantità di acetaldeide, che non prende parte alla reazione sovrascritta, dà origine a composti analoghi a

quelli di Hantzsch e di Knoevenagel, forma cioè *diidrodibenzoil-collidina* e *β etilidendibenzoilchetone*, che si trovano fra i prodotti della condensazione.

Parte sperimentale.

Ho mescolato gr. 10 di benzoilacetone (1) (1 mol.), con gr. 4 di acetaldeide (1 mol.) e 15 cm^3 di ammoniaca al 22 $^0/_0$. In principio la reazione è viva, si sviluppa molto calore e la massa a poco a poco si ridiscioglie dando un liquido di colore giallo omogeneo. Dopo alcune ore si separa da questo liquido una sostanza pastosa, densa, giallo-ranciata, che va al fondo del vaso.

Lascio a sè il tutto per circa 24 ore, dopo di che tratto con acqua; separo il liquido ammoniacale sovrastante e lavo il residuo vischioso con nuova acqua.

Faccio cadere questo residuo vischioso con un poco di acqua in un pallone a collo lungo e distillo in corrente di vapore. Il vapor d'acqua trascina una sostanza a reazione spiccatamente alcalina, che presenta un odore pungente ed irritante le mucose nasali. L'acqua raccolta in questa distillazione lascia separare delle gocciole oleose, pesanti, incolore; continuo a distillare sino a che l'ultime porzioni non dànno più reazione alcalina alla carta di tornasole.

Tutto il distillato a freddo presenta un gradevole odore aromatico. Le diverse boccie in cui viene raccolto sono abbandonate a sè per molti giorni in luogo oscuro.

Nel pallone distillatore rimane un prodotto di colore giallo-ranciato scuro. Lascio raffreddare, per decantazione separo l'acqua e poi tratto con alcool concentrato tiepido. Rimane un residuo insolubile giallo (A); il filtrato lasciato a sè, per lenta evaporazione lascia cristallizzare una sostanza in prismi allungati, molto solubile in alcool, che ho distinto colla lettera (B).

Le *acque madri ammoniacali* vengono evaporate a b. m. ed a debole calore; l'ammoniaca a poco a poco si elimina e rimane in fondo alla cassula una sostanza giallo-bruna di apparenza oleosa.

(1) Il benzoilacetone adoperato proviene dalla fabbrica Kahlbaum e fonde a 60°-61°.

Separo il liquido acquoso sovrastante; questo dopo alcuni giorni lascia cristallizzare dei prismi allungati, duri, che riconosco identici alla sostanza (B).

Filtrato questo liquido evaporo a secco a b. m. e rimane, come residuo, una certa quantità di *acetato di ammonio.*

La sostanza oleosa giallo-bruna, che si separa per evaporazione delle acque madri ammoniacali, viene sottoposta a distillazione in corrente di vapore d'acqua; distilla anche qui la stessa sostanza basica oleosa, che già ho accennato e che irrita le mucose nasali.

Dopo parecchi giorni osservo che tutti questi liquidi, che ho abbandonato in luogo oscuro, lasciano cristallizzare una sostanza mescolata ad un olio di colore roseo e di odore gradevole. Non ho potuto accertare quale composizione avesse questo olio, il cui profumo ricorda alcuni terpeni costituenti l'essenza di pino.

Mediante pressione fra carta bibula separo l'olio dalla sostanza cristallizzata, che presenta tutti i caratteri di un composto basico e che caratterizzo colla lettera (C).

Ho anche tentato di separare queste sostanze mediante la cristallizzazione frazionata; i risultati non furono coronati da migliore successo.

Per ora il metodo di separazione del prodotto basico da quello a nucleo piridico, mediante la corrente di vapor d'acqua, appare il migliore.

Composto A. — La sostanza gialla, che ho separato, come residuo insolubile nell'alcool concentrato per trattamento della miscela resinosa, costituisce un rendimento del 15 % sul benzoilacetone adoperato nella reazione. Fatta cristallizzare dall'alcool assoluto, la sostanza si deposita in belli aghi filiformi di colore paglierino, che fondono a 238°-239°. Già a 200° incominciano ad imbrunire.

L'ho cristallizzata più volte dall'alcool assoluto sino a punto di fusione costante.

Essiccata a 100-110° non perde di peso.

I. Gr. 0,1061 di sostanza diedero a 726^{mm},35 ed a 12°,5 cm^3 4.00 di *N*.

II. Gr. 0,1004 di sostanza diedero gr. 0,2924 di CO^2 e gr. 0,0572 di H^2O.

	trovato		calcolato per $C^{22}H^{21}NO^2$
	I	II	
C	—	79.47	79.76
H	—	6.32	6.35
N	4.31	—	4.23

Essa è insolubile in acqua, poco solubile in acetone, cloroformio e benzene.

Discretamente solubile nell'alcool assoluto a caldo (1 p. di sostanza si scioglie in 37 p. di alcool bollente) per raffreddamento si depositano gli aghi gialli.

Nell'alcool diluito è quasi insolubile.

Causa la sua poca solubilità in tutti i solventi, mi è stato impossibile verificarne il peso molecolare.

Questa sostanza reagisce neutra alla carta di tornasole. Non si combina, nè cogli acidi, nè colle basi. Coi reattivi generali coloranti degli alcaloidi reagisce in questo modo:

Con l'*acido solforico concentrato* si colora in rosso aranciato, e la colorazione persiste anche dopo molto tempo.

Con l'*acido nitrico concentrato* non si colora, nè si scioglie — a freddo non si altera, riscaldando si decompone.

Con *il reattivo di Erdmann* prende colorazione giallo-rossastra poco stabile.

Con *il reattivo di Froehde* si colora in rosso intenso e la colorazione, lasciata a sè, a poco a poco scompare.

Si scioglie anche nell'acido cloridrico concentrato a freddo, con colorazione giallo-dorata: per diluizione con acqua riprecipita nuovamente la sostanza indecomposta.

Riscaldai in un tubo chiuso per circa 6 ore a b. m. all'ebullizione gr. 0,6204 di sostanza con 10 cm^3 di acqua.

Dopo raffreddamento osservai, che la sostanza non aveva cangiato nei suoi caratteri. Sostituii al bagno d'acqua un bagno a cloruro di sodio e riscaldai per altre 6 ore. Ottenuto anche in questo caso risultato negativo, introdussi il tubo chiuso in una stufa ad aria e scaldai per 4 ore a 170°. Aperta la canna di vetro osservai, che il contenuto aveva subìto una decomposi-

zione impercettibile. Questa prima esperienza mi dimostra, che il composto studiato è molto stabile e che occorrono dei mezzi molto energici per decomporlo.

In un palloncino adattato a smeriglio ad un apparecchio. a ricadere, ho messo una parte di sostanza con 10 cm^3 di acido cloridrico a 1,12 (20 $^0/_0$).

Dopo un'ebullizione di due o tre minuti, la sostanza gialla incomincia a trasformarsi in un liquido bruno oleoso. Versato il contenuto del palloncino in una cassula di porcellana evaporai lentamente a b. m.

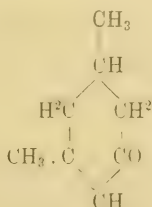
Il residuo ottenuto distillai in apparecchio apposito con latte di magnesia e raccolsi il distillato in acido cloridrico titolato.

La quantità dell'ammoniaca raccolta corrispondeva al 70 $^0/_0$ dell'azoto contenuto nella sostanza.

L'altra quantità d'azoto era contenuta in una sostanza di natura alcaloidea e piridinica, che distillava col vapor d'acqua. la cui soluzione precipitava col ioduro di potassio iodurato, e dava coll'acido cloroplatinico un sale doppio costituito da aghi finissimi raggruppati a stella.

Nel pallone di distillazione rimaneva una sostanza oleosa bruna mescolata all'ossido di magnesio. Evaporai a b. m. la miscela ed il residuo estrassi coll'alcool assoluto; evaporato l'alcool ottenni una sostanza oleosa.

La decomposizione in questo caso appare analoga a quella che subiscono i composti diidrocollidinici di Hantzsch (1), il quale aveva ottenuto una sostanza, che fu poi identificata da Knoevenagel (2), come *dimetilcicloexenone* :

```
           CH3
            |
            CH
           /  \
       H2C     CH2
        |       |
   CH3.C       CO
         \    /
           CH
```

Ho tentato di identificare la sostanza da me ottenuta preparandone l'ossima.

---

(1) " Ber. „, *14*, p. 1637; " Liebig's Ann. „, *215*, p. 1.
(2) " Liebig's Annalen „, *281*, p. 113.

L'ossima da me ottenuta fondeva verso 75°, il che corrisponderebbe all'ossima del dimetilcicloexenone, il cui punto di fusione secondo gli autori citati oscilla fra 70° e 78°; non l'ho potuta però analizzare.

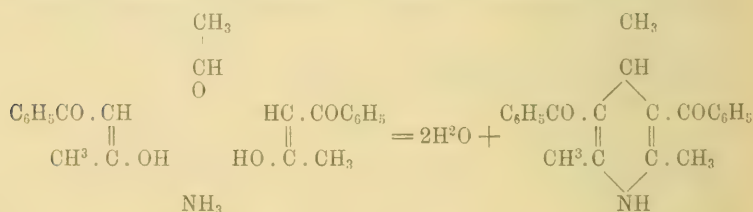
Knoevenagel trattando con acido cloridrico concentrato la diacetildiidrocollidina, otteneva come prodotti di decomposizione, dimetilcicloexenone, ammoniaca ed acido acetico.

Nel mio caso, oltre ai composti già ricordati, ho ancora trovato l'acido benzoico.

Ed ecco come: Ho sospeso in acqua la miscela contenente l'ossido di magnesio, che non si scioglieva in alcool, ho aggiunto acido solforico diluito sino a soluzione completa ed ho estratto con etere. La soluzione eterea essiccata con cloruro di calcio venne lasciata evaporare spontaneamente: si ottennero così dei lunghi cristalli di acido benzoico fusibili circa a 116°.

L'acido benzoico fu anche caratterizzato al precipitato rosa carneo, che dà il suo sale sodico col percloruro di ferro.

Adunque la sostanza da me preparata per azione dell'acido cloridrico a 1,12 bollente si decompone in ammoniaca, acido benzoico e molto probabilmente dimetilcicloexenone, ne viene di conseguenza, che essa debba avere una formula analoga alle diidrocollidine di Hantzsch e più precisamente debba essere la: ββ' DIBENZOIL *n*γ DIIDRO αα'γ TRIMETILPIRIDINA od anche la β,β₁ *dibenzoildiidrocollidina*, formatasi nel modo seguente:

```
                    CH3                                     CH3
                     |
                    CH                                      CH
                    O                                      /  \
C6H5CO . CH                 HC . COC6H5          C6H5CO . C    C . COC6H5
         ||                  ||           = 2H2O +        ||    ||
   CH3 . C . OH        HO . C . CH3                 CH3.C    C . CH3
                                                         \  /
                   NH3                                    NH
```

La piccola quantità di base, che si forma per azione dell'acido cloridrico sopra la sostanza gialla, pare dovuta a *didiidrocollidina*, formatasi accanto ad acido benzoico:

$$C^{22}H^{21}NO^2 + 2H^2O = 2C^6H^5COOH + C^5H^4(CH^3)^3N$$

Composto B. — Sia per evaporazione spontanea della soluzione alcoolica, che si ottiene sciogliendo in alcool la massa

della reazione, sia dalle acque madri ammoniacali dopo averne scacciata l'ammoniaca, si separa una sostanza cristallizzata in aghetti sottili, leggeri. Questi aghi, molto colorati ed impuri, vengono purificati per ripetute decolorazioni con carbone animale e cristallizzazioni dall'alcool a 60° sino a che il punto di fusione rimane costante.

Questa sostanza cristallizza in aghi bianchi con riflessi argentei, assai leggeri ed è fusibile a 134°.

È molto solubile in alcool assoluto, in acetone, cloroformio; insolubile in acqua. Cristallizza anche bene dal benzene, in cui è piuttosto solubile a caldo; poco invece a freddo.

La sostanza pura venne essiccata in stufa ad 80°-100°.

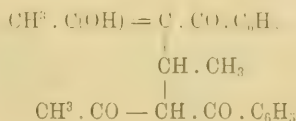
Gr. 0,1006 di sostanza diedero gr. 0,0542 di H^2O e gr. 0,2773 di CO^2:

	trovato %	calcolato per $C^{22}H^{22}O^4$
C	75.16	75.42
H	6.00	6.28

Non contiene azoto ed appare come prodotto di transizione per arrivare alla formazione della dibenzoildiidrocollidina.

È analoga per i caratteri fisici e chimici, alle sostanze ottenute da Knoevenagel per azione delle amine primarie e secondarie e della piperidina sopra i β dichetoni e le aldeidi. I prodotti, che si ottengono, sono costituiti da due molecole di β dichetone collegate fra loro da un gruppo bivalente alchilidenico R.CH<.

Si possono avere due forme di isomeri; gli uni detti α composti a funzione *chetonica*, gli altri detti β composti a funzione *enolica*. La sostanza che io hò ottenuto sarebbe il β ETILIDENDIBENZOILCHETONE:

$$
\begin{array}{l}
CH^3 . C(OH) = C . CO . C_6H_5 \\
\qquad\qquad\qquad\;\; | \\
\qquad\qquad\qquad\;\; CH . CH_3 \\
\qquad\qquad\qquad\;\; | \\
CH^3 . CO - CH . CO . C_6H_5
\end{array}
$$

Ho anche preparato col metodo di Knoevenagel l'α *etilidendibenzoilchetone*, dal quale questo differisce sia per il punto di

fusione, sia per il modo di comportarsi coll'ammoniaca alcoolica e col percloruro di ferro.

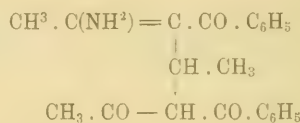
Il composto α fonde a 181°, la sua soluzione alcoolica non si colora col percloruro di ferro e non reagisce neppure coll'ammoniaca alcoolica.

Il composto β invece fonde a 134°; in soluzione alcoolica diluita si colora in rosso violaceo col percloruro di ferro.

La sostanza primitiva trattata con ammoniaca alcoolica dà un composto bianco fusibile a 240° con decomposizione.

Questo nuovo composto non è stabile. Infatti, quando si tenta di ricristallizzarlo dall'alcool diluito si decompone lasciando nuovamente deporre il composto β etilidenico, fusibile a 134°.

Il composto formatosi coll'ammoniaca alcoolica probabilmente ha la seguente composizione:

$$
\begin{array}{l}
CH^3 . C(NH^2) = C . CO . C_6H_5 \\
\qquad\qquad\qquad\quad | \\
\qquad\qquad\qquad\quad CH . CH_3 \\
\qquad\qquad\qquad\quad | \\
\qquad\quad CH_3 . CO - CH . CO . C_6H_5
\end{array}
$$

Questa instabilità non mi ha permesso di ottenerlo ad uno stato tale di purezza da poterlo analizzare.

Composto C. — La sostanza trascinata dalla corrente di vapore, colla quale si sono trattati i prodotti della reazione fra il benzoilacetone e l'aldeide acetica, è, come ho detto, costituita da gocciole oleose pesanti, dalle quali viene poi a separarsi un composto basico ben cristallizzato. Ora io separai questi cristalli dalla parte oleosa aromatica con carta bibula. Ottenni così delle lamelle allungate, che, per chi non ha pratica, potrebbero confondersi con i cristalli di benzoilacetonamina; si distinguono però facilmente da questa, perchè la benzoilacetonamina per ebullizione con acido cloridrico si decompone in ammoniaca e benzoilacetone, il quale si colora in violetto con percloruro di ferro, mentre la sostanza da me studiata non subisce questa reazione.

Di più la benzoilacetonamina non fonde sotto l'acqua bollente, mentre questa vi è facilmente fusibile.

La base così raccolta è ancora impura, e per purificarla occorre ricristallizzarla per lenta evaporazione dal benzene. Si

depositano a poco a poco dei grossi cristalli tabulari trimetrici, che poi vengono lavati con poco etere e spremuti fra carta.

Ripetendo parecchie volte queste operazioni si ottiene infine un composto ben cristallizzato, fusibile a 127°, incoloro, splendente, che fonde anche sotto l'acqua bollente. È solubile in alcool, benzene, cloroformio, poco solubile in etere; quasi niente in acqua.

La soluzione alcoolica lascia depositare sotto forma oleosa la sostanza, quando viene diluita con acqua; dopo molto tempo l'olio cristallizza in aghi trimetrici. La base pura è inodora, allo stato di vapore irrita le mucose nasali. Non contiene acqua di cristallizzazione.

Un campione venne essiccato a 80°-100°.

I. Gr. 0,1020 di sostanza diedero a $733^{mm},00$ ed a 12°,5 cm^3 3,9 di N.

II. Gr. 0,1477 di sostanza diedero a $728^{mm},12$ ed a 13° cm^3 35,6 di N.

III. Gr. 0,0866 di sostanza diedero gr. 0,2461 di CO^2 e gr. 0,0572 di H^2O.

IV. Gr. 0,1202 di sostanza diedero gr. 0,3404 di CO^2 e gr. 0,0831 di H^2O.

V. Gr. 0,1294 di sostanza diedero gr. 0,3690 di CO^2 e gr. 0,0890 di H^2O:

	trovato					calc. per $C^{20}H^{23}NO^2$
	I	II	III	IV	V	
C	—	—	77.47	77.22	77.76	77.68
H	—	—	7.33	7.68	7.64	7.43
N	4.21	4.34	—	—	—	4.53

Determinazione del peso molecolare (apparecchio Beckmann). Metodo crioscopico.

I. Sostanza gr. 0,1952 — benzene gr. 16,22 — Δ = 0°,215.
II. Sostanza gr. 0,2758 — benzene „ 16,22 — Δ = 0°,285.

	trovato		calc. per $C^{20}H^{23}NO^2$
	I	II	
P. M	274	291	309

Questa sostanza, a funzione basica spiccata, rende azzurra la carta di tornasole, e si combina cogli acidi per formare dei sali, che sono poco solubili in acqua. Funziona da base monoacida.

La soluzione cloridrica di questa base dà coi reattivi degli alcaloidi le seguenti reazioni:

Coll'*acido cloroplatinico*, precipitato giallo ranciato polverulento, amorfo.

Coll'*acido picrico*, precipitato giallo solubile a caldo in acqua.

Col *solfocianoplatinato di potassio* precipita abbondantemente in giallo ranciato.

Col *iodomercurato di potassio* si ottiene un abbondante precipitato bianco.

Si ha pure precipitato col *ioduro di potassio iodurato* e coll'*acido fosfomolibdico.*

Coi reattivi coloranti degli alcaloidi non dà reazioni importanti.

Questo composto sarebbe una DIBENZOILDIISOPROPILAMINA:

$$\begin{array}{c} CH^3 . CH . CH^2 . COC_6H_5 \\ NH \\ CH^3 . CH . CH^2 . COC_6H_5 \end{array}$$

Nella parte teorica di questa mia nota ho trattato delle origini di questa base, ora io debbo dimostrare che essa è la prima a formarsi quando si mescolano le sostanze reagenti fra loro, ed è dipendente dalla quantità di acetaldeide adoperata e quindi di acido acetico formatosi.

L'acetaldeide, che io ho impiegato nella reazione, conteneva traccie non dosabili di acido acetico.

Gr. 2 di benzolacetone furono mescolati con 0,5 gr. di aldeide acetica e cm³ 10 di ammoniaca al 20 $^0/_0$; appena avvenuta la reazione vivissima, che si ha nell'atto della mescolanza, ho raffreddato ed ho impedito che essa procedesse oltre: ho aggiunto acqua ed ho filtrato. Il residuo insolubile è costituito da benzoilacetone quasi puro; il filtrato venne evaporato a b. m.

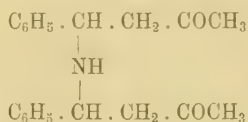
Durante l'evaporazione l'ammoniaca si elimina a poco a poco ed il liquido si divide in due parti; al fondo della cassula si separa un olio bruno-ranciato, mentre sopra si trova la parte

acquosa. La soluzione acquosa decantata e ridotta a piccolo volume lascia cristallizzare dell'acetato di ammonio.

L'olio bruno-ranciato viene distillato in corrente di vapore, e nel liquido, che distilla, si osserva la separazione abbondante di gocciole oleose a odore gradevole, che poi si trasformano in prismi trimetrici, fusibili a 127°, i quali presentano tutti i caratteri della *dibenzoilisopropilamina*.

Ripetendo quest'esperienza con quantità maggiori di acetaldeide, la reazione è più viva ed il rendimento in *dibenzoildiisopropilamina* è più ricco.

Per la sostanza studiata non si può accettare la formola:

$$\begin{array}{c} C_6H_5 . CH . CH_2 . COCH_3 \\ | \\ NH \\ | \\ C_6H_5 . CH . CH_2 . COCH_3 \end{array}$$

perchè il benzoilacetone contiene l'ossidrile enolico quasi sempre vicino al metile e non in prossimità del gruppo fenico; inoltre perchè mi fu impossibile preparare il fenilidrazone di questa base, e ciò in relazione col fatto, che i chetoni $C_6H_5.CO.R$ reagiscono male colla fenilidrazina.

Cloroplatinato — $(C^{20}H^{23}NO^2)^2 . H^2PtCl^6$.

Si ottiene aggiungendo ad una soluzione satura di cloridrato una soluzione al 5 % di acido cloroplatinico. Si ha con un precipitato polverulento, che si può ricristallizzare dall'acqua.

È amorfo: raccolto fra carta ed asciugato, fonde a 198°. Non contiene acqua di cristallizzazione.

I. Gr. 0,1866 di sostanza scaldati a 100°-110° non perdono di peso, calcinati lasciano, come residuo, gr. 0,0348 di platino metallico.

II. Gr. 0,2944 di sostanza calcinati lasciano gr. 0,055 di platino metallico.

	trovato %		calc. per $(C^{20}H^{23}NO^2)^2 . H^2PtCl^6$
	I	II	
Platino	18.53	18.66	18.91

Picrato — $C^{20}H^{23}NO^2 . C^6H^3N^3O^7$.

La soluzione cloridrica non può essere impiegata per ottenere il picrato. Meglio è invece sciogliere la base nell'alcool

ed aggiungervi una soluzione acquosa di acido picrico, con che si separa un picrato di colore giallo, cristallizzato in aghi leggeri, i quali esaminati al microscopio si presentano conformati a felce. Questi aghi fondono a 192° decomponendosi e svolgendo bollicine gassose.

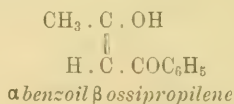
Anche il picrato è anidro.

Gr. 0,1268 di sostanza diedero a 730^{mm},12 ed a 13 cm^3 H di azoto.

	trovato °/₀	calcolato per $C^{20}H^{23}NO^2 . C^6H^3N^3O^7$
N	9.94	10.40

Concludendo: dalla reazione fra il benzoilacetone e l'acetaldeide in presenza di ammoniaca concentrata si ottengono vari composti abbastanza importanti; per condensazione, il benzoilacetone reagisce sempre nella forma enolica:

$$\begin{array}{l} CH_3 . C . OH \\ \quad\;\; \| \\ \;\; H . C . COC_6H_5 \end{array}$$

α *benzoil* β *ossipropilene*

come si può osservare esaminando i prodotti, che ne derivano:

1° La *dibenzoildiisopropilamina* pf. 127°.
2° Il β *etilidendibenzoilacetone* „ 134°;
3° La *dibenzoildiidrocollidina* „ 239°;

I composti studiati ci dicono inoltre, che questa reazione può forse in generale servire a distinguere i β dagli α dichetoni. Questi ultimi colle aldeidi e l'ammoniaca dànno delle gliossaline sostituite. Dai β dichetoni dovrebbero in modo analogo ottenersi dei derivati delle metadiazine: invece si ottengono, almeno nel caso mio, dei composti, che derivano da due molecole di β dichetone collegate fra loro da gruppi diversi, quali sarebbero l'alchilidenico R.CH< e l'iminico NH<.

Torino - R. Università - Maggio 1906.

Note intorno ai Passeri italiani.

del Socio TOMMASO SALVADORI.

Le forme dei passeri della regione paleartica, e fra esse anche le italiane, sono state recentemente studiate da diversi naturalisti.

Fino a pochi anni fa gli ornitologi italiani riconoscevano che in Italia (lasciando in disparte la Passera mattugia o *Passer montanus*) si trovano due forme, anzi due specie distinte di Passeri, una che vive nella penisola (*Passer italiae*) e l'altra confinata, o quasi, nelle isole maggiori, quella che il Savi dall'isola di Sardegna ove abita, chiamò italianamente Passera sarda (*Passer hispaniolensis* Temm., o *P. salicicolus* Vieill.).

Si era inoltre constatato che sui confini d'Italia, ove l'Alpe la circonda, s'incontrava talora una terza forma, o specie, quella che è propria dell'Europa al di là delle Alpi, il Passero europeo, *Passer domesticus* (L.). Gli ornitologi più recenti, un po' novatori, hanno creduto che specialmente il *Passer hispaniolensis* si presentasse sotto parecchie forme costituenti altrettante sottospecie.

Fin dal 1890 il prof. C. De Fiore nei " Materiali per una Avifauna Calabra ", pp. 28-29, distingueva un *Passer italiae* var. *brutius* della Calabria, che presenta caratteri intermedi a quelli del *P. italiae* e del *P. hispaniolensis*.

Il primo a fare recentemente una rivista dei Passeri europei è stato l'Hartert, il quale in un lavoro intorno agli uccelli del Marocco (*Nov. Zool.*, IX (1902), pp. 331-333), discorrendo del *P. hispaniolensis*, ne separò il *P. hispaniolensis maltae*, ammettendo così quattro specie o forme europee:

Passer domesticus domesticus;
P. domesticus italiae;
P. hispaniolensis hispaniolensis;
P. hispaniolensis maltae (1).

(1) Correttamente si dovrebbe scrivere *melitae*, giacchè *Melita* è il nome latino di Malta. Fu già usato l'aggettivo *melitensis* per una *Procellaria* (= *P. pelagica*).

Lo Tschusi zu Schmidoffen nel 1903 (1), ha ammesso e descritto sette forme del *Passer hispaniolensis,* cioè:

1° *Passer hispaniolensis hispaniolensis* (Spagna, Isole Canarie, Capo Verde, Africa Settentrionale, Grecia, Turchia e Bulgaria).

2° *Passer hispaniolensis arrigonii* Tschusi (Sardegna e probabilmente anche Corsica).

3° *Passer hispaniolensis washingtoni* Tschusi (Egitto e Penisola del Sinai).

4° *Passer hispaniolensis transcaspicus* Tschusi (Transcaucasia e Transcaspio, verso Est fino al Punjab).

5° *Passer hispaniolensis palestinae* Tschusi (Palestina).

6° *Passer hispaniolensis maltae* Hartert (Malta, Sicilia).

7° *Passer hispaniolensis brutius* De Fiore (Calabria e Puglie).

Di queste sette forme soltanto quattro si troverebbero in Italia, giacchè al *P. arrigonii*, al *P. maltae* ed al *P. brutius* l'Arrigoni (*Man. di Orn. Ital.*, p. 414) aggiunge anche la forma tipica (*Passer hispaniolensis* o meglio *hispaniensis*) che si troverebbe nell'isola Pantelleria. Si noti che l'Arrigoni non osa ammettere le tre prime forme suddette neppure come sottospecie: egli scrive che la Passera sarda si presenta " sotto forme leggermente diverse, che sono apprezzabili soltanto in individui con piumaggio perfetto e mutato da poco tempo *ed inoltre con provenienze ben sicure* „ cioè che si potrebbero identificare non tanto per caratteri proprî, quanto per la loro provenienza!

Anche l'Hartert nell'opera " *Die Vögel der palaearktischen Fauna* „, pp. 156-158, tratta delle varie forme del *P. hispaniolensis*: egli non ammette il *P. ispaniolensis washingtoni* Tschusi dell'Egitto e del Sinai, che riferisce al *P. hispaniolensis* tipico, e così pure non ammette il *P. hispaniolensis palestinae* Tschusi, che riferisce al *P. hispaniolensis transcaspicus* (2) notando " che

---

(1) Ueber palaearktische Formen. Der Weidensperling (*Passer hispaniolensis* Temm.) und seine Formen (*Orn. Jahrb.* XIV (1903) pp. 1-21).

(2) L'Hartert assegna al *P. transcaspicus* la seguente distribuzione geografica: Trascaucasia, a traverso il Transcaspio fino al Turkestan, Kaschmir, Afganistan, Persia e Palestina.

Io ho esaminato due esemplari del Transcaspio (♂ Repetek, ♀ Tedshen) e tre della Palestina (*Coll. Festa*) 1 maschio e 2 femmine.

Il primo maschio in abito di primavera (14, III, 1903) è simile in tutto

le differenze indicate dallo Tschusi per la forma della Palestina non sono affatto fondate „.

Rispetto poi al *P. hispaniolensis arrigonii* ed al *P. hispaniolensis brutius* l'Hartert non sembra molto persuaso che esse siano forme realmente distinte.

Più recentemente il giovane Principe Don Francesco Chigi, in un lavoro intorno ai Passeri italiani intitolato: " *Passer hispaniolensis* (Temm.), *Passer italiae* (Vieill.) e *Passer domesticus* (L.). Osservazioni „ (1), sembra ammettere le tre forme o varietà, *arrigonii* di Sardegna, *maltae* (di Malta e Sicilia) e *brutius* di Calabria, alle quali aggiunge anche una nuova forma, o var. *Romae*, che egli dice frequente nel Romano.

Inoltre il Principe Chigi separa dal *P. italiae* una var. *subalpina*, dominante nella regione subalpina.

Finalmente in un breve recentissimo lavoro (*Boll. Soc. Zool. Ital.* 1906, pp. 49-50) lo stesso Principe Chigi distingue una var. *Valloni* del Friuli, che indifferentemente crede poter riferire o al *P. domesticus*, od al *P. italiae*, avendo caratteri intermedî a quelli delle due specie.

Questo è lo stato delle nostre cognizioni rispetto ai Passeri italiani nel momento in cui mi accingo ad esaminarlo. Ho cercato di adunare un grande numero di esemplari e perciò, oltre al materiale conservato nel Museo di Torino che consta di 65 esemplari italiani, oltre a 12 esotici, ho avuto in comunicazione dal Principe Chigi 140 esemplari che gli hanno servito pel suo lavoro, 131 dal Conte Arrigoni degli Oddi e 9 dal signor Vallon di Udine, e così sono 357 gli esemplari da me esaminati.

Tra gli esemplari del Museo di Torino ve ne sono parecchi di Udine donati recentemente dal sig. Vallon, di Sardegna donati dal prof. Mazza e di Sicilia donati dall'amico Whitaker, autore della bella opera recente sugli uccelli della Tunisia. Ad essi, come pure al Principe Chigi ed all'amico Conte Arrigoni degli Oddi, rendo vivissime grazie per la loro grande cortesia.

---

ad esemplari di Sardegna: il secondo maschio ha macchie nere meno cospicue sui fianchi ed anch'esso non differisce in alcun modo da altri di Sardegna; le tre femmine non si possono distinguere da due di Tunisi e sono lievemente più pallide delle femmine di Sardegna e di Sicilia.

(1) *Boll. Soc. Zool. Ital.*, ser. III, vol. V, pp. 127-146 (1904).

Passer domesticus (L.).

PASSER DOMESTICUS × P. ITALIAE.

Passer domesticus var. *Valloni* Chigi, Boll. Soc. Zool. Ital. 1906, pp. 49-50 (Friuli).

Questa specie, distinta per avere il maschio il pileo cenerino, il dorso variegato di castagno e di nero, i fianchi senza strie nere, ed il nero della gola non molto esteso, vive al di là delle Alpi, ma si trova accidentalmente nei paesi subalpini, in Lombardia ed in Piemonte, non è raro nel Friuli; è la specie che vive a Gorizia, nell'Istria, nel Nizzardo e nel Cantone Ticino.

Di questa specie sono state descritte diverse forme, delle quali una sola si trova in Italia. Questa è la forma che il Chigi ha recentemente distinta col nome di *P. domesticus* var. *Valloni* (l. c.). Anche io ho avuto dal sig. Vallon parecchi esemplari del Friuli che pel colore castagno del pileo più o meno estesamente tinto di grigio non esito affermare essere ibridi del *Passer italiae*, specie dominante nelle vicinanze di Udine, e del *Passer domesticus*, che certamente si trova pure presso Udine e che è la specie quasi esclusiva della vicina Gorizia.

La femmina del *P. domesticus* è, si può dire, indistinguibile da quella del *P. italiae*.

Passer italiae (Vieill.).

Moineau commun [*d'Italie*] Savigny, Obs. s. le Syst. des Ois. p. 6 (1811).
Moineau d'Italie Bonelli, Cat. d. Ois. du Piém. pp. 13, 24, note 7 (1811).
Passer domesticus italiae, Hartert, Nov. Zool. IX, p. 333 (1902). — Chigi, Boll. Soc. Zool. Ital. ser. III, vol. V, p. 144 (part.) (1904).
Passer italiae italiae Tschusi, Orn. Jahrb. XIV, p. 17 (1903).
Passer italiae galliae Tschusi, l. c. p. 19 (1903).
Passer domesticus italiae, var. *Romae* Chigi, l. c. p. 145 (1904).
Passer domesticus italiae, var. *Italiae*, Chigi, l. c. p. 145.
Passer domesticus italiae, var. *subalpina* Chigi, ibid.

PASSER ITALIAE × P. DOMESTICUS.

Passer italiae var. *Valloni* Chigi, Boll. Soc. Zool. Ital. 1906, pp. 49-50 (Friuli).

Questa specie, somiglia alla precedente, ma ne differisce pel pileo del maschio interamente castagno; essa è propria e caratteristica dell'Italia, ma s'incontra sporadicamente anche al di là dei confini settentrionali d'Italia, così presso Nizza,

nel Cantone Ticino, nel Tirolo meridionale, presso Trieste e la Pontebba e pare che nel 1837 sia stata trovata in Ginevra.

Lo Tschusi col nome di *Passer italiae galliae* (*Orn. Jahrb.* 1903, pag. 19) ha separato subspecificamente gli esemplari del mezzogiorno della Francia, di Corsica, dell'Elba e delle Baleari, ma questa forma non è ammessa nè dall'Hartert, nè dall'Arrigoni. Non è improbabile che alcuni esemplari del Nizzardo presentino qualche lieve differenza, dovuta ad ibridismo. Ma i Passeri dell'Elba, della Capraia e della Gorgona da me esaminati (*Collezione Arrigoni* e *Mus. Taur.*) appartengono al *P. italiae* tipico; a questa specie apparterrebbero pure, secondo l'Hartert, gli esemplari di Corsica, invece due maschi ed una femmina di Corsica (Ajaccio e Bastia) della collezione Arrigoni, appartengono indubbiamente al *P. hispaniolensis*. È cosa singolare che al *P. italiae* appartengano pure gli esemplari (*Coll. Arrigoni*) di Ustica collocata fra la Sicilia e la Sardegna! Non è forse probabile che il Passero italiano sia stato importato dall'uomo in Ustica? Anche in Sicilia si trova talora il *P. italiae*: io ho visto due esemplari di Catania (*Coll. Arrigoni*) ed il Giglioli (*Primo resoconto*, *Avif. locali*, p. 552; *Avif. ital.*, p. 67) menziona una colonia di detta specie che vive nella cittadella di Messina.

L'Hartert accenna alla questione se il *P. italiae* si debba considerare, o no, come sottospecie del *P. domesticus* e confessa che la questione non è facile da risolvere, giacchè non vi sono passaggi graduali da una forma nell'altra, e gli esemplari da me visti, e che presentano caratteri intermedî sono quelli che s'incontrano soltanto lungo i confini d'Italia, specialmente nel Friuli, e che sono probabilmente ibridi. In nessun caso potrei accettare l'opinione del barone Erlanger (*Journ. f. Orn.* 1899, pp. 477-481), ammessa dal Chigi, ma contradetta dall'Hartert (*Nov. Zool.* IX, p. 332), che il *P. italiae* ed il *P. hispàniolensis* si possano considerare come sottospecie di una medesima forma; a me sembra che il *P. italiae* ed il *P. domesticus* abbiano molto maggiore affinità che non il *P. italiae* ed il *P. hispaniolensis*; agli argomenti addotti dall'Hartert a sostegno della sua tesi, aggiungo che la somiglianza che si può dire assoluta fra le femmine del *P. italiae* e del *P. domesticus*, per modo che gli autori le descrivono come indistinguibili, laddove si può sempre distinguere la femmina del *P. hispaniolensis*, che ha le macchie

chiare del dorso molto più bianchiccie, mi fa credere che il *P. hispaniolensis* sia una forma più differenziata, e che maggiormente si allontana dalle altre due.

Il Principe Chigi ha separato due forme del *P. italiae*, quella tipica " distinta per la tinta castagna dominante sul dorso, e la forma *P. italiae* var. *subalpina* distinta per avere la sola parte superiore del dorso con disegno a macchie con tinte castagne scarse, pallide e generalmente sostituite da colore ceciato-castagno „. L'arèa di questa viene indicata colle parole " regione subalpina „, laddove l'area della prima non è affatto indicata, ma per esclusione si potrebbe credere che il Chigi la fissi in Toscana e nell'Italia centrale in generale.

Il confronto di numerosi esemplari del Piemonte, del Veronese e del Friuli con altri dell'Italia centrale non mi ha fatto scorgere alcuna differenza costante e quindi credo che la forma *subalpina* non sia in alcun modo da ammettere.

Così pure la forma che il Chigi dice frequente nel Romano e che egli chiama *Passer domesticus italiae* var. *Romae*, secondo me, non ha buon fondamento; io ho esaminato, oltre l'esemplare tipico di Carroceto (Chigi, l. c., p. 138, n. 18), molti altri del Lazio della Collezione Chigi e non trovo che essi differiscano da altri del Piemonte. Le lievissime traccie di strie scure sui fianchi dell'esemplare di Carroceto ed in altri tre dei dintorni di Roma (*Collezione Arrigoni*), mancano nella grande maggioranza degli esemplari del Romano, ed è cosa affatto individuale, e forse può dipendere dal risalire verso l'Italia centrale di esemplari dell'Italia meridionale, che, come dirò più avanti, presentano non raramente quelle strie, e che credo derivino da incrocio del *P. italiae* e del *P. hispaniolensis*.

Un fatto notevole che si verifica nel *P. italiae* è la sua tendenza a presentare frequenti variazioni individuali nel colorito e specialmente l'estendersi anormalmente del colorito castagno. Non sono rari gli individui nei quali il nero della gola e del petto è sostituito più o meno completamente dal colore castagno; il Museo di Torino possiede cinque esemplari siffatti, ed altri due sono nella Collezione Arrigoni e questi singolarissimi sono ambedue di Ustica: uno ha il nero della gola che inferiormente si espande in una sorta di fascia pettorale trasversa di color castagno; l'altro esemplare, oltre il pileo, la cervice ed il dorso

di color castagno vivissimo, ha castagni pure la gola ed il petto, ed una grande macchia rugginosa nel mezzo del sopraccoda; quest'ultimo carattere io ho osservato pure in esemplari di Casaleone nel Veronese, di Legnago, di Perugia (*Coll. Arrigoni*), di Cremona, di Maccarese (*Coll. Chigi*) e di altre località. Ora questa tendenza dell'estendersi del colore castagno sull'abito del *Passer italiae* può forse darci un indizio della sua origine dal *P. domesticus*, qualora si supponga che il colore castagno delle fascie laterali del pileo del *P. domesticus* si sia esteso per modo da occupare anche la parte mediana del pileo; vale a dire che converrebbe supporre che anche nel *P. domesticus* si verifichi come nel *P. italiae* questa tendenza ad espandersi del colore castagno.

Un altro fatto, di cui mi pare che non si sia tenuto abbastanza conto nello studio dei Passeri, è che essi sono uccelli semidomestici e che appunto perciò debbono facilmente risentire l'influenza della domesticità, e andar soggetti ad un notevole grado di variabilità individuale; queste variazioni potrebbero talora fissarsi negli esemplari di una stessa regione.

Due esemplari del *P. italiae*, uno di Cuneo e l'altro d'Ivrea (*Coll. Arrigoni*) hanno macchie bianchiccie sui margini delle piume del dorso simili a quelle del *P. hispaniolensis!*

Passer hispaniensis (Temm.).

Fringilla sardoa " Savi ,, fide Bp. Faun. Ital. nel testo della *Fringilla cisalpina*, fasc. III (1833). — Gloger, Handb. I, p. 319, nota (1834). — G. R. Gr. Gen. B. I, p. 372, nella sinonimia del *Passer salicarius* (1849). — Bp. Revue Crit. pp. 33, 167 nella sinonimia del *Passer salicarius* (1850).

Passer hispaniolensis maltae Hartert, Nov. Zool. IX, p. 332 (1902). — Tschusi, Orn. Jahrb. XIV, p. 12 (1903). — Hartert, Vög. Palaearkt. Fauna, p. 157 (1904). — Arrig. Man. di Orn. Ital. p. 414 (1904).

Passer hispaniolensis hispaniolensis Hartert, Nov. Zool. IX, p. 333 (1902).

Passer hispaniolensis Tschusi, Orn. Jahrb. XIV, p. 4 (1903).

Passer hispaniolensis arrigonii Tschusi, l. c. p. 8 (1903) (Sardinien). — Hartert, Vög. Palaearkt. Fauna, p. 157 (1904). — Arrig. Man. di Orn. Ital. p. 414 (1904).

Passer hispaniolensis washingtonii Tschusi, l. c. p. 9 (1903) (Egitto e penisola del Sinai).

Passer hispaniensis Arrig. Man. di Orn. Ital. p. 413 (1904).

Passer hispaniolensis var. *Arrigonii* Chigi, Boll. Soc. Zool. Ital. ser. III, vol. V, p. 144 (1904).

Passer hispaniolensis var. *Maltae* Chigi, l. c. p. 145 (1904).
Passer hispaniolensis var. *Romae* Chigi, l. c. p. 145 (1904).

P. ITALIAE × P. HISPANIENSIS.

Passer italiae var. *brutius* De Fiore, Materiali per un'Avifauna Calabra, pp. 28, 29 (1890) (Calabria).
Passer hispaniolensis brutius Tschusi, l. c. p. 14 (1903). — Hartert, op. cit. p. 158 (1904) (Calabria, Taranto).
Passer hispaniensis brutius Arrig. Man. di Orn. Ital. p. 414 (1904).
Passer hispaniolensis var. *Brutii* (sic) Chigi, l. c. p. 145 (1904).

Questa specie somiglia al *P. italiae* pel colore castagno vivo del pileo, ma ne differisce per non avere macchie castagne sul dorso, che è nero con macchie bianchiccie sui margini delle piume, per il petto più largamente nero e per i fianchi più o meno abbondantemente striati di nero nel maschio; inoltre essa differisce dal *P. italiae* per caratteri della femmina che ha le macchie chiare sui margini delle piume del dorso più pallide, quasi bianchiccie.

Questa specie occupa una grande area, dalla Spagna e dalle isole Canarie e del Capo Verde fino alla Grecia, alla Turchia ed alla Bulgaria, presentando, al dire degli autori, talune differenze a seconda delle località, per la quale cosa sono state distinte diverse forme o sottospecie, che per l'Italia si ridurrebbero a quattro, comprendendovi la forma tipica.

I. — La forma tipica (*P. hispaniensis*) secondo l'Arrigoni sarebbe rappresentata in Italia soltanto da esemplari dell'isola Pantelleria. Ho esaminato un maschio adulto di quell'isola (*Coll. Arrigoni*), ma non trovo che esso presenti caratteri per i quali si possa distinguere da altri di Sicilia e di Sardegna.

II. — La forma di Sardegna e di Corsica (*P. arrigonii*) per la quale, se veramente distinta, esisteva già il nome *Fringilla sardoa* Savi, che sebbene *nomen nudum*, è fissato dal significato geografico del nome, e non doveva abbandonarsi. Io ho esaminato un grandissimo numero di esemplari di Sardegna ed alcuni di Corsica (Bastia ed Ajaccio, *Coll. Arrigoni*) e non trovo che essi differiscano in alcun modo da altri di Malaga, di Madera, di Fuertaventura, di Tunisi e di Malta. L'Hartert a proposito di questa pretesa forma dice: " Forma a mala pena distinguibile, giacchè le differenze nel colorito, indicate dallo Tschusi non sono

confermate, soltanto le dimensioni sono un po' minori di quelle del *P. hispaniolensis* tipico: ala ♂ 75-78 mm. contro 76-82 „!

III. — Del Passero maltese (*Passer hispaniolensis maltae* Hartert) ho esaminato tre esemplari, un maschio adulto in abito perfetto della Collezione Chigi, e due della Collezione Arrigoni, un maschio di La Valletta (17 dicembre 1900) in abito invernale ed una femmina; questa è indistinguibile da esemplari di Tunisi, di Palestina ed anche di Sicilia; i maschi trovano compagni al tutto simili fra quelli di Sardegna e di altri luoghi. Così pure gli esemplari di Sicilia, che ora l'Hartert considera come riferibili al suo *Passer maltae*, non mi sembrano separabili da quelli di Sardegna; il Museo di Torino possiede maschi adulti di Palermo avuti dal Whitaker, i quali hanno i fianchi neri tanto quanto altri perfettamente adulti di Sardegna.

IV. — Passero di Calabria (*Passer brutius* De Fiore).

Ho esaminato sei esemplari di Reggio Calabria (*Collezione Chigi*): cinque di questi adulti (aprile) hanno caratteri intermedî al *P. italiae* ed al *P. hispaniensis*, cioè hanno il dorso più nero che non nel *P. italiae*, e più o meno variegato di castagno; due hanno i fianchi con strie nere, mancanti od evanescenti negli altri tre; la parte superiore del groppone in tutti i cinque è in gran parte nera; il sesto esemplare (aprile 1903) è in abito imperfetto e non si distingue da altri del *P. italiae*. Ho esaminato pure due esemplari di Taranto (*Coll. Arrigoni*); nel dorso essi somigliano ai cinque di Reggio, ma non hanno traccie di strie nere sui fianchi ed il groppone è quasi interamente grigio.

Tipico, avuto dall'autore della specie, sig. De Fiore, è un esemplare maschio adulto di Maida (Calabria, 13 aprile 1894) conservato nel Museo di Torino (Cat. nº 10255). Un maschio in abito imperfetto di Reggio Calabria, 5 ottobre 1900 (*Collezione Chigi*) non si può distinguere da esemplari del *P. italiae*.

Di due esemplari di Foggia (*Coll. Chigi*) uno somiglia in tutto agli esemplari a dorso nero di Calabria, l'altro invece è simile in tutto agli esemplari tipici del *P. italiae*.

Finalmente una femmina adulta del Capo Spartivento, 12 novembre 1896 (*Coll. Arrigoni*), sembra riferibile al *P. hispaniensis*, avendo sul dorso le macchie chiare caratteristiche della femmina di questa specie.

Dall'esame di questi esemplari appare che in Calabria, si

trovano esemplari coi caratteri del *P. italiae*, altri con quelli del *P. hispaniensis*, ed altri finalmente coi caratteri delle due specie, e questi secondo me sono ibridi, sui quali è stato fondato il *P. brutius*; in questa opinione io sono confortato anche dal giudizio dell'Hartert, cui siffatti esemplari sembrano appunto ibridi delle due specie predette.

La stessa cosa si verifica presso Taranto e nelle Puglie.

Il fatto che secondo me avvalora la teoria dell'ibridismo è appunto la variabilità che s'incontra negli esemplari calabresi; lo stesso De Fiore nel descrivere la var. *brutius* menziona due forme della medesima, una che somiglia maggiormente al *Passer salicicola* od *hispaniensis* e l'altra più simile al *P. italiae*; questa, secondo lui, sarebbe la forma predominante; tuttavia il De Fiore afferma che non crede che si tratti di ibridi, ma si contraddice dopo poche righe giacchè suppone che le due specie (*P. italiae* e *P. hispaniensis*) siano venute a contatto in tempi non lontani e *forse continuino ad incontrarsi anche ora*, e così abbia avuto origine la nuova varietà. E con ciò non ammette forse il De Fiore la teoria dell'ibridismo?

È singolare un maschio adulto dell'isola Lampione, proveniente da Lord Lilford (*Coll. Arrigoni*); questo esemplare ha il dorso come i primi cinque di Reggio e quello di Maidà, ma con qualche predominio di color castagno, ha il nero della gola e del petto molto esteso, ma nessuna stria nera sui fianchi. Anch'esso sembra un ibrido! È possibile che Passeri italiani siano importati e lasciati liberi talora nelle regioni abitate dal *P. hispaniensis?*

In conclusione le tre forme o specie di Passeri italiani quali sono intese dagli ornitologi più conservatori, secondo me, sussistono realmente con lievi variazioni individuali o prodotte da ibridismo là dove due specie s'incontrano, e le varie forme ammesse dagli autori più recenti non hanno valore neppure di sottospecie.

Relazione intorno alla memoria del Dott. Cesare Artom, intitolata: *La variazione dell'"Artemia salina" (Linn.) di Cagliari sotto l'influsso della salsedine.*

Il lavoro del dott. C. Artom, affidato al nostro esame, si riferisce ad un argomento che è oggetto oggi di molte ricerche, per lo studio, vale a dire, delle variazioni che l'ambiente induce negli animali per giungere, per quanto è possibile, alla conoscenza delle cause e delle leggi della variazione degli animali stessi.

L'*Artemia salina*, dopo le ricerche dello Schmankevitsch, è divenuto l'animale, si può dire classico per tali ricerche. L'Autore ora menzionato, era giunto, come è noto, alla conclusione che l'*Artemia salina* e l'*Artemia Mulhausenii* non erano due specie distinte; ma forme diverse d'una stessa specie prodottesi sotto l'influsso di un diverso grado di salsedine delle acque delle saline nelle quali vivono i piccoli crostacei in questione. Le conclusioni dello Schmankewitsch vennero accolte senz'altro fino a questi ultimi tempi. Recentemente, Bateson e sopratutto Samter e Heymons misero in dubbio, con speciali ricerche, le conclusioni dello Schmankewitsch e negarono che la salsedine influisca sull'*Artemia salina*, in modo da provocare una variazione dei suoi caratteri ben determinata e costante.

Il dott. Artom ha preso a studiare questa questione con materiale abbondantissimo raccolto nelle saline di Cagliari, ed è giunto alle principali conclusioni seguenti: 1° la salsedine esercita un evidente influsso sulle varie parti dell'*Artemia* sia femmina, sia maschio e vi determina la formazione di almeno due tipi di forme: l'*Artemia salina* a basse concentrazioni e l'*Artemia Mulhausenii* ad alte concentrazioni. Queste due forme sono collegate da molte altre di passaggio che corrispondono alle concentrazioni medie. I limiti entro i quali oscilla la variazione dell'*Artemia salina* di Cagliari sono notevolmente diversi da quelli nei quali oscilla la variazione dell'*Artemia salina* di

Molla-Kary (Mar Caspio) studiata da Samter e Heymons. Il dottor Artom conchiude pure che: sull'*Artemia* a riproduzione partenogenetica (di Molla-Kary) l'influsso della salsedine è diverso che sulla forma a riproduzione sessuale normale (Cagliari e Odessa).

Il lavoro del dott. C. Artom appare diligente e i risultati ai quali giunge sono interessanti: la vostra Commissione ne propone la lettura alla classe e la stampa nei volumi delle Memorie accademiche.

T. Salvadori,
L. Camerano, *relatore*.

L'Accademico Segretario
Lorenzo Camerano.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 10 Giugno 1906.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Ferrero, Direttore della Classe, Rossi, Brusa, Allievo, Carutti, Pizzi, Savio, De Sanctis, Ruffini e Renier Segretario.

È approvato l' atto verbale dell' adunanza antecedente, 20 maggio 1906.

Il Presidente legge le lettere del Dr. Carlo Frati e del Conte Alessandro Baudi di Vesme, che ringraziano l'Accademia pel dono loro inviato del *Messale Rosselli* riprodotto in fototipia.

Costituitasi poscia la Classe in seduta privata, procede alla elezione di otto Soci corrispondenti nella sezione di scienze giuridiche e sociali: riescono eletti i signori Professori:

Toniolo Giuseppe della R. Università di Pisa;
Brandileone Francesco della R. Università di Parma;
Brini Giuseppe della R. Università di Bologna;
Fadda Carlo della R. Università di Napoli;
Filomusi-Guelfi Francesco della R. Università di Roma;
Polacco Vittorio della R. Università di Padova;
Stoppato Alessandro della R. Università di Bologna;
Simoncelli Vincenzo della R. Università di Roma.

LETTURE

Le redazioni in volgare della sentenza di frate Accursio contro maestro Cecco d'Ascoli.

Nota del Dott. AUGUSTO BECCARIA (*).

Un magro, per quanto attendibile, compendio delle due sentenze — la bolognese del 16 dicembre 1324 e la fiorentina del 15 settembre (1) 1327 - conservatoci nella lingua originale dal codice riccardiano 673 (2) ed una serie di rimaneggiamenti in volgare del secondo processo e della seconda condanna sono tutto ciò che a noi resta degli atti dell'Inquisizione contro lo Stabili.

Ma esaminando quest'ultima categoria di fonti due fatti colpiscono subito la nostra attenzione, cioè, da un lato, il numero relativamente grande delle copie, che di quel documento ci sono pervenute, e, dall'altro, l'età dei manoscritti che le contengono, i quali oscillano tutti a un dipresso tra i primi e gli ultimi decennii del secolo XVII.

Di tali codici il Bariola (3), ad esempio, era riuscito a rintracciarne nella sola Firenze tre nella Palatina, quattro nella Magliabechiana, uno nella Marucelliana ed uno pure, oltre quello già citato, nella Riccardiana. Senonchè, quanto ai manoscritti della Palatina, già il Palermo (4), che fu il primo a rilevare l'im-

(*) Presentata nell'adunanza del 6 Maggio.

(1) *Decembris* ripete veramente anche qui il documento in questione, ma non si tratta, come noi vedremo, che di un errore dell'amanuense.

(2) " De magistro Cecho de Asculo quare combustus sit ", c. 124 *r*-124 *v* (num. rec.). Di lì fu edito per la prima volta dal Lami (*Catalogus codd. mss. qui in Bibl. Riccard. Florentiae adservantur*; Liburni, 1756; pp. 235-6) e sulle sue traccie lo ristamparono poi pressochè tutti i biografi di Cecco, scambiandolo anzi alcuni (ad es. il Castelli) per gli stessi atti originali.

(3) *Cecco d'Ascoli e l'Acerba* in " Rivista Europea " (Firenze), nuova serie, anno 10° (1879), vol. XVI p. 23.

(4) *I mss. palatini di Firenze*, vol. II p. 220-23; Firenze, dalla R. Bibl. Palatina, 1860.

portanza di queste sentenze in volgare ed a riferirne per sommi capi il contenuto, li aveva aggiudicati e pel testo e per la scrittura al seicento e, nonostante il Bariola affermasse che un esemplare di gran lunga più antico si trovava nel cod. magliab. cl. XXV n. 556 (oggi II, IV, 322 della Naz. centrale), il Boffito ha in seguito accertato che anch'esso non è nulla più di una copia compagna alle tante altre del sec. XVII (1). Così a questo tempo è da attribuirsi, senza la purchè minima ombra di dubbio, quella riportata nel cod. riccard. 1895, che il Bariola ha riassunto (2) e che, opportunamente commentata ed ampliata, ricompare nel libro del Castelli (3). Un altro manoscritto riccardiano, segnato tuttora col n. 1050 — e questo della fine del sec. XV — serba, a quanto si ricava anche dal catalogo del Morpurgo (4), un breve " ricordo di M° Cecco d'Ascoli ", inserito tra detti e fatti d'uomini illustri tratti da scrittori dell'antichità; ma ne ignoriamo del tutto la natura.

Parecchi esemplari di questo documento si leggono in codici e carte di varie altre biblioteche d'Italia; però anch'essi ci confermano nei risultati e nei giudizî già esposti. Al sec. XVII infatti, meglio che al XVI, spetta — a parere anche del mio illustre maestro il prof. conte Carlo Cipolla — quel manoscritto, che il Morelli (5) registrava col n. CXV tra i codici volgari della Naniana e di cui noi riferiamo più oltre il testo per disteso. Posteriore, ma di poco, è l'esemplare indicato al n. CXIV; ora l'uno e l'altro fanno parte della Marciana. Il Porro nel suo *Catalogo dei codd. mss. della Trivulziana* (6) c'informa che una copia in data del 1328 si trova pure in quella biblioteca, segnata col n. 30. Consta di 30 carte in 8° ed è, come tutte le altre, del sec. XVII. Alquanto più recente sarebbe invece l'esemplare conservatoci

---

(1) Cfr. Bariola, *op. cit.*, vol. XV p. 621 n. 6 e Boffito, *Perchè fu condannato al fuoco l'astrologo C. d'A.?* in " Studi e docum. di storia e diritto ", anno XX (1899), estratto: Roma, 1900; pp. 15-16.

(2) *Op. cit.*, vol. XV pp. 622-25.

(3) *La vita e le opere di C. d'A.*; Bologna, Zanichelli, 1892; pp. 39 e segg.

(4) *I mss. della R. Bibl. Riccard. di Firenze*; mss. italiani, vol. I p. 46 — Roma, 1900.

(5) *I codd. mss. volgari della libreria Naniana*; In Venezia, nella stamperia d'Antonio Zatta, MDCCLXXVI; pp. 100-101.

(6) Torino, Bocca, 1884 (vol. II della " Biblioteca storica ital. "); p. 405.

nel cod. 1544 della bibl. governativa di Lucca, che il Castelli asserisce del sec. XVIII (1). Alla sentenza qui tien dietro la testimonianza su Cecco del Villani e sono in tutto 6 carte in 4°.

Tuttavia, se è bene riconoscere che codeste redazioni ci appaiono in una veste sospetta ed in copie di età certo un po' tarda, non bisogna però neanche esagerare l'importanza di questo fatto. Gl'indizî di autenticità ch'esse hanno in loro favore — noi lo vedremo trattando la questione di proposito nel nostro prossimo lavoro sulle fonti per la storia e per la leggenda dell'astrologo — sono tali da non permetterci di respingere, in base a questo solo appunto, la loro legittima autorità. Chè anzi il ritrovarne esemplari in sì gran numero proprio in quel secolo, in cui, come continuazione del cinquecento, così vivo ferveva il lavorìo erudito e tanta gente si applicava a ricercare ed a trascrivere cose antiche, onde non se ne perdesse la memoria, ci fa nascere il dubbio che anche questi rimaneggiamenti della condanna, la quale mandò lo Stabili al rogo, possano esser frutto di quella tendenza. Infatti la leggenda di Cecco, che nel seicento toccò il periodo del suo massimo sviluppo e l'apogeo della sua fortuna, contribuiva non poco a divulgare tra il popolo e tra i dotti il nome e la fama dell'Ascolano, mentre quel velo di grandezza e di mistero, che alterandone i lineamenti storici ne ingigantiva le proporzioni, potè servire assai bene a richiamare l'attenzione sui fatti e sulla figura di lui. Ora a me non sembra del tutto improbabile che in questo rivivere largo ed attivo della memoria del maestro, qualcuno — non sappiamo chi — venendogli fra mano gli atti autentici del processo, ne facesse un transunto in volgare e che entrato questo documento a far parte di quel *substratum* di cultura popolare, ch'è proprio delle età di risveglio intellettuale, sia poi in breve divenuto il capostipite di quei tanti esemplari più o meno abbreviati, più o meno scorretti, che oggi si conservano sparsi nelle nostre biblioteche. Così questa sentenza compare talvolta (ad es. in B e in C) allato a relazioni leggendarie della vita e morte di Cecco, in cui vediamo appunto raccolte e tramandate a noi le bizzarre fantasie del volgo fiorentino sui casi dell'astrologo, tal altra invece (come in DE e in F) forma un fascicoletto a sè o è riferita (come in A

(1) *Op. cit.*, p. 274.

e in qualche altro codice) accanto a notizie e scritti di vario genere e di vario argomento. Ma l'unità d'origine delle diverse copie a noi rimaste si rivela chiaramente sia nell'identità del loro contenuto sia in quel nucleo di inesattezze e di errori, che anche attraverso le successive alterazioni s'è mantenuto costante in tutte e ci palesa lo scarso acume e la cultura limitata del rimaneggiatore più antico (1).

Se la primitiva redazione in volgare di questo documento sia, fra i tanti esemplari, giunta sino a noi, non mi fu dato finora di poterlo accertare. Gli elementi che ho raccolto non bastano a fissare in modo sicuro la genealogia di codesta popolosa famiglia di manoscritti e lasciando quindi a ricerche ulteriori il compito di chiarire anche questo punto, mi limiterò a quelle osservazioni, che più direttamente tornano utili al nostro scopo.

---

(1) Tra le mende, che valgono ad additarci la fonte comune dei varii esemplari, ce ne sono infatti alcune caratteristiche, le quali ci permettono di valutare davvicino l'opera di codesto ignoto traduttore. Cecco in due passi di una sua opera, da noi citati per disteso in seguito (p. 12 n. 2), era imprudentemente trascorso ad un'affermazione eretica, che frate Accursio, ripetendo parole e frasi del testo, doveva, nell'originale smarrito della sentenza, aver enunciato a un dipresso così: " ...ex *dominio* quartarum octauae sphaerae oriuntur homines diuinitate *fulciti*...qui mutant leges...ut fuit ...*Merlinus* ". Orbene le copie in volgare la riferiscono concordemente in questa forma: (§ 2) " ...dal *Signore* delle quarte dell'Ottaua sfera nascono huomini *felici* di Diuinità ...i quali mutono le leggi...come fu...*Merlo* ". Più oltre l'errore, che qui fece cambiare *dominio* per *domino*, si rinnova in modo anche più curioso ed in luogo di vederle asserire (§ 6) che il Bavaro " ueniua per l'*impero* ", leggiamo che " ueniua per l'*imperatore* ". Altre mende non meno notevoli si rilevano facilmente dal contesto (cfr. p. 11 *variante* 5, p. 21 *var.* 1, p. 23 *var.* 10, p. 26 *var.* 20); ma esse sono, a mio parere, ben poca cosa di fronte a quelle, che, per mancanza di un sicuro mezzo di raffronto, non possiamo più distinguere con certezza. Io sono anzi d'opinione che gran parte delle alterazioni introdotte dai rimaneggiamenti posteriori non rappresentino se non tentativi, fatti in varia guisa e misura dagli amanuensi, per eliminare almeno quegli sbagli e quelle sviste, che maggiormente colpivano la loro attenzione (cfr. ad esempio p. 20 *var.* 6, p. 21 *var.* 11, p. 26 *var.* 19 etc.). A volte poi è tutto un passo, che gli errori hanno reso affatto inintelligibile, ed allora parecchi dei trascrittori ricorrono, come noi vedremo, al sistema più spiccio di omettere senz'altro la parte corrotta, ristabilendo alla meglio il legame del senso (cfr. ad es. p. 10 *var.* 11, p. 22 *var.* 1 etc.).

Dei varii codici, ch'io ho avuto sott'occhio per la presente edizione, uno solo, cioè il marciano cl. VI n. 120 (già naniano n. CXV) che indicheremo con A, m'è sembrato per parecchi riguardi notevole e quello ho posto a base del mio testo, sebbene anche in esso passi oscuri e corrotti non manchino e l'amanuense non abbia tralasciato di aggiungere alle mende altrui le proprie. A correggerle ci aiutano in parte i mss. B (marciano cl. VI n. 121, già naniano n. CXIV) e C (riccard. n. 1895), i quali, mentre hanno tra loro un'affinità assai stretta, si avvicinano anche molto alla lezione del codice precedente, pur mostrando chiaramente di derivare da un esemplare diverso. Tuttavia ne rimangono in complesso alquanto al disotto, perchè sia l'uno che l'altro presentano qua e là lacune e perturbamenti, che palesano la fretta e la poca attenzione dei copisti. D ed E differiscono invece di parecchio tanto da A quanto da BC, la cui lezione cercano in genere di abbreviare e di chiarire. Queste due copie sono inserite l'una accanto all'altra in una vecchia legatura a cartoncino, che ne forma un solo codicetto (XXXVII, 10, 127 della Nazionale centrale di Firenze); ma il loro accostamento è, a mio giudizio, affatto casuale, perchè, malgrado la lezione dell'una segua assai davvicino quella dell'altro, non mancano poi nelle varianti indizi, i quali escludono tra loro una qualsiasi relazione diretta. A me pare più probabile che esse abbiano origine da un medesimo esemplare, cui riproducono con differenze lievissime. F (cod. II, IV, 382 della med. bibl., già magliab. cl. XXV n. 596) segna nella maggior parte dei casi uno stadio intermedio fra la lezione dei tre primi e quella dei due ultimi, accordandosi ora cogli uni ora cogli altri; però ha nel tempo stesso caratteri proprii, che lo distinguono nettamente da entrambi e ci additano in esso il principio di una nuova fase di alterazioni (1).

(1) Io propendo a credere che l'esemplare A, pur non essendo esso stesso il capostipite, lo ritragga nondimeno molto da presso sia nella forma che nell'ampiezza del testo. Di proprio non ha probabilmente che quegli errori, i quali facilmente si possono eliminare col raffronto degli altri manoscritti. B e C sono invece, a mio parere, due cattive copie di un codice non ancora identificato, in cui la lezione primitiva incomincia leggermente a variare. Su questo fatto non dovette essere senza influenza quell'accostamento di narrazioni leggendarie, che, a proposito appunto di codesti esemplari, noi abbiamo già rilevato innanzi; però le alterazioni del gruppo BC

Sul raffronto diligente di questi sei manoscritti poggia il testo della sentenza, che ora viene alla luce (1). La lezione, a cui di regola mi attengo, è, come ho già detto, quella del codice A, compendiando nelle varianti le divergenze degli altri cinque esemplari. Però, siccome neppur quello non si può dire privo di errori, ho cercato di introdurvi, dove la correzione mi appariva più facile, delle modificazioni distinte colle ⟨ ⟩ e col *corsivo.* Le prime indicano quelle parole, la cui soppressione torna utile ad una migliore intelligenza del testo; il secondo segna le alterazioni al ms. A là dove questo si palesa manifestamente errato o qualche breve aggiunta, volta ad accertare più chiaramente il senso. Nei luoghi invece, dove il testo mi è sembrato intimamente corrotto, ho riferito senz'altro la lezione primitiva, segnalando nei casi di maggiore entità il passo con un leggero tratto iniziale ed uno più forte | terminale. Anche l'ortografia fu in gran parte riordinata. Tutto il contenuto poi fu diviso in §, onde facilitarne le citazioni.

---

sono un nonnulla in paragone di quelle, che riscontriamo nella lezione degli altri tre manoscritti. B e C cambiano solo qua e là qualche parola; DEF invece rimaneggiano intere frasi, sostituendo, abbreviando ed omettendo. Tuttavia il contenuto rimane nelle sue linee generali anche in questi completamente immutato. Un curioso indizio delle alterazioni, a cui nei diversi gruppi andò soggetto il testo originario, ci è offerto dalla data, che i varî trascrittori attribuiscono al documento (§ 20). Così, mentre nell'esemplare A essa è riferita al 15 settembre 1327, BC la spostano al 20 settembre dello stesso anno e DE al 17 settembre 1328. F, che pure per molti riguardi mostra di avere stretta attinenza col gruppo DE, in questo si accorda invece con A. Ciò non ostante sia in DE che in F è facile scorgere il frutto di un ripetuto lavoro di rifacimento, il quale nelle sue fasi anteriori dovette avere molti punti in comune. Avvenuta la differenziazione, ciascuno continuò ad eliminare a modo suo gli elementi primitivi — DE più ed F meno — però rimasero sempre nelle varianti le traccie palesi della loro affinità.

(1) Dopo il riassunto del Palermo e l'altro del Bariola, a cui abbiamo accennato in principio, niuno s'era più dato la briga di ristudiare e di pubblicare nella sua forma primitiva codesto documento, il quale, checchè altri ne dica, resta pur sempre una delle fonti più cospicue della vita dell'astrologo. Così mia prima intenzione era di far cosa compiuta, riunendo in un'edizione critica tutti i codici noti, ma poi le circostanze mi impedirono di attuare pienamente codesto mio disegno ed ho dovuto accontentarmi di un testo, che colmasse in modo soddisfacente la lacuna, riserbando ad occasione migliore il proposito di mandare a termine l'impresa.

Nello riordinare le varianti ho adottato provvisoriamente un sistema, che si allontana alquanto da quelli comunemente in uso. Così, se si tratta di varianti brevi, il numero spoglio da parentesi indica la parola o l'ultima delle parole, di cui si dà una lezione diversa. Nel caso invece di aggiunte, di omissioni o di varianti di una certa ampiezza il numero segna l'ultima parola, in cui i testi si accordano, poi in calce, accanto a questa parola ripetuta, si reca per disteso la lezione del ms. divergente fino ad incontrare la prima frase, in cui i due testi tornano simili. Quando più codd. sono per tal guisa raccolti sotto una sola variante principale, le sub-varianti sono incluse tra ( ) e le aggiunte particolari di alcuno dei mss. tra [ ]. La sigla che designa il codice è sempre posposta alla lezione che esso dà; se ricorre sola al principio, sta ad indicare una variante accettata nel testo.

A — *Bibl. Naz. di S. Marco, Venezia, mss. it. cl. VI n° 120* (*provenienza Nani Giac. 114*); ms. cartaceo, sec. XVII verso la metà, 0,155 × 0,203, di c. 14. La sentenza va da c. 1 *r* a c. 10 *v*, la c. 11 è bianca, a c. 12 *r* comincia la ben nota " Lettera scritta da Dante Alighieri a Guido da Polenta, signor di Rauenna, ragguagliandolo del Senato di Venetia, dou'era andato Ambasciatore „ e va fino a c. 13 *r*, la c. 14 è bianca. È legato in pergamena.

B — *Idem, mss. it. cl. VI n° 121* (*provenienza Nani G. 115*); ms. cartaceo, secolo XVII verso la fine, 0,140 × 0,190, di c. 90. Consta di due parti scritte dalla stessa mano: precede, da c. 1 *r* a c. 43 *r*, una leggendaria " Vita e Morte di C. d'A. seguìta in Firenze nel 15 settembre 1328 „, la c. 43 *v* è bianca, poi da c. 44 *r* a c. 86 *r* viene la sentenza, c. 86 *v* è bianca e così le seguenti. È legato in pergamena.

C — *Bibl. Riccard. di Firenze, ms. 1895* (*R. I.* xxxviii): cartaceo miscell., sec. XVII seconda metà, 0,190 × 0,263, di c. 168 (numeraz. rec. 167, ma fu ripetuto il 121). La sentenza va da c. 1 *r* a c. 11 *v*, le succedono da c. 12 *r* a c. 14 *v* il racconto leggendario della " Morte di M° Cecco d'Ascoli seguìta in Firenze a' 15 settembre 1328 „ e quindi per una parte del volume, sempre della stessa mano, altri processi ed altre condanne. È legato in tela scura.

DE — *Bibl. Naz. centr. di Firenze, ms. XXXVII, 10, 127*: cartaceo, sec. XVII, 0,140 × 0,208, di c. 24 (num. rec.). A c. 1 *v* sono alcune notizie di mano più recente concernenti frate Accursio, c. 2 *r* forma il frontespizio, c. 2 *v* e c. 3 sono bianche. Poi seguono due esemplari dello stesso documento: il 1° (D) va da c. 4 *r* a c. 12 *r* ed è completo; c. 12 *r* è bianca; il 2° (E) si estende da c. 13 *r* a c. 15 *v*, indi, per un errore di legatura, da c. 19 *r* a c. 24 *v* e da c. 16 *r* a c. 18 *v*, rimanendo interrotto dopo l'enunciazione della pena. Nella copia D tra la fine della requisitoria ed il principio della sentenza (cioè in fondo alla c. 10 *v*) l'amanuense ha apposto la data 1620 ÷, la quale indica probabilmente l'epoca della trascrizione del ms. L'esemplare E è di altra mano, ma a un dipresso della medesima età.

F — *Idem, ms. II*, iv, *382* (*Proven. Stroz. in-fo. n° 1253 - Vecchia colloc. Magl. cl. XXV, 596*): cod. miscell. cartaceo di c. 283 (num. rec.) di vario formato, di varia età e di varie mani. È legato in pergamena. La sentenza occupa un fascicoletto, inserito nel vol. tra c. 202 *r* e c. 221 *r*, sec. XVII, 0,114 × 0,161, di c. 18, di cui la prima e l'ultima bianca.

Per le opere dello Stabili citate nelle note cfr.:

Cichi Esculani viri clarissimi in Sphaeram mundi enarratio in " Sphera Mundi cū tribus Commentis etc. „; " Impressum Venetiis per Simonem Papiensem dictum Biuilaquam .. MCDXCIX. Decimo Calendas Nouembres „ in-fo., da c. 1 *v* a c. 26 *r* (carte non num.).

Il commento inedito di C. d'A. all'Alcabizzo pubbl. e illustr. dal prof. G. Boffito in " Bibliofilia „ dell'Olschki (Firenze), anno V (1903-04), pp. 335-50 e segg. Nelle indicazioni mi attengo però alla numerazione del codice (vat. lat. 2366, sec. XIV, da c. 133 *r* col. 1ª a c. 140 *r* col. 2ª).

(c. 1 *r*) Sentenza contro a M.ro Cecco di Mro Simone delli Stabili da Ascoli[1] (1).

Al Nome d'Iddio, Amen[2] (2).

[§ 1] — Noi Frate Accursio di Firenze dell'Ordine de' Frati Minori, per Autorità Apostolica Inquisitore dell' Eretica Malignità della Prouincia della Toscana, a tutti i Fedeli di Cristo facciamo che sia noto che[3], mentre che faceuamo[4] il nostro offitio commessoci dell'inquisitione[5], per fama publica, anzi più tosto infamia, e per fede di molti huomini degni[6] riferendo ad una uoce che mro Cecco, figlio già di mro[7] Simone delli stabili di Esculo (3), in rouina sua et degl'altri et pericolo non piccolo dell'Anime spargeua molte et diuerse Heresie nella Città di Firenze et per detta Città[8] et, quello che è più de*te*stabile[9], un certo suo heretico et profano libretto, il quale compose *dettandoli*[10] il Diauolo per la sua dannatione sopra la sfera, contro la promessa e giuramento suo proprio, come Cane che ritorna al uomito (4), ⟨lo⟩ *daua*[11] come Mro per le squole a leggere, per

1. B *aggiunge*: seguita l'anno 1327, DE: data in Firenze l'anno di nro Signore 1328, F: data l'anno del Sig.re 1327 — 2. CDEF *la omettono* — 3. intendere che F — 4. esercitiamo DEF — 5. Inquisitore DEF — 6. degni di credenza riferendo tutti a una uoce F — 7. Cecco del quemd. Mro F — 8. nella Città e per la Città di Firenze CF — 9. BCDEF, destabile (*sic*)A — 10. CE, detestandogli *hanno invece* ABDF; *ma non si tratta, a mio parere, che di un riavvicinamento inconscio al* detestabile *precedente per analogia di suono* — 11. *così credo di dover sostituire il* dettaua, *che concordemente recano i mss. e che potrebbe anch'esso derivare dal fenomeno comunissimo negli amanuensi, a cui accennammo sopra. Tutto il passo che segue è del resto assai corrotto e poco ci aiuta qui il raffronto delle varie lezioni. Si accordano con* A *i codd.* B *e* C *colla variante* cercare *in luogo di* cercamo *e, per* C, *anche* molta contumelia *in luogo di* in contumelia. *Negli altri tre il testo cambia notevolmente:* DE

(1) Nella *Practica inquisitionis heretice pravitatis, auctore* Bernardo Guidonis *ord. fratrum predic.* (Doc. publié pour la première fois par le chanoine C. Douais - Paris, A. Picard, 1886; pp. 126-27) c'è una " Forma sententie relapsi in heresim in juditio abjuratam, qui fuerit tanquam talis reliquendus brachio et juditio curie secularis ", la quale ha colla presente sentenza una certa affinità, oltre che nello schema generale, anche in qualcuna delle frasi più in uso. Ne daremo gli esempi man mano.

(2) Gui, *op. cit.*, loc. cit.: " In nomine Domini, amen ".

(3) *Cod. ricc. 673*, loc. cit.: " Magistrum Cechum filium quondam Magistri Simonis Stabilis de Esculo ".

(4) Gui, l. c.: " ex tunc, tanquam canis ad vomitum redeundo ".

debito ⟨non⟩ di offitio, al quale salua la conscienza non uogliamo mancare di mostrare opera per ritrouar la uerità ⟨e⟩ delle cose predette fedelmente cercamo secondo la gratia dataci dal Signor Nostro et, ritrouando tanto per questo libretto quanto per questa pietà Diuina, in contumelia della quale era stato composto, peruenne alle nostre Mani || tanto per Testimoni degni di Fede quanto per molti altri degni di molte eccettione che tutte le cose predette piene di scandolo et mormoratione et non conforme al uero, | facemmo condurre alla nostra presenza et esamina*mmo* [1] il medesimo Mro Cecco et del medesimo pigliammo giuramento corporale di dire la uerità mera tanto di sè quanto degl'altri, sotto la religione del qual Giuramento, senza alcuna oppressione di forza, per sua libera e spontanea uolontà [2], constituito dinanzi a noi in Giuditio,

[§ 2] — disse et confessò che, mentre che fu citato et ricerco [3] per il [4] Religioso et Reu.do fra Lamberto del Cordiglio *dell'* [5] Ordine de' Predicatori, Inquisitore dell' Heretica prauità della Prouincia di Lombardia, comparue dinanzi a lui et confessò in giuditio ch' egli haueua detto et dogmatizzato publicamente leggendo ch'un uomo poteua nascere sotto la costellattione, che necessariamente fusse ricco o Pouero, così appiccato et decapitato, se Iddio non mutasse l'ordine della Natura (1), nè altrimenti potrebbe essere parlando della Potenza

lo dettaua e lo leggieua per le squole come mro. Udito così eretico pensiero, non uogliamo mancare di fare ogni diligentia per ritrouare la la uerità delle cose predette; fedelmente cerchiamo (cercammo E) secondo la gratia dataci da nro Sig.re e, ritrouando d.° lib. pieno di scandolo e mormoratione e non conforme al uero, facemmo condurre il d.° mro Cecco alla nra presenza et esaminandolo, pigliando da esso giuramento corporale... F *è ancora più succinto*: ... non uogliamo mancare di fare ogni diligenza per trouare la uerità delle cose predette et trouando detto libro pieno di ..., facemolo condurre alla nostra presenza et esaminando il detto mro Cecco et da esso pigliamo giuramento corporale ... — 1. *nei manoscritti* esaminando — 2. uolontà, disse e confessò dinanzi a noi in giuditio che mentre DE.

3. riceuuto BC — 4. per il Religioso e Reu.do P. fra DE; per il P. Reud.° fra F — 5. et ACDE; *in* F *tutto questo passo fu rimaneggiato un po' altrimenti:* ...Lamberto inquisitore di Lombardia del ordine de' Predicatori confessò auanti al detto Inquisitore in giudizio et

---

(1) Il Villani (*Cronica*; L. X, cap. 40) dice semplicemente che Cecco aveva messo nel suo trattato sopra il Sacrobosco " necessità alle influenze del corso del cielo "; ma quivi abbiamo traccia dell'imputazione enunciata anche in modo più preciso. Cfr. *ed. cit.* c. 19*v*: " Ablationis ortum uocat ut

d'Iddio ordinata o uero ordinaria, benchè per potenza d'Iddio [1] assoluta potesse essere altrimenti (1). — Ancora [2] che haueua detto in una certa sua lettione che dal Signore delle quarte [3] dell'Ottaua sfera nascono huomini felici di Diuinità, i quali si chiamano Dij Nabet, i quali [4] mutono le Leggi secondo più o (c. 2 *r*) meno, come fu Moisè [5], Ermete, Merlo e Simon Mago (2). — Ancora [6] che egli haueua detto et dogmatizzato, perchè Cristo

publicamente che egli haueua dogmatizzato leggendo che — 1. diuina DE, sua F — 2. Ancora disse e confessò hauer d.° DE, ... disse et confessò che haueua detto F — 3. della quarta e DE, delle quarte et F — 4. e DE. — 5. Aloite BC — 6. Ancora disse e confessò hauer detto DEF —

---

cum in ascendente erit aliqua de domibus Iouis, ut puta Sagittarium aut pisces. Nam si aliquod istorum fuerit in oriente, raro natus detinebitur paupertate, ut dicit Almansor in suis amphorismis: Nunquam erit pauper et inops, cuius dominus natus fuerit Juppiter... „ — Vero è che in questa stessa opera afferma (c. 12 *v*) “ quod secundum materiam et ueram fidem iste circulus formatus in zodiaco ex radiis planetarum licet sit causa uitae, tamen non est causa uoluntatis nostrae nec intellectus nisi dispositiue et sic teneo et credo uere „, aggiungendo anzi di voler distruggere “ in cenglosis centiloquii „ le contrarie argomentazioni degli altri astrologi, e che poi nel *Commento all'Alcabizio* (*cod. cit.* c. 133 *r* col. 1ª) e nell'*Acerba* (L. II, cap. 1 e *passim*) limita ancor più il valore di codesti influssi e c'insegna a sfuggirne colla scienza degli astri e coll'arbitrio gli effetti necessari; ma altrove implicitamente nega quello che qui esplicitamente ammette, sicchè siamo indotti a credere che queste manifestazioni ortodosse, più che a una vera convinzione dell'autore, siano dovute, come bene notò il Boffito (*Perchè* etc., p. 21), a pentimenti ed a ritocchi, indispensabili dopo la condanna e l'abiura del 1324.

(1) Un concetto analogo ricorre nel *Commento alla Sfera*, ma a proposito d'altro. Cfr. *ed. cit.* c. 26 *r*: “ Dico ergo ad quaestionem quod illa eclypsis in morte christi miraculosa fuit et praeter naturam et solum ex diuina potentia absoluta, quia deus, quando uult, potest ordinem mutari naturae; uelle posse conuertuntur in ipso „. E più oltre: (l. c.) “ Dico quod uerum est, nisi ordine gratiae superioris utatur, quod est miraculum, quia tunc creata omnia mutant ordines et obediunt creatori, cui sit honor et gloria in aeternum „.

(2) Nel Villani quest'accusa appare in una forma alquanto diversa: (loc. cit.) “ ...essendo in Bologna, fece uno trattato sopra la spera, mettendo che nelle spere di sopra erano generazioni di spiriti maligni, i quali si poteano costrignere per incantamenti sotto certe costellazioni a poter fare molte maravigliose cose „; ma Cecco nell'opera citata ci viene in soccorso assai meglio del cronista fiorentino. Cfr. *ed. cit.* c. 15 *r*: “ Iuxta quod debetis intelligere quod incubus secundum ipsum (hyparcum) dicitur morari in coluro, qui distinguit solstitium aestiuale, et isti spiritus dominantur in somniis coitus hominum et deportant sperma hominis in coniunctione maiori, scilicet

Figliolo d'Iddio hebbe nella sua Nascita la Libra nel Decimo grado di essa per ascendente, che perciò douette essere giusta la sua Morte per predicatione [1] et doueua morire di quella [2] morte et modo che morì. Et perchè Cristo hebbe il Capricorno nell'Angulo della terra, però nacque in una stalla, et perchè hebbe lo Scorpione in secondo *grado* [3], però doueua esser Pouero. E perchè l'istesso Cristo hebbe Mercurio in Gemini in Casa propria nella nona parte del Cielo, però doueua hauere scienza profonda data sotto Metafora. — Ancora [4] (per) che haueua detto che l'istesso Antichristo era per uenire [5] in forma di buon soldato et accompagnato nobilmente, nè uerrà in forma di [6] Poltrone, come uenne Christo, accompagnato da Poltroni (1).

1. predestinazione BC — 2. di quella che morì DE, di quella morte che morì F — 3. BCDE, *omesso in* AF — 4. Ancora disse e confessò che Anticristo DEF — 5. uerrà DE — 6. uerrà da DE.

---

quando Saturnus, Iupiter et Mars coniunguntur in cancro uel in capricorno, et emittit in matricem alicuius mulieris et exinde fit conceptio et oriuntur homines, qui uidentur diuini et qui constituunt leges in mundo et faciunt mira, ut fuit Merlinus et erit antichristus, qui conceptus erit ex uirgine et faciet miracula multa, de quo in fine lectionis dicam uobis „. Più oltre infatti questa stessa opinione, che ora ha esposto traendola dal *Liber de ierarchiis spirituum* di *Hyparcus*, ricompare sull'autorità di uno scritto di *Zoroastes*: (c. 25 *r*) “ Sicut dicit zoroastes in libro de dominio quartarum octauae sphaerae, ubi ita dicit ad literam: Ex dominio quartarum octauae sphaerae et ex uirtute incuborum et succuborum oriuntur homines diuinitate fulciti, qui mutant leges et adducunt nouas: ut quorum obitum coelum compatitur eo quod unusquisque *cheos* dicitur in natura. Nam secundum ipsum omnis quarta octauae sphaerae dominatur xii milibus annis et leges, quae incipiunt in prima quarta, terminantur cum alia incipit dominari, sicut fuit lex Moysi terminata per legem christi et nostra, secundum primum modum, terminaret per antichristum. Unde ista bestia zoroastes et aliqui eum sequentes... „. Dei miracoli dell'Anticristo però, come noi vedremo, non dice più nulla.

(1) Il Villani ripete codeste imputazioni quasi colle stesse parole: (loc. cit.) “ ...e dicendo come Cristo venne in terra accordandosi il volere di Dio colla necessità del corso di storlomia e dovea per la sua natività essere e vivere co' suoi discepoli come poltrone e morire della morte ch'egli morio e come Anticristo dovea venire per corso di pianete in abito ricco e potente e più altre cose vane e contra fede „. Una traccia ne è rimasta anche nelle *Disputationes adversus astrologiam diuinatricem* di G. Pico della Mirandola. Cfr. Liber quintus, cap. XIIII verso la fine: “ Esculanus ille superstitiosus, qui fertur magus, natus est, ait, Jesus in stabulo, quia imum caeli tenuit capricornus, et alius rex, inquit, fuit iudeorum, quia horoscopus erat libra; hebraei enim saturni sunt, saturni regnum libra „. Nelle opere di Cecco invece, quali a noi sono pervenute, non v'è più nulla, che ricordi

[§ 3] — Ancora disse e confessò ch'egli dauanti al predetto frate Lamberto [1] di Lombardia Priore maladisse in giuditio ogni Heresia et ogni credenza e fauore di [2] Heretici et principalmente Astrologi [3] et assolutamento giurò osseruare la fede Catolica (1) e delle cose [4] predette e promesse ne prese penitenza et assolutione dal medesimo inquisitore, sì come [5] per la sen-

1. Lamberto Inquisitore [di Lombardia DE] maladisse DEF — 2. a fauore degli BC — 3. et in particolare d'Astrologi F — 4. delle cose promesse CDEF — 5. *in* DE *il passo che segue appare con una lezione alquanto diversa:* sì come si uede per la sententia data e la

davvicino le opinioni accennate. Un errore analogo è messo in bocca a *Zoroastes*, ma, naturalmente, solo per confutarlo. “ Unde ista bestia zoroastes „ ripiglia infatti nel *Commento alla Sfera* (*ed. cit.* c. 25*r*-25*v*) “ et aliqui eum sequentes dicunt quod christus fuit ortus in dominio istarum quartarum ex virtute incuborum et succuborum, de quibus supra dixi uobis, quod horribile mihi uidetur scribere ista uerba... sed cum hoc isti dicant de dominio quartarum et nihil probent et uerba eorum uana sunt et melancolica et contra ueritatem sanctae fidei reuerendae, quia christus dominus noster non fuit unus de illis diis per influxum coelestium corporum et incuborum et succuborum; Immo ueré filius dei uiui, qui uenit in uirginem gloriosam, et (*sic*) humanum genus ex manibus retraheret inimici „ e, dopo aver dato di ciò le più svariate prove, conclude: “ Unde exponatis aut (*sic*) deus naturae et non factus a natura coelestium, ut dicunt isti simplices ignorantes „. Così nel *Commento all'Alcabizio*, citando un passo degli *Afforismi* di *Almansor*, che contiene in germe la stessa eresia, si sente in dovere di chiarire come lo intende, perchè altri poi non creda ch'egli lo interpreti in modo contrario alla fede: (*cod. cit.* c. 134*v* col. 2ª) “ Iuxta quod debetis intelligere quod istam propositionem multi intelligunt non bene, dicentes quod, quando caput fuerit in tali dispositione, quidquid postulatur a Deo, qui est causa omnium rerum, obtinetur; sed istud certe non credo, quia nunquam fuit causa sub effectu nec creator supponitur creature, nam uideretur secundum istos quod Deus, qui est causa causarum et celestium, terrestrium et infernorum, esset subpositus constellationibus, quod est absurdum talia intimare. Unde credo istud et sic intelligo illam propositionem: Si quis aliquid postulauerit a Deo, idest ab aliquo qui sit primus in regno uel in ciuitate, quia deus dicitur a *theos*, quod est primus. Unde quando uelletis ab aliquo domino aliquid impetrare et caput fuerit in tali dispositione, disponetur dominus ille gratiam uobis tribuere cum effectu: alias non „.

(1) Gui, *op. cit.* l. c.: “ omnem heresim in juditio abjuravit... et promiserat atque juraverat parere mandatis Ecclesie et inquisitorum „. Cfr. p. 92, “ Modus conveniens abjurandi heresim in juditio „: “ abjuramus et renegamus penitus omnem heresim... et omnem credentiam hereticorum... et omnem favorem seu fautoriam ipsorum, sub pena, que de jure debetur relapsis in heresim in juditio abjuratam „.

tenza lata dal medesimo inquisitore *e la*[1] ajuratione fatta dall'istesso mro Cecco le predette cose largamente et ordinatamente si contengono; la qual penitenza[2], non habbi memoria, disse hauerla || fatta interamente.

[§ 4] — Ancora disse e confessò che, dopo la predetta aghiuratione e penitenza[3] e dopochè fu interrogato in fiorenza se per scienza d'Astrologia si poteua sapere la disgratia o fortuna di alcun Principe o condottiere di Esercitii[4] dependesse o consistesse nella fortuna et disgratia dell' istesso capitano[5], alle quali cose egli attendesse[6] alla uerità, | rispose che si poteua sapere dall'influenza de' corpi superiori et dall'[7] inditio del Cielo o delle Stelle che[8] la fortuna o disgratia d'un esercitio dipende dalla Fortuna e disgratia d'un Generale e così come il Capitano[9] è fortunato o sgratiato, così l'esercito sotto di lui è fortunato *o sgratiato*[10], e questo[11] prouò et difese e prouerrebbe et difenderebbe per parole, argomenti e ragioni di Astrologia.

[§ 5][12] — Ancora disse e confessò che tutte[13] le predette cose si potrebbon sapere per la scienza d'Astrologia, sì come ogn'altra cosa, che si possi⟨n⟩ sapere, si può inuestigare[14] in qualche[15] scienza.

[§ 6] — Ancora disse et confessò che dopo le predette cose, cioè del mese di Maggio prossimo passato, uno, il nome del quale non sa[16], gli domandò della uenuta del Bauaro[17], che ueniua per l'imper⟨at⟩o⟨re⟩, se uenisse o no e ch'egli rispose (1) come è

iuratione fatta dallo stesso mro Cecco e le predette cose largamente et ordinatamente si contengono appresso di noi *e ad essa si accosta* F *colle varianti:* per la sentenza et la adiurazione *e* messer Cecco — 1. DEF, e C, *tralasciato in* A — 2. *in* DE *quest'ultima frase è senz'altro omessa, in* F *si legge invece:* ...et la penitenza disse hauerla fatta interamente.

3. e penitentia, gli fu domandato in firenze da un certo fiorentino, il nome del quale non si ricorda, se [per scientia d'Astrologia E] si poteua sapere DE; . . . gli fu domandato in Firenze se per scienza d'Astrologia si poteua sapere F — 4. *anche questo passo è manifestamente corrotto*; BCDEF *inseriscono qui un* che, *ma il senso resta sempre monco* — 5. condottore F, *omesso in* DE — 6. attenendosi F; DE *abbreviano*: egli rispose — 7. di tal BC — 8. perchè DE – 9. Generale DE, condottiero F — 10. DEF, *omesso in* AC — 11. e questo disse difendere con parole, argomenti e . . . DE; F *si accorda invece con* A, *sostituendo* tutto *a* questo *e tralasciando* parole.

12. DEF *omettono questo* § — 13. dette BC — 14. o che si può mitigare (*sic*) C — 15. quella B.

16. non si ricorda DEF — 17. del Bauaro, se ueniua o no [et egli F]

(1) A codeste profezie di Cecco sugli " andamenti del Bavaro „ accenna anche il Villani (loc. cit.) aggiungendo che " si trovarono poi vere „.

uero che uerrà et entrerrà in Roma, ma non con tanto honore [1] quanto desidera et non con tanta gloria, et soggiunse che l'istesso Bauaro presto morrà et domandandogli quando, presto, rispose e disse: quando l'istesso Bauaro s'incoronerà, dico quando morrà, (c. 3 *r*) cioè il giorno et l'hora et in che modo cioè di che morte, et questo si può sapere, perchè in quel punto, che si riceue premi et grandi [2] honori, i corpi Celesti sono nella medesima dispositione, *nel*la [3] quale erono nel tempo della Nascita oconceptione, *e* [4] che ancora si puol sapere il luogo secondo le conditioni na turali di esso, come in luogo renoso, montuoso o uero Piano.

[§ 7] — Ancora disse et confessò che egli consigliò [5] della Guerra, cioè che i nostri non douessino guerreggiare con l'istesso Bauaro, et dette consiglio che fussi lasciato passare et andare doue li piacesse, fino a tanto che dai corpi superiori [6] e Cieli, per la uera scienza d'Astrologia, si potesse pigliare tempo e giorno per eleggiere la Guerra con lui [7], et disse di credere che le predette cose si posson sapere et eleggere per scienza d'Astrologia et che non crede che questo sia contro la fede.

[§ 8] — Ancora disse et confessò d'hauere detto più uolte et dinanzi a molti [8] dal detto tempo in qua in fiorenza che si può sapere per la scienza d'Astrologia la uittoria d'una Città sopra l'altra in questo modo, cioè che si consideri l'Ascendente ouero il Segno, nel quale fussi posta la prima Pietra della [9] Città, et *allora* [10] considerando il Signore del Segno *ouero* [11] dell'Ascendente sopra il segno ouero ascendente, nel quale fussi messa [12] la prima Pietra d' un'altra || Città, così sarebbe [13] il Dominio d'una Città sopra l'altra [14], allora cioè quando il segno d'una Città domina [15] sopra il segno d' un' altra Città, et per

rispose che uerrà DEF — 1. honore [nè con tanta gloria D] quanto desidera. Ancora disse e confessò che il d.° Bauaro presto morrà et domandandogli quando, rispose: quando s'incoronerà e questo si può sapere DE; honore quanto desidera et soggiunse ancora et disse che il detto Bauaro s' incoronerà (*uguale omissione è anche in* C) et questo si può sapere F — 2. gradi et BCDEF — 3. BCDE, la A — 4. CDE, *omesso in* A.

5. che egli consigliò che i nostri non guerreggiassero con lo stesso Bauaro e che lo lasciassero (fussi lasciato E) passare DE; d'hauer consigliato che i nostri non douessero guerreggiare con l'istesso Bauaro et che lo lasciassero passare F — 6. superiori, per uera scientia DEF — 7. con esso e disse che non crede questo sia contro la Fede. DE; con lui, asserendo che le predette cose si posson sapere ... F.

8. a molti che si può sapere la Vittoria DE; a molti in firenze che si può sapere per scienza d'Astrologia la Vittoria F — 9. di d.ª DE — 10. BCDEF, altri (*sic*) A — 11. BCDEF, *omesso in* A — 12. posta DEF — 13. s'harebbe CDE — 14. sopr'all'altra e per prouare DE — 15. domina

prouare et dichiarare questo dice hauer detto per esempio che la Città di Fiorenza è fondata sopra il segno dell'Ariete, il [1] che haurebbe *predominio* [2] sopra *quel* segno, *nel quale* [3] è fondata la città di Lucca, allora i Fiorentini uscendo contro a' Lucchesi comincieranno [4] a preualere et questo per uera scienza d'Astrologia (1).

[§ 9] [5] — Ancora disse et confessò [6] et a molti da detto tempo in qua che, sì come dalla positione della prima Pietra in una Erettione di una Città dipende tutto lo stato della Città [7] e così *come nel* [8] gettare il seme nella Matrice della Donna piglia [9] Potenza lo stato futuro del Nato (2), così per constellattione ogni ordinatione et fine della Guerra depende e così per scienza di tal Costellatione si può sapere l'euento fortunato ouero sfortunato della Guerra et questo secondo *Tolomeo* [10].

[§ 10] — Ancora disse et confessò [11] che per uia et scienza di Astrologia si posson sapere li euenti futuri degl' huomini Buoni et Cattiui prosperi et auuersi, come ecco che uenendo *alcuno* [12] alla mia presenza così proponendo: Maestro, io uo alla Corte per impetrare qualche benefitio, desidero sapere (c. 4 *r*)

sopra l'altra et per prouar F — 1. et DEF — 2. BCD, per Dominio AEF — 3. BCDEF, sopra qual segno è fondata A — 4. cominceriano D, cominciariano E, cominciarono F.

5. *questo* § *in* F *manca* — 6. e confessò hauer d.° che, sì come DE — 7. di essa DE — 8. e così come gettare BCDE, e così il gettare A — 9. pigliando DE — 10. BCDE, Idomeo (*sic*) A.

11. e confessò che si può sapere DE, et confessò che per scienza d'Astrologia si posson sapere F — 12. come ecco che alcuno uiene alla BC, come per esempio se alcuno uiene alla DEF; ... uenendo alla A —

(1) Qualcosa di simile, se non precisamente questo, Cecco dice anche nel *Commento alla Sfera*: (*ed. cit.* c. 10*v*-11*r*) " Habet ciuitas significatorem aedificationis. Nam, ut alias dixi uobis, simile est de aedificatione ciuitatis, quemadmodum est de conceptione indiuidui. Nam sicut in proiectione uel in casu spermatis in matricem sumitur potentia infortunii et dignitatis illius, sicut in primo lapide et in ciuitate. Nam, cum primus lapis proiicitur in fundamento sub tali ascendente, ille dominus ascendens indicat quid de ciuitate et iste significator se habet ad ciuitatem sicut anima ad corpus et homines illius ciuitatis consequuntur naturam illius planetae, potiusquam significatorum scilicet climatis et prouinciae... ".

(2) L'espressione pare che fosse veramente di Cecco; cfr. infatti, oltre il passo del Commento al Sacrobosco già citato innanzi, l'altro del *Commento all'Alcabizio*: (*cod. cit.* c. 139 *r* col. 2ª) " Et simile de Ciuitatibus, sicut de conceptione indiuidui; nam in primo lapide, cum proiicitur in fundamento, si fuerit aliquod signum impeditum... ".

se debbo ottenere qualche dignità [1] ouero quel che mi debba accadere di bene o male, asserendo l'istesso mro Ceccho che a tali petenti si può rispondere in quattro modi [2], come scriue Ermete che si possono sapere gl'accidenti degl' huomini, cioè [3] per Natura ouero principio di Nascita e figura e per Natiuità del primogenito e per interrogatione pensata lungo tempo con affetto et sollecitudine et perchè l'intelligenze mouenti i Cieli influiscono sopra gl'huomini mouendoli a ricercare, di maniera che in tali dimande gl'huomini sono più tosto mossi che muouino loro medesimi, et che così dicono tutti i Filosofi et Astrologi antichi, asserendo ancora di cauare da' predetti la dispositione de' Cieli, e [4] uede la contrarietà de' Corpi Celesti ouero la loro *influenza* [5] et dall'hora della loro conceptione ouero nascita [6] et così giudica l'esito buono o Cattiuo e così, innanzi che uenisse a fiorenza e di poi [7] che fu a fiorenza, consideratamente rispose a chi glie ne dimandaua e principalmente agl'huomini Nobili et Religiosi et persone literate [8] et questo secondo la uera scienza di Astrologia et secondo quello, che si contiene ne' libri [9] de' Giuditij degl' Antichi Astrologhi et Filosofi, et ch' era apparecchiato *a* [10] confessare queste cose a tutti et difenderle da tutti. ||

[§11] [11] — Ancora disse e confessò di hauere osseruato le Costellationi e [12] Corpi Celesti et che secondo il corso delle stelle crede che naschino i costumi degl'huomini, le attioni degl'huomini e fini et che secondo queste cose giudicò [13] nel comprare e uendere per aumentare [14] il bene e schifare il male et ancora nel fare esercitij et altre attioni humane.

[§ 12] — Ancora disse et confessò che fu interrogato [15] da un certo Fiorentino [16] et rispose che credeua esser uere quelle cose, che si contengono nell'Arte Magica o Negromantia [17] (1).

1. il mio desiderio DEF — 2. modi, come scriue Ermete: gl'accidenti degl'huomini DE; modi. Ermete scriue che si posson sapere... F — 3. *omesso in* DEF — 4. se BCD, si EF — 5. DE, conscienza (*sic*) ACF — 6. nascita giudica DEF — 7. e di poi ancora consideratamente DEF — 8. siente F — 9. ne' libri degl'antichi DEF; DE *omettono poi anche* et Filosofi — 10. CDEF, e A.

11. *in* DEF *questo* § *è tralasciato interamente* – 12. de BC — 13. giudica BC — 14. argomentare BC.

15. quando fu interrogato CDE, essere interrogato F — 16. fiorentino, il nome del quale non si ricorda, se credeua DE; Fiorentino se credeua F — 17. o Negromantica, asserendo il d.° mro Cecco di sì e replicando DEF

(1) E così doveva essere, se di magia e di pratiche magiche discorre tanto spesso ed a lungo nel *Commento alla Sfera*. Forse nella redazione, che di quest'opera noi ora possediamo, molto è già stato soppresso in virtù

et replicando il Medesimo fiorentino che, se fusse uero, i Principi e Potenti Huomini del Mondo [1] acquisterebbono tutto il Mondo ⟨et⟩ esso rispose et disse che non l'acquistono, perchè non sono in tutto il Mondo tre Astrologi, che si sappino seruire [2] bene di quell'Arte, et questo disse [3] hauere detto per sè medesimo, perchè fece più in quell'Arte Astrologica che ⟨in⟩ [4] alcuno altro, che fusse stato da Tolomeo in qua.

[§ 13] — Ancora disse et confessò d'hauer dato [5] a quel fiorentino regola et modo *e* d'hauerli insegnato qualmente per [6] Astrologia sapesse dell'incesto d'una Donna con un Huomo e disse così: Se domandi di una Donna peccante, mettela nel luogo dell'Ascendente e l'huomo nella settima, et se (c. 5 *r*) domandi dell' Huomo, farai il contrario, cioè metti l'huomo nell'Ascendente e la Donna nella settima, et di poi risguarda i Pianeti delle dette Case [7] et se ambi duo i Pianeti sono in un segno et risguardano di aspetto Amico, significano incesto e congiuntione [8] dell' huomo e della Donna; e che pregato dal detto fiorentino che li esponesse il libro d'Alcabitio, il quale tratta de' segni et congiuntione de' segni ⟨e congiuntione de' segni⟩ [9] della Natiuità degl'huomini [10] e de' segni da eleggere nelle uendite et nelle compre et altre attioni Humane [11] solamente per arte di Astrologia ⟨e⟩ gli insegnò trouare un certo Comento, il quale l'istesso maestro Cecco fece sopra il medesimo libro, stimolandolo che procurasse di hauerlo (1).

1. del mondo di esso se ne impadronirebbono [et egli E] rispose che non lo fanno, perchè non sono DE; F *si accorda invece con* A *sostituendo* replicò *a* rispose — 2. che sappino scriuere F — 3. disse per sè D — 4. BCDEF *lo omettono.*

5. hauer dato a quel fiorentino regola e modo qualmente DE; d'hauere insegnato e dato regola a quel fiorentino qualmente F — 6. per uia d'Astr. DEF — 7. Donne caste C — 8. e congiuntione, del che pregato DE; e congiunzione, di poi pregato F — 9. CDEF *lo tralasciano; in* B *il testo è sconvolto*: il quale tratta de' segni della natiuità degl'Uomini e de' segni e Congiunzione e de' segni da eleggere... — 10. degl'huomini et delle azioni humane tutte per arte di Astrologia et di più insegnò al detto fiorentino trouare F — 11. humane e gli insegnò trouare DE.

---

delle modificazioni introdottevi dopo l'abiura, tuttavia ciò che resta è tale da farci nascere il sospetto che, malgrado gli ammonimenti con cui rende omaggio alla chiesa ed alla fede cattolica, egli a codeste superstizioni fosse inclinato più di quanto non dica. Cfr. ad esempio quello che sulle traccie di *Zoroastes*, “ qui fuit primus magicae artis inuentor „ ne espone a c. 23 *r* (*ed. cit.*).

(1) Basterebbe questo solo accenno a farci credere nell'autenticità del contenuto della presente sentenza, perchè, come ognun sa, il Commento di

[§ 14] — Ancora disse et confessò che [1], uenendo a lui et uolendolo interrogare di qualche domanda, egli [2] per uia d'Astrologia sapeua quello che quei tali pensauono, che ueniuono a lui, e di quelle cose che uoleuon domandare et di più, se haueuono qualche cosa nelle Mani occulta [3], che cosa fusse quello che hauess*ino* [4] quanto alle condittioni naturali, benchè non quanto alle Artificiali: verbigratia, se hauessi un fiorino d'Oro, direbbe tu hai dell'Oro e non un Fiorino, tu hai del ferro et non un coltello [5]; ancora se fussi bianco ouero nero, benchè non sapesse || se fusse Neue o Carbone; et in questo disse che consideraua la dispositione dell'Ascendente et de' Pianeti. ⟨ben⟩che [6] in quella dispositione rispondeua de' pensieri. Ancora consideraua *il* [7] pianeto sopra qual [8] cosa hauesse dominio [9] e solamente dimostraua quel dominio e perchè il Sole ha dominio sopra l'oro, se alcuna uolta qualcuno ueniua a lui et portaua qualcosa nelle Mani dominante il Sole, diceua che egli haueua dell'Oro in mano *e se* [10] dominaua Marte [11] e significaua il ferro. ancora se alcuno ueniua a lui ⟨et⟩ portando qualcosa in mano, diceua che haueua del ferro; ancora, perchè Mercurio significa ouero domina cose miste, se Mercurio allora dominaua quando ueniua uno a trouarlo portando qualcosa in mano, diceua che

1. e confessò che, uenendo uno a lui per uolerlo interrogare di qualche domanda, rispose e disse che per uia d'Astrologia sapeua quello che quel tale pensaua e di quello che uoleua domandare e di più, se haueua qualcosa nelle mani occulta D, ... rispose e disse che sapeua quello che quel tale pensaua e quel che uoleua domandare per uera scienza d'Astrologia e di più, se haueua ... E; et confessò che, se uno andassi a trouarlo et uolendo interrogare di qualche domanda, risponderebbe di sapere per uia di Astrologia quello che quei tali pensauano et quello che uoleuano domandare et di più se haueuano ... F — 2. se egli BC — 3. occulta, sapeua che cosa fussi. Verbigratia se DEF — 4. BC, hauesse A — 5. DEF *omettono la frase che segue*: un coltello, considerando la dispositione DE ... dicendo che consideraua la disposizione F — 6. BCDEF *tralasciano il* benchè, DEF *anche il* rispondeua — 7. BCDEF, qual A — 8. quella DEF — 9. *anche qui* DEF *abbreviano molto*: dominio e perchè il sole ha dominio sopra l'oro, diceua che colui haueua dell'oro — 10. BCDEF, perchè A — 11. Marte, significaua il ferro, che haueua in mano, e diceua che haueua del ferro ... BC; Marte, diceua che haueua del ferro e se dominaua Mercurio, Sig.re di cose miste, diceua che haueua qualcosa ... DEF

Cecco all'Alcabizio colla morte dell'autore andò perduto e più non se n'ebbe notizia alcuna, finchè non lo ritrovò per un caso il Boffito nel codice vaticano citato.

era qualcosa *mista* [1], e [2] questo quando prima si muoue con intentione di sapere la uerità e non di tentare e così di cose simili et disse di saperle certamente et rispondere il uero certo agl'huomini grandi et quello ch'è poco in Astrologia aggiungendo dichiaraua di sapere i loro pensieri in confuso et in generale. Onde, se uenisse alcuno con perfetta imaginatione, considera il Dominio delle Stelle ascendenti nella quarta parte del (c. 6 *r*) Cielo, che significa [3]: oro, Campi, cose nascoste [4] et fini delle cose, e direbbe: in confuso tu pensi di qualche Campo o uero di qualche Tesoro Nascosto [5] ouero del fine di qualche cosa, et così in confuso risponderebbe di qualche pensiero per uia di scienza, cioè che questo sia possibile et non per necessità, perchè i pensieri specificatamente in particolare appartengono solo a Dio et non alle Creature Humane nè ad Astrologo nè ad altri, et disse che *le* [6] predette cose sono scibili [7] ancora in confuso, perchè tal Pensiero corrisponde alla costellatione de' Pianeti in quel punto, quando *lo si* comincia a pensare.

[§ 15] — Ancora disse et confessò d'hauer composto un [8] certo libretto o libro sopra la sfera del Mondo, il quale libretto comincia: " In Magistro super Gloria Mundi est [9] post Mortem *uiuere in mentibus* [10] Humanorum „ (1) et finisce: " explicit scriptum super spheram Mundi „ secondo Cecco d'Ascoli, mentre era Giouane et *e*letto [11] per l'uniuersità di Bologna a leg-

— 1. *così credo di dover correggere, malgrado che i mss. diano concordemente*: inetta — 2. DEF *continuano*: . . . e [così F] simil cose disse saperle certamente e rispondere il uero, asserendo di sapere ancora [il d° mro Cecco DE] i loro pensieri... — 3. significano DEF — 4. nascoste, direbbe DEF — 5. nascosto e non altrimenti si può rispondere, perchè i Pensieri s'appartengono a sapere solo a Dio DE; nascosto et non altrimenti, perchè i penseri in particolare s'appartengono solo a Dio F — 6. DEF, *omesso in* A — 7. sono scibili perchè D, erano Scibile perchè E, sono uisibili perchè F.

8. un certo suo libretto sopra DF, un libro sopra E — 9. et (*sic*) BCDEF — 10. A *dà qui una lezione inintelligibile*: in ueriti bra; BCDEF *invece recano chiaramente* in mentibus, *però anch'essi tralasciano* uiuere *ed io supplisco valendomi delle stampe* — 11. et letto AF, e letto DE, e lettore nell'u. BC; BCDEF *poi sopprimono concordemente* a leggere, *ma cfr. a questo proposito la rubrica iniziale del Commento di Cecco all'Alcabizio.*

(1) Cfr. *ed. cit.* c. 1*v*: " Supra mundi gloriam est post mortem uiuere in mentibus humanorum „.

gere (1), asserendo di essere stato autore del detto libro, il quale disse et confermò essere stato corretto da frate Lamberto Inquisitore predetto.

[§ 16] [1] — Ancora disse, confermò et confessò che, dopo *che* [2] egli Mro Cecco agghiurò ogni Heresia et ne prese penitenza et dopo che ⟨egli⟩ fu in Fiorenza, già sono molti mesi un certo Fiorentino, il nome del quale non si ricorda, uenne a trouarlo (2) sì innanzi alla Juratione come dopo e dinanzi l'Inqui || sitore di Lombardia prima *e* [3] poi dinanzi a noi *confessò* [4] le predette cose, *che* si contengono nel Medesimo Libretto, non uiste per il Medesimo Inquisitore, *le quali* sono infeste, orribili, sciocche, contrarie alla salute humana, Heretiche et inimiche alla uerità Cattolica.

[§ 17] — Qual cosa più Orribile et Heretica? Qual cosa più Inimica a Iddio et agl' huomini che dire o insegnare [5] di quel

1. *questo § appare nei mss. in due lezioni, che diversificano parecchio tra di loro.* BCF *si accordano in genere con* A, *inserendo dopo* cose *un* che *quivi omesso, però il senso ne resta sempre alquanto oscuro. Un po' più chiaro è il testo in* F *per l'altra aggiunta, accolta anche in* DE: ... e poi dinanzi a noi confessò le predette cose, che si contengono .... le quali sono... *Ma* DE *cercano di chiarirlo ancora, dandone una lezione assai più breve*: Ancora disse, confessò e confermò dinanzi a noi in Giuditio le predette cose, che si contengono nel medesimo libro non uiste dall'Inq.re di Lombardia, le quali sono infeste, orribili, sciocche, eretiche, inimiche e contrarie alla salute humana et alla uerità cattolica — 2. CF, *omesso in* A — 3. BCF, *omesso in* A — 4. F, confessò e BC, confessa et A.

5. o insegnare cose contro alla sua diuina LL. Qual'eresia più detestabile D; o insegnare contro alla diuina LL. e se metti il luogo incomprensibile della Natiuità e la Diuina Sapienza, la passione quale portò e la morte quale sostenne è proceduta dalla necessità de' corpi superiori e ... E; o insegnare cose contro alla legge diuina, hauendo l'altissimo Iddio sig.re nostro sparso per noi il sangue suo per saluare l'anime di noi altri peccatori et senza di lui non è fatto niente in questo mondo, se metti il luogho incomprensibile della natiuità e diuina sapienza, la sua passione la qual portò e la morte qual sostenne è proceduta dalla

(1) Le stampe del *Commento alla Sfera* non ci hanno conservato questa postilla, però una testimonianza analoga ricorre al principio del codice, che contiene il *Commento all'Alcabizio*: (c. 133*r* col. 1a) " Incipit scriptum super librum de principiis astrologie secundum Cicchum, dum Juuenis erat electus per Uniuersitatem bononie ad legendum ".

(2) A me pare che le due parti del periodo non s'accordino troppo bene; forse qui è stato omesso qualcosa.

singulare pastore Pio, il quale proferse [1] la sua Anima per le sue Pecorelle et per sua solamente liberalità diuina et ha *lauati li* [2] nostri Peccati nel Sangue suo, Jesu Christo Signor Nostro, dal quale son fatte tutte le cose et senza di lui non è fatto niente, *che* [3] la Natiuità et la Diuina sapienza, la sua passione la quale portò et la Morte quale sostenne è proceduta dalla necessità de' Corpi superiori et dalla uirtù [4] delle Costellationi Celesti et che urgente il medesimo fato li fu necessità l'esser pouero? Qual Heresia *più* [5] detestabile? Qual ignominia più graue del Creatore che dire che Antichristo sia per nascere di Vergine *e* sia speciale et proprio figliuolo [6] d'Iddio et che, finiti due mila Anni dalla Natiuità di Christo, uerrà in questo mondo in forma di Buon soldato accompagnato da Huomini nobili et non uerrà come Poltrone et accompagnato da Poltroni, come uenne Christo? Qual maggiore falsità più [7] Heretica che giudicare il tempo, l'hora, il luogho et modo della Morte, le quali *cose* al genere humano sono al tutto incognite [8], o li fini degl'huomini buoni o cattiui pros (c. 7 *r*) peri o contrarii tanto nel fare esercitij, eleggere Guerre, ottenere Vittorie, quanto in qualsiuoglia altra attione humana per dispositione et operatione de' corpi superiori, per le quali al tutto si leua il Libero Arbitrio et per conseguenza ne uiene totalmente leuato il Merito et demerito, sì come lui maestro d'Errori, innanzi che abiurassi l'Heresia et dopo per benefitio della riconciliatione [9], *del* [10] benefitio fattoli dalla Chiesa al tutto ingrato [11] ouero prodigo et improuido della Morte, in grand'offesa d'Iddio e pericolo dell'Anime daua, insegnaua, giudicaua et instituiua et expressamente daua ad intendere? Et benchè egli adesso dica che nelle cose predette supponeua [12] la Diuina Potenza et [13] il libero arbitrio, per testimonii Contrarii *è stato* conuinto [14], et dato che hauessi supposto,

necessità de' corpi superiori et... F — 1. pose BC — 2. BC, ha lasciato de A — 3. ma se A; niente, ma se il luogo incomprensibile della nat. BC — 4. dal moto BCE, da moti F — 5. BCDEF, *omesso in* A — 6. e sia speciale appresso del Figliolo BC, e sia speciale e proprio del figlio DEF — 7. maggior fallacità et più F — 8. incognite e uoler sapere il fine DE, ...i fini F — 9. della riconciliatione riceuta dalla Chiesa Santa, del tutto ingrato della Morte, in graue offesa di Dio DE — 10. et ABCF — 11. F *abbrevia*: ingrato et di nuouo in graue offesa d'Iddio et delle anime daua. C *dà anch'esso la variante* graue offesa, *ma tralascia solo* pericolo — 12. si suppone DE — 13. *in* B *a questo punto incomincia una larga lacuna, che si estende a* per lettere in contrario del Medesimo Inquisitore; *una lacuna è pure in* D *fra* testimoni contrarii *e* Resta adunque — 14. et conuinto A, è conuinto C; contrarii

se gl' huomini per dispositione de' corpi superiori si fanno ricchi ouero Poueri, sono appiccati ouero decapitati, | quantunque sien mossi et gouernati da' Corpi celesti più che da loro medesimi, come se gl'euenti degl' huomini et gl'accidenti futuri non tanto della Vita, ma [1] della Morte, ma ancora, *quel ch'è* [2] proprio d'Iddio, poter sapere i pensieri Humani et segreti de' Cuori, | che si potrebbe dire [3] questo supposto e quali *cose* si potrebbon fare essendo la uolontà libera [4] ouero ne seguirebbono certo nessuna nè in modo alcuno lo direbbe huomo di mente sana? Resta adunque più chiaro della Luce, secondo la fallace Pazzia di quest'Huomo, che tutte queste *cose* [5] procedono per corso naturale et che non || possono altrimenti [6], se già Iddio per assoluta sua potenza non mutasse l'ordine della Natura, et questa è quella potenza [7] d' Iddio, cioè assoluta, la quale conferma esserli restata, la qual suppositione non iscusa in cosa alcuna gl'errori predetti, nè si defendono simili errori per quello che dice d'hauer detto che le cose predette non procedono da necessità, ma *da* [8] dispositione, perchè induce necessità mentre dice: Io ti saperrò dire quello che tu pensi et quello che hai serrato nelle Mani [9], bianco ouero nero, oro o ferro, et altre *cose* [10] sopradette, *nelle* [11] quali in fatto si suppone quello che niega in Parole; nè ancora si scusa quando dice di credere che non sia contro alla Fede *che* [12] per scienza d' Astrologia possa pigliare [13] il tempo et il giorno per eleggere una Guerra, perchè sarebbe grossa, ignorante et uana [14], anzi più tosto heretica, openione et insana, come a pieno si può prouare et prouono assaissimi [15], inducendo la uerità Teologicha. Dice ancora [16] che il suo scritto predetto è stato corretto per il detto Inquisitore di Lombardia, il che non è uero nè uerisimile, anzi più tosto si troua *il* [17] contrario per lettere [18] in contrario del Medesimo Inquisitore, et dato che fusse corretto e *stesse* [19] come dice [20] di sopra ⟨che⟩ un altro non corretto ne tenne et lo mostrò et di quello

et dato EF — 1. e C, ma anco ..... et ancora E — 2. qualche A C, quel che EF — 3. dire quali cose sappino che opererebbe questo supposto CEF — 4. libera, certo ne seguirebbe nessuna F — 5. CDEF, *omesso in* A — 6. altrimenti fare, se C, ... stare, se DEF — 7. potentia, la quale DE; potenza d'Iddio, la quale F — 8. CDEF, *omesso in* A — 9. mani o Oro o ferro DEF — 10. CDEF, *omesso in* A — 11. delle A, alle C, le E — 12. CDE, *omesso in* A; Fede sapere per uia d'astrologia il tempo et il giorno F — 13. sapere DE — 14. et uana oppenione, come appieno si può DE; F *omette solo* et insana — 15. assaissimi Dottori F — 16. Ancora disse e confessò che il suo Libretto è stato DE — 17. CDEF, in A — 18. per lettere del medesimo CDEF — 19. BCDEF, sta A — 20. come

alcuna uolta se n'è seruito, nel che sarebbe peccato maggiore (1), nè lo difende quello (c. 8 *r*) che è scritto nella fine di detto Libro [1] che, se messe fussero alcune cose non ben dette, si sopponeua [2] alla Correttione della Santa Madre Chiesa (2) et perchè nel medesimo scritto si sono ritrouate Heresie manifeste, appresso di lui [3] et dopo che aiurò ogni Heresia, *e* perchè basta che egli habbi ingannato una uolta la Chiesa [4] et perchè simile protestatione è diretto contrario al fatto ⟨la quale⟩ [5] non alleggerisce, ma piuttosto aggraua il protestante.

§ 18 — Laonde (3) noi Inquisitore predetto, non uolendo, sì come non possiamo nè deuiamo, passare a occhi chiusi tali cose et tant*o* inaudito [6] dispregio dell'Eterna Memoria [7] e lesione della fede Ortodossa per l'istesso Maestro delli Errori [8] attentat*o* [9], uiste et con diligenza considerate la sentenza, data per il predetto frate Lamberto Inquisitore di Lombardia, con l'auueratione [10] che ne fece *la* penitenza che riceuette, delle quali cose, come se fussero fauole finte et ⟨di⟩ [11] cose che non se ne douesse tener conto, dice non se ne ricordare, il giorno essendo assai [12] notabile et *come* di un suo fatto di poco seguito, et uiste l'altre

dice, un altro DEF — 1. libro, perchè basta che egli DE — 2. suppone F — 3. appresso di lui. Basta F — 4. la Chiesa Santa e perchè... E; la Chiesa. Laonde F — 5. *omesso in* DE.

6. DE, tante in audito A, tante in auido (*sic*) C — 7. memoria, della fede DEF — 8. per lo stesso mro degl'errori commessi. Attentata, uista e DE; del medesimo maestro Cecco commesse. Antentata (*sic*) Vista et F — 9. attentate A — 10. con la iuratione fatta per lo stesso mro Cecco, quali cose come se fussero D; con la iurazione che ne prese penitenza, le quali cose come se... E; con la iurazione che ne fece penitenza, delle quali cose come se... F — 11. *omesso in* DEF — 12. assai più E

---

(1) Il Villani (loc. cit.) raccoglie a questo proposito una notizia, che non ci è del tutto inutile: " Il quale suo libello in Bologna riprovato e ammonito per lo 'nquisitore che non lo usasse, gli fu opposto che l'usava in Firenze, la qual cosa si dice che mai non confessò, ma contradisse alla sua sentenzia che, poi ne fu ammonito in Bologna, mai non lo usò ".

(2) Cfr. *ed. cit.* c. 26 *r*: " Si in hoc meo scripto et in omnibus aliis inueniuntur aliqua non bene dicta, ipsa omnia correctioni sacrosantae romanae ecclesiae et meipsum submitto. Qui me legit, intelligat et benedicat dominum, qui mihi tribuit intellectum, eo quod uetera transiuerunt et innouata sunt omnia ".

(3) Gui, *op. cit.*, loc. cit.: " Idcirco nos prefati inquisitores, de multorum bonorum ac peritorum in utroque iure et religiosorum virorum maturo consilio prehabito .. sedentes pro tribunali, die et loco presentibus ad audiendam diffinitivam sententiam eidem N. perhemptorie assignatis, dicimus et... ".

cose, che intorno alle predette habbiamo riceuute [1] dal Medesimo Inquisitore, uisti ancora i Testimoni et le Testimonianze per noi riceuute et formate contro di lui et le confessioni che ha fatte et il termine perentorio assegnatoli dopo che li fu esposto [2] il processo et dateli le difese di tutte quelle cose, *le quali* [3] gl'erono opposte, per dire, mostrare e fare quello che uolessi⟨no⟩ || o potessi in sua difesa, dentro al qual termine et ancora di poi non ha fatto difesa alcuna o [4] ha procurato di farla lui o [4] altri per lui, benignamente *ho* [5] lungo tempo [6] aspettato, anzi il giorno dopo il termine assegnatoli, in presenza del uenerabil [7] Padre et Signore Gio: predetto legato della sede Apostolica, Diacono et Cardinale legato della Toscana, et del Sig.r Boso eletto aretino et del Sig.r Filippo Cameriere di detto Legato et di molti altri quiui presenti, lette al medesimo maestro d' errori [8] la confessione et aiuratione [9] predette, egli per sua spontanea uolontà [10] *le* [11] confermò di nuouo essere uere; uisti ancora ogni [12] et qualsiuoglia atto additato in detta Causa et processo et non solo [13] tutti gli stessi atti, che i nomi de' testimoni contenuti *nel* [14] detto processo, pubblicati secondo il modo debito [15] et ordine aperti et per ordine dichiarati et dimostrati all'huomo religioso Signore Conte [16] d'Augubio, rettore della Chiesa di Santo Stefano della Diocesi d'Assisi, Vicario Generale et del Venerabil [17] Padre e s.re Monsignore Francesco, per gratia d'Iddio Vescouo fiorentino, et molte altre persone [18] prouide et honorate et Dottori di ll., chiamati per consultare se si doueua procedere a sententia contro al mro delli Errori [19] sì come contro al Relasso in Heresia abjurata, e *tenuto* [20] sopra le pre-

— 1. riscontrate BCDEF — 2. approuato C, aperto DEF — 3. CDEF, *omesso in* A — 4. nè... nè F — 5. DEF, 'o A, e BC — 6. DEF *lo omettono* — 7. del uenerabil Monsig.re Gio: [uanni E] Diacono Cardinale e Legato della Toscana e del Sig.re Filippo Caualiere di d.o Legato e molt'altri DE; del uenerabil padre Cardinale diacono e legato della Toscana et del sig. Bosoletto Aretino et del sig. Filippo Cameriere di detto Legato... F — 8. gl'errori DE — 9. e iuratione, egli DE — 10. per sua spontanea uolontà le confermò e di nuouo confessò esser uere C; spontaneamente confermò esser uere DE, ... le confessò essere uere F — 11. BCF, lo A — 12. ogn'atto e qualsiuoglia additato in Causa C; ogn'atto et attitato (*sic*) in detta causa F — 13. et non solo gl'atti, ma ancora i nomi F — 14. del A — 15. debito e ordine e per ordine dichiarati DF; debito et per ordine dichiarati E — 16. al Reuer.mo S. Conte DEF — 17. Venerabil Monsig.re DE — 18. persone honorate, tra quali [ancora F] ci sono interuenuti Dottori di ll. DEF — 19. contro al d.o mro degl'errori, sendo ricaduto nell'eresia abiurata. Visto ancora le soprad.e cose l' infrascritto DE... Visto le pred.e cose l' infrascritto F — 20. tacito A,

dette cose *con* [1] l' infrascritto consiglio ragionamento et tratta (c. 9 *r*) to di alcuni anzi assaissimi Religiosi lettori di sacra Teologia et altri tanto Clerici quanto laici Dottori nell'una e nell'altra Legge et hauuta insieme con noi deliberatione et consideratione [2] matura, inuocata la Gratia d'Iddio et dello Spirito Santo, sedendo " pro Tribunali „, seguitando la forma de' predetti Consigli, di consenso del R.do Huomo Arrigho di S.to Lupidio [3] Vicario [4] del Venerabil Padre et Sig.re Vescouo Fiorentino sopradetto a questo delegato per lui e in questa parte *a noi* [5] plenariamente commettendo,

[§ 19] — Pronunciamo [6] (1) in questi scritti il predetto m. Cecco Eretico [7] a sentire questa sen*ten*tia [8] (2) et constituto in nostra presenza di essere ricaduto nell'Heresia abiurata e di essere ⟨stato⟩ [9] Relasso e per questo douersi relassare al Giuditio seculare et lo relassiamo al [10] Nobil Soldato o Caualiere il Sig.re Iacopo da Brescia, Vicario Fiorentino di questo Ducato, presente et recipiente, che lo debba punire con debita conside-

tanto BC — 1. e AC — 2. deliberatione e consideratione deliberorono condennare alla Morte il d.° mro Cecco, come per la presente sententia si uede. Inuocata DE; considerazione et deliberazione deliberorno et deliberando condennorno il detto mro Cecco, come per la presente sentenza apresso si uede. Inuocata F — 3. di S. Sussidio BC, di S.to Lupido F — 4. Vescouo [e B] del Venerabil Padre e Sig.re Vescouo Fiorentino BC; Vicario del Venerabil Monsig.re Vescouo Fiorentino DE — 5. BCDEF, anzi A.

6. Pronunciamo, sententiamo e Dichiariamo per questa [nostra E] presente sententia il pred.° mro Cecco eretico, hauendo egli confessato e confermato in nra presenza d'essere ricaduto nell'Eresia DE — 7. eretico hauendo confessato et confermato in nra presenzia d'essere ricaduto nell'Eresia F — 8. BC, sentia (*sic*) A — 9. *omesso in* DE — 10. al Reuer.do huomo Arrigo Vicario fiorentino di questo peccato (*sic!*) presente e reci-

(1) Gui, *op. cit.* loc. cit: " dicimus et per nostram diffinitivam sententiam in hiis presentibus scriptis pronunciamus et declaramus ipsum N. esse relapsum in heresim a se in juditio abjuratam... idcirco eundem N. tanquam talem relinquimus brachio et juditio curie secularis... lata fuit hec sententia etc. „.

(2) *Cod. ricc. 673*, l. c: " eum haereticum pronuntiavit eumque reliquit saeculari iudicio requirendum Domino Jacobo de Brescia ducali vicario praesenti et recipienti, animadversione debita puniendum. Librum quoque eius in Astrologia latine scriptum et quendam alium vulgarem libellum Acerba nomine reprobavit et igni mandari decrevit omnesque, qui tales aut similes eius libros tenerent, excommunicavit „.

ratione; et di più il suo libretto e scritto superstitioso, Pazzo e Negromantico, fatto [1] dal detto Mro sopra la sfera, pieno di Heresia [2] falsità et inganni, et un certo altro libretto Vulgare Intitolato acerba [3], il nome del quale esplica benissimo il fatto, auuenga che non contenga in sè maturità o Dolcezza alcuna Catolica, ma ui habbiamo [4] trouato molte || acerbità Heretiche et principalmente quando include molte cose che si appartengono alle uirtù et costumi, che reduce ogni cosa alle stelle come in causa [5], et dannando i loro dogmi ouero dottrine et riprouandoli ⟨et⟩ [6] deliberiamo et comandiamo per sententia douersi abbruciare et all'Heretico [7] desiderando tagliare le uene della fronte [8] pestifera per qualsiuoglia meato deriuino, auuertiamo in Charità a tutte le persone di qualsiuoglia sesso o grado sieno, che haueranno i predetti libri o [9] uno di loro *ouero* [10] alcuno simile a quelli o alcuno di loro ouero alcun altro libretto o scrittura Astrologica fatta per il detto *Maestro Cecco* [11] ouero che sappia*no chi* [12] ne habbia, et quelli, che per l'auuenire ne hauranno o sapranno chi n'haurà, et *a loro* [13] per l'autorità che habbiamo, sotto pena di scomunica et altre spirituali [14] et temporali sentenze et pene constituente agl' Heretici, nelle quali uogliamo [15] che chi contraffarà *incorra* [16] ipso fatto et le quali adesso sententialmente pronunciamo contro di loro et [17] ciascheduno di essi, in questi scritti strettamente [18] comandiamo et imponghiamo che fra un giorno da il giorno, che haueranno

pienteDE; F *si accorda con* A, *però muta anch'esso* Ducato *in* peccato — 1. fatto sopra DEF — 2. d'eretica C — 3. intitolato acerbo BC; intitolato Acerba, nel quale habbiamo trouate molte acerbità: Oltre che riprouando tutti (oltre al riprouarli tutti E) d.i libri deliberiamo et [espressamente D] comandiamo per questa nra presente sententia douersi DE; intitolato Acerba: Riprouandoli, deliberiamo e comandiamo per questa nra sentenza douersi F — 4. habbino BC — 5. Cause BC — 6. *omesso in* BCF — 7. et all'Eretico tagliare le uene della [sua E] fronte pestifera e a suo tempo e luogo lo condanniamo alla Morte, come merita e comporta le sue scelleratagine commesse. Auertiamo DE; et all'Eretico tagliare le uene della fronte pestifera et di più lo condanniamo al fuoco, come merita e comporta la sua scelleratezza. Auuertiamo F — 8. fonte C — 9. libri o alcuno simile a quelli o scrittura Astrologica DEF — 10. C, o uno A — 11. BCDE, *omesso in* A; per mano del d.° Cecco F — 12. BCDEF, sappiamo che A — 13. BCF, alloro DE, allora A — 14. et altri spirituali et temporali et pene F — 15. *qui resta interrotto il ms.* E — 16. BCDF, morrà A — 17. contro di loro e strettamente (rettamente F) comandiamo che tra un giorno DF — 18. et espressamente BC —

hauuto notitia della presente sententia, li portino al Vescouo della Diocesi ouero[1] luogo ouero Inquisitore del luogo predetto, libri, libretti, scritture, et se n'ingegnino di riuelarli con effetto e (c. 10 *r*) che mai per tempo alcuno li[2] sopradetti o uero altri ritenghino appresso di loro questi libri e la dottrina di essi o sue scritture anzi più tosto Pazzie[3] e sciocchezze, gli legghino, gli studino et se ne seruino nelle squole ouero altroue direttamente o indirettamente in qualsiuoglia modo ouero gli alleghino et difendino gli stessi libri ouero il loro Autore dannato in fatti o in parole o in qualsiuoglia modo; et ancora dichiariamo per sententia che tutti i sua beni mobili et immobili, ragioni, crediti et attioni, che si appartenessino[4] a lui dal giorno del peccato commesso, posti in qualsiuoglia luogo, con qualsiuoglia nome, uocabolo o confino, essere confiscato[5] dalla ragione e quelle potersi pigliare, occupare, diuidere et distribuire liberamente secondo le ll. Canoniche.

[§ 20] — Detta sententia fu data, pronuntiata[6] e la pronuntiatione e la Relassatione *fu*[7] fatta per il detto Inquisitore sedente " pro tribunali „ nel Coro della Chiesa de'Padri Minori di Fiorenza, presente il detto Sig.re Jacopo Vicario et suoi assessori, soldati et famiglia *riceuenti*[8] il detto Mro Cecco, dinanzi a una moltitudine[9] quiui ragunata di Clero et Popolo, sotto gl'Anni dell' Incarnatione del Signore M CCC xxvij[10], Indictione xma, il dì xv[11] di settembre (1), presente[12] il d.o Cecco relassato e presenti *i*[13] Testimoni[14]: Bernardo Dicci[15], Compagno dell'Inquisitore — Ser Antonio Graui[16] — Ser Lotto da S.ta Maria

1. o uero all' Inquisitore pred.o e reuelarli con effetto DF — 2. alcuno li ritenghino appresso di loro o la dottrina di essi e ancora dichiariamo per sententia DF — 3. praue Pazzie BC — 4. s'appartenghono F — 5. essere confiscati e quelli potersi D; essere confiscato dalla Religione et quello potersi F.

6. e pronuntiata per il d.o Inquisitore DF — 7. BC, *omesso in* A — 8. BCD, riscienti A, riceuette F — 9. a una moltitudine di Gente quiui raghunata sotto gli anni F — 10. 1328 D — 11. 20 BC, 17 D; F *si accorda con* A — 12. presente gl'infrascritti testimoni F — 13. CD, *omesso in* A — 14. i testimoni qui sotto contenuti D — 15. Ducci BC, de' Ricci DF — 16. Graci B, Groli C; DF *si accordano con* A —

(1) Cfr. *cod. ricc. 673*, l. c.: " ...citatoque magistro Cecho et praesente in choro Ecclesiae fratrum minorum de Florentia, anno 1327, indictione X, die XV mensis decembris (*sic*) „, ma il *decembris* è qui dovuto ad una ripetizione distratta del copista. Il Villani (loc. cit.) dà come data dell'esecuzione il 16 settembre 1327.

Nouella [1] — Borghino di Mro Chiarito da Prato B. — Banco Ducci — Johanni serafini — Neri Giouannini [2] — Manauello [3] di Jacopo (1). Familiari [4] e seruitori dell'Uffitio dell'Inquisitore et molti altri nel medesimo Giorno.

[§ 21] — Il sopradetto Sig.re Vicario *im*mediatamente [5] et senza dilatione mandando [6] per il Capitano et sua famiglia il predetto Mro al luogo della Giustitia, dinanzi a una moltitudine grande ragunata di Popolo in quel luogo lo fece abbruciare, come richiedeuono i suoi errori [7], insino alla sua Morte Penale et a terrore et esempio di tutti gl' altri (2), come referirno d'hauere uisto con i proprii occhi [8] Ser uandi [9] dal borgo, Borghino di m. Chiarito da Prato, Manouello di Jacopo et Giouanni Serafini, familiari et seruitori dell'Uffitio, andando all' istesso luogo, come in fiorenza è publico et notorio ⟨et⟩ [10] per l'euidenza del fatto manifesto [11].

1. nuoua DF — 2. Giouanni F — 3. Manuello BC, Manouello DF — 4. Familiari, seruitori del S.to Ufitio e molt'altri. D; F *omette senz'altro questa frase.*

5. BCDF, mediatamente A — 6. mandò per il Capitano e sua famiglia e al luogo della Giustitia dinanzi a una moltitudine grande di Popolo ragunato fece impiccare il d.o mro Cecco, come richiedeuono D; mandò per il capitano e sua famiglia et al luogho della Giustizia lo fece condurre dinanzi a una gran moltitudine di popolo quiui raghunato lo fece abbruciare, come richiedeuono F — 7. errori, a esempio e terrore di tutti gl'altri D — 8. occhi i già nominati testimoni, come in Fiorenza D; occhi i predetti testimoni, come in Fiorenza F — 9. Landi BC — 10. *omesso in* DF — 11. D *aggiunge in calce:* Copia del'originale proprio.

---

(1) Per l'identificazione di questo nome cfr. R. Davidsohn, *Un libro di entrate e spese dell'inquisitore fiorentino* (1322-1329) in " Archivio storico italiano ", serie V, to. XXVII (1901), pp. 346-55.

(2) *Cod. ricc. 673*: " Eodem die supradictus vicarius indilate transmittens per militem et familiam suam magistrum Cechum coram populi multitudine congregata cremari fecit ad poenalem mortem ipsius et exemplum aliorum ".

L'Accademico Segretario
Rodolfo Renier.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 17 Giugno 1906.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Salvadori, Direttore della Classe, Jadanza, Naccari, Fileti, Spezia, Grassi, Foà, Guidi, Fusari, Somigliana, Segre, Morera, Guareschi, Peano, Parona, Mattirolo e Camerano, Segretario.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Il Presidente comunica la lettera d'invito del Comitato dell'Università di Genova per le onoranze al Prof. Arturo Issel in occasione del suo 40° anno di insegnamento universitario. La scheda verrà depositata in Segreteria a disposizione dei Soci.

Vengono presentate per l' inserzione negli *Atti* i lavori seguenti:

1° Dott. Piccinini e Delpiano: *Sulle cianacetilmonocloroaniline e corrispondenti acidi ossammici*, dal Socio Guareschi;

2° Dott. Galeazzo Piccinini: *Sopra un nuovo acido della serie tetraidropiridinica*, dal Socio Guareschi;

3° Dott. Silvio Zublena: *Trasformazioni del sale di chinina dell'isobutildicianglutaconimide*, dal Socio Guareschi;

4° Dott. Prof. A. Amerio: *Sul potere emissivo del carbone*, dal Socio Naccari;

5° G. B. Rizzo: *Sopra il calcolo della profondità degli ipocentri nei movimenti sismici*, dal Socio Naccari;

6° Dott. G. Piolti: *Sulla Breunnerite di Avigliana*, dal Socio Spezia;

7° *Sopra alcune formole fondamentali della dinamica dei mezzi isotropi*, nota 2ª del Socio Somigliana;

8° Dott. E. Pascal: *Sopra una proprietà dei determinanti Wronskiani*, dal Socio Peano;

9° A. Padoa: *Che cosa è una relazione?*, dal Socio Peano;

10° Dott. Mario Chiò: *Il sangue dell'Urang-utan è più affine al sangue dell'uomo che non a quello delle scimmie non antropoidi*, dal Socio Mosso;

11° Dott. G. Nobili: *Nuovi Bopiridi*, dal Socio Camerano.

Il Socio Segre, anche a nome del Socio Somigliana, legge la relazione intorno alla Memoria del Prof. Ugo Amaldi: *Sui gruppi continui infiniti di trasformazioni di contatto dello spazio.* La relazione favorevole è approvata all'unanimità e con votazione segreta la Classe approva la stampa nei volumi delle *Memorie* del lavoro del Prof. Amaldi.

Il Socio Naccari, anche a nome del Socio Somigliana, legge la relazione intorno al lavoro del Dott. Ottolenghi: *Sulla conduttività termica e sul calore specifico dei tessuti di lana e di cotone.* La relazione favorevole è approvata e la Classe con votazione segreta approva la stampa del lavoro del Dott. Ottolenghi nei volumi delle *Memorie.*

Il Socio Naccari, a nome anche del Socio Jadanza, legge la relazione sulla Memoria del Prof. Rizzo: *Sulla velocità di propagazione delle onde sismiche nel terremoto della Calabria del giorno 8 settembre 1905.* La relazione favorevole è approvata dalla Classe, la quale approva pure con votazione segreta la stampa del lavoro del Prof. Rizzo nel volume delle *Memorie.*

Il Socio Guareschi presenta per l'inserzione nelle *Memorie* un suo lavoro intitolato: *Acidi mono e bialchilcianvinilacetici.* La Classe con votazione segreta approva all'unanimità la stampa di questo lavoro nei volumi delle *Memorie.*

LETTURE

Sulle cianacetilmonocloroaniline e corrispondenti acidi ossammici (1).

Nota dei Dottori G. PICCININI e A. DELPIANO.

Si sa che, mentre l'etere acetico non reagisce coll'anilina per formare l'acetanilide, dall'etere cianacetico si potè (2) per azione del calore preparare la cianacetilanilina.

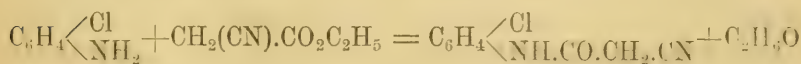
È ovvio anche dire che il comportamento diverso dei due eteri è dovuto alla presenza del gruppo — CN, che comunica all'etere cianacetico un carattere elettronegativo più spiccato.

Tuttavia siccome si era già notato che l'etere cianacetico reagisce sull'anilina in modo meno rapido e più imperfetto dell'acido acetico, riusciva interessante studiare quali dovevano essere le condizioni necessarie per far reagire l'etere cianacetico con le tre monocloroaniline, nelle quali la presenza del cloro nel nucleo ha per effetto di diminuire ancora la basicità dell'anilina.

Da ciò lo scopo di questo lavoro.

Notiamo fino d'ora che le tre cloroaniline reagiscono solamente a temperatura più elevata, di quello che l'anilina; e che nella reazione, a differenza di quanto accade per questa ultima, non si formano mai le *malondianilidi*, ma solamente le cianacetilcloroaniline.

La reazione generale è espressa da:

$$C_6H_4\left\langle\begin{matrix}Cl\\NH_2\end{matrix}\right. + CH_2(CN).CO_2C_2H_5 = C_6H_4\left\langle\begin{matrix}Cl\\NH.CO.CH_2.CN\end{matrix}\right. + C_2H_6O$$

(1) La parte I di questo lavoro ha servito nel 1905 al signor Delpiano come tesi di Laurea in Chimica e Farmacia.

(2) QUENDA E., " Atti R. Acc. delle Scienze Torino ", Vol. XXVII (1891).

Uno di noi ha preparato poi da questi cianacetilcomposti per ossidazione con permanganato di potassio i corrispondenti tre acidi clorofenilossammici, che non erano ancor noti.

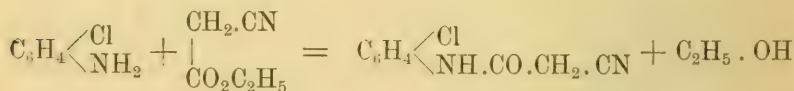
I. — Preparazione delle 3 cianacetil-cloroaniline.

Cianacetil-m-cloroanilina. $C_6H_4\langle{}^{Cl}_{NH . CO . CH_2 . CN}\ {}^{(1)}_{(3)}$. La meta-cloroanilina adoprata aveva il punto di ebollizione 231°-232°.

Gr. 12,7 di m-cloroanilina (1 mol.) mescolati con gr. 11,3 di etere cianacetico (1 mol.) sono scaldati in un palloncino a bagno d'olio a 195°-190° per circa 8 ore. Alla tubulatura laterale del palloncino è adattata una piccola allunga, che è collegata con un matraccino collettore.

Dopo qualche tempo la miscela si fa rossastra e distilla contemporaneamente dell'alcool.

Il riscaldamento è interrotto quando il peso dell'alcool distillato si mantiene costante. Alla fine dell'operazione questo distillato pesa gr. 3,17 invece di gr. 4,6, che sarebbe il teorico secondo l'equazione:

$$C_6H_4\langle{}^{Cl}_{NH_2} + \begin{matrix} CH_2.CN \\ | \\ CO_2C_2H_5 \end{matrix} = C_6H_4\langle{}^{Cl}_{NH.CO.CH_2.CN} + C_2H_5 . OH$$

Abbiamo osservato, che, se si spinge il riscaldamento per un tempo maggiore, il prodotto di condensazione è brunastro e si purifica con maggior difficoltà, cosicchè il vantaggio d'avere un rendimento un po' maggiore in prodotto greggio si deve poi ripagare con una fatica molto maggiore nella purificazione.

Quando la miscela reagente si raffredda, si rapprende in massa bruna cristallina, che lavata con poco alcool a 60 %, filtrata alla pompa e seccata all'aria pesa circa gr. 15.

Si ricristallizza il prodotto dall'alcool a 30-40 %, decolorandolo con carbone animale.

Si ha infine un prodotto fondente a 142° (corr.) e che, per riscaldamento oltre il punto di fusione, si colora e si scompone con schiumeggiamento. La sostanza è anidra.

All'analisi la sostanza ben secca diede:

I. Gr. 0,0896 diedero gr. 0,1825 CO_2 e gr. 0,0322 H_2O
II. Gr. 0,1466 „ cm^3 18,2 N a 742 mm. e a 12°,5
III. Gr. 0,5675 „ gr. 0,1025 di Cl determinato col metodo Piria.

	trovato			calcolato per $C_6H_4\langle^{Cl}_{NH.COCH_2CN}$
	I	II	III	
C %	55,5	—	—	55,49
H „	3,98	—	—	3,63
N „	—	14,35	—	14,42
Cl „	—	—	18,06	18,22

È cristallizzato in pagliette bianche e aventi uno splendore madreperlaceo.

Fonde costantemente a 142° e oltre il punto di fusione si decompone con svolgimento di gas alcalini.

È solubilissima in alcool concentrato, e in acetone; poco solubile in etere e benzene freddo.

Si scioglie pochissimo in acqua a temperatura ordinaria. La determinazione della solubilità fatta coll'apparecchio Pawlewski diede:

Temp. 17°
Soluzione gr. 13,5596 Residuo a 100° gr. 0,0062
1 parte si scioglie quindi in 2186 p. di acqua a 17°.

Molto facilmente è idrolizzata per azione degli alcali anche diluiti e anche per lunga ebollizione con acqua.

Cianacetil orto-cloroanilina $C_6H_4\langle^{Cl\ (1)}_{NH-COCH_2CN\ (2)}$.

L'o-cloroanilina usata bolliva a 207°.

La condensazione coll'etere cianacetico si effettua nello stesso apparecchietto e usando le medesime proporzioni che precedentemente: senonchè, siccome l'o-cloroanilina bolle a temperatura più bassa, abbiamo prolungato la durata del riscaldamento (14 ore) e mantenuta la temperatura a 180° 185°.

Il rendimento in prodotto greggio (gr. 13) è un poco minore che nel caso precedente.

La sostanza ricristallizzata dall'alcool al 40 % si presenta in piccoli prismi incolori o in aghi sottili, setacei, che sono anidri e che fondono costantemente a 125°.

All'analisi diede:

I. Gr. 0,1201 = cm.³ 15,2 di N a 741 mm. e 18°
II. Gr. 0,5331 diedero gr. 0,0963 di Cl

	trovato		calcolato
	I	II	
N %	14,47	—	14,42
Cl „	—	18,06	18,22

È solubilissima in alcool ed acetone, assai meno in etere e benzene.

La solubilità in acqua, determinata coll'apparecchio Pawlewski diede:

Temp. 17°
Soluzione gr. 13,44 Residuo a 100° = gr. 0,0132
1 p. si scioglie in p. 1017 di acqua a 17°.

Nel resto si comporta analogamente all'isomero precedente.

Cianacetil-p-cloroanilina $C_6H_4\begin{matrix}\diagup Cl \quad\quad\quad\quad\quad\quad (1) \\ \diagdown NH\,.\,COCH_2CN \;(4)\end{matrix}$. La p-cloroanilina adoperata fondeva a 70°-71°.

La condensazione si fa nelle stesse condizioni di esperienza e usando le medesime proporzioni, come abbiamo accennato per i casi precedenti. Qui il riscaldamento può essere spinto senza alcun timore sino a 195°-200° e la condensazione si effettua in 5 ore.

Da gr. 11,3 di etere cianacetico e gr. 12,7 di p.-cloroanilina ottenemmo gr. 3,92 di alcool distillato e gr. 16 di prodotto greggio lavato e asciugato all'aria.

La p. cloro-cianacetilanilina si purifica cristallizzandola dall'alcool al 50 %, essendo essa poco solubile in alcool più diluito.

È cristallizzata in prismi lucenti. sottili, incolori che intersecandosi costituiscono delle larghe piastre con riflessi argentini.

È anidra e fonde costantemente a 204°.

All'analisi diede:

I. Gr. 0,1095 = cm^3 13,8 di N a 736 mm. e 17°

N % trovato 14,19 Calcolato 14,42

Solubilissima in alcool concentrato e in acetone, poco in etere e benzene a freddo.

Nell'acqua si scioglie pochissimo a freddo, un poco più all'ebollizione, ma con probabile parziale decomposizione, perchè la soluzione si colora in giallo.

La determinazione della solubilità coll'apparecchio Pawlewski diede:

Temp. 16°,6.
Acqua gr. 17,4564 Residuo a 100° gr. 0,0026
1 parte si scioglie in 6714 p. di acqua a 16°,6.

II. — Ossidazione delle cianacetilcloroaniline.

Generalmente l'ossidazione delle cianacetilamine sia aromatiche che grasse avviene molto facilmente e già a freddo con sviluppo di calore.

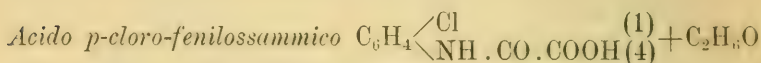
Le tre cianacetil-cloroaniline descritte presentano una resistenza più o meno grande all'ossidazione: così mentre la cianacetil-m-cloroanilina si ossida abbastanza prontamente a 60°-70°, gli isomeri *para-* e *orto-* richiedono un riscaldamento a 100° protratto per 1-2 ore, a seconda della quantità di sostanza presente, perchè l'ossidazione sia completa.

In ogni caso tuttavia, adoprando un forte eccesso di permanganato potassico, si ottengono gli acidi clorofenilossammici con rendimento quasi quantitativo.

La reazione, secondo cui si formano questi acidi, è espressa dall'equazione:

$$C_6H_4\left\langle\begin{matrix}Cl\\NH.CO.CH_2.CN\end{matrix}\right. + O_2 = C_6H_4\left\langle\begin{matrix}Cl\\NH.CO.COOH\end{matrix}\right. + HCN$$

In nessuna delle ossidazioni si trovò insieme all'acido ossammico la clorofenil-ossammide, mentre in molti altri casi (ossidazione della dicianacetiletilendiammina (1) ecc.) queste ossammidi costituiscono il prodotto secondario della reazione.

Acido p-cloro-fenilossammico $C_6H_4\left\langle\begin{array}{l}Cl \\ NH.CO.COOH\end{array}\right.\begin{array}{l}(1)\\(4)\end{array} + C_2H_6O$

Per prepararlo si sospendono in 100 cm³ di acqua gr. 6 di cianacetil-p-cloroanilina e agitando vi si aggiungono a piccole porzioni cm³ 450-500 di soluzione di permanganato di potassio al 3 %, cioè una quantità corrispondente circa a 4 at. di O per 1 mol. di sostanza.

La ossidazione a freddo è molto lenta e conviene agevolarla scaldando a b. m. bollente per circa 1 ora. Durante l'ossidazione si ha forte sviluppo di acido cianidrico.

Si decolora poi il permanganato in eccesso con poco acido solforoso. Si filtra all'ebollizione e si lava il biossido di manganese con acqua bollente.

Il liquido filtrato chiaro si evapora sino a volume di circa 100 cm³, e si raccoglie il sale potassico dell'acido p-cloro-fenilossammico, che si è separato per raffreddamento.

Da gr. 6 di cianacetil-p-cloroanilina si ottennero gr. 5 di sale potassico.

Il liquido alcalino filtrato, sbattuto con etere, non cede a questo che piccola quantità di sostanza resinosa bruna.

Dal liquido reso acido con acido solforico diluito si può ottenere per precipitazione e anche per estrazione con etere un'altra piccola quantità dell'acido ossammico.

Il sale di potassio dell'acido p-clorofenilossammico si purifica ricristallizzandolo dall'alcool al 70 %.

Per ottenerne l'acido ossammico, si scioglie il sale in acqua bollente e si tratta la soluzione con eccesso di acido solforico diluito.

L'acido, precipitato per raffreddamento, raccolto e asciutto tra carta all'aria fonde a 189°-190° con scomposizione.

Si può ricristallizzarlo sia dall'alcool assoluto che dall'alcool

---

(1) " Atti della R. Acc. delle Scienze Torino ", vol. XXVII (1892).

anche più diluito; in ogni caso sia dalle soluzioni in alcool assoluto, come dall'alcool anche a 70-80 % si ha in prismi incolori, che asciutti all'aria fondono costantemente a 190°-191°.

Stando all'aria i cristalli sfioriscono rapidamente, divenendo bianchi e opachi, e perdono l'alcool col quale cristallizzano.

La determinazione dell'alcool di cristallizzazione per questa ragione deve essere fatta appena l'acido è secco all'aria.

Infatti, in una prima determinazione trovai che gr. 1,7313 di acido in 15 giorni stando all'aria persero gr. 0,3060 cioè il 17,67 % in peso, mentre per 1 mol. di alcool di cristallizzazione si calcola 18,7 %.

In un altro campione, ricristallizzato dall'alcool assoluto, l'alcool fu determinato mediante riscaldamento in tubo Liebig a b. m. e raccogliendo l'alcool in un tubo ad **U**, mantenuto in ghiaccio e sale. Il distillato, che si mantiene liquido, brucia con fiamma azzurra e mostra essere alcool assoluto, perchè scioglie il benzene senza intorbidamento.

I. Gr. 1,6973 di acido persero a 100° in 3 ore gr. 0,312 di alcool.

	trovato	calcolato per $C_8H_6NO_3Cl+C_2H_6O$
C_2H_6O %	18,38	18,7

E l'acido asciutto a 100° diede all'analisi:

I. Gr. 0,1550 diedero cm³ 8,56 di N a 0° e 760 mm

II. „ 0,4166 „ gr. 0,298 di AgCl

III. „ 0,1916 sono neutralizzati da cm³ 9,65 di NaOH $\frac{N}{10}$ (indicatore fenolftaleina)

IV. „ 0,1400 dànno cm³ 8,14 di N a 0° e 760mm.

	trovato				calcolato per $C_8H_6NO_3Cl$
	I	II	III	IV	
N %	6,91	—	—	7,27	7,01
Cl	—	17,68	—	—	17,72
NaOH	—	—	20,14	—	20,05

L'acido è molto solubile in alcool concentrato; per ricristallizzarlo conviene adoperare l'alcool a 70-80 %; molto solubile in acetone, pochissimo in cloroformio e benzene.

Si scioglie pochissimo in acqua a freddo, un poco più all'ebollizione; la soluzione, satura a freddo, ha forte reazione acida e decompone i carbonati.

p-clorofenilossammato potassico $C_8H_5NO_3ClK$. Purissimo è in foglietto madreperlacee aventi lo stesso aspetto del benzoato o salicilato di sodio e anche della cianacetil-p-cloroanilina.

Il sale ricristallizzato dall'alcool a 70 % è anidro: anche scaldato a 120°-125° per varie ore rimane bianchissimo.

All'analisi ha dato:

I. Gr. 0,4112 diedero gr. 0,1484 di K_2SO_4
II. Gr. 0,3202 „ „ 0,1178 di K_2SO_4

	trovato		calcolato per $C_6H_4\langle{}^{Cl}_{NH.COCOOK}$
	I	II	
K %	16,20	16,52	16,47

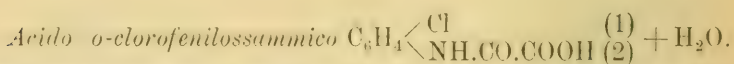
La soluzione acquosa, satura a freddo:

a) Col nitrato d'argento dà un abbondante precipitato bianco caseoso di sale argentico, poco solubile all'ebollizione e pochissimo alterabile, anche se bollito per qualche tempo con acqua.

b) Con cloruro di bario dà precipitato bianco solubile a caldo.

c) Con cloruro ferrico precipita il sale ferrico di color ranciato, insolubile anche in acqua bollente.

d) Con nitrato mercuroso e acetato di piombo si hanno i sali di piombo o mercurio bianchi voluminosi, poco solubili anche all'ebollizione.

e) Non precipita colle soluzioni sature fredde di solfato di chinina e di cinconina.

Acido o-clorofenilossammico $C_6H_4\langle{}^{Cl\ (1)}_{NH.CO.COOH\ (2)} + H_2O$. L'ossidazione della cianacetil-o-cloroanilina si effettua più rapidamente che per l'isomero *para-*.

A gr. 5 di cianacetil-o-cloroanilina sospesi in 100 cm³ di

acqua si aggiungono in porzioni di 100 cm^3 alla volta, 600 cm^3 di $KMnO_4$ al 2,3 % cioè in totale gr. 14 circa di $KMnO_4$.

Si scalda a b. m. verso 70°-80° mantenendo il pallone, dove si fa la reazione, per circa 1 ora a questa temperatura. Si svolge grande quantità di acido cianidrico.

Si decolora l'eccesso di permanganato potassico con acido solforoso. Si filtra all'ebollizione e si lava il biossido di manganese con acqua bollente.

Concentrando il liquido primitivo sino a piccolo volume per raffreddamento si depone il sale potassico dell'acido o-cloro-fenil-ossammico. Da gr. 5 di o-clorocianacetilanilina si ottennero gr. 4,8 di detto sale.

La trasformazione della cianacetil-o-cloroanilina in acido ossammico è dunque quasi quantitativa.

Trattando con acido solforico diluito e in eccesso la soluzione acquosa calda del sale potassico puro, e lasciando raffreddare, si separa l'acido o-clorofenilossammico in bellissimi aghi. Si purifica questo acido ricristallizzandolo dall'alcool a 70 %. Secco all'aria e puro esso fonde a 93°-95° in un liquido incoloro, che, scaldato ulteriormente, sviluppa bollicine di gas verso 105°-110°.

Cristallizza con acqua di cristallizzazione, ma non è efflorescente.

All'analisi diede:

I. Gr. 0,1450 di acido secco all'aria diedero cm^3 7,71 di N a 0° e 760^{mm}.

II. Gr. 1,0812 scaldati 2 ore a 75°-80° persero gr. 0,0894 di acqua.

	trovato		calcolato per $C_6H_4\langle^{Cl}_{NH.CO.COOH} + H_2O$
	I	II	
H_2O %	—	8,30	8,27
N „	6,65	—	6,43

L'acido asciutto a 75°-80° diede all'analisi:

I. Gr. 0,1302 diedero cm^3 7,2 di N a 0° e 760^{mm}.

II. Gr. 0,2842 richiesero cm^3 14,3 di NaOH $\frac{N}{10}$ per la neutralizzazione (indicat. fenolftaleina).

III. Gr. 0,1020 diedero cm^3 6,4 di N a 16° e 744^{mm}.

	trovato			calcolato per $C_6H_4<^{Cl}_{NH.CO.COOH}$
	I	II	III	
N %	6,92	—	7,24	7,01
NaOH	—	20,12	—	20,05

Si comporta dunque anch'esso come acido monobasico.

Il punto di fusione dell'acido anidro è 136°-137°, mentre si è detto che l'acido con 1 mol. di acqua di cristallizzazione fonde a 93°-95°.

È in aghi prismatici incolori, lunghi, bellissimi, che si sciolgono molto bene in alcool a 95 % e in acetone e sono invece poco solubili in acqua a freddo.

La soluzione acquosa ha forte reazione acida e decompone i carbonati.

o-clorofenilossammato potassico. $C_6H_4<^{Cl\ (1).}_{NH\ .\ CO\ .\ COOK\ .\ (2).}$ Molto solubile in acqua bollente, e assai meno nella fredda. Dall'acqua non si ha ben cristallizzato; per ottenerlo puro conviene cristallizzarlo dall'alcool a 70 % e decolorare con un po' di carbone animale.

È cristallizzato in aghi piccolissimi riuniti a rosetta.

È anidro.

All'analisi ha dato:

I. Gr. 0,4706 di sale secco a 120° diedero gr. 0,1548 K_2SO_4

II. Gr. 0,3338 " " " " gr. 0,1316 K_2SO_4

	trovato		calcolato per $C_8H_5NO_3ClK$
	I	II	
K %	16,52	16,24	16,47

La sua soluzione acquosa satura a freddo precipita con i sali di argento, calcio, bario, mercurosi, piombo, rame e ferrici.

I sali di argento, bario, calcio, rame sono solubili all'ebollizione in acqua.

Acido m-clorofenilossammico. $C_6H_4\langle{}^{Cl}_{NH.CO.COOH}\ {}^{(1)}_{(3)} + 1\,{}^1/_2 H_2O$

L'ossidazione della cianacetil-m-cloroanilina avviene più rapidamente che per i composti *para-* e *orto-*.

A gr. 5 di sostanza sciolti e sospesi in 100 cm^3 di acqua a 60°-70° si aggiungono in varie riprese 500 cm^3 di soluzione di permanganato al 3 %.

Si svolge anche qui molto acido cianidrico.

Il liquido si scolora abbastanza prontamente; per completare la reazione si scalda indi a b. m. bollente per circa $^1/_4$ di ora. Si decolora l'eccesso di permanganato con acido solforoso.

Il liquido bollente filtrato unito ai liquidi di lavaggio è evaporato a b. m. sino a piccolo volume. Per raffreddamento si depone il sale potassico dell'acido-m-clorofenilossammico in forma di una massa giallastra cristallina, che è purificata per cristallizzazione dall'alcool a 70 % e decolorazione con carbone animale.

Il sale potassico puro sciolto in acqua a 70°-80° è decomposto con acido solforico al 30 %; per raffreddamento cristallizza l'acido ossammico in aghi incolori setacei assai belli e lunghi.

Da gr. 5 di cianacetil-m-cloroanilina si ebbero gr. 4,4 di sale potassico e gr. 3,5 di acido puro.

L'acido è ricristallizzato dall'acqua bollente, nella quale si scioglie assai bene.

Si ha così in aghi splendidi, che contengono acqua di cristallizzazione e asciutti all'aria fondono schiumeggiando fra 90°-100°.

L'acido anidro fonde invece a 144°-145° in un liquido limpido; scaldato a lungo a questa temperatura si scompone schiumeggiando.

All'analisi l'acido idrato diede:

I. Gr. 0,1632 di acido asciutto all'aria diedero cm^3 7,79 di N a 0° e 760^{mm}

II. Gr. 0,7716 di sostanza secca all'aria per riscaldamento a 80°-85° (2 ore) persero gr. 0,0930

	trovato		calcolato per $C_8H_6O_3NCl + 1\,{}^1/_2 H_2O$
	I	II	
N %	5,96	—	6,18
H_2O „	—	12,05	11,92

E l'acido anidro:

I. Gr. 0,1356 diedero cm^3 7,69 N a 0° e 760^{mm}

II. Gr. 0,1092 sono neutralizzati da cm^3 5,6 di NaOH $\frac{N}{10}$ (indicatore fenolftaleina).

	trovato		calcolato per $C_8H_6O_3NCl$
	I	II	
N %	7,09	—	7,01
NaOH „	—	20,51	20,05

È solubile molto in alcool a 95 % e anche in alcool più diluito, in acetone; poco solubile in benzene e cloroformio.

Si scioglie nell'acqua bollente molto più dei suoi isomeri-acidi o- e para-clorofenilossammici.

Anche in questo caso si nota una forte differenza nel punto di fusione dell'acido contenente acqua di cristallizzazione e dell'acido anidro.

Sale potassico. $C_6H_4\langle{}^{Cl\ (1)}_{NH\,.\,CO\,.\,COOK\ (3)}$. Si ha in cristalli fogliacei a splendore madreperlaceo per cristallizzazione dall'alcool a 70 %. Il sale è anidro.

All'analisi diede:

Gr. 0,4068 di sale secco a 100° diedero gr. 0,1510 di K_2SO_4.

	trovato	calcolato
K %	16,61	16,47

Dallo studio fatto si possono trarre le conclusioni seguenti:

1° Per la condensazione delle 3 mono-cloro-aniline con l'etere cianacetico occorre in genere una temperatura più elevata che per la preparazione della cianacetilanilina.

Infatti, mentre questa si ottiene scaldando a 160° l'etere con anilina, in nessuno dei tre casi studiati potemmo notare distillazione di alcool e formazione della cianacetilanilina a tale temperatura.

2° Le esperienze dimostrano che la reagibilità va decrescendo dal derivato *para-* al *meta-* e all'*orto-* e questo dimostra che il carattere basico delle tre monocloroaniline va diminuendo nello stesso ordine.

Ciò del resto si poteva prevedere e concorda colla considerazione generale che l'influenza negativa degli atomi di cloro sull' NH_2 deve attenuarsi via via che il cloro si allontana dal gruppo aminico nella molecola.

3° Nelle condensazioni non si verificò per nessun caso la formazione delle *malondianilidi* corrispondenti. Unico prodotto della reazione è sempre la cianacetil-cloro-anilina.

4° I punti di fusione delle tre cianacetilcloroaniline e degli acidi clorofenilossammici aumentano nello stesso senso dall'*orto*- al *meta*- al *para*- e costituiscono una eccezione piuttosto rara alla regola generale che vale per i punti di fusione dei derivati bisostituiti del benzene, poichè in questi sempre il derivato *meta*- ha un punto di fusione più basso del derivato *orto*-:

	Orto	Meta	Para
Cloroanilina	P.E. 207°	liquido	P.F. -14°
Cianacetilcloroanilina	P.F. 125°	P.F. 142°	P.F. 204°
Ac. clorofenilossammico (anidro)	P.F. 136°-137°	P.F. 144°-145°	P.F. 190°-191°

5° Che inoltre diminuisce per le cianacetilcloroaniline la solubilità in acqua col crescere del punto di fusione:

Cianacetilcloroaniline	Orto	Meta	Para
Punto di fusione	125°	142°	204°
Solubilità in acqua	1 p. in 1017 p. di acqua a 17°	1 p. in 2186 p. di acqua a 17°	1 p. in 6714 p. di acqua a 16°,6

6° Le tre cianacetilcloroaniline mostrano anche una certa regolarità rispetto all'azione del permanganato: l'ossidabilità va crescendo dal composto -*para*- all'*orto*- al *meta*-.

Tuttavia quando si adopri una quantità forte di permanganato (4 at. di O per 1 mol. di sostanza) l'ossidazione dà gli acidi ossammici corrispondenti con rendimento quasi quantitativo.

7° Nell'ossidazione delle cianacetilcloroaniline (nelle condizioni suesposte) non si formano mai delle clorofenil-ossammidi.

8° Dei tre acidi clorofenilossammici, l'*orto-* e il *meta-* che contengono acqua di cristallizzazione, mostrano un punto di fusione molto diverso se idrati o anidri conformemente a quanto avviene per molti altri casi.

9° Tutti e tre questi acidi hanno reazione acida forte in soluzione acquosa e si mostrano monobasici verso gli alcali caustici (indicatore fenolftaleina).

Infine ricordiamo che dati i rendimenti nella preparazione delle tre cloro-cianacetilaniline e nella successiva ossidazione di queste, questo metodo di ottenere gli acidi cloro-fenilossammici oltre a essere un eccellente metodo di formazione può essere bene utilizzato in pratica come metodo di preparazione.

Dobbiamo ricordare ancora che la reazione delle tre cloroaniline coll'etere cianacetico conferma la bontà del metodo proposto da Guareschi (1) per separare le aniline dalle vere amine aromatiche, perchè anche le tre cianacetilcloroaniline si formano solamente per azione di un prolungato riscaldamento.

Torino, Laboratorio di Chimica Farmaceutica e Tossicologica della R. Università, Giugno 1906.

(1) " Atti R. Acc. delle Scienze „, vol. XXVII.

Sopra un nuovo acido della serie tetraidropiridinica

(Acido n-metil-α-ossi-Δ^β-tetraidrolutidincarbonico).

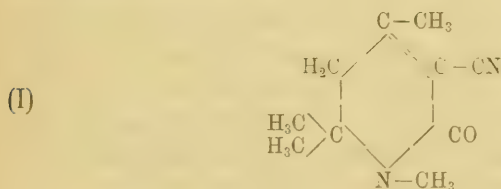
Nota del Dr. GALEAZZO PICCININI.

Nel corso di ricerche intorno alla ossidazione di alcuni composti tetra- ed esaidro-piridinici ho ottenuto un nuovo acido appartenente alla serie tetraidro-piridinica, e cioè un acido n-*metil-ossiΔ^β-tetraidrolutidin-carbonico* $C_9H_{13}NO_3$ per ossidazione dell'n-metilciantrimetilpirideone con permanganato potassico.

È questo il primo esempio di ossiacido della serie tetraidropiridinica, ed è nello stesso tempo il primo ed unico acido conosciuto dei possibili acidi tetraidrolutidincarbonici.

Considerando che la serie degli acidi tetraidropiridinici non è nota che per due rappresentanti, cioè l'acido *tetraidrocloropicolinico* di Ost (1) e l'*arecaidina* (2), la quale pur contenendo il carbossile, nel fatto è una sostanza a carattere neutro, ho creduto opportuno fare uno studio a parte e più completo del nuovo acido da me ottenuto.

Ossidando con $KMnO_4$ in soluzione neutra l'n-metilciantrimetilpirideone (I)

```
                C—CH3
               / \
         H2C /     \ C — CN
(I)         |       |
            |       |
  H3C \     |       |
  H3C / C \       / CO
            \   /
            N—CH3
```

già sino dal principio si svolge molto acido cianidrico.

Questo fatto notevole, comune, del resto, ai vari composti piridinici cianurati che io ho studiato, dimostra che il *nitrile* at-

(1) " J. pr. Ch. „, (2), *27*, pag. 283.

(2) JAHNS, " Ber. „, *21*, p. 3404; H. MEYER, M. *21*, pag. 927 e *23*, pag. 22.

taccato al nucleo si comporta nell'ossidazione press'a poco come il nitrile nelle *cianacetilamine* (1).

Il permanganato stacca il CN dalla catena e ossida uno dei metili della molecola senza intaccare il nucleo.

Nella reazione d'ossidazione si forma anche un composto $C_{10}H_{16}N_2O_4$ neutro, che descriverò in altro lavoro.

Preparazione dell'acido $C_9H_{13}NO_3$.

L'n-metilciantrimetilpirideone adoprato in queste ricerche aveva i caratteri di purezza richiesti (2) e fondeva a 143°,5.

In un pallone di un litro (munito di tappo a tre fori, per uno dei quali passa un imbuto a rubinetto contenente la soluzione di permanganato, mentre per gli altri due fori passano due tubi, uno di afflusso e l'altro di efflusso, comunicante con due boccie di lavaggio contenenti soda caustica purissima al 10 % e acido solforico diluito) si sciolgono gr. 5 di n-metilciantrimetilpirideone in 100-150 cm^3 di acqua bollente. Si lascia raffreddare indi la soluzione sino a 20-30° per avere una soluzione satura a detta temperatura; poi nella miscela si versa mediante l'imbuto a rubinetto il permanganato potassico al 3 %, a porzioni di 100 cm^3 alla volta. In totale si impiegano 300-350 cm^3 di permanganato (corrispondente a più di 3 at. di O per 1 mol. di sostanza) per 5 gr. di sostanza.

L'ossidazione ha luogo prontamente anche a freddo, e subito sino dal principio si svolge dell'acido cianidrico, come si può vedere introducendo nel matraccio una cartina di Schönbein.

Il liquido durante l'ossidazione si riscalda. Facendo passare una lenta corrente di aria attraverso all'apparecchio, si può raccogliere gran parte dell'acido cianidrico, che si forma, nella boccia contenente la soda caustica, nella quale fu sempre riconosciuto mediante le reazioni classiche caratteristiche.

Aggiunto tutto il permanganato si scalda a b. m. bollente, perchè si precipiti bene il biossido di manganese; si filtra e si

(1) “ Atti R. Accad. delle Scienze „, vol. 27.
(2) “ Atti R. Acc. delle Scienze Torino „, vol. 28 (1893).

lava bene con acqua bollente. I liquidi filtrati incolori sono neutralizzati con acido solforico diluito; indi si evaporano sino a piccolo volume, e separato il solfato di potassio insieme alla sostanza neutra $C_{10}H_{16}N_2O_4$ a cui ho già accennato, si sbatte più volte con etere la soluzione filtrata, sino a che l'etere non estrae più nulla.

Il liquido allora si rende acido con H_2SO_4 al 30 % per non diluire troppo la soluzione. Si lascia in riposo 12 ore. In tali condizioni si precipita una polvere cristallina generalmente già bianca.

Altra sostanza si può ricavare (impura di un poco di acido ossalico) estraendo con etere replicatamente il liquido filtrato acido.

Il rendimento in acido è di 33-35 % relativamente al n-metilciantrimetilpirideone impiegato.

Si può anche adoprare una quantità di permanganato corrispondente a 4-5 at. di O senza che il rendimento in acido $C_9H_{13}NO_3$ varii quasi affatto.

Acido n-*metil-ossitetraidro-lutidinmonocarbonico* $C_9H_{13}NO_3$. — L'acido quale si ottiene precipitato o estratto dall'etere, è già abbastanza puro e bianco e fonde così greggio tra 168° e 172°.

Dopo due o tre ricristallizzazioni dall'acqua bollente si ha in lunghi prismi striati, che ricordano un poco quelli dell'urea e del salnitro, incolori o solo leggermente colorati in roseo.

Le soluzioni, quanto più pure sono, tanto più facilmente si colorano in roseo, filtrando anche attraverso a carta Berzelius, perchè questa carta contiene traccie di ferro. La presenza di piccole quantità di ac. ossalico nel prodotto impuro fa sì che le soluzioni anche filtrando sieno incolore: le ragioni di ciò saranno spiegate in seguito.

Puro questo acido fonde a 174°-174°,5 (corr.).

Contrariamente alla maggior parte degli acidi piridinici, non contiene acqua di cristallizzazione.

L'analisi della sostanza, secca a 100°-120°, fatta su varî campioni, mi diede i seguenti risultati:

I Sostanza gr. 0,1890 = cm³ 11,46 N a 0° e 760 mm.
II „ „ 0,1530 = H_2O gr. 0,0998 ; CO_2 = gr. 0,3306
III „ „ 0,1524 = cm³ 9,31 di N a 0° e 760 mm.
IV „ „ 0,1232 = H_2O gr. 0,0802; CO_2 = gr. 0,267
V „ „ 0,1235 = cm³ 7,47 di N a 0° e 760 mm.
VI „ „ 0,1420 = H_2O gr. 0,0920; CO_2 = gr. 0,3078

		trovato					
		I	II	III	IV	V	VI
C	°/₀	—	58,93	—	59,10	—	591,1
H	„	—	7,24	—	7,23	—	7,19
N	„	7,57	—	7,59	—	7,57	—

numeri che corrispondono bene a quelli che si calcolano per la formula $C_9H_{13}NO_3$

C	°/₀	59,01
H	„	7,10
N	„	7,64

Ho determinato il peso melecolare di questo acido col metodo ebulliscopico (apparecchio Riiber), impiegando come solvente l'acetone (K = 16,7).

		I	II
Sostanza	gr.	0,7228	0,7445
Solvente	„	16,520	11,855
Concentrazione	„	4,37	6,28
P. E. Solv.		55°,23	55°,4
P. E. Soluz.		55°,61	55°,97
Δ	=	0°,38	0°,57

	trovato		calcolato per $C_9H_{13}NO_3$
	I	II	
Pm	192,3	184	183

Quest'acido si comporta come monobasico verso gli alcali caustici e i carbonati (indicatore tornasole o fenolftaleina):

I	gr. 0,1752	sono neutralizzati	da	9,42	cm^3	NaOH $\frac{N}{10}$
II	„ 0,7111	„	„	38,5	„	„ „
III	„ 0,7806	„	„	42,4	„	„ „

	trovato			calc. per 1 at. H sostituibile
	I	II	III	
NaOH %	22,07	21,65	21,72	21,85

Quindi tutti i dati analitici confermano trattarsi di un acido monobasico avente la composizione $C_9H_{13}NO_3$.

Proprietà. — È una sostanza molto ben cristallizzata, solubilissima in acqua bollente, molto meno alla temperatura ordinaria.

Molto solubile a caldo in alcool assoluto, acetone benzene, etere acetico; in acido acetico glaciale e cloroformio si scioglie prontamente anche a freddo. Non molto solubile in etere anidro, un poco più in etere acquoso. Insolubile o quasi in etere di petrolio.

La soluzione acquosa ha forte reazione acida al tornasole e al metilorange e decompone i carbonati.

È un acido abbastanza stabile al calore; infatti scaldandolo in tubo da saggio o anche in una stortina a bagno d'olio sino a 270° per circa 1 ora, non si decompone e sublima completamente inalterato.

Però se si riscalda la sostanza in un tubo Peligot, modificato in modo che i due tubi verticali sieno sostituiti da due serpentini e se tutto l'apparecchio è immerso nel bagno ad olio, cosicchè la sostanza sublimando dalla bolla deve attraversare prima tutto il serpentino lungo circa 1 metro e mantenuto a temperatura di 290°-300°, allora questo acido subisce una scomposizione pirogenica profonda.

Da varie esperienze fatte per verificare se nel riscaldamento questo acido svolgeva gas metano puro, come fa l'n-metilciantrimetilpirideone (1), risulta in media che da 1 gr. di acido

(1) Guareschi e Grande, " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", vol. XXXIV (1899).

mantenuto per 1 ora circa a 290°-300° nell'apparecchio descritto, si ottengono cm³ 25 di gas non assorbibile dalla potassa al 50 °/₀; e di questi 25 cm³, 22,5 circa sono formati da ossido di carbonio e soli 2,5 cm³ probabilmente da gas *metano*. La scomposizione è dunque molto più complessa e profonda che non per l'n-metilciantrimetilpirideone: del resto sebbene la scomposizione pirogenica a temperatura relativamente bassa con formazione di ossido di carbonio sia un po' strana, non reca meraviglia, perchè già Guareschi notò per composti analoghi, quali gli eteri *biidrocollididincarbonico* e *fenilbiidrolutidin-dicarbonico*, svolgimento di piccole quantità di ossido di carbonio per scomposizione pirogenica.

L'acido $C_9H_{13}NO_3$ resiste bene all'azione degli alcali e degli acidi anche bollenti.

Scaldato con potassa caustica al 10 o al 20 °/₀, anche per lunga ebollizione non si altera, mostrando un comportamento analogo all'*arecaidina* (1).

E ciò, messo in relazione con i concetti di Baeyer (2), di Aschan (3) e Buchner (4), sul modo di comportarsi degli acidi tetraidrogenati aromatici rispetto all'azione prolungata degli alcali concentrati e bollenti dimostra anche che il doppio legame si trova in posizione α- rispetto al carbossile.

Fuso cogli alcali l'acido si scompone annerendo.

Si scioglie negli acidi minerali concentrati a freddo senza tuttavia combinarvisi, come fa l'acido triossipicolinico.

In HCl (d = 1,18) si scioglie prontamente; la soluzione si fa un po' gialliccia per ebollizione, ma sia per evaporazione, come anche per diluizione, dà di nuovo l'acido $C_9H_{13}NO_3$ inalterato. Neppure un contatto prolungato (circa 1 mese) con acido cloridrico a 1,12 a freddo altera affatto l'acido, che si può riottenere colle medesime proprietà primitive.

In acido nitrico (d = 1,40) si scioglie, e scaldando legger-

(1) H. Meyer, M. 23, pag. 22.
(2) " Ann. „, *251*, pag. 268.
(3) B. 24, pag. 2617.
(4) B. 31, pag. 2242, 2249.

mente la soluzione per breve tempo, indi raffreddando e diluendo con acqua si ottiene nuovamente l'acido indecomposto.

Anche nell'acido solforico concentrato a freddo si scioglie senza alterazione, e dalla soluzione si può precipitare per diluizione; se però la soluzione solforica si scalda anche debolmente si ha pronta riduzione dell'acido solforico, sviluppo di SO_2 e carbonizzazione.

È un acido che resiste molto all'azione del permanganato di potassio specialmente in soluzione neutra, e su questa proprietà è bene insistere per le considerazioni, a cui essa può dar luogo.

Il bromo agisce su questo acido $C_9H_{13}NO_3$ formando due composti bibromurati.

Il sale sodico (1) dell'acido $C_9H_{13}NO_3$ si mostra del tutto inattivo sulla luce polarizzata.

Questo acido idrolizza in modo notevole il saccarosio.

D'altra parte il fatto che i sali di sodio e di potassio in soluzione acquosa reagiscono neutri, sia al tornasole che alla fenolftaleina, dimostra pure, che l'acido è abbastanza energico.

Forma sali generalmente molto solubili in acqua.

I sali di sodio e di bario non si possono cristallizzare nè dall'acqua nè dall'alcool per la grande solubilità.

In genere invece gli acidi piridinici dànno sali poco solubili in acqua e in alcool; solo in qualche raro caso si hanno acidi piridinici (ac. picolinico, lutidin-dicarbonico, collidinmono-carbonico, ecc.) che possono formare qualche sale molto solubile.

Questo carattere, mentre differenzia questo acido tetraidropiridinico dagli acidi piridinici, lo ravvicina invece agli acidi non saturi a catena aperta e specialmente a quelli della serie acrilica.

La soluzione acquosa al 10 $^0/_0$ del sale sodico trattata:

1° Con *nitrato d'argento* (10 $^0/_0$) dà un tenue precipitato gelatinoso molto solubile a caldo e che stando a sè imbrunisce.

2° Con *solfato di rame* (10 $^0/_0$) si colora in un bel verde smeraldo e dopo qualche ora dà cristalli mamellonari duri di color verde cupo, solubilissimi a caldo.

---

(1) La determinazione fu fatta sul sale sodico, perchè l'acido non è abbastanza solubile a freddo da permettere un esame polarimetrico.

3° Con $Hg_2(NO_3)_2$ dà un abbondante precipitato bianco voluminoso, solubile in acqua bollente senza subire riduzione.

4° Non dà precipitato neppure dopo riposo colle soluzioni dei sali mercurici, e di calcio, anche se concentrate.

5° Con acetato neutro di piombo si ha un sale gelatinoso bianco, molto solubile in acqua bollente.

6° Colle soluzioni anche diluitissime di sali ferrici dà una intensa colorazione rosso-sangue.

La reazione è così sensibile che una soluzione al 10 % del sale sodico dà colorazione rosea ancora percettibile, quando si tratti 1 cm^3 di soluzione di $FeCl_3$ contenente gr. 0,0000012 di Fe con 1-2 goccie della soluzione suddetta.

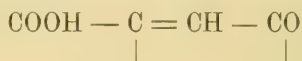
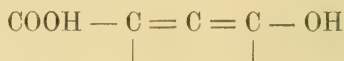
La colorazione è poco stabile verso l'acido ossalico e fosforico: e più ancora verso l'acido cloridrico; resiste un po' meglio all'azione dell'acido solforico, mentre non è alterata nè dal cloruro mercurico nè dall'acido nitrico.

La reazione coi sali ferrici avviene molto intensa anche quando l'acido sia sciolto in alcool metilico ed etilico o in acetone, mentre diminuisce sensibilmente se si scioglie l'acido in cloroformio, etere, benzene, solfuro di carbonio, e si trattano le soluzioni con traccia di cloruro ferrico.

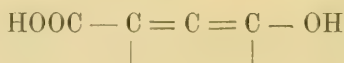
La reazione è dunque dovuta al gruppo

$$\mathrm{COOH - \underset{|}{C} = CH - \underset{|}{CO}}$$

e non al gruppo

$$\mathrm{COOH - \underset{|}{C} = C = \underset{|}{C} - OH}$$

perchè nei solventi, che facilitano la trasposizione dalla forma chetonica alla enolica (quali cloroformio, etere, benzolo, CS_2, ecc.) la colorazione è estremamente ridotta, mentre nei solventi che conservano di preferenza la forma chetonica (alcools, ecc.) essa conserva tutta la sua intensità.

Questo fatto si accorda anche colla considerazione che l'acido è monobasico, mentre per un acido che contenesse l'aggruppamento

$$\mathrm{HOOC - \underset{|}{C} = C = \underset{|}{C} - OH}$$

si dovrebbero avere delle condizioni in cui fosse possibile anche la formazione di un sale contenente 2 molecole di base.

7° Colle soluzioni anche diluite dei sali ferrosi (solfato) si ottiene una colorazione rosso-sangue assai intensa.

La colorazione agli acidi (anche il solforico) resiste molto meno della colorazione che l'acido o il suo sale sodico dànno coi sali ferrici.

Per vedere bene la reazione, sia coi sali ferrosi che coi sali ferrici, si può operare così:

In una soluzione di solfato ferroso (esente di sali ferrici) si versa un poco di soluzione al 10 % di sale sodico; compare subito una colorazione rosso-sangue intensissima.

Si aggiunge al liquido dell'acido solforico diluito a goccia a goccia sino a far scomparire il colore; se nel liquido incoloro ottenuto si introduce appena una goccia di cloruro ferrico anche diluitissimo, si torna ad avere una colorazione rossa-intensa, che è molto più stabile all'azione dell'acido solforico.

Credo conveniente di segnalare questa proprietà dell'acido $C_9H_{13}NO_3$ di colorarsi in rosso sangue, sia colle soluzioni dei sali ferrici come con quelle dei sali ferrosi, perchè nella letteratura io non ho trovato fra gli acidi piridinici che un altro esempio soltanto di sostanza dotata di tale proprietà ed è l'acido *ammonchelidonico* (1). D'altra parte la colorazione rossa coi sali ferrosi dimostrerebbe, secondo la regola di Skraup (2), che nell'acido si deve trovare un carbossile in α-.

Tuttavia per molte altre considerazioni credo piuttosto che questo acido costituisca una eccezione alla regola di Skraup, tanto più che si hanno esempi di acidi piridinici contenenti il carbossile in α- e che pure si colorano solo molto debolmente in giallo col solfato ferroso (acido metilchinolinico).

Ho tentato di preparare l'etere metilico di questo acido, sciogliendolo in otto volte il suo peso di alcool metilico e facendo passare nella soluzione, mantenuta fredda, gas acido cloridrico sino a saturazione. Lasciai a sè in palloncino chiuso per

(1) M. 5, pag. 385 — M. 6, pag. 285.
(2) M. 7, pag. 210 (1886).

circa 2 settimane; evaporando poi il liquido a bassa temperatura ricuperai tutto l'acido inalterato.

Non ho fatto altre prove d'eterificazione, perchè la presenza del carbossile nell'acido stesso mi era dimostrata da molti altri fatti.

Sale di sodio $C_9H_{12}NO_3Na + H_2O$. — Per prepararlo si neutralizza la soluzione acquosa dell'acido con soda caustica purissima, si evapora a secco a b. m., riprendendo con alcool assoluto l'olio denso formatosi e che non cristallizza per sè, nè nel vuoto; si filtra e si svapora la soluzione alcoolica a b. m. nuovamente a secco.

Il residuo dopo qualche tempo si rapprende in una massa solida bianchissima, che polverizzata e lavata con etere, si lascia asciugare all'aria e poi è sottoposta all'analisi:

I gr. 0,8756 di sale scaldato a 130° per 4 ore persero gr. 0,0719 di H_2O.

II gr. 0,5289 scaldati per 3 ore a 130° persero gr. 0,0427.

III gr. 0,5289 di sale secco all'aria diedero gr. 0,1677 di Na_2SO_4.

	trovato			calc. per $C_9H_{12}NO_3Na+H_2O$
	I	II	III	
H_2O %	8,21	8,03	—	8,07
Na	—	—	10,27	10,31

Lasciato all'aria il sale anidro riprende in brevissimo tempo la sua molecola d'acqua di cristallizzazione.

Il fatto, che questa acqua si perde solo a 130° e che si riacquista così rapidamente, dimostra che essa è ritenuta energicamente nel sale.

Il sale idrato lasciato all'aria non va in deliquescenza.

Sale di bario $(C_9H_{12}NO_3)_2Ba$. — Si ottiene facendo bollire l'acido con un latte di carbonato di bario purissimo per circa mezz'ora, filtrando ed operando come per il sale di sodio, perchè anche questo sale per la sua eccessiva solubilità non può ricristallizzarsi.

È anidro. In soluzione acquosa reagisce neutro agli indicatori.

All'analisi diede:

gr. 0,3012 di sale secco a 100°-120° diedero gr. 0,1388 di $BaSO_4$.

	trovato	calcolato per $(C_9H_{12}NO_3)_2Ba$
Ba %	27,13	27,38

I derivati bromurati di questo acido e le esperienze fatte per determinare la costituzione dell'acido stesso, saranno pubblicate in seguito.

Intanto in questo lavoro ho dato il metodo di preparazione di un nuovo acido ossigenato della serie tetraidropiridinica $C_9H_{13}NO_3$ monobasico, energico e inattivo sulla luce polarizzata.

Ne ho studiate le proprietà, tanto più interessanti in quanto che sino ad ora non si avevano conoscenze sulle proprietà della detta serie di acidi. Fra queste bisogna ricordare, in particolar modo, la notevole resistenza di detto acido all'azione degli alcali e acidi minerali anche concentrati e bollenti; la proprietà che ha di scomporsi per riscaldamento a 290°-300° sviluppando una miscela di gas, nei quali in massima parte si trova *ossido di carbonio*; la sua solubilità in etere e in acqua che lo distingue dagli acidi piridinici e lo ravvicina ai piperidinici; la grande solubilità dei sali alcalini e alcalino-terrosi in acqua e alcool.

Inoltre, se si paragonano le proprietà dell'*arecaidina*, che reagisce neutra, con quelle dell'acido da me preparato, riesce evidente, quanta influenza in quest'ultimo abbia la presenza dell'ossigeno in α- per rafforzare il carattere negativo dell'acido stesso.

Infine notevole è la proprietà di questo acido di colorarsi in rosso sia coi sali ferrosi che con quelli ferrici, carattere che esso divide con un solo acido della serie piridica e cioè l'*ammonchelidonico*.

D'altra parte la proprietà di colorarsi così intensamente col cloruro ferrico riunisce questo agli acidi *meconico* e *ammonchelidonico*, e l'analogia può trovare una ragione in una certa somiglianza di struttura, come risulta dall'esame delle formole di costituzione dei tre acidi.

Sulla costituzione dell'acido n-metil-α-ossi-Δ^β tetraidrolutidincarbonico.

Ho già descritto nel lavoro precedente il metodo che serve a preparare l'acido *n-metil-α-ossi-Δ^{β}-tetraidrolutidincarbonico*, partendo dall'n-metil-ciantrimetilpirideone ed ho esposte di questo acido le proprietà più notevoli.

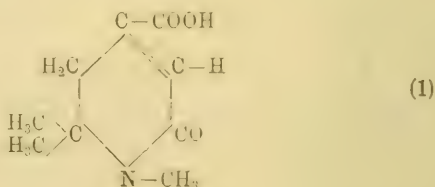
Accennerò ora qui brevemente ad alcune esperienze fatte allo scopo di determinare la costituzione di questo acido e specialmente per quanto riguarda l'azione del bromo e della potassa caustica in fusione e della calce sull'acido stesso.

In queste esperienze ho potuto ottenere due nuovi acidi *n-metil-α-ossi-Δ^{β}-tetraidrolutidincarbonici* bibromurati isomeri, di cui darò qui i caratteri.

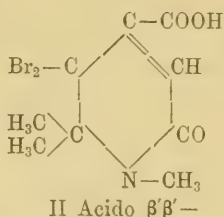
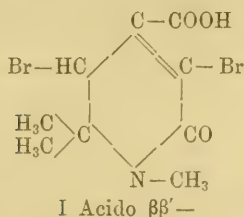
Azione del bromo sull'acido $C_9H_{13}NO_3$.

Il bromo reagisce facilmente coll'acido $C_9H_{13}NO_3$, formando due composti bibromurati di sostituzione isomeri, a seconda se si opera in soluzione acquoso-acetica o in soluzione di cloroformio.

L'isomeria dei due acidi bibromurati si spiega molto facilmente, se si dà uno sguardo alla probabile formula di costituzione dell'acido $C_9H_{13}NO_3$ (1), e cioè:

```
              C—COOH
            /        \
      H2C /            \C—H
        |               |                (1)
        |               |
  H3C \                 /
  H3C / C \           / CO
            \       /
             N—CH3
```

Si avranno infatti due acidi diversi a seconda se i due atomi di bromo si sostituiscono in ββ' o soltanto in β'. Le for-

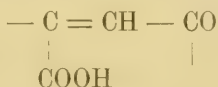
mule, che ci rappresentano la costituzione di questi due composti bibromurati, saranno dunque:

```
              C—COOH                          C—COOH
             /  \\                           /  \\
   Br—HC/          \\C—Br          Br2—C/          \\CH
        |            |                  |            |
  H3C\  |            |           H3C\   |            |
  H3C/ >C\         /CO           H3C/ >C\         /CO
           \     /                         \     /
            N—CH3                           N—CH3
      I Acido ββ'—                    II Acido β'β'—
```

Ho potuto trovare due caratteri differenziali, che permettono di attribuire a ciascuno dei due acidi bibromurati la formula di costituzione, che gli compete.

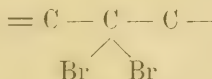
Il composto, che si ha bromurando l'acido $C_9H_{13}NO_3$ in soluzione cloroformica, si colora intensamente in rosso col cloruro ferrico (a differenza del suo isomero), e per ebollizione con acqua cede tutto il suo bromo molto facilmente.

I due fatti, a mio parere, stanno ad indicare:

1° che nel composto esiste ancora il gruppo

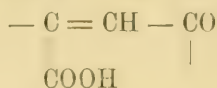
```
— C = CH — CO
  |         |
 COOH
```

che è quello che conferisce all'acido $C_9H_{13}NO_3$ la proprietà di colorarsi in rosso col cloruro ferrico;

2° che il bromo deve trovarsi attaccato al nucleo in modo instabile, e questo è bene in relazione colla composizione di un corpo che ha il gruppo

```
= C — C — C —
      / \
    Br   Br
```

dal quale il bromo deve potersi staccare facilmente, tanto più pensando, che l'atomo di carbonio, a cui sono uniti i 2 at. di Br, è legato ad un altro atomo di carbonio fortemente elettronegativo per la presenza simultanea di un carbossile e di un doppio legame.

Nell'acido bibromurato avente la formula I, uno solo degli atomi di bromo dovrebbe staccarsi facilmente e cioè il terziario,

mentre l'atomo di bromo unito in modo secondario non deve eliminarsi dal composto che con grande difficoltà; d'altra parte nell'acido rappresentato da I non si trova più il gruppo

$$\begin{array}{l} -C=CH-CO \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad | \\ \quad\quad COOH \end{array}$$

che determina la reazione col cloruro ferrico.

Cosicchè mi pare che all'acido bibromurato, che si ha dalla soluzione cloroformica, debba attribuirsi la formula II.

Acido ββ'*dibromo-n-metil-α-ossi-*Δ^3*-tetraidrolutidincarbonico.*

In una soluzione di gr. 1 di acido $C_9H_{13}NO_3$ in 15 cm³ di acido acetico al 50 % si versa a poco a poco una soluzione di bromo in acido acetico diluito. La decolorazione avviene abbastanza rapidamente per i primi 2 atomi di bromo, più lentamente per i consecutivi 2 atomi.

Per 1 gr. di acido si fecero reagire gr. 1,75 di bromo, quantità corrispondente a 4 at. di bromo per 1 molecola di composto.

Si lascia a sè il liquido per qualche tempo, indi si evapora lentamente a b. m. a 40°-50°.

Si ottiene infine come residuo gr. 1,5 dell'acido bromurato fondente così greggio verso 135°.

È in forma di polvere bianco-giallastra, che si purifica ricristallizzando dal benzene: da questo si ha in cristalli duri, incolori, prismatici che fondono a 137°-139° in un liquido incoloro.

All'analisi la sostanza diede:

I. Gr. 0,1894 di acido secco a 90°-100° dànno gr. 0,0556 H_2O e gr. 0,2182 CO_2.

II. Gr. 0,4592 diede gr. 0,5115 di AgBr.

	trovato		calcolato per	
	I	II	$C_9H_{13}NO_3Br_2$	$C_9H_{11}NO_3Br_2$
C %	31,41	—	31,48	31,67
H "	3,26	—	3,81	3,22
Br "	—	47,42	46,64	46,92

È un acido poco solubile in acqua, e che per ebollizione con acqua si decompone parzialmente. La soluzione acquosa ha reazione acida.

Non si colora in rosso col percloruro di ferro: scaldato rapidamente alla temperatura di fusione si scompone svolgendo bromo libero, riconoscibile alla carta amidoiodurata.

Acido $\beta'\beta'$-*bibromo-n-metil-α-ossi-*Δ^3*-tetraidrolutidin-carbonico.*

A gr. 1 di acido $C_9H_{13}NO_3$ sciolto in 8-10 cm^3 di cloroformio in vasetto chiuso, si aggiunge a poco a poco una soluzione cloroformica di bromo (contenente gr. 3,72 di Br. in 25 cm^3). In soluzione di cloroformio la decolorazione necessita un tempo più lungo; durante la reazione si svolge HBr.

Nei primi momenti il bromo fa precipitare una sostanza gialla, che torna a ridisciogliersi, quando, dopo aver aggiunto una quantità di Br. proporzionale a 2 atomi, si ha decolorazione completa. Seguitando ad aggiungere la soluzione di bromo (ancora 2 at. di Br.) in 2 ore $^1/_2$ si ha decolorazione completa.

Si lascia svaporare il cloroformio e l'acido bromidrico all'aria; in fine rimane come residuo una polvere bianca, che grezza fonde a 199°-200°.

Da 1 grammo di acido $C_9H_{13}NO_3$ ho ottenuto gr. 1,81 di acido di bromurato, cioè la quantità teorica.

Si ricristallizza la polvere dal benzene bollente, avendo cura di non far bollire troppo a lungo la soluzione benzenica, nel qual caso si ha già una lieve decomposizione della sostanza.

Puro, l'acido bibromurato si presenta in prismi duri, pesanti, trasparenti, che asciutti all'aria fondono a 199°-200 e sfioriscono rapidamente stando all'aria perdendo un poco di benzene col quale sono cristallizzati.

L'acido secco nel vuoto o a 100° fonde a 201°-202°.

All'analisi il composto seccato rapidamente all'aria diede:

I. Gr. 0,4095 diedero gr. 0,4084 di AgBr.

II. Gr. 0,5074 „ gr. 0,4996 di AgBr.

III. Gr. 0,5898 scaldati a 100°-105 persero gr. 0,058 di C_6H_6.

	trovato			calcolato per $C_9H_{11}NO_3Br_2 + {}^1/_2C_6H_6$
	I	II	III	
Br $^0/_0$	42,44	41,89	—	42,10
C_6H_6 „	—	—	9,83	10,26

e il composto asciutto a 100° diede:

I. Gr. 0,3196 diedero gr. 0,3518 di AgBr.
II. Gr. 0,1216 „ gr. 0,0334 H_2O e gr. 0,139 CO_2.
III. Gr. 0,1475 „ gr. 0,0435 H_2O e gr. 0,172 CO_2.

	trovato			calcolato per $C_9H_{11}NO_3Br_2$
	I	II	III	
C %	—	31,17	31,79	31,67
H „	—	3,05	3,22	3,22
Br „	46,80	—	—	46,92

È una sostanza molto solubile in alcool assoluto, etere, cloroformio, benzene, pochissimo in solfuro di carbonio e in acqua, alla quale tuttavia comunica forte reazione acida.

La soluzione acquosa si colora intensamente in rosso-sangue col cloruro ferrico.

Questo acido si decompone o per riscaldamento alla temperatura di fusione, svolgendo bromo riconoscibile mediante le carte amido-iodurate, o per lunga ebollizione con acqua, nel qual caso si ha decomposizione completa nel senso che tutto il bromo passa in soluzione sotto forma di acido bromidrico.

Infatti gr. 0,2144 del composto secco a 100° sospesi in 30 cm^3 di acqua per ebollizione di circa 7-8 ore a ricadere, diedero all'analisi gr. 0,235 di AgBr: trovato perciò

Br % eliminato 46,78

mentre per una scomposizione completa si calcola

Br % 46,92.

Azione della potassa caustica sull'acido $C_9H_{13}NO_3$.

Interessava studiare il comportamento dell'acido $C_9H_{13}NO_3$ verso la potassa caustica in fusione, per meglio determinarne la costituzione.

Prima di tutto dalla maggiore o minor facilità con cui l'acido, eliminando CO_2, poteva dare la n-metil-ossi-tetraidrolutidina, si sarebbe potuto trarre argomento a dedurre in parte

la posizione del carbossile nella molecola e nello stesso tempo si sarebbe trovato il mezzo di preparare una base ossigenata della serie tetraidropiridica.

Se invece l'acido subiva una scomposizione più profonda, nei prodotti di scomposizione si poteva avere una via per ricostruire la posizione dei gruppi nella molecola.

Ora dalle varie esperienze risulta che, se si scalda l'acido (1 mol.) con potassa caustica (2 mol.) a una temperatura di circa 200° per una o due ore e si innalza poi la temperatura a 270° verso la fine dell'operazione, non si ha che una scomposizione assai limitata, potendosi riottenere dal residuo circa l'80 % dell'acido adoprato. Fra i prodotti volatili si trova un poco di metilamina.

Quando invece il riscaldamento sia portato sino a 300°-320° e si operi a pressione ridotta la decomposizione è profonda: si forma della *metilamina*, *acido ossalico*, una piccola quantità di sostanza neutra e di acido sciropposo azotato, che non ho potuto caratterizzare e infine un acido non azotato e che ha molti caratteri di analogia coll'acido *acrilico* sebbene non possa assicurare in modo assoluto che si tratti di questo acido.

La reazione non porta in nessun caso alla formazione delle ossi tetraidrolutidina-n-metilata.

Lo stesso risultato si ottiene, se si sostituisce alla potassa caustica la calce, mantenendo uguali le altre condizioni.

Ecco come io ho operato:

Gr. 4,5 di acido f. a 174° sono neutralizzati con potassa concentratissima; al liquido così ottenuto si aggiungono gr. 1,5 di KOH (cioè 1 mol. di KOH per 1 mol. di acido).

Il liquido, introdotto in una stortina tubulata, è portato a secco lentamente scaldando a 90°-100° alla pressione di 40-50^{mm}.

Quando tutto il residuo è ben secco si adatta alla storta un matraccino collettore, unito a due bottiglie di lavaggio contenenti acido cloridrico diluito. Queste bottiglie sono in comunicazione con una pompa ad acqua.

Si riscalda la stortina a bagno d'olio, portandola rapidamente a 300°: a questo punto si mantiene costante la temperatura.

La pressione dentro all'apparecchio è di 40^{mm}. A 300° distilla una piccola quantità di liquido oleoso e molto alcalino. Si protrae il riscaldamento per 1 ora 1/2: durante il raffredda-

mento si fa passare nell'apparecchio una corrente di aria secca e priva di anidride carbonica.

Il liquido acido delle bottiglie di lavaggio è unito al distillato raccolto nel collettore.

Si ottiene così una soluzione acida, che estratta con etere cede all'etere una piccola quantità di sostanza oleosa di odore penetrante, poco solubile in acqua e che si colora in rosso intensamente col cloruro ferrico.

Il liquido acido, reso alcalino con potassa, è distillato in corrente di vapor di acqua per ricuperare la base, raccogliendo il distillato alcalino in acido cloridrico.

La soluzione cloridrica evaporata a secco diede gr. 0,7 di un cloridrato che secco e lavato con etere fondeva fra 225°-250°. Il cloridrato molto solubile in acqua dà le reazioni degli alcaloidi, col reattivo cloroplatinico; di Bouchardat, coll'ac. fosfomolibidico.

Sciolto in pochissima acqua è precipitato col cloruro di platino al 10 %: il cloroplatinato in tavole esagonali di color giallo arancio, separato dalla soluzione, è ricristallizzato dall'acqua.

Questo cloroplatinato non fonde, ma verso 230°-250° imbrunisce notevolmente. È anidro.

All'analisi ha dato:

I. Gr. 0,2302 di sale secco a 100° diedero gr. 0,0944 di Pt.
II. Gr. 0,2159 diedero cm³ 10,37 di N a 0° e 760mm.
III. Gr. 0,2324 diedero gr. 0,0960 di Pt.

	trovato		
	I	II	III
Pt %	41,00	—	41,30
N „	—	6,00	—

mentre per il cloroplatinato di metilamina si calcola:

Pt % 41,29
N % 6,22.

Il cloridrato di metilamina fonde a 225°-230° (1). Quindi l'analisi e i caratteri della base molto volatile insieme col punto di fusione del suo cloridrato dimostrano trattarsi di *metilamina*.

La metilamina trovata rappresenta circa il 50 % di quello che poteva ottenersi teoricamente da gr. 4,5 dell'acido $C_9H_{13}NO_3$.

Il residuo alcalino della stortina, sciolto in acqua e reso acido con ac. solforico, fu sottoposto a distillazione in corrente di vapor d'acqua.

In una porzione del distillato fu determinata la acidità mediante la soda caustica. Riferita a tutto il distillato essa è di gr. 0,474 (riferito il calcolo all'acido acetico).

Il distillato è neutralizzato per digestione con carbonato di bario puro; la soluzione filtrata evaporata a secco lascia un residuo di sale baritico che pesa gr. 1.

Si ricristallizza il sale sciogliendolo in pochissima acqua, separando per filtrazione un po' di carbonato di bario, indi svaporando la soluzione in essiccatore su acido solforico nel vuoto, perchè il sale è molto solubile in acqua.

Il sale separato, asciutto all'aria, e poi a 100° diede all'analisi:

I. Gr. 0,298 di sale diedero gr. 0,2507 di $BaSO_4$

II. Gr. 0,2768 di sale diedero gr. 0,2333 di $BaSO_4$.

	trovato	
	I	II
Ba %	49,44	49,55

mentre per l'acrilato di bario si calcolerebbe

Ba % 49,10

Questo sale scaldato con acido solforico concentrato svolge anidride solforosa, con acido solforico diluito svolge un odore acuto che assomiglia quello dell'acido acetico e formico.

La soluzione acquosa del sale, acida per H_2SO_4, decolora l'acqua di bromo e rapidamente riduce il permanganato di potassio.

La soluzione acquosa del sale si colora in rosso col cloruro ferrico.

(1) “ Bull. „, *13*, pag. 536.

La soluzione acquosa per trattamento con cloruro mercurico non dà precipitato di calomelano, e il sale secco scaldato con anidride arseniosa non dà la reazione dell'alcarsina.

Queste due ultime reazioni negative mi fanno escludere, che nel sale di bario potesse essere contenuto come impurezza anche del *formiato* o *acetato* di bario; d'altra parte le reazioni precedenti coincidono coi caratteri dell'acido acrilico e dei suoi sali. Infatti si sa che anche i sali dell'acido acrilico reagiscono come i formiati e gli acetati verso il cloruro ferrico (1); inoltre l'acido acrilico dà sali alcalino-terrosi molto solubili in acqua (2).

È vero che l'acido acrilico per fusione con potassa caustica si decompone in acido formico e acetico, ma, come ha notato Erlenmeyer (3), tale scomposizione non è che parziale, perchè per azione della soda caustica sull'acrilato di sodio insieme ad acetato di sodio e formiato (che poi si trasformano in carbonato sodico durante la fusione) si trova ancora una certa proporzione di acrilato di sodio indecomposto.

Non posso tuttavia affermare in modo assoluto che si tratti di acido acrilico avendo avuto a disposizione una quantità troppo piccola di materiale per farne un'analisi completa; tuttavia i caratteri sembrano concordanti con quelli dell'acido acrilico.

Dal liquido acido dal quale per distillazione separai l'acido precedente, estraendo con etere si ottiene un olio a reazione acida, che stando a sè in parte cristallizza.

I cristalli (gr. 0,1) separati dall'olio per pressione tra carta bibula e ricristallizzati dall'acqua fondono a 100°-102°.

Questo acido (non azotato) fu identificato coll'acido ossalico alle sue reazioni e al dosamento del calcio nel sale di calcio.

Gr. 0,2229 di sale di calcio secco a 80° diedero gr. 0,1005 di CaO.

	trovato	calcolato per $(COO)_2Ca$
Ca $^0/_0$	31,30	31,25

L'olio rimasto nella carta bibula, estratto nuovamente con etere, è formato da una sostanza acida azotata sciropposa, che

(1) " Ann. „, *161*, pag. 277 (nota).
(2) " Ann. „, *167*, pag. 222.
(3) " Ann. „, *192*, pag. 376.

non potei caratterizzare, perchè dà sali estremamente solubili in acqua.

In conclusione l'azione della potassa caustica fusa porta a una rottura del nucleo tetraidropiridinico, che viene ad essere attaccato in varii punti con profonda scomposizione, alla quale non deve essere estranea l'azione prolungata del calore, a proposito della quale ho già accennato in altro lavoro.

D'altra parte dall'insieme dei prodotti di scomposizione non si può ricostruire, in qual modo e dove principalmente agisca la potassa; certamente i legami meno stabili della molecola saranno il doppio legame Δ^3 e i legami fra azoto e carbonio in 1-6 e 1-2.

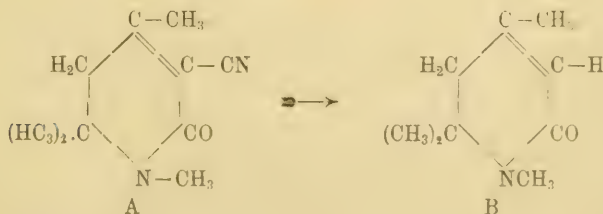
Nella serie dei piridoni abbiamo altri composti, di costituzione simile a quella dell'acido $C_9H_{13}NO_3$, i quali subiscono una scomposizione analoga; ad es.: l'*n-metilpseudolutidostirile* (1), che già per ebollizione con potassa caustica al 20 %, si decompone svolgendo metilamina.

Costituzione dell'acido $C_9H_{13}NO_3$.

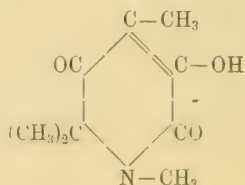
Ho detto in altro lavoro che nell'ossidazione dell'n-metilciantrimetilpirideone $C_{10}H_{14}N_2O$, si ottiene come prodotto principale l'acido $C_9H_{13}NO_3$, qualunque sia la proporzione di permanganato potassico adoprato; e ho anche accennato al fatto che la prima azione del permanganato si esplica nello staccare dal nucleo il gruppo CN, trasformandolo in acido cianidrico.

Cosicchè in un primo periodo dal ciantrimetilpirideone (A) si deve ottenere un composto intermedio (B) dalla cui ossidazione si origina l'acido $C_9H_{13}NO_3$.

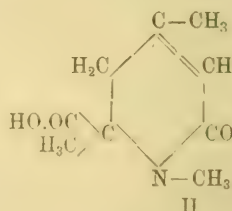
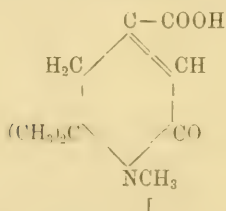
```
             C—CH3                                C—CH3
            / \\                                 / \\
     H2C /      \\C—CN                   H2C /      \\C—H
        |           |          ——>           |          |
        |           |                        |          |
  (HC3)2.C\       /CO               (CH3)2C\        /CO
           \    /                             \/
            N—CH3                             NCH3
              A                                 B
```

---

(1) HANTZSCH, "Ber.", *17*, pag. 2906.

Come e dove è andato a fissarsi l'ossigeno nel composto B? Una rottura dell'anello non è ammissibile e si deve escludere per molte considerazioni, delle quali la principale sta nel fatto, che per rottura del nucleo si sarebbe dovuto ottenere un amino-acido non saturo. Ciò è in contraddizione col fatto che il composto $C_9H_{13}NO_3$ non addiziona il bromo, e non dà le reazioni degli amino-acidi (1), principalmente quelle dei sali rameici e non riduce il nitrato mercuroso. Nello stesso modo è da escludersi l'ipotesi che l'ossigeno possa essersi fissato sui due atomi di carbonio ββ', poichè da un composto che avesse avuto la costituzione di una dicheto-ossipirideina

```
              C—CH3
             /  \\
        OC /      \\C—OH
          |         |
          |         |
  (CH3)2C \        / CO
            \    /
            N—CH3
```

non si sarebbero potuti ottenere col bromo dei composti di sostituzione, come ho accennato (a pag. 3). L'ipotesi più semplice e che viene subito più naturale è che nel composto (B) uno dei metili sia stato trasformato in carbossile.

Come poi nella molecola sono contenuti tre metili, di cui due uniti allo stesso atomo di carbonio α', sono possibili due casi, a seconda cioè se il metile trasformato in carbossile è quello unito in γ - o uno dei metili attaccati ad α' -; cioè si tratta di vedere quale delle due formule I o II sia quella che spetta all'acido da me ottenuto.

```
           C—COOH                              C—CH3
          /  \\                               /  \\
    H2C /      \\CH                    H2C /      \\CH
       |         |                         |         |
       |         |               HO.OC \   |         |
 (CH3)2C \      / CO                     \ C \      / CO
           \   /                   H3C /       \   /
           NCH3                                N—CH3
             I                                   II
```

Qui conviene fare prima di tutto qualche considerazione d'ordine generale.

---

(1) Hofmeister A., *189*, pag. 121.

Nella ossidazione delle piridine omologhe, sia delle lutidine che delle collidine, si riscontrano varii fatti degni di attenzione, e cioè:

1° che durante l'ossidazione quasi sempre non è trasformato un metile solo in carbossile, ma o si originano acidi *bi-* e *tri-* carbossilici, oppure si ha una mescolanza di acidi monocarbossilici e bicarbossilici.

In moltissimi casi la graduale ossidazione è resa quasi impossibile, anche adoperando quantità di permanganato potassico corrispondenti alla trasformazione di un solo metile in carbossile. Così le lutidine conosciute per azione del permanganato dànno gli acidi piridin-dicarbonici, mentre delle collidine la $\beta\gamma$-α' trimetilpiridina si trasforma nell'acido berberonico e una trimetilpiridina bollente a 177° per ossidazione dà acido metilpiridindicarbonico;

2° che nei casi più rari che un solo metile resti ossidato la trasformazione di questo in carbossile non impedisce l'ulteriore ossidazione degli altri gruppi metilici. E infatti dalla collidina simmetrica per ossidazione graduale si può ottenere l'acido mono-, bi- e tricarbossilico.

Purtroppo osservazioni sulla resistenza che oppongono i metili all'ossidazione a seconda della loro posizione o degli altri gruppi presenti nel nucleo non ve ne sono che poche, perchè spesso gli acidi collidin- o lutidin-monocarbonici sono preparati per scomposizione degli acidi bicarbossili.

Ad esempio, dei sei acidi picolin-monocarbonici noti, dei quali soltanto 4 hanno costituzione nota, nessuno si ha ossidando le dimetilpiridine. Dei 4 acidi *dimetilpiridin-monocarbonici* noti soltanto l'α'-γ-dimetilpicolinico si ha per ossidazione della collidina simmetrica.

Ora, venendo al caso pratico, nell'ossidazione dell'n-metilciantrimetilpirideone, sebbene questo composto contenga 3 gruppi metilici, uno solo di questi metili resta trasformato in carbossile, anche se si sperimenta con una soluzione di permanganato satura e se ne adopera una quantità eccessiva. Se nel n-metilciantrimetilpirideone tutti e tre i metili avessero avuto lo stesso valore rispetto all'azione del permanganato, io avrei dovuto ottenere almeno o due isomeri acidi monocarbossilati, o un acido mono- e uno bi-carbossilico e nulla escludeva *a priori* che si

potessero ossidare tutti e tre i metili; ciò che in fatto non si verifica assolutamente, perchè variando le proporzioni di permanganato, variano le proporzioni dei prodotti secondari che derivano dalla idratazione del gruppo CN e contemporanea ossidazione, ma non varia che ben poco la quantità dell'acido $C_9H_{13}NO_3$ ottenuta.

Queste considerazioni portano a credere quindi che nel n-metilciantrimetilpirideone due gruppi metilici presentino una forte resistenza all'azione ossidante del $KMnO_4$.

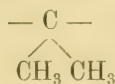
Dei composti appartenenti alla serie tetraidripiridinica, che abbiano una disposizione di gruppi nella molecola somigliante a quella che si trova nel n-metilciantrimetilpirideone esistono le cosidette basi acetoniniche di Fischer, ma di queste i prodotti di ossidazione col permanganato di potassio non mi risulta che sieno stati studiati.

Tuttavia Heintz (1) in un suo lavoro sui prodotti di ossidazione delle acetonamine ha dimostrato che la triacetonamina per ossidazione con acido cromico forma dell'acido *imidodimetilacetico-dimetilpropionico*, nel quale sono rimasti inalterati i due gruppi

$$\overset{|}{\underset{|}{C}}\begin{matrix} \diagup CH_3 \\ \diagdown CH_3 \end{matrix}$$

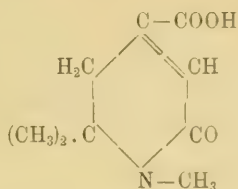
esistenti nella molecola della triacetonamina; cosicchè bisogna convenire che gruppi di tal natura esistenti in un nucleo piridinico sieno molto resistenti agli agenti ossidanti anche più energici.

Le conclusioni di Heintz sulla triacetonamina coincidono con tutte le osservazioni, che ho già esposte e che mi portano a credere che anche nel n-metil-ciantrimetilpirideone il gruppo

$$\begin{matrix} - C - \\ \diagup \quad \diagdown \\ CH_3 \quad CH_3 \end{matrix}$$

sia assai resistente all'ossidazione e sia restato inalterato nell'acido $C_9H_{13}NO_3$, al quale tutti i criteri già esposti mi portano

(1) " Ann. ", 198, pag. 42.

ad attribuire di preferenza la formula di un acido *n-metil-α-ossi-Δ^{β}-tetraidrolutidin-γ-carbonico.*

```
            C—COOH
           /\\
     H2C/      \\CH
       |          |
       |          |
(CH3)2.C\        /CO
          \    /
           N—CH3
```

D'altra parte questa formula è confermata anche dal fatto che questo acido per ebollizione con potassa caustica concentrata non si isomerizza, ed è noto che gli acidi tetraidrogenati aromatici (1), che hanno il carbossile attaccato in α- rispetto al doppio legame, godono appunto della proprietà di non alterarsi nelle condizioni suddette, mentre negli acidi della stessa serie che possiedono il carbossile attaccato ad un atomo di carbonio lontano dal doppio legame, questo legame si sposta assai facilmente durante l'ebollizione con alcali, originando sostanze isomere.

Indirettamente poi la formula data sembra la più probabile e conveniente, perchè la costituzione di un acido α'-carbossilato, non si concilierebbe col comportamento dell'acido stesso verso gli acidi concentrati bollenti, verso il calore e verso la potassa caustica in fusione, poichè il carbossile in α- dovrebbe essere facilmente eliminato cogli agenti suddetti e l'acido dovrebbe potersi ottenere in una forma attiva sulla luce polarizzata, mentre in altro lavoro ho detto che il sale di sodio dell'acido è inattivo.

Ai due acidi bibromurati, che ho accennato, spetterà dunque la costituzione che fu già accennata a pag 4.

Torino - Laboratorio di Chimica Farmac. e Tossicologica della R. Università, Giugno 1906.

---

(1) Questo vale anche per i composti tetraidropiridinici, come ha dimostrato Meyer per l'*arecaidina*.

Trasformazioni del sale di chinina dell'isobutildicianglutaconimide (*).

Nota del Dr. SILVIO ZUBLENA.

Sapendosi da esperienze anteriori che le dicianglutaconimidi hanno la proprietà di precipitare molti alcaloidi (**), si è creduto interessante studiare uno di questi sali, e precisamente il sale di chinina dell'isobutildicianglutaconimide; tanto più interessante perchè ha la proprietà di trasformarsi con cambiamento di forma cristallina e di colore (***).

Ho preparato il sale ammonico della isobutildicianglutaconimide facendo condensare l'aldeide isovalerica con l'etere cianacetico in presenza di ammoniaca. Il prodotto greggio esaurito

---

(*) Estratto dalla Tesi per la Laurea in Chimica e Farmacia.

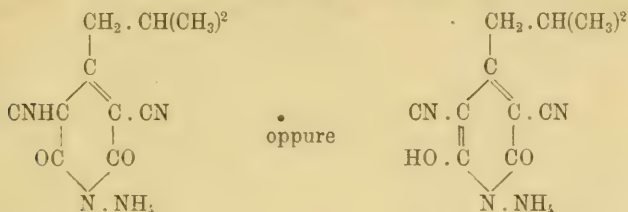
(**) I. Guareschi, " Atti R. Acc. Sc. di Torino ", 1903.

(***) Delle trasformazioni con cambiamento di forma cristallina, di acqua di cristallizzazione e di solubilità, io avevo osservato anche nel sale di bario di alcuni derivati glutaconici, come ad es. quello della cianmetilglutaconimide (*Sintesi di composti piridinici dagli eteri chetonici coll'etere cianacetico*, " Mem. R. Accad. delle Scienze di Torino ", 1896, vol. XLVI, p. 16); e anche di colore in alcuni sali di rame (*Sintesi di composti piridinici*, ecc., memoria II, 1905, p. 290).

Altri composti alcaloidici, simili a quelli che ho fatto studiare dal Dr. Zublena, saranno esaminati; non solamente quelli con altre dicianglutaconimidi, quali la *essil* e la *propildicianglutaconimide* che anch'esse dànno un sale di chinina giallo, mentre la fenildicianglutaconimide lo dà bianco, ma anche con altri alcaloidi. Il Dr. Garetto ha osservato che il sale di chinina della essildicianglutaconimide si ha in cristalli gialli idrati $C^{20}H^{24}N^2O^2.(C^{13}H^{15}N^3O^2)^2 + 1\,^1/_2\,H^2O$ se cristallizzato dall'alcol diluito (80 %) e in cristalli anidri incolori e molto meno solubili se cristallizzato dall'acqua. A 165° il sale giallo diventa bianco. Il sale giallo sospeso in acqua ridiventa bianco dopo nemmeno 24 ore.

Delle trasformazioni con cambiamento di colore e di forma cristallina, per l'azione del calore su diverse imidi furono da alcuni anni studiate dal Prof. Piutti, ma in questi casi pare trattarsi, con quasi sicurezza, solamente di un fenomeno di dimorfismo (I. Guareschi).

con etere e sciolto in acqua bollente lasciò cristallizzare il sale ammonico dell'isobutildicianglutaconimide perfettamente puro.

```
        CH2.CH(CH3)2                          CH2.CH(CH3)2
          |                                     |
          C                                     C
         / \\                                  / \\
    CNHC     C.CN          oppure      CN.C     C.CN
      |      |                            ||      |
     OC      CO                        HO.C      CO
        \  /                                 \  /
        N.NH4                                N.NH4
```

Un dosamento di azoto diede il risultato seguente:

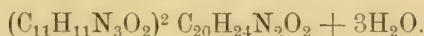
	trovato	calcolato per $C_{11}H_{14}N_4O_2$
N %	23.87	23.93

Il sale di chinina dell'isobutildicianglutaconimide si prepara mettendo a reagire soluzioni acquose bollenti di solfato neutro di chinina e di sale ammonico dell'isobutildicianglutaconimide e precisamente:

Solfato neutro di chinina	gr. 1,85	(una molecola)
Sale ammonico	gr. 1,58	(due molecole)

Se le due soluzioni non sono molto diluite, si forma subito un precipitato giallo, trasparente, gelatinoso, un po' fluorescente. Se invece le due soluzioni sono sufficientemente diluite, il liquido nel primo momento si fa di un giallo intenso, e tosto intorbida per la formazione di una voluminosa massa gialla, finissimamente cristallizzata in aghi riuniti concentricamente a guisa di piccoli ciuffetti che vanno aumentando continuamente di volume col raffreddarsi del liquido.

Questo sale che risulta dall'unione di due molecole di isobutildicianglutaconimide con una di chinina, cristallizza dall'acqua bollente con acqua di cristallizzazione e la sua formola corrisponde a:

$$(C_{11}H_{11}N_3O_2)^2\ C_{20}H_{24}N_2O_2 + 3H_2O.$$

Infatti:

I. Gr. 0,9431 di sale secco all'aria mantenuti per 4 ore in stufa da 100° fino a 145° perdettero gr. 0,0640.

II. Gr. 0,7252 di sale secco all'aria mantenuti per 4 ore in stufa da 100° fino a 150° perdettero gr. 0,0496.

III. Gr. 0,1508 di sale secco all'aria diedero cm³ 16,75 di azoto $t = 0^\circ$ e $H = 760mm$.

Questo sale di chinina cristallizza dunque con 3 molecole d'acqua; infatti:

	trovato		calcolato per $(C_{11}H_{11}N_3O_2)^2 . C_{20}H_{24}N_2O_2 + 3H_2O$
	I	II	
H_2O °/₀	6,78	6,83	6,65
	III		
N °/₀	13,89		13,79

Il sale secco all'aria, scaldato moderatamente su lamina di platino, fonde in una massa vetrosa, trasparente, di color giallo bruno, che per innalzamento di temperatura diventa subito nera, si rigonfia con sviluppo di vapori densi e bianchi di odore cianico, che bruciano con fiamma fuliginosa e lascia un residuo di carbone che brucia molto difficilmente.

Determinando il punto di fusione in bagno d'olio, osservo che questo sale dapprima imbrunisce, fondendo poi completamente e scomponendosi in una massa nera, verso 282°.

Mantenuto per 2 ore in stufa a 100° non perde completamente l'acqua di cristallizzazione; se però si innalza la temperatura fra 130° e 150° la perdita è completa e corrisponde perfettamente a 3 molecole d'acqua.

Dopo disidratazione il sale mantiene la sua colorazione gialla.

Il sale disidratato, esposto di nuovo all'aria, riprende dopo un po' di tempo completamente la sua acqua di cristallizzazione. Infatti: gr. 0,8791 di sale disidratato a 130°-145° ed esposto all'aria aumentarono di gr. 0,064.

	trovato	calcolato per $3H_2O$
H_2O °/₀ assorbita	7.28	7,12

Corrisponde cioè esattamente all'assorbimento di $3H_2O$.

Tanto il sale disidratato come il sale idrato, sospesi in acqua alla temperatura normale e mantenutivi per 12-24 ore,

cambiano completamente d'aspetto, trasformandosi cioè in una polvere minutamente cristallizzata, perfettamente bianca che si depone completamente al fondo del recipiente, a differenza del sale giallo che per la sua leggerezza rimane sospeso nella soluzione.

Questo sale giallo è poco solubile; infatti:

a) la sua solubilità in acqua alla temperatura di 17°,6 è del 0,0375 p. 100 di acqua, cioè 1 p. di sale richiede per sciogliersi 2666,6 parti di acqua alla temperatura normale;

b) la solubilità in acqua bollente non può essere determinata con esattezza, perchè durante l'esperienza il sale giallo si trasforma nel sale bianco e quindi non sappiamo se il dato riguardante la solubilità, come vedremo in seguito, debba essere riferito al sale giallo o al sale bianco;

c) la solubilità in alcol a 96 % e alla temperatura di 14°,7 è di 0,192 per 100 di alcol, cioè una parte del sale si scioglie in 520,8 parti di alcol (96 %);

d) la solubilità in alcol a 96 % alla temperatura di 78°,26 è di 0,656 per 100 di alcol, cioè una parte si scioglie in 152,8 parti di alcol a 96 % bollente (1);

e) la solubilità in altri solventi, come etere, benzene, solfuro di carbonio, ecc., è quasi nulla.

La soluzione acquosa di questo sale conserva, anche se molto diluita, la fluorescenza azzurra, caratteristica dei sali di chinina ad acidi ossigenati.

Come ho detto sopra, il sale giallo di chinina tende a trasformarsi, se sospeso in acqua, in una polvere cristallina bianca, più pesante del sale giallo e che si raccoglie tutta in fondo al recipiente.

Osservai questo fatto determinando la solubilità in acqua, alla temperatura normale, del sale di chinina giallo, previamente disidratato e che, come ho detto sopra, si era mantenuto giallo dopo disidratazione.

Avendo cioè lasciato nella provetta dell'apparecchio del Pawlewski, a contatto dell'acqua per 24 ore circa, il sale che

(*) I dati della solubilità si intendono riferiti al sale anidro.

avevo messo in eccesso per determinarne la solubilità, osservai che il sale aveva subìta la trasformazione accennata.

Si dubitò dapprima che il sale, rimasto lungo tempo a contatto dell'acqua, avesse assunto qualche molecola in più d'acqua di cristallizzazione, ma invece esaminando bene il sale, constatai che si era trasformato in sale anidro: l'analisi infatti mi diede:

I. Gr. 0,3552 di sale bianco secco all'aria, messi in stufa per 2 ore a 120°-130° fino a peso costante, perdettero solamente gr. 0,0006.

II. Gr. 0,5814 di sale bianco secco all'aria, mantenuti per 2 ore in stufa a 120°-130° fino a peso costante, perdettero solamente gr. 0,0004.

III. Gr. 0,2085 di sale bianco secco all'aria diedero cm^3 24,14 di Azoto, t = 0°, H = 760 mm.

	trovato	calcolato per $(C_{11}H_{11}N_3O_2)_2C_2H_2N_2O_2$
N %	14,47	14,77

Il sale bianco è dunque anidro; la sua solubilità è minore di quella del sale giallo; infatti:

a) La solubilità del sale bianco in acqua alla temperatura normale 17°,3 è del 0,0114 % di acqua, cioè gr. 1 di sale bianco richiedono, per sciogliersi completamente, gr. 8771 di acqua a 17,°3;

b) la solubilità in acqua bollente non può essere determinata con esattezza poichè il sale bianco si scioglie in acqua bollente, ma la soluzione è gialla, e per raffreddamento lascia cristallizzare il sale in giallo, e quindi anche in questo caso, non sappiamo se riferire il dato della solubilità nell'acqua bollente, al sale giallo oppure al sale bianco.

Ad ogni modo il dato che si otterrebbe sarebbe questo: Gr. 1 di sale bianco richiedono, per sciogliersi completamente, gr. 216 di acqua a 98°.

Constatato che il sale bianco è anidro, provai a ripetere l'esperienza, nelle medesime condizioni di prima, non solamente col sale disidratato, ma anche col sale idrato: la trasformazione avvenne ugualmente e quasi nello stesso tempo per tutti e due i sali impiegati.

Pensando che forse la luce poteva essere causa di questa trasformazione, feci la seguente esperienza:

Presi tre tubi da saggio ed in ognuno di essi introdussi 2 decigr. di sale giallo idrato, sospesi in 20 cm^3 di acqua distillata.

I. Un primo tubo fu esposto alla luce diffusa.

II. Un secondo tubo fu esposto anch'esso alla luce diffusa, limitando però la quantità di luce che doveva agire sul sale, avvolgendo completamente il tubo in carta nera, ma praticandovi in questa un piccolo foro.

III. Il terzo tubo fu tolto completamente all'azione della luce.

Trascorse 24 ore osservai che nel primo tubo la trasformazione del sale giallo in sale bianco era avvenuta completamente; nel secondo tubo il sale giallo, se non completamente, era però in gran parte trasformato in sale bianco e nel terzo la trasformazione cominciava appena a manifestarsi.

Avendo in questo caso operato con uguali quantità di sostanza e nelle medesime condizioni di tempo e di temperatura, si potrebbe affermare che la luce, quantunque non sia condizione necessaria, affretta però la lenta trasformazione del sale da composto giallo in composto bianco. Farò altre esperienze.

Oltre alla luce, anche il calore affretta la trasformazione; osservai questo fatto quando determinai la solubilità del sale giallo in acqua bollente, e che, come ho detto, mezz'ora dopo aver incominciata l'esperienza, il sale sospeso nella soluzione si era completamente trasformato in sale bianco.

Provai a ripetere l'esperienza operando su quantità diverse di acqua e di sale ed ottenni i medesimi risultati.

Il *sale bianco* si presenta sotto forma di una polvere finamente cristallizzata, perfettamente bianca, con lucentezza quasi adamantina. Osservato al microscopio si mostra totalmente formato da bellissimi cristalli prismatici, probabilmente triclini, trasparenti e perfettamente incolori.

Scaldato a 200°, comincia a colorarsi in giallo; innalzando la temperatura poi annerisce e infine, come fa il sale giallo, fonde scomponendosi verso 283°.

Scaldato su lamina di platino, si comporta in modo identico al sale giallo.

Si scioglie nell'acqua bollente comunicando alla soluzione un color giallo, e la soluzione per raffreddamento lascia cristallizzare il sale in fiocchi gialli, i quali, mantenuti nella propria acqua madre, in capo a un po' di tempo sono di nuovo totalmente trasformati nel sale bianco.

I cristalli del sale giallo ottenuto da recente cristallizzazione, osservati al microscopio, si presentano sotto la forma di lunghi e sottili prismi gialli, trasparenti e con qualche striatura longitudinale: alcuni riuniti parallelamente fra di loro, altri invece riuniti a ventaglio. Osservando attentamente il preparato, si scorgono, sparsi nella massa, molto rari però, alcuni dei piccoli cristalli prismatici caratteristici del sale bianco.

Se noi manteniamo questo sale nella propria acqua madre di cristallizzazione, osserviamo che la trasformazione in sale bianco avvien molto più lentamente che non per il sale secco all'aria e sospeso in acqua.

Preparai una soluzione satura bollente del sale giallo, la versai in una provetta e per raffreddamento ottenni la solita massa cristallizzata in giallo. Mantenni questo sale costantemente nella propria acqua madre, ed osservai che solamente dopo una quindicina di giorni il colore giallo cominciava sensibilmente a impallidire, gli aggregati e gli aghi cristallini anch'essi diventavano più minuti al punto che ad occhio nudo difficilmente vi si poteva scorgere una parvenza cristallina, mentre che il volume occupato dalla massa nel liquido diminuiva sensibilmente.

Trascorsi 25 giorni dall'inizio dell'esperienza prelevai dalla provetta un po' del sale sospeso in acqua e ne feci un preparato microscopico avendo l'avvertenza di chiudere i due vetrini con paraffina, affinchè, rimanendo il sale sempre in contatto della propria acqua madre, potessi osservare in questo modo a mio agio la trasformazione.

Il sale si presentava in aghi assai più fini che non nel sale giallo preparato di recente: questi aghi, inoltre, che vanno diventando sempre più minuti, vanno a raggrupparsi in tanti centri, come centri d'attrazione, disponendosi a fasci per poi formare dei fittissimi aggregati, quasi senza aspetto cristallino, che nel preparato microscopico si presentano come tante macchie

brune simili a bambagia nell'aspetto; frammisti a questi gruppi si scorgevano rarissimi cristallini prismatici bianchi.

Osservando ogni giorno attentamente il preparato si scorge che alcuni di quegli aggregati sopradescritti vanno via via diradandosi, lasciando scorgere entro di sè diversi dei cristalli prismatici bianchi in via di formazione.

In capo a due giorni i cristalli bianchi si erano fatti assai numerosi e voluminosi, scomparendo contemporaneamente poco alla volta i piccoli cristalli aciculari e al terzo giorno tutti i cristalli aciculari erano scomparsi per dar luogo ai cristalli bianchi completamente formati.

Contemporaneamente avvenne anche la trasformazione completa del sale contenuto nella provetta dalla quale prelevai il campione per il preparato microscopico. Infatti nello stesso giorno in cui verificai la completa trasformazione nel preparato, il sale contenuto nella provetta si era completamente raccolto in fondo al liquido e completamente trasformato nel sale bianco.

Il sale bianco si scioglie più facilmente nell'alcol bollente che non nell'acqua: la soluzione alcolica bollente, però, è gialla e lascia cristallizzare per raffreddamento il sale in forma di aghi gialli, disposti in forma raggiata; questi cristalli, mantenuti costantemente ed anche per molto tempo nella soluzione alcolica madre, non accennano neppur lontanamente ad alcuna trasformazione.

Come ho detto, il sale cristallizza dall'alcol in giallo, ma questo colore è molto più pallido che quello del sale cristallizzato dall'acqua.

Non è l'acqua contenuta nell'alcol la causa della colorazione gialla del sale in questione, come neppure lo è per il sale che cristallizza dall'acqua: questo lo dimostra il fatto che, mentre abbiamo un sale anidro bianco ottenuto per trasformazione del sale giallo in seno all'acqua, abbiamo pure un sale anidro giallo ottenuto per disidratazione, per mezzo del calore, del sale giallo idrato che cristallizza con $3H_2O$.

Sciogliendo il sale bianco in alcol a 60 $^0/_0$ o a 95 $^0/_0$, bollente, e lasciando la soluzione alcolica a sè, per raffreddamento cristallizza il sale in giallo molto chiaro.

Non è l'acqua contenuta nell'alcol la causa di questa nuova forma di cristallizzazione in giallo, perchè sciogliendo il sale bianco nell'alcol assoluto bollente ottenni per raffreddamento

della soluzione il sale cristallizzato in giallo e nella forma cristallina non solo, ma anche negli aggregati cristallini perfettamente identici a quelli ottenuti, operando nelle medesime condizioni, tanto dall'alcol a 60 % come dall'alcol a 95 %.

Dalle esperienze fatte, posso quindi dedurre che il color giallo del sale non è dovuto nè ad acqua nè ad alcol, poichè il sale bianco, sciolto sia nell'alcol come nell'acqua bollente, si trasforma nel sale giallo che si mantiene così colorato anche dopo essiccamento ad una temperatura da 100° a 150°.

Riassumendo, vediamo che il sale di chinina dell'isobutildicianglutaconimide, si presenta principalmente in due forme ben distinte:

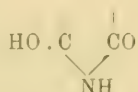
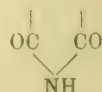
I) una forma gialla, poco stabile, che cristallizza in aghi leggeri e sottili con 3 molecole d'acqua, che anche dopo disidratazione conserva la colorazione gialla, e che, sospesa in acqua, a seconda delle condizioni di temperatura, di tempo, ecc., tende più o meno facilmente a trasformarsi in

II) una forma più stabile, bianca, minutamente cristallizzata in piccoli prismi incolori trasparenti e anidri molto meno solubili che non il sale giallo.

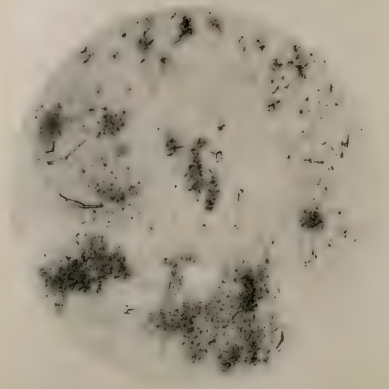
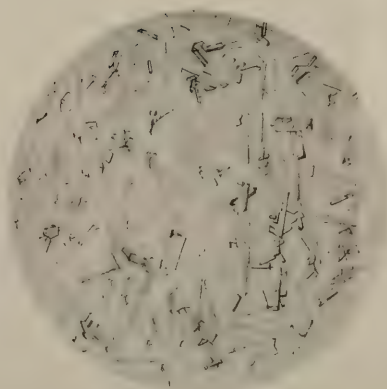
Questi due sali, così differenti d'aspetto e che differiscono per 3 molecole d'acqua di cristallizzazione, hanno verso il calore un comportamento pressochè identico, e, come abbiamo veduto dalle esperienze fatte, possiamo facilmente trasformarli l'uno nell'altro.

A che sarà dovuta questa trasformazione dalla forma gialla nella forma bianca?

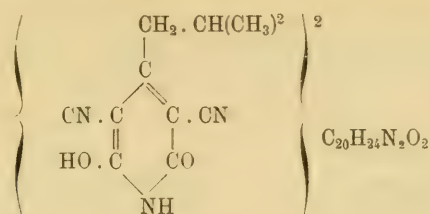
Siccome risulta dalle esperienze fatte che nè ad acqua, nè ad alcol di cristallizzazione è dovuta la colorazione gialla del sale, la causa della trasformazione può essere ricercata in un caso di isomeria, e cioè a seconda che noi dobbiamo ammettere nella formola di costituzione la presenza del gruppo

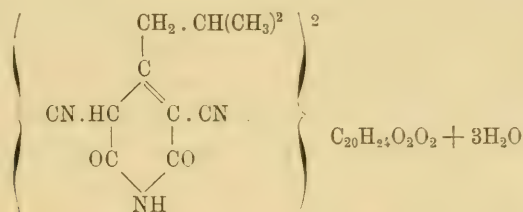
```
           |                          |    |
HO.C      CO    oppure del gruppo    OC   CO
    \    /                             \  /
     NH                                 NH
```

e precisamente per il sale bianco che dai caratteri che presenta

3

6

1
2
3
1
5
6

deve ritenersi come forma più stabile, possiamo ammettere la formola:

```
/          CH2 . CH(CH3)2   \ 2
|               |           |
|               C           |
|              / \\         |
|      CN . C      C . CN    |
|           ||     |        |  C20H24N2O2
|      HO . C      CO        |
|             \   /         |
\              NH           /
```

mentre che per il sale giallo. meno stabile. converrà forse meglio la formola:

```
/          CH2 . CH(CH3)2   \ 2
|               |           |
|               C           |
|              / \\         |
|      CN.HC       C . CN    |
|          |       |        |  C20H24O2O2 + 3H2O
|          OC      CO        |
|             \   /         |
\              NH           /
```

a meno che in questo caso, come in qualche altro caso analogo, non si tratti che di un fenomeno di dimorfismo. Non posso dire che si tratti di un caso di polimeria, non essendomi stato dato in nessun modo di potere determinare il peso molecolare causa la solubilità quasi nulla del sale in solventi convenienti.

A questo lavoro credo bene di dover unire alcune figure che rappresentano le diverse forme del sale osservate al microscopio e di cui:

la I rappresenta il sale giallo ottenuto da recente cristallizzazione dall'acqua;

la II i cristalli del sale bianco ottenuto per trasformazione del sale giallo sospeso in acqua;

la III e la IV la graduale trasformazione che avviene in sale bianco del sale giallo mantenuto nella propria acqua madre di cristallizzazione;

la V il sale giallo trasformato di recente in sale bianco per mezzo del calore in presenza d'acqua;

la VI la caratteristica forma dei cristalli e degli aggregati cristallini del sale giallo che cristallizza dall'alcol assoluto da una soluzione alcolica bollente del sale bianco.

Torino. Laboratorio del Prof. Guareschi. 1906.

Sul potere emissivo del carbone.

Nota del Prof. A. AMERIO.

1. — In un mio precedente lavoro [1] ho dimostrato che “ il carbone nelle fiamme non è *nero*, e neanche grigio per tutta l'estensione dello spettro, ma solo per le onde ≤ 1,5 μ; per le onde maggiori ha un potere assorbente relativamente debole „.

La ricerca però non si estendeva a onde inferiori a quelle della riga D e anzi, per esse la sensibilità era così piccola, che la conclusione vale solo per il rosso estremo e per l'ultrarosso.

Inoltre il fatto che la fiamma emetta come un corpo grigio le onde di lunghezza minore o eguale a μ. 1,5 non permette di stabilire se le singole particelle di carbone siano nere o grigie per le stesse onde, perchè essa è trasparente.

Mi sono proposto di estendere l'esame a tutta la parte luminosa, e di studiare se il carbone sia *nero* oppure *grigio* per quelle onde per le quali le fiamme sono *grigie*.

2. **Esame ottico dell'emissione.** — Mi sono servito di une spettroscopio di Bunsen, non avendo altro a mia disposizione.

Una metà della fenditura era direttamente illuminata da una fiamma di gas illuminante uscente verticalmente da un forellino circolare, posta lungo l'asse di un tubo argentato internamente e munito di una stretta fenditura verticale [2]: l'altra metà era coperta da un prismetto a riflessione totale, mediante il quale veniva illuminata da un'altra fiamma identica alla prima, ma libera.

All'oculare si vedevano le due metà del campo occupate dai due spettri che rendevo adiacenti quanto meglio era possibile, e coi colori dell'uno sul prolungamento degli stessi dell'altro.

[1] *L'emissione del carbone in alcune fiamme,* “ Atti Acc. delle Scienze in Torino „, gennaio 1906.

[2] Cfr. l. c., pag. 3 e seg.

Regolata la distanza in modo che l'estremo rosso apparisca ugualmente intenso nelle due metà del campo, non è possibile osservare alcuna differenza tra i due spettri nelle altri parti.

Ciò si verifica ugualmente bene, tanto se si osservano i due spettri completi, quanto se, per evitare una possibile illusione, dovuta all'irradiazione, si limita l'osservazione ad uno stretto intervallo di colore uniforme, ponendo una fenditura nell'oculare in vece del reticolo e facendola scorrere lentamente su tutta l'estensione dei due spettri colla rotazione del cannocchiale.

Lo stesso avviene se la regolazione delle distanze si fa per qualunque altro colore.

Si può dunque dire che l'emissione del carbone nella parte luminosa dello spettro è come per la parte ultrarossa fino a onde non maggiori di 1,5 μ., cioè proporzionale all'emissione del corpo *nero* e che quindi, almeno *nei limiti della modesta approssimazione consentitami dai mezzi*, la fiamma di gas illuminante emette come un corpo *grigio* per tutta la parte luminosa dello spettro.

3. Il carbone non è un *corpo nero*. — Si trattava di decidere se anche il carbonio emetta nello stesso intervallo come un corpo *grigio*, o se invece sia solo tale la fiamma per via della sua trasparenza, mentre le singole particelle emettano come un corpo *nero*.

Perciò ho ricorso ad una nota esperienza.

Si concentri la luce del sole mediante una grossa lente, sopra una delle fiamme di gas illuminante adoprate o, meglio, su quella di una candela.

Si produrrà su queste l'imagine brillante del sole che si vedrà come una macchia più luminosa del resto della fiamma.

A che cosa si deve attribuire questo aumento di luminosità delle particelle di carbone?

Se queste fossero nere, assorbirebbero tutta l'energia che le colpisce, si scalderebbero di più e perciò emetterebbero maggior quantità di luce e lo spettro di questa sarebbe continuo.

Se fossero grigie quest'aumento di emissione si verificherebbe ancora in parte, ma una porzione della luce ricevuta dalle particelle verrebbe riflessa e perciò lo spettro non sarebbe altro

che quello della luce solare sovrapposto allo spettro continuo della fiamma.

Ora se si dispongono successivamente vetri rossi, gialli, verdi, sul cammino dei raggi solari che convergono sulla fiamma, la macchia assume successivamente i loro colori, ciò che prova che il carbone vi possiede un certo potere riflettente.

Ma l'esperienza che meglio prova questo fatto è la seguente. Guardando la macchia splendente con uno spettroscopio, si vede lo spettro continuo, dovuto alla fiamma, attraversato da una stretta zona più brillante, la quale si distacca sul fondo in modo sempre più marcato a mano a mano che dal rosso si va verso il violetto, *ed è solcata da numerose righe di Fraunhofer.*

Questo spettro, dovuto evidentemente alla riflessione, è tanto più luminoso quanto più obbliqua sia la riflessione e ciò si vede spostando lo spettroscopio intorno alla fiamma. Che il distacco suo dallo spettro della fiamma cresca colla rifrangibilità dipende da ciò che la fiamma emette, in proporzione al sole, assai più debolmente nel violetto che nel rosso.

Queste esperienze provano ad evidenza che per tutta la parte luminosa dello spettro il carbone non è un corpo *nero*, e, unite con quelle del N. 2, provano che esso emette come un corpo *grigio.*

L'ultima esperienza descritta, fatta con la fiamma dell'acetilene, dà un risultato assai meno netto.

La macchia si vede assai meno bene, e allo spettroscopio si discerne ben poco.

La ragione dev'essere in massima quella stessa per cui l'emissione del carbone nella fiamma dell'acetilene è assai più prossima a quella del corpo nero che nella fiamma del gas illuminante.

4. L'emissione nel cratere dell'arco voltaico. — Se il carbone è *grigio* nelle fiamme, per qual ragione concentrando la luce solare sul cratere del carbone positivo dell'arco voltaico non si ottiene alcuna macchia luminosa?

Forse che il carbone ivi sia nero?

Data la grande differenza di temperatura e di condizioni tra il carbone positivo dell'arco e il carbone delle fiamme, ciò non sarebbe in contradizione coi risultati delle mie esperienze.

Tuttavia ritengo che questo dato negativo dell'esperienza sia da attribuirsi a queste altre cause:

1° La luce del cratere è assai più vivace di quella della candela e perciò il contrasto vi riesce più difficilmente.

2° Il carbone ivi costituisce una superficie concava, continua, scabrosa, e perciò si trova in condizioni migliori per l'assorbimento che non nelle singole particelle di una fiamma, perchè dell'energia incidente, all'infuori della parte riflessa normalmente o quasi, la rimanente viene assorbita. In conseguenza la riflessione è minore che nelle fiamme ove aumenta coll'obliquità.

3° Esso forma una massa compatta, per cui mentre il raggio di luce assorbito da una particella in una fiamma la riscalda, quello assorbito dalla superficie del cratere viene bensì trasformato in calore, ma in parte farà volatilizzare più rapidamente il carbone, in parte propagandosi alle parti vicine le riscalderà, di modo che la parte colpita dai raggi solari si scalderà ben poco se non punto.

4° Finalmente, *se anche avvenisse un aumento di temperatura, l'efficacia di questo sarebbe minore di quella di un eguale aumento nelle fiamme.*

Mi trattengo alquanto sopra questa parte, perchè è opinione diffusa che l'incremento della luce emessa, dovuto ad un aumento nella temperatura sia tanto maggiore quanto più elevata sia la temperatura.

Ciò che voglio dimostrare è conseguenza tanto della legge del Wien per la distribuzione dell'energia nello spettro, quanto, almeno qualitativamente, di quelle, più prossime al vero, di Planck, di Lummer e Jahnke; ma poichè le esperienze del Wanner hanno dimostrato che la legge del Wien vale finchè

$$\lambda\Theta \leq 3000,$$

dove le λ sono le lunghezze d'onda espresse in μ. e le Θ sono le temperature assolute, e quindi si può ritenere valga per tutta la parte luminosa dello spettro fino alla temperatura del cratere, mi servo di essa che è la più semplice.

Si ha dunque:

$$E_\lambda = C\lambda^{-5} e^{-\frac{c}{\lambda\Theta}} \tag{1}$$

dove E_λ indica l'energia emessa colla lunghezza d'onda λ, C e c sono due costanti.

Si sa poi che l'energia emessa nel massimo varia colla legge:

$$E_{\lambda\,max} = K\Theta^5 \tag{2}$$

e che:

$$\lambda_{max}\,\Theta = \text{cost} = 2930 = \frac{c}{5}. \tag{3}$$

Cerchiamo *quale sia l'onda per cui l'energia emessa varii in ragione della potenza* n^ma^ *di* Θ.

Indicando la lunghezza di quest'onda con λ_n sarà dunque:

$$E_{\lambda_n} = K_1\Theta^n$$

e perciò:

$$E_{\lambda_n}\Theta^{-n} = \text{costante}$$

ossia per la (1):

$$C\lambda_n^{-5}e^{-\frac{c}{\lambda_n\Theta}}\,.\,\Theta^{-n} = \text{cost.}$$

Derivando rispetto a Θ si ha:

$$-nC\lambda_n^{-5}e^{-\frac{c}{\lambda_n\Theta}}\,.\,\Theta^{-n-1} + C\lambda^{-5}e^{-\frac{c}{\lambda_n\Theta}}\,.\,\frac{c}{\lambda_n\Theta^2}\,\Theta^{-n} = 0$$

$$-nE_{\lambda_n}\Theta^{-n-1} + \frac{c}{\lambda_n}\,E_{\lambda_n}\Theta^{-n-2} = 0$$

$$-n + \frac{c}{\lambda_n}\,\Theta^{-1} = 0$$

da cui:

$$\lambda_n\Theta = \frac{c}{n}$$

e poichè la (3) ci dà:

$$\lambda_{max}\,\Theta = \frac{c}{5}$$

ne viene:

$$\lambda_n = \lambda_{max}\,.\,\frac{5}{n}\,. \tag{4}$$

Quest'espressione ci indica che l'onda in cui l'intensità dell'energia cresce in ragione della potenza n^{ma} della temperatura assoluta è lunga i $\frac{5}{n}$ dell'onda emessa col massimo d'intensità.

Anche dalle leggi di Lummer e Jahnke e di Planck risulta che il rapporto $\frac{\lambda_n}{\lambda_m}$ è costante.

Quindi quanto più corte sono le onde, tanto più rapido è l'incremento della loro emissione al crescere della temperatura, e col crescere di questa, le onde che sono emesse in ragione di una data potenza della temperatura sono sempre più spostate nella parte più rifrangibile dello spettro.

Applichiamo questo risultato.

Perciò consideriamo l'emissione del carbone nel giallo verde, cioè in quella regione per cui l'occhio ha la massima sensibilità ($\lambda = 0{,}53\ \mu$), e, per approssimazione, ammettiamo che la variazione totale dell'intensità della luce emessa, dovuta ad una variazione della temperatura, sia eguale alla variazione dell'intensità nel giallo verde, ciò che non è molto lontano dal vero, perchè nel rosso e nel giallo la variazione sarà minore, nel verde, nell'azzurro, nel violetto sarà maggiore, e d'altra parte ciò che più è efficace è la variazione nella regione di massima sensibilità.

Ricordiamo che nelle fiamme di gas illuminante (¹) $\lambda_{max} = \mu \,.\, 1{,}3$ circa.

Indicando con n la potenza con cui varia l'intensità del giallo verde per $\lambda = 0{,}53$ la [4] ci dà:

$$n = 5\,\frac{\lambda_{max}}{0{,}53} = 12{,}3\ldots$$

quindi nella regione di sensibilità massima l'emissione è proporzionale alla potenza 12,3 di Θ. Sarà dunque:

$$E_\lambda = K_1 \Theta^{12,3}$$

da cui:

$$\frac{dE_\lambda}{E_\lambda} = 12{,}3\,\frac{1}{\Theta}\,d\Theta.$$

Se l'aumento dE_λ fosse $\frac{1}{10}$ di E_λ ne verrebbe:

$$\frac{1}{10} = \frac{12{,}3}{\Theta}\,d\Theta.$$

(¹) Cfr. l. c., pag. 13.

Nelle fiamme di gas illuminante posto:

$$\Theta = 2250^{\circ}.$$

risulta:

$$d\Theta = \frac{2250^{\circ}}{10 \times 12{,}3} = 18^{\circ} \ldots$$

Basterebbe dunque l'aumento di 18° perchè la luce emessa crescesse di $\frac{1}{10}$.

Pel cratere invece, ammesso $\Theta = 4000^{\circ}$ si ha, supposto che emetta come corpo nero o grigio:

$$\lambda_{max} = \frac{2930}{4000} = 0{,}73 \ldots$$

e

$$n_1 = 5 \frac{\lambda_{max}}{0{,}53} = 6{,}9.$$

Quindi nel massimo di sensibilità l'emissione è proporzionale alla potenza 6,9 di Θ.

Ripetendo il ragionamento precedente per uno stesso incremento relativo risulta:

$$d\Theta = \frac{4000}{10 \times 6{,}9} = 58^{\circ},$$

cioè pel cratere occorrerebbe un aumento di temperatura più che triplo di quello che è necessario nella fiamma del gas illuminante, perchè l'emissione della luce aumentasse nella stessa proporzione e quindi nell'esperienza della macchia luminosa si producesse un contrasto eguale.

Abbiamo visto per contro che l'aumento di temperatura dev'essere nel cratere nullo o sensibilmente inferiore a quello delle fiamme e, per conseguenza, l'incremento dell'emissione dovuto ad esso dovrà essere assai minore.

5. — Riassumendo si ha dunque che, per le varie ragioni esposte nel n. 4, non è provato che il carbone nel cratere dell'arco voltaico sia *nero;* che per contro il carbone nelle fiamme non è *nero*, bensì *grigio* per tutta la parte dello spettro che va da circa $\lambda = 0{,}4\ \mu$ a $\lambda = 1{,}5\ \mu$, e che per le onde più lunghe è ancor meno assorbente.

Reggio Calabria, giugno 1906.

Sopra il calcolo della profondità degli ipocentri nei movimenti sismici.

Nota di G. B. RIZZO.

(Con una Tavola).

1. — Nello studio dei movimenti sismici ha una grande importanza la determinazione della profondità da cui proviene la scossa, o, come si dice, la determinazione della profondità dell'*ipocentro* (in relazione col nome di *epicentro* dato al punto, da cui si propaga il movimento alla superficie terrestre), sebbene siamo ben lungi dall'avere un centro, che possa considerarsi come un punto, dal quale si sprigioni l'energia del terremoto.

Ma bisogna confessare che tutti i metodi escogitati finora per risolvere il problema non dànno risultati soddisfacenti. Le formole proposte dal Mallet, dal Seebach, dal v. Lasaulx e da altri sismologi (1), essendo fondate sopra principî errati, come quello che l'azione sismica irradii dall'ipocentro con raggi di forza rettilinei, i quali conservano inalterata la loro direzione, anche quando vengono a manifestare la loro azione alla superficie terrestre, conducono a risultati illusorî.

Più fondato appare il metodo proposto dallo Schmidt (2). Osservando che tutto lo spazio, a cui si estende l'azione sismica sulla superficie terrestre, viene diviso in due regioni da una circonferenza descritta intorno all' epicentro, sulla quale la velocità di propagazione, che è variabile con la distanza, presenta un valore minimo, egli ammette che la superficie racchiusa dentro questa circonferenza riceva l' urto diretto, e che al di

(1) Cfr. S. Günther, *Handbuch der Geophysik*, Bd. I, 468. Stuttgart, 1897.

(2) " Jahreshefte des Vereins für Väterländische Naturkunde „. XLIV Jahr., 248, 1888. — A. Sieberg, *Handb. der Erdbebenkunde*, 277. Braunschweig, 1904.

fuori della medesima il movimento si propaghi per la rifrazione dei raggi provenienti dall' ipocentro. Egli ammette ancora che codesto valore minimo della velocità misuri la velocità di propagazione intorno all' epicentro, e che la profondità di questo punto sia compresa fra il raggio della circonferenza di minima velocità e la lunghezza dello spazio percorso dal movimento sismico, intorno all'ipocentro, nell'intervallo di tempo che è determinato dal punto, in cui la tangente alla curva odografa (1) incontra l'asse delle ordinate.

Secondo questi principî la profondità dell' ipocentro nel grande terremoto della Calabria, del giorno 8 settembre 1905, si potrebbe valutare nel modo seguente.

Come risulta dalla Memoria presentata a questa Reale Accademia (2), la velocità delle onde, che costituiscono il principio della fase principale, intorno all' ipocentro, sarebbe misurata, nell'ipotesi dello Schmidt, da km. 2.4 al minuto secondo, e siccome la tangente nel flesso dell'odografa incontra l'asse delle ordinate nel punto corrispondente a 2 minuti primi, il limite numericamente inferiore della profondità dell'ipocentro sarebbe di 290 km. e il limite superiore sarebbe dato da 800 km., che è precisamente il raggio della circonferenza sulla quale la velocità è minima. Quindi si avrebbe, come profondità probabile dell'ipocentro del terremoto, il valore di circa 550 km.

Ora, se si riflette che gli effetti disastrosi della scossa furono limitati a un'area oblunga, avente la maggior lunghezza di circa 130 km., da Palmi (prov. di Reggio) a Montalto-Uffugo (prov. di Cosenza), e la larghezza di poche diecine di chilometri; che l'area disastrosissima fu limitata a pochi chilometri quadrati e che il movimento non fu più menomamente avvertito alla distanza di 450 km. dall'epicentro, a Termini Imerese in Sicilia, non si può far a meno di trovare esagerato anche il limite più piccolo, di 290 km., assegnato alla profondità dell'ipocentro.

2. — Studiando la legge colla quale varia la velocità di propagazione dei movimenti sismici intorno all' epicentro, me-

---

(1) Si intende qui la parola *odografa* nel senso dello Schmidt e non nel senso dell'Hamilton.

(2) *Sulla velocità di propagazione delle onde sismiche nel terremoto della Calabria del giorno 8 settembre 1905*, vol. LVII, 1906.

diante le odografe di Schmidt, sono stato condotto a determinare la profondità dell'ipocentro con un altro metodo che qui espongo. Nella Memoria or ora ricordata ho dimostrato che le velocità, con le quali si è propagato il movimento principale (1) fra 0 e 100 km., fra 100 e 200, ecc., sono quelle indicate nel seguente specchietto:

Distanza Km.	Velocità Km./sec.
0-100	20.8
100-200	13.9
200-300	5.2
300-400	3.6
400-500	3.3
500-600	2.8
600-700	2.6
700-800	2.4
800-900	2.5
900-1000	2.6
1000-1500	2.9
1500-2000	3.4
2000-2500	3.7
2500-3000	4.2

E costruendo con questi elementi la curva delle velocità, che diremo *effettive*, si ottiene la curva EFG (fig. 1), nella quale il punto F corrisponde al flesso dell'odografa di Schmidt.

Dalla curva medesima si vede subito che, dopo il punto di flesso, ossia oltrepassata la circonferenza di minima velocità, questa cresce molto regolarmente col crescere della distanza dall'epicentro e probabilmente cresce, perchè, come ha dimostrato il Kusakabe (2), la velocità di propagazione di un movimento

(1) Poichè è certo che il movimento al quale corrisponde la fase principale della registrazione si propaga alla superficie della terra, mentre è ancora oggetto di controversia se i movimenti delle fasi preliminari si propaghino alla superficie, oppure lungo la corda, o sopra una sfera concentrica alla superficie terrestre, ma di raggio minore, mi limito a considerare qui le onde del movimento principale.

(2) S. Kusakabe, *On the modulus of Rigidity of Rocks*; " Publ. of the Earthq. Investig. Comm. in For. Lang. ", N. 14. Tokyo, 1903.

vibratorio, nei materiali costituenti la crosta terrestre, aumenta col diminuire dell'ampiezza della oscillazione.

Prolungando il ramo FG della curva ora descritta, fra il punto F e l'asse delle ordinate, si ha il tratto AF e si può ben supporre che questo tratto rappresenti l'andamento *normale* della velocità col diminuire della distanza verso l'epicentro. E da questo tratto della curva si ottengono i seguenti valori *normali* della velocità:

Distanza Km.	Velocità Km./sec.
0-100	1.40
100-200	1.55
200-300	1.70
300-400	1.80
400-500	1.95
500-600	2.10
600-700	2.20
700-800	2.35
800-900	2.45
900-1000	2.56
. . .	. . .
. . .	. . .

I quali valori concordano assai bene con quelli dedotti dal Kusakabe (1) per alcuni dei materiali che costituiscono la crosta terrestre, partendo dalle determinazioni sperimentali del relativo modulo di rigidità, come si vede dai seguenti esempi:

Materiali	Densità	Modulo di rigidità (C. G. S.) $\times 10^{10}$	Velocità Km./sec.
Serpentino .	2.71	24.8-52.2	3.03-4.40
Marmo . . .	2.64	8.63-9.15	1.82-1.85
Tufo	1.91	5.73-6.18	1.74-1.80
Granito . . .	2.57	5.71	1.49
Riolite . . .	2.36	2.74-3.12	1.07-1.16
Arenaria . .	2.21	0.72-1.25	0.57-0.94

(1) Loc. cit.

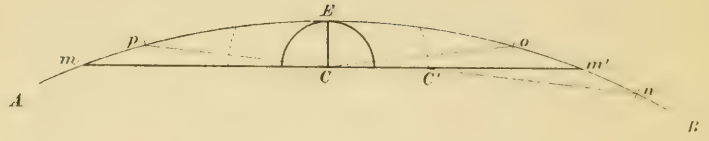
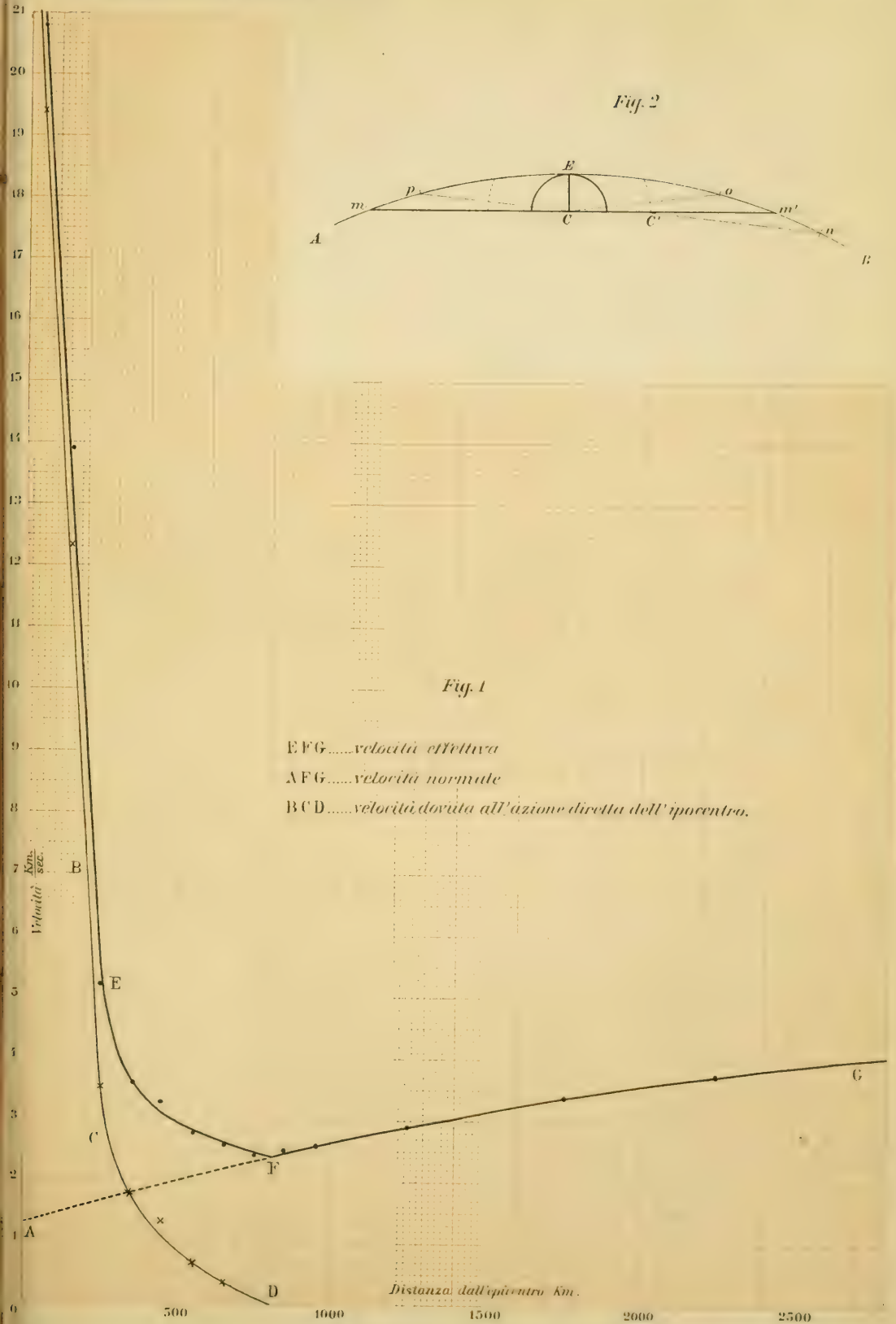



Fig. 2
E
p
o
m
m'
C
C'
A
n
B
Fig. 1
E F G......velocità effettiva
A F G......velocità normale
B C D......velocità dovuta all'azione diretta dell'ipocentro.
Velocità Km./sec.
Distanza dall'epicentro Km.
B
E
C
F
A
D
G
0
500
1000
1500
2000
2500
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21

E facendo la differenza fra i valori effettivi V_E e i valori normali V_N si ottiene:

Dist. dell'epic. Km.	$V_E - V_N$ Km./sec.
0-100	19.4
100-200	11.35
200-300	3.5
300-400	1.8
400-500	1.35
500-600	0.68
600-700	0.36
700-800	0.0
800-900	0.0
900-1000	0.0

È naturale ammettere che queste differenze siano dovute all'azione degli impulsi provenienti direttamente dall' ipocentro, perciò, costruendo con questi elementi la curva BCD, possiamo dire che essa rappresenta il valore della velocità dovuta alla azione diretta che proviene dal centro di scuotimento.

3. — Ora si tratta di determinare quale sia la profondità di questo ipocentro che esercita una tale azione sulla velocità superficiale, a partire dall' epicentro fino alla circonferenza di velocità minima, dove la velocità prende il suo valore normale.

Sia AEB la traccia di una porzione della superficie terrestre intorno all'epicentro E di un movimento sismico, e sia C l'ipocentro (fig. 2): potrebbe darsi che l'azione diretta proveniente da C, giunta sopra una superficie *qualunque* di raggio CC', si propagasse in una direzione come $C'n$, portando la sua azione acceleratrice al disotto del piano parallelo all'orizzonte passante per C; ma può anche darsi che codesta azione diretta si propaghi solamente in alto, come fra o e p, facendo un angolo solido minore di 2π intorno all'ipocentro. Perciò si può ammettere come più probabile l'ipotesi, che l'azione acceleratrice dell'ipocentro, la quale va rapidamente decrescendo, si annulli appunto sopra la circonferenza determinata dall'intersezione del

piano parallelo all'orizzonte condotto per C con la superficie terrestre. In questa ipotesi *la profondità dell'ipocentro di una scossa è misurata dall'altezza della calotta sferica limitata dalla circonferenza di velocità minima.*

Nel caso del terremoto della Calabria, che abbiamo considerato, il raggio della circonferenza di minima velocità è 800 km., l'ampiezza dell'arco di circolo massimo della superficie terrestre che è compreso dentro questa circonferenza è di circa 14°.2, e l'altezza della calotta sferica limitata dalla medesima è di circa 50 km. E si può conchiudere che questa è stata la profondità probabile del centro della scossa.

Sulla breunnerite di Avigliana.

Osservazioni del Dr. GIUSEPPE PIOLTI

Libero Docente di Petrografia ed Ass. al Museo Mineralogico della R. Università di Torino.

Nel giugno dello scorso anno l'allievo ingegnere sig. Giacomo Vinassa mi diede in esame un minerale costituito da grossi romboedri, aventi l'aspetto di dolomite, ch'egli aveva trovato in una cava di serpentino presso Avigliana.

Li 9 settembre dello stesso anno mi recai sul luogo ed in una litoclasi trovai la supposta dolomite in grossi romboedri aventi un colore bruno chiaro con tendenza al violaceo e talora quasi incolori: in alcuni la diagonale maggiore delle facce raggiunge la lunghezza di 35 millimetri.

Quando però procedetti ad una misura angolare riconobbi trattarsi non di dolomite, ma bensì di *magnesite* o di *breunnerite*, poichè dalla media di cinque osservazioni ottenni un valore di

$$72^\circ\ 29'\ 42''.$$

Allora parvemi utile l'intraprendere al riguardo alcune ricerche perchè la breunnerite (per quanto io sappia) finora non venne incontrata che una volta sola nella valle di Susa. Nei

trattati non si fa menzione di tale località; però nella raccolta del Museo mineralogico dell'Università di Torino havvi un esemplare rappresentato da piccoli cristalli nericci, nel talco, e coll'indicazione vaga: *monti prospicienti S. Ambrogio, Valle di Susa*. D'altronde è cosa nota come tanto la magnesite pura come la magnesite ferrifera (breunnerite) *in cristalli* sono minerali abbastanza rari.

Il minerale scaldato diventa scuro, ma non nero come l'ankerite ed al microscopio vedesi, per trasparenza, una tinta uniforme di color marrone dovuta al fatto che pel riscaldamento all'aria il protossido di ferro si cambia in sesquiossido. Non diventa magnetico col riscaldamento.

I saggi chimici qualitativi mi indicarono solo la presenza della magnesia, del ferro e di tracce di manganese. Allo spettroscopio nessuna traccia di calcio.

Siccome in posto riconobbi che il minerale è talora associato a *pirite* e spesso anche a *sovero di monte*, così si spiega perchè riducendo a lamina sottile romboedri di sfaldatura osservinsi non di rado i detti minerali inclusi, la pirite poi essendo più o meno alterata.

È quindi evidente che tanto la pirite come l'anfibolo vennero inclusi dal carbonato e che perciò tale minerale è il risultato di un deposito proveniente da acque mineralizzate. Ritengo poi che tali acque dovessero contenere una notevole quantità di anidride carbonica, perchè nella cava di serpentino di cui parlo ed in un'altra litoclasi incontrai piccole sferule costituite anche da breunnerite e dovute all'azione solvente del detto gaz sul carbonato. Infatti rompendole compare netta la sfaldatura romboedrica, per cui è evidente che queste sferule non sono che un effetto di corrosione di romboedri preesistenti.

D'altronde l'osservazione sul posto mi dimostrò non esservi alcuna relazione paragenetica fra la roccia incassante e la breunnerite.

Il serpentino non ha nulla di particolare: i preparati microscopici fanno riconoscere che si tratta d'un serpentino derivante dall'anfibolo.

Nella stessa cava, ma in un altro punto, incontransi anche in litoclasi romboedri di dolomite. Le varie gradazioni di tinta presentate dal minerale in esame sono dovute evidentemente

alla maggiore o minore quantità di piccole proporzioni di limonite ed alle tracce di manganese, per cui riesce assai difficile l'ottenere frammenti affatto incolori. Tuttavia riuscii ad isolare coll'aiuto di una lente parecchi piccoli romboedri di sfaldatura quasi affatto incolori e di questi mi servii per l'analisi quantitativa.

La percentuale della magnesia è rappresentata da 43,08, quella del protossido di ferro da 5,87 e quindi il minerale ha la seguente composizione:

$MgCO^3$	=	90,47
$FeCO^3$	=	9,45
$MnCO^3$	=	tr.
		99,92

Ne conclusi quindi trattarsi della varietà ferrifera di magnesite, detta *breunnerite*, che secondo gli autori contiene dal 5 al 10 °/₀ di protossido di ferro.

Allora ritenni anche opportuno di calcolare la costante in funzione del valore angolare da me trovato ed ottenni:

$$c = 0,808642.$$

Secondo il Dufrénoy (1) l'angolo del romboedro di sfaldatura nella breunnerite è di 107° 30'; secondo il Des Cloizeaux (2) l'angolo oscilla da 107° 23' a 107° 26'.

Finalmente il Kokscharow (3) dà un valore di 107° 23' 40''.

Secondo le mie osservazioni si avrebbe un valore di

107° 30' 18''.

Come è noto, forma cristallina, costanti fisiche e composizione chimica d'un minerale sono certamente collegate fra loro, ma il nesso esistente è ancora nascosto, in causa dell'imperfezione di alcune analisi chimiche e della non esattezza matematica delle misure goniometriche. Difatti dal confronto di parec-

---

(1) *Traité de Minéralogie*, 2ᵉ éd., t. deuxième, 1856, p. 425.
(2) *Manuel de Minéralogie*, II, 1°, 1874, p. 141.
(3) *Materialien zur mineralogie Russlands*, VII Band., 1875, p. 181.

chie analisi di carbonati costituiti da mescolanze isomorfe di carbonato di magnesia e di carbonato di ferro coi relativi valori angolari risulterebbe che aumentando la proporzione del ferro diminuisce il valore dell'angolo di sfaldatura. Però vi sono delle eccezioni, poichè una magnesite ferrifera analizzata da (1) Marchand e Scheerer con una percentuale di carbonato di ferro rappresentata da 1,25 % ha un angolo di 107° 28′ ed un'altra analizzata da De Hauer con una percentuale di carbonato di ferro rappresentata da 0,69 % ha un angolo di 107° 16′.

Nei trattati di mineralogia non si fa cenno dell'indice di rifrazione della magnesite e della breunnerite, forse per la grande difficoltà di trovare cristalli limpidi che permettano una misura esatta. Solo nelle *tabelle* dello Schroeder van der Kolk (2) nelle quali gl'indici di rifrazione sono determinati con liquidi ad indice di rifrazione noto, si trova indicato per la magnesite e per il raggio ordinario il valore di 1,72. Col metodo del De Chaulnes io trovai per detto raggio un valore di

1.715.

Senza voler nulla togliere a ciò che hanno di buono i dati delle tabelle suaccennate, mi permetto però di osservare che tali dati si riferiscono a minerali la cui composizione è espressa soltanto dalla formola tipica, mentre altri elementi accessori indicati dalle analisi potrebbero portare una variazione nell'indice di rifrazione, come per es. per la magnesite contenente una certa quantità di carbonato di ferro.

---

(1) Des Cloizeaux, Op. cit., p. 138.

(2) *Tabellen zur Mikroskopischen Bestimmung der Mineralien nach ihrem Brechungsindex.* Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage von E. H. M. Beckman. Wiesbaden, 1906, p. 50 e 51.

Sopra alcune formole fondamentali della dinamica dei mezzi isotropi.

Nota 2ª del Socio CARLO SOMIGLIANA.

Oggetto di questa Nota è la rappresentazione della dilatazione cubica θ mediante gli elementi fondamentali del movimento.

Mi propongo anche in questo caso di non applicare alcuno dei procedimenti solitamente usati di integrazione rispetto al tempo e di successivo passaggio al limite; non farò quindi uso del teorema di Betti, ma mi fonderò ancora esclusivamente sulla formola di Kirchhoff. Un procedimento simile fu già da me usato per arrivare alla formola della dilatazione nel caso statico, quando si prendono come fondamento le equazioni generali dell'elasticità di Beltrami, relative ad uno spazio non euclideo di curvatura costante (*). Riferirò qui brevemente per il caso ordinario quel procedimento di calcolo — che è anche il più rapido e spedito per giungere direttamente alla formola di Betti — onde mettere maggiormente in evidenza le analogie col caso dinamico che tratterò poi.

§ 1.

Indicando ancora con ξ, η, ζ le componenti della rotazione elementare, poniamo:

$$\Omega_1 = 2\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) \quad \Omega_2 = 2\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) \quad \Omega_3 = 2\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\right).$$

(*) *Sopra la dilatazione cubica di un corpo elastico isotropo in uno spazio di curvatura costante* (" Annali di Mat. ", Ser. II, T. XVI).

Dalle equazioni d'equilibrio, moltiplicando per $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}$, $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}$, $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}$, sommando ed integrando allo spazio S, si ottiene:

$$(1) \qquad a^2 \int_S \Delta_1\left(\theta, \frac{1}{r}\right) dS + b^2 \int_S \left(\Omega_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \Omega_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \Omega_3 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) dS + $$
$$+ \int_S \left(X \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + Y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + Z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) dS = 0.$$

Ma rappresentando la funzione θ mediante la formola di Gauss, si ha:

$$4\pi\theta(x', y', z') = \int_s \theta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} ds + \int_S \Delta_1\left(\theta, \frac{1}{r}\right) dS$$

quindi per la (1):

$$(2) \quad -4\pi a^2 \theta = -a^2 \int_S \theta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS + b^2 \int_S \left(\Omega_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \Omega_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \Omega_3 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) dS +$$
$$+ \int_S \left(X \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + Y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + Z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) dS.$$

Poniamo ora:

$$\omega_1 = 2\left(\zeta \frac{\partial y}{\partial n} - \eta \frac{\partial z}{\partial n}\right), \quad \omega_2 = 2\left(\xi \frac{\partial z}{\partial n} - \zeta \frac{\partial x}{\partial n}\right), \quad \omega_3 = 2\left(\eta \frac{\partial x}{\partial n} - \xi \frac{\partial y}{\partial n}\right).$$

Si ha per le solite formole di trasformazione:

$$\int_S \Omega_1 \frac{dS}{r} = \int_s \omega_1 \frac{ds}{r} + 2\left(\frac{\partial}{\partial z'} \int_S \eta \frac{dS}{r} - \frac{\partial}{\partial y'} \int_S \zeta \frac{dS}{r}\right)$$

e scrivendo le altre due formole analoghe a questa, derivando rispetto ad x', y', z' e sommando si ottiene:

$$(3) \quad \int_S \left(\Omega_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \Omega_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \Omega_3 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) dS = \int_s \left(\omega_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \omega_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \omega_3 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) ds.$$

Perciò la (2) si può scrivere:

$$(4)\quad -4\pi a^2\theta = -a^2\int_s \theta\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,ds + b^2\int_s\left(\omega_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + \omega_2\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + \omega_3\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)ds + $$
$$+ \int_S\left(X\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + Y\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + Z\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)dS.$$

Ora alla superficie del corpo si ha:

$$\frac{L}{k} + (a^2 - 2b^2)\,\theta\,\frac{\partial x}{\partial n} + 2b^2\frac{\partial u}{\partial n} + b^2\omega_1 = 0$$

. . . .

ove L, M, N rappresentano le componenti della pressione esterna unitaria, e k la densità:

Da queste equazioni risulta la relazione:

$$0 = \frac{1}{k}\int_s\left(L\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + M\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + N\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)ds + (a^2 - 2b^2)\int_s\theta\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,ds +$$
$$+ b^2\int_s\left\{\left(2\frac{\partial u}{\partial n} + \omega_1\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + \left(2\frac{\partial v}{\partial n} + \omega_2\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + \left(2\frac{\partial w}{\partial n} + \omega_3\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right\}ds.$$

Sommando membro a membro colla (4), si ottiene:

$$-4\pi a^2\theta = \int_S\left(X\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + Y\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + Z\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)dS + \frac{1}{k}\int_s\left(L\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + M\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + N\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)ds -$$

(5)

$$-2b^2\int_s\theta\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}ds + 2b^2\int_s\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \omega_1\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial n} + \omega_2\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + \left(\frac{\partial w}{\partial n} + \omega_3\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right\}ds.$$

Se indichiamo con S la somma di questi due ultimi integrali di superficie — toltone il fattore $2b^2$ — si può scrivere:

$$S = \int_s\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \omega_1 - \theta\frac{\partial x}{\partial n}\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial n} + \omega_2 - \theta\frac{\partial y}{\partial n}\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + \left(\frac{\partial w}{\partial n} + \omega_3 - \theta\frac{\partial z}{\partial n}\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right\}ds.$$

Ma si ha:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \omega_1 = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}$$

per cui applicando la formola (8) e le analoghe della Nota 1ª, pel caso che non compaia la variabile t, si trova:

$$(6)\qquad \begin{aligned} &\int_s \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \omega_1 - \theta\frac{\partial x}{\partial n}\right)\frac{ds}{r} = \int_s (v\Omega_{xy} + w\Omega_{xz})\, ds. \\ &\int_s \left(\frac{\partial v}{\partial n} + \omega_2 - \theta\frac{\partial y}{\partial n}\right)\frac{ds}{r} = \int_s (w\Omega_{yz} + u\Omega_{yx})\, ds \\ &\int_s \left(\frac{\partial w}{\partial n} + \omega_3 - \theta\frac{\partial z}{\partial n}\right)\frac{ds}{r} = \int_s (u\Omega_{zx} + v\Omega_{zy})\, ds. \end{aligned}$$

Derivando rispetto ad x', y', z' e sommando, troviamo:

$$S = -\int_s \left\{ u\left(\frac{\partial\Omega_{yx}}{\partial y'} + \frac{\partial\Omega_{zx}}{\partial z'}\right) + v\left(\frac{\partial\Omega_{zy}}{\partial z'} + \frac{\partial\Omega_{xy}}{\partial x'}\right) + w\left(\frac{\partial\Omega_{xz}}{\partial x'} + \frac{\partial\Omega_{yz}}{\partial y'}\right)\right\} ds$$

e sostituendo nella (5) si ha la formola:

$$(7)\qquad \begin{aligned} -4\pi a^2\theta = &\int_S \left(X\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + Y\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + Z\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right) dS + \frac{1}{k}\int_s \left(L\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + M\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + N\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right) ds - \\ &-2b^2\int_s \left\{ u\left(\frac{\partial\Omega_{yx}}{\partial y'} + \frac{\partial\Omega_{zx}}{\partial z'}\right) + v\left(\frac{\partial\Omega_{zy}}{\partial z'} + \frac{\partial\Omega_{xy}}{\partial x'}\right) + w\left(\frac{\partial\Omega_{xz}}{\partial x'} + \frac{\partial\Omega_{yz}}{\partial y'}\right)\right\} ds \end{aligned}$$

la quale coincide colla formola di Betti, poichè si verifica immediatamente che:

$$(8)\qquad \frac{\partial\Omega_{yx}}{\partial y'} + \frac{\partial\Omega_{zx}}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'}, \quad \frac{\partial\Omega_{zy}}{\partial z'} + \frac{\partial\Omega_{xy}}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'},$$

$$\frac{\partial\Omega_{xz}}{\partial x'} + \frac{\partial\Omega_{yz}}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'}$$

quando si ricordi il significato delle espressioni che abbiamo rappresentato con Ω_{yz}, Ω_{zx}, ... nel § 4 della Nota 1ª.

§ 2.

Per applicare un procedimento analogo alla rappresentazione della θ nel caso dinamico, ricordiamo che dalle equazioni del movimento si deduce:

$$(D_t^2 - a^2\Delta_2)\theta = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

e quindi la formola di Kirchhoff, scritta sotto la forma (3) della Nota 1ª, ci dà immediatamente:

$$(9) \quad 4\pi a^2\theta = a^2 \int_s \left\{ [\theta]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r}\left[\frac{\partial \theta}{\partial n}\right]_a \right\} ds + \int_S \left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right]_a \frac{dS}{r}.$$

Occupiamoci dapprima dell'integrale di spazio. Per una formola analoga alla (9) (§ 4, Nota 1ª) tenendo conto della formola di derivazione (13) (§ 5), si ha:

$$(10) \qquad \int_S \left[\frac{\partial X}{\partial x}\right]_a \frac{dS}{r} = -\int_s [X]_a \frac{\partial x}{\partial n}\frac{ds}{r} - \int_S [X]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dS$$

e altre due formole simili relative ad Y, Z. Ora dalle equazioni indefinite del movimento che devono essere verificate anche in punti vicini quanto si vuole alla superficie s, si ricava:

$$a^2\frac{\partial \theta}{\partial n} + X\frac{\partial x}{\partial n} + Y\frac{\partial y}{\partial n} + Z\frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\partial^2 U_n}{\partial t^2} - b^2\left(\Omega_1\frac{\partial x}{\partial n} + \Omega_2\frac{\partial y}{\partial n} + \Omega_3\frac{\partial z}{\partial n}\right)$$

ove U_n indica, come nella Nota precedente, la componente del moto nella direzione della normale interna. Abbiamo così:

$$(11) \quad \int_S \left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right]_a \frac{dS}{r} = a^2\int_s \left[\frac{\partial \theta}{\partial n}\right]_a \frac{ds}{r} - \int_s \left[\frac{\partial^2 U_n}{\partial t^2}\right]_a \frac{ds}{r} -$$

$$+ b^2\int_s \left[\Omega_1\frac{\partial x}{\partial n} + \Omega_2\frac{\partial y}{\partial n} + \Omega_3\frac{\partial z}{\partial n}\right]_a \frac{ds}{r} -$$

$$- \int_S \left([X]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + [Y]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + [Z]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) ds.$$

Ma essendo identicamente:

$$\int_S \left[\frac{\partial \Omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \Omega_3}{\partial z}\right]_a \frac{dS}{r} = 0$$

e applicando una trasformazione analoga alla precedente (10), troviamo:

$$\int_s \left[\Omega_1 \frac{\partial x}{\partial n} + \Omega_2 \frac{\partial y}{\partial n} + \Omega_3 \frac{\partial z}{\partial n}\right]_a \frac{ds}{r} =$$

$$= -\int_S \left([\Omega_1]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + [\Omega_2]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + [\Omega_3]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) dS$$

per cui, sostituendo nella (10) e poi nella (9), si trova:

$$-4\pi a^2 \theta = -a^2 \int_s [\theta]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} ds + \int_s \left[\frac{\partial^2 U_n}{\partial t^2}\right]_a \frac{ds}{r} +$$

$$+ \int_S \left\{[b^2\Omega_1 + X]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + [b^2\Omega_2 + Y]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + [b^2\Omega_3 + Z]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right\} dS.$$

Questa formola è la corrispondente della (2) trovata nel caso statico.

Ora osserviamo che, applicando la trasformazione d'integrali (10), si ha:

$$\int_S [\Omega_1]_a \frac{dS}{r} = \int_s [\omega_1]_a \frac{ds}{r} - 2\int_S \left([\eta]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - [\zeta]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\right) dS$$

o anche, per la nostra formola di derivazione:

$$\int_S [\Omega_1]_a \frac{dS}{r} = \int_s [\omega_1]_a \frac{ds}{r} + 2\frac{\partial}{\partial z'} \int_S [\eta]_a \frac{dS}{r} - 2\frac{\partial}{\partial y'} \int_S [\zeta]_a \frac{dS}{r}.$$

Scrivendo le altre due formole analoghe, derivando rispetto ad x', y', z' e sommando, si trova:

$$\int_S \left([\Omega_1]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + [\Omega_2]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + [\Omega_3]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) dS =$$

$$= \int_s \left([\omega_1]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + [\omega_2]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + [\omega_3]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) ds.$$

Questa formola è la corrispondente della (3).

Sostituendo nella (2) si ha:

$$-4\pi a^2\theta = -a^2\int_s [\theta]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} ds + \int_s \left[\frac{\partial^2 U_n}{\partial t^2}\right]_a \frac{ds}{r} +$$

$$+ b^2 \int_s \left([\omega_1]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + [\omega_2]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + [\omega_3]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) ds +$$

$$+ \int_S \left([X]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + [Y]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + [Z]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) dS$$

che equivale alla (4).

Ora dalle equazioni che devono essere soddisfatte alla superficie e che sono della stessa forma di quelle statiche, considerate nel paragrafo precedente, noi possiamo ricavare la relazione seguente:

$$0 = \frac{1}{k}\int_s \left([L]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + [M]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + [N]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) ds +$$

$$+ (a^2 - 2b^2)\int_s [\theta]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} ds +$$

$$+ b^2 \int_s \left(\left[2\frac{\partial u}{\partial n} + \omega_1\right]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \left[2\frac{\partial v}{\partial n} + \omega_1\right]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \left[2\frac{\partial w}{\partial n} + \omega_2\right]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) ds$$

e quindi sommando membro a membro colla precedente equazione:

$$-4\pi a^2\theta = \int_S \left([X]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + [Y]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + [Z]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) dS +$$

$$(12) \qquad + \frac{1}{k}\int_s \left([L]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + [M]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + [N]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) ds +$$

$$+ \int_s \left[\frac{\partial^2 U_n}{\partial t^2}\right]_a \frac{ds}{r} + 2b^2 S$$

dove:

$$S = \int_s \left(\left[\frac{\partial u}{\partial n} + \omega_1 - \theta\frac{\partial x}{\partial n}\right]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \left[\frac{\partial v}{\partial n} + \omega_2 - \theta\frac{\partial y}{\partial n}\right]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} +\right.$$

$$\left. + \left[\frac{\partial w}{\partial n} + \omega_3 - \theta\frac{\partial z}{\partial n}\right]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) ds.$$

Ora questo integrale può essere trasformato in modo analogo a quello che abbiamo usato nel caso statico. La formola (8) e le analoghe della Nota 1ª, ci dànno infatti:

$$\int_s \left[\frac{\partial u}{\partial n} + \omega_1 - \theta \frac{\partial x}{\partial n}\right]_a \frac{ds}{r} = \int_s ([v]_a{}^* \Omega_{xy} + [w]_a{}^* \Omega_{xz})\, ds$$

$$\int_s \left[\frac{\partial v}{\partial n} + \omega_2 - \theta \frac{\partial y}{\partial n}\right]_a \frac{ds}{r} = \int_s ([w]_a{}^* \Omega_{yz} + [u]_a{}^* \Omega_{yx})\, ds$$

$$\int_s \left[\frac{\partial w}{\partial n} + \omega_3 - \theta \frac{\partial z}{\partial n}\right]_a \frac{ds}{r} = \int_s ([u]_a{}^* \Omega_{zx} + [v]_a{}^* \Omega_{zy})\, ds.$$

Derivando rispettivamente queste relazioni rispetto ad x', y', z' secondo la formola solita e sommando, troviamo:

$$-S = \frac{\partial}{\partial x'} \int_s ([v]_a{}^* \Omega_{xy} + [w]_a{}^* \Omega_{xz}) ds + \frac{\partial}{\partial y'} \int_s ([w]_a{}^* \Omega_{yz} + [u]_a{}^* \Omega_{yx}) ds +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z'} \int_s ([u]_a{}^* \Omega_{zx} + [v]_a{}^* \Omega_{zy}) ds.$$

Questa espressione di S sostituita nella (12) risolve la quistione della rappresentazione della θ mediante gli elementi fondamentali del moto, poichè in essa non compaiono che i valori sulla superficie s delle u, v, w e delle loro derivate rispetto al tempo, mentre nella (12) stessa non abbiamo, oltre queste quantità, che le componenti delle forze di massa e superficiali e le loro derivate prime rispetto al tempo. Si ottiene così una formola che corrisponde alla (7) del paragrafo precedente.

Però è interessante di sviluppare le derivate indicate nella espressione precedente di S, per confrontare la formola ottenuta con quella di Betti della statica. Considerando nella S i due termini che dipendono dalla u, si ha mediante la formola (14) della Nota 1ª:

$$\frac{\partial}{\partial y'} \int_s [u]_a{}^* \Omega_{yx} ds + \frac{\partial}{\partial z'} \int_s [u]_a{}^* \Omega_{zx} ds =$$

$$= \int_s [u]_a{}^* \left(\frac{\partial \Omega_{yx}}{\partial y'} + \frac{\partial \Omega_{zx}}{\partial z'}\right) ds + \frac{1}{a^2} \int_s \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] \left(\frac{\partial y}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial y}\right) \frac{\partial r}{\partial y'} \frac{ds}{r} +$$

$$+ \frac{1}{a^2} \int_s \left[\frac{d^2 u}{\partial t^2}\right]_a \left(\frac{\partial z}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial z}\right) \frac{\partial r}{\partial z'} \frac{ds}{r}$$

ossia, ricordando le (8):

$$=\int_s [u]_a^* \frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'}\,ds + \frac{1}{a^2}\int_s \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]_a \left(\frac{\partial r}{\partial x'}\frac{\partial r}{\partial n} + \frac{\partial x}{\partial n}\right)\frac{ds}{r}.$$

Mediante questa formola e le altre due analoghe troviamo:

$$S=\int_s \left([u]_a^* \frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + [v]_a^* \frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + [w]_a^* \frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) ds +$$

$$+\frac{1}{a^2}\int_s \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\frac{\partial r}{\partial z}\right]_a \frac{\partial r}{\partial n}\,ds - \frac{1}{a^2}\int_s \left[\frac{\partial^2 U_n}{\partial t^2}\right]_a \frac{ds}{r}.$$

Sostituendo nella (12) abbiamo la espressione definitiva seguente:

$$-4\pi a^2\theta = \int_S \left([X]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + [Y]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + [Z]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) dS +$$

$$+\frac{1}{k}\int_s \left([L]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + [M]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + [N]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) ds +$$

$$+2b^2\int_s \left([u]_a^* \frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + [v]_a^* \frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + [w]_a^* \frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) ds +$$

$$+\frac{a^2-2b^2}{a^2}\int_s \left[\frac{\partial^2 U_n}{\partial t^2}\right]_a \frac{ds}{r} + \frac{2b^2}{a^2}\int_s \left[\frac{\partial^2 U_r}{\partial t^2}\right]_a \frac{\partial r}{\partial n}\frac{ds}{r},$$

dove U_r rappresenta la componente superficiale dello spostamento, presa nella direzione del raggio r uscente dal punto $(x', y'\ z')$.

Volendo porre questa espressione della θ sotto una forma analoga alle formole (19) trovate nella Nota precedente per le componenti di rotazione, conviene introdurre le espressioni:

$$A_1 = \int_S [X]_a \frac{dS}{r} + \frac{1}{k}\int_s [L]_a \frac{ds}{r} + 2b^2\int_s [u]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\,ds$$

$$B_1 = \int_S [Y]_a \frac{dS}{r} + \frac{1}{k}\int_s [M]_a \frac{ds}{r} + 2b^2\int_s [v]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\,ds$$

$$C_1 = \int_S [Z]_a \frac{dS}{r} + \frac{1}{k}\int_s [N]_a \frac{ds}{r} + 2b^2\int_s [w]_a^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\,ds$$

e si trova facilmente:

$$4\pi a^2 \theta(x', y', z', t) = \frac{\partial A_1}{\partial x'} + \frac{\partial B_1}{\partial y'} + \frac{\partial C_1}{\partial z'} - \frac{a^2 - 2b^2}{a^2} \int_s \left[\frac{\partial^2 U_a}{\partial t^2}\right]_a \frac{ds}{r}.$$

Questa formola, salvo il modo di scrittura, coincide con quella determinata dal prof. Tedone nella già citata Memoria *Sulle vibrazioni dei corpi solidi, omogenei ed isotropi* (v. pp. 213-33).

Prima del Tedone il prof. Cerruti nella Memoria *Sulle vibrazione dei corpi elastici isotropi* pubblicata nel Vol. VIII, S. 3ª delle " Memorie della R. Accademia dei Lincei ", nel 1880, ha pure indicato un procedimento per ottenere la formola della dilatazione nel caso del movimento, il quale è una immediata estensione di quello seguìto dal Betti nel caso statico. Questo procedimento conduce effettivamente a trovare la formola precedente e in modo più spedito di quello seguìto dal Tedone, come risulta anche dalla *Appendice* della citata Memoria dello stesso prof. Tedone. La Memoria del prof. Cerruti è notevole pel fatto che precedette di due anni quella classica di Kirchhoff, *Zur Theorie der Lichtstrahlen*, la quale suole considerarsi come il punto di partenza per l' estensione dei metodi della teoria del potenziale al problema delle vibrazioni. Ma sfortunatamente le formole trovate dal prof. Cerruti sono incomplete.

Il metodo che abbiamo dato in questa Nota sembra definitivamente il più semplice che si possa seguire, sia per quanto riguarda lo sviluppo del calcolo, sia perchè in esso non si fa alcun uso di quelle integrazioni rispetto al tempo e di quei passaggi al limite, che sono stati usati dai precedenti autori, e che non hanno una connessione necessaria col risultato al quale si vuole arrivare.

Mediante la formola che abbiamo trovato per la θ, il problema della rappresentazione delle componenti del moto cogli elementi fondamentali può considerarsi come sostanzialmente risoluto, in virtù delle formole (10) o (18) della Nota precedente. Resta però ancora la quistione di semplificare la espressione della funzione Φ, che compare in quelle formole ed è definita dalla relazione:

$$\Phi = \int_S [\theta] \frac{dS}{r},$$

poichè, col procedimento seguìto essa risulta espressa mediante un doppio procedimento di integrazione. Così si potrà arrivare a quelle formole per le componenti del moto, di cui il sig. Love ha mostrato la possibilità.

Mi occuperò in seguito di questa quistione, la quale esorbita dal campo della equazione:

$$(D_t^2 - a^2 \Delta_2) \varphi = \text{funzione nota},$$

nel quale abbiamo potuto mantenerci fin qui, poichè, come si vede subito, la Φ soddisfa all'altra equazione d'ordine superiore:

$$(D_t^2 - a^2 \Delta_2)(D_t^2 - b^2 \Delta_2) \varphi = \text{funzione nota}.$$

Ma già dalle considerazioni precedenti mi sembra si possa concludere che con pochi e semplici artifici di calcolo è possibile svolgere, rispetto al problema dinamico elastico, una teoria perfettamente parallela a quella che si ha nel problema statico, basata sopra i concetti ed i metodi introdotti nella teoria della elasticità dal Betti, mettendo così di questi concetti nuovamente in luce la importanza e la fecondità.

Sopra una proprietà dei determinanti Wronskiani.

Nota di ERNESTO PASCAL.

(Estratto di una lettera al Socio G. PEANO).

.....Ella, che parecchi anni fa si è occupato dei Wronskiani, mi permetta di comunicarle una semplice osservazione sul medesimo soggetto: si tratta però di cosa affatto elementare.

Si sa che la condizione necessaria e sufficiente perchè fra n funzioni $y_1 \dots y_n$ di una variabile x, esista una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti, è che il loro determinante Wronskiano W sia zero (*).

(*) È ben noto che il teorema, così troppo semplicemente enunciato, manca di qualche condizione restrittiva, secondo le osservazioni critiche fatte per la prima volta da PEANO in “ Mathesis „, t. IX, 1889, p. 75 e 110, e in “ Rend. Acc. Lincei „, (5), t. VI, 1897, 1° sem., p. 413, e a cui si riferisce anche la Nota di VIVANTI in “ Rend. Acc. Lincei „, (5), t. VII, 1898, 1° sem., p. 194. Ma non è nostro scopo occuparci ora dell' influenza che quelle critiche potranno portare probabilmente anche sul nostro teorema.

A proposito dei *Wronskiani* mi sia permesso prendere questa occasione per rettificare quanto è asserito a pag. 122 (nota 250) del tom. I, vol. I, fasc. I, dell'*Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées* (Paris, Leipzig, 1904), avere cioè io, nel mio trattato sui *Determinanti* (Milano, 1897; Leipzig, 1900), assegnata la denominazione a tali determinanti. È ben noto che questa denominazione si trova negli Autori che mi hanno preceduto, fra i quali il primo sembra essere stato THOMAS MUIR nel suo libro: *A treatise on the theory of determinants*, London, 1882, seguìto a breve intervallo da MANSION (*Résumé du cours d'analyse infinitésimale, etc.*, Paris, 1886).

E poichè nel foglio allegato al fascicolo seguente, ora uscito, della stessa *Encyclopédie* (fasc. I del tom. I, vol. IV) e intitolato: *Tribune publique de l'édition française*, il sig. W. ANISSIMOV, chiede perchè son chiamati così questi determinanti e cita, come uno dei primi ad occuparsene, LIOUVILLE (*Journ. de mathém. pures et appliquées*, (1), t. III, 1838, p. 349), io ricorderò che la denominazione viene dall'avere il WRONSKI considerato per la prima volta tali funzioni, sotto il nome di “ *fonctions schin* „, in certi sviluppi in serie nella Memoria famosa: *Réfutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange*, presentata all'Accademia di Parigi, ma rifiutata, e

Ora non so che sia stato ancora osservato, e parmi curioso osservare, che la precedente condizione equivale a quest'altra: *che sia zero la somma algebrica coi segni alternati dei prodotti di ciascuna funzione per l'integrale del Wronskiano di tutte le altre,* intendendo che tale somma sia da reputarsi zero quando sia possibile determinare in essa le costanti arbitrarie d'integrazione in modo che essa sia zero.

Indicando con W_i il Wronskiano delle funzioni $y_1 \dots y_{i-1} y_{i+1} \dots$ $\dots y_n$, dalla relazione:

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} y_i \int W_i dx = 0 \tag{1}$$

con successive derivazioni, e coll'osservare che:

$$\sum (-1)^{i-1} y_i W_i = 0$$
$$\sum (-1)^{i-1} y_i' W_i = 0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\sum (-1)^{i-1} y_i^{(n-2)} W_i = 0$$

si deducono le equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum (-1)^{i-1} y_i' \int W_i dx = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \sum (-1)^{i-1} y_i^{(n-1)} \int W_i dx = 0 \end{array} \right. \tag{2}$$

e da questa colla (1) si ricava che è eguale a zero il determinante W.

Viceversa supposto $W = 0$, se ne deduce:

$$y_n = \sum_{i=1}^{n-1} c_i y_i \qquad (c_i = \text{cost.}) \tag{3}$$

donde:

$$W_i = (-1)^{n-i-1} c_i W_n .$$

---

pubblicata indi a parte (Paris, Blankenstein, 1812). Notizie interessanti su ciò si possono trovare in: Dickstein, *Sur les propriétés et quelques applications des wronskiens,* Prace matematyczno-fizyczne, t. I, Warszawa, 1888, pp. 5-25; e *Zur Geschichte der Prinzipien der infinitesimalrechnung*, " Abhand. zur Geschichte der Mathematik ", t. IX, 1899, pp. 67-79.

e perciò il primo membro di (1) si riduce a:

$$(-1)^{n-1}\Big\{y_n - \sum_{i=1}^{n-1} c_i y_i\Big\} \int W_n dx$$

che è zero in forza di (3).

Formiamo una equazione differenziale lineare omogenea di ordine n avente per integrali particolari $y_1 \dots y_n$ e avente eguale a 1 il coefficiente di $y^{(n)}$, e indi formiamo l'altra equazione (non omogenea) avente lo stesso primo membro della precedente, ma il secondo membro eguale a W.

È facile vedere che l'integrale generale della equazione non omogenea è dato dall'integrale generale della equazione omogenea, più il primo membro della relazione (1); ciò si verifica subito osservando che la derivata n^{ma} del primo membro di (1) è data da:

$$W + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1} y_i^{(n)} \int W_i \, dx$$

e che le derivate precedenti sono espresse dai primi membri delle (2).

Se dunque il W è diverso da zero, la seconda equazione differenziale è essenzialmente *non omogenea*, e perciò il suo integrale generale non può essere omogeneo nelle costanti arbitrarie, onde non può aver luogo la (1); se invece è $W = o$, allora la seconda equazione differenziale è la stessa della prima, e perciò deve verificarsi la (1). Così il teorema resta guardato da un altro punto di vista.

La relazione fra le y e le loro derivate che viene determinata dalla (1), non deve essere in sostanza che una trasformazione della relazione $W = o$; se si cercasse di togliere dalla (1) con derivazioni, i segni di integrali, si dovrà ottenere la relazione $W = o$.

Milano, maggio 1906.

Che cos'è una relazione?

Nota di ALESSANDRO PADOA (Chioggia).

Poichè il sig. RUSSELL [1] ha assunto quale *primitivo* (non definito) il simbolo " Rel „ (leggasi " relazione „) [p. 116, l. 8 dal basso], può apparire giustificata l'osservazione difensiva del sig. POINCARÉ [2] che: avendo introdotto *nuovi* simboli logici che non sono " de simples combinaisons des *anciens* „ [p. 828, l. 6 dal basso], non è da stupire " si certaines vérités, que l'on avait déclarées *irréductibles* à la logique, au sens *ancien* du mot, se trouvent être devenues réductibles à la logique, au sens *nouveau*, qui est tout différent „ [p. 828, l. 10-8 dal basso].

Fortunatamente a me sembra che il simbolo " Rel „ si possa *definire* mediante alcuni simboli del *Formulario* [3]; e dico " fortunatamente „ anche perchè, se è vero che " l'introduction des relations donne lieu à une simplification et une généralisation de beaucoup de théories mathématiques „ [Russell, *op. cit.*, p. 116,

---

(1) *Sur la théorie des relations* [Revue de Mathématiques, t. VII, n. 2. Bocca, Turin, 1901].

(2) *Les mathématiques et la logique* [Revue de Métaphysique et de Morale, 13e année, n. 6. Colin, Paris, novembre 1905].

In tale scritto e nella sua continuazione [stesso titolo e stessa rivista, 14e année, n. 1, janvier 1906] il sig. POINCARÉ ha fatto un'aspra critica al libro su *Les principes des mathématiques* [Alcan, Paris, 1905] del sig. COUTURAT, il quale gli ha già risposto brillantemente ed efficacemente [*Pour la logistique* (Réponse à M. Poincaré), Extrait de la Revue de Métaphysique et de Morale, n. de mars 1906].

Il libro del sig. COUTURAT può esser letto con molto vantaggio da chi voglia iniziarsi agli studî di Logica matematica e desideri conoscere i più importanti risultati cui sono pervenuti i cultori di tale disciplina, analizzando i concetti e le proposizioni fondamentali delle varie teorie matematiche.

(3) Ricorrerò al *Formulaire de Mathématiques*, t. II, n. 3 [Bocca, Turin, 1899], la cui pubblicazione è *anteriore* allo scritto del sig. RUSSELL, e lo citerò con l'abbreviazione " F1899 „.

l. 11-13], il sig. POINCARÉ dovrà convenire che tali risultati furono ottenuti senza allargare effettivamente il campo della Logica e perciò non sono illusorî (1).

***

Abitualmente, dicendo che:

" r è una *relazione* "

si intende dire che si possono determinare x ed y in modo che la scrittura

" $x r y$ "

risulti una *proposizione vera* (2).

In simboli (3):

(1) $$r \in \mathrm{Rel} \,.=.\, \exists (x;y) \ni (xry).$$

Per isolare " Rel ", basta anteporre a ciascun membro la scrittura " $r \ni$ " e semplificare il primo membro; si ottiene così la Df (*definizione*) cercata (4):

(2) $$\mathrm{Rel} = r \ni \{\exists (x;y) \ni (xry)\} \qquad \mathrm{Df}$$

(1) Nel *Formulario* del 1905 la questione è evitata, includendo le *relazioni* fra le *proposizioni a due variabili* [p. 79, nota al § 3]; ma in tal modo non si indica la *posizione* di ciascun simbolo di relazione, che è *tra* le due variabili.

Ora, se si è ritenuto opportuno designare con un simbolo speciale la classe delle " prae-functio " e con un altro quella delle " post-functio " [p. 73, § 1], non si può negare a priori la convenienza di designare con un simbolo speciale anche la classe delle " relazioni ".

(2) Ad esempio: le *parole* " ama, odia, ... ", le *frasi* " è figlio di, viaggia con, ...è lo stesso di, è contenuto in, ...è divisibile per, è primo con, ...è perpendicolare a, è parallelo a, ...è simile a, è proiettivo a, ...è una traslazione di, ...è in equilibrio statico o termico o elettrico con, ... " ed i *segni* " $=$, $>$, $<$, $\underline{\Omega}$, ... " sono altrettante *relazioni*.

(3) " $\in$ " si legga " *è una* "
" Rel " id. " *relazione* "
" $.=.$ " id. " *equivale a dire* "
" $\exists$ " id. " *esiste almeno una* "
" $x;y$ " id. " *coppia* x *ed* y "
" $\ni$ " id. " *tale che* ".

(4) I due segni " $=$ " e " Df ", tipograficamente separati, formano un solo simbolo che può esser letto " *significherà* ".

Nello scritto del sig. Russell si posson dunque *sopprimere* le §1P1

·0 *Idée primitive*: Rel = Relation

·1 $\mathrm{R} \in \mathrm{Rel} \,.\supset:\, x\mathrm{R}y \,.=.\, x$ a avec y la relation R

sostituendole con le (2) (1) in quest'ordine, assumendo la (2) quale Df e la (1) quale conseguenza immediata della (2).

* * *

Se " $r \in \mathrm{Rel}$ ": il signor Russell chiama " *dominio* di r " [p. 116, l. 4-2 dal basso] " l'insieme degli x per ciascuno dei quali esiste almeno un y tale che $x\,r\,y$ "; ed il sig. Couturat chiama " *codominio* di r " [*op. cit.*, p. 29, l. 1-2] " l'insieme degli y per ciascuno dei quali esiste almeno un x tale che $x\,r\,y$ ".

Tali Df sono opportune, ma tale non mi sembra la scelta dei simboli " ρ " e " $\breve{\rho}$ " che il sig. Russell sostituisce rispettivamente alle frasi " *dominio* di r " e " *codominio* di r " [§1P1·21·22]: perchè ciascuna di queste frasi si compone di una parte *costante* e di una parte *variabile*, che giova tener separate.

Adottando, ad es., le notazioni

" dom r e codom r ",

le §1P1·21·22 divengono (1):

(3) $\quad r \in \mathrm{Rel} \,.\supset.\quad \mathrm{dom}\, r = x \ni \{\exists\, y \ni (x\,r\,y)\}$ $\quad$ Df

(4) $\quad \ldots\ldots \,.\supset.\, \mathrm{codom}\, r = y \ni \{\exists\, x \ni (x\,r\,y)\}$ $\quad$ Df

Se a ciascun membro della *tesi* della (3) si antepone il simbolo " $\exists$ ", risulta:

$$r \in \mathrm{Rel} \,.\supset:\, \exists\, \mathrm{dom}\, r \,.=.\, \exists\, x \ni \{\exists\, y \ni (x\,r\,y)\}$$

ovvero:

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \,.\, \exists\,(x;y) \ni (x\,r\,y)$$

da cui, per la (1),

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \,.\, r \in \mathrm{Rel}$$

---

(1) La scrittura " — .Ɔ. — " si legge " se —, allora — "; quanto sta fra " se " ed " allora " chiamasi " *ipotesi* ", quanto segue " allora " chiamasi " *tesi* ".

semplificando la quale si ottiene:

(5) $r \in \mathrm{Rel} \,.\, \supset \,.\, \exists \,\mathrm{dom}\, r$

Operando analogamente sulla (4), si ottiene:

(6) $r \in \mathrm{Rel} \,.\, \supset \,.\, \exists \,\mathrm{codom}\, r$

Le (5) e (6) mi sembra rendano inutili le §1P1·4·5

$r \in \mathrm{Rel} \,.\, \supset : \exists \,\mathrm{dom}\, r \,.=.\, \exists \,\mathrm{codom}\, r$
$\ldots\ldots \supset : \exists\, r \,.=.\, \exists \,\mathrm{dom}\, r$

del sig. Russell (in cui ho introdotto le indicate modificazioni simboliche, il che nel seguito sarà sottinteso), la seconda delle quali è da lui assunta quale Df.

* * *

Se " $r \in \mathrm{Rel}$ " chiamasi " *conversa* di r " quella *relazione* che sussiste fra " $y;x$ " ogniqualvolta r sussiste fra " $x;y$ "; il sig. Russell (conformandosi in ciò allo Schröder) la rappresenta con la notazione " $\breve{r}$ " tipograficamente inopportuna, cui sostituisco " co r ".

Dopo ciò la §1P1·72 diviene (1):

(7) $r \in \mathrm{Rel} \,.\, \supset \,.\, \mathrm{co}\, r = \imath \mathrm{Rel} \frown s \ni (y s x \,.=_{x;y}.\, x r y)$

La (7) è immediatamente *preceduta* dalle §1P1·7·71

(8) $r \in \mathrm{Rel} \,.\, \supset \,.\, \exists\, \mathrm{Rel} \frown s \ni (y s x \,.=_{x;y}.\, x r y)$
(9) $\ldots\ldots \supset \,.\, \}\mathrm{Rel} \frown \ldots\ldots\ldots\ldots \{ \in \mathrm{Elm}$ (2)

che affermano la *esistenza* e la *unicità* della *relazione* che, mediante la (7), vien *definita* quale " *conversa* di r ";

(1) " = " può leggersi " è "
" ɿ " id. " *quella* "
" ⌒ " può tacersi
" $.=_{y;x}.$ " può leggersi " *equivale, quali che siano* x *ed* y, *a* ".

(2) " Elm " (abbreviazione di " *elemento* ") vale " classe cui appartiene un solo individuo "; la scrittura " $a \in \mathrm{Elm}$ " può esser letta " v'è un solo a ".

la (8) è assunta quale Pp (proposizione primitiva o *postulato*); la (9) è *dimostrata* mediante la [1]

$$(10) \qquad r,s \in \mathrm{Rel} : x r y \,.=_{x;y}.\, x s y : \supset .\, r = s$$

che il sig. RUSSELL non enuncia esplicitamente, ma è conseguenza immediata delle §1P1·6·61 da lui assunte quali Df.

Ora, per evitare di assumere la (8) quale Pp, mi sembra preferibile tenere la via seguente.

Invece della (7) assumo quale Df la

$$(11) \qquad r \in \mathrm{Rel} \,.\supset: y (\mathrm{co}\, r) x \,.=_{x;y}.\, x r y \qquad \mathrm{Df}$$

Anteponendo rispettivamente ai due membri della *tesi* della (11) le scritture " $\exists (y;x) \ni$ ", " $\exists (x;y) \ni$ " [2] e ricordando la (1), risulta:

$$r \in \mathrm{Rel} \,.\supset: (\mathrm{co}\, r) \in \mathrm{Rel} \,.=.\, r \in \mathrm{Rel}$$

da cui semplificando:

$$(12) \qquad r \in \mathrm{Rel} \,.\supset.\, (\mathrm{co}\, r) \in \mathrm{Rel}$$

Dalle (12) ed (11) si deduce la (8), che perciò *non* è più assunta quale *postulato*.

Però, avendo rinunciato ad assumere quale Df la (7), devo mostrare in qual modo essa possa riapparire quale *teorema*.

Dalla (11) si deduce immediatamente:

$$(13) \qquad r \in \mathrm{Rel} \,.\, (\mathrm{co}\, r) = s \,.\supset: y s x \,.=_{x;y}.\, x r y$$

Si può dimostrare inoltre che:

$$(14) \qquad r \in \mathrm{Rel} : y s x \,.=_{x;y}.\, x r y : \supset .\, (\mathrm{co}\, r) = s$$

---

[1] Il simbolo principale è " $\supset$ " e perciò la proposizione va letta " *se..., allora...* "; la scrittura " $r, s \in \mathrm{Rel}$ " si legge " r ed s sono relazioni "; dove si trova il primo " : " si legga " *e se* ".

[2] Si badi: la *coppia* è una *classe ordinata* e perciò, se x è *diverso* da y, anche " $y;x$ " è diverso da " $x;y$ "; e, se " $r \in \mathrm{Rel}$ ", " $x r y$ " può esser *vero* pur essendo *falso* " $y r x$ "; ma *davanti* ad una scrittura del tipo " $x r y$ " è indifferente scrivere " $\exists (x;y) \ni$ " ovvero " $\exists (y;x) \ni$ ": tanto è vero che, evitando la *coppia*, si potrebbe scrivere invece: " $\exists x \ni \{ \exists y \ni \ldots \}$ " ovvero " $\exists y \ni \{ \exists x \ni \ldots \}$ " [F1899 p20P3·2].

infatti: dall'*ipotesi*, dalla (12) e dalla (11) si deduce (1):

$$r, (\text{co}\, r) \,\epsilon\, \text{Rel} : y (\text{co}\, r) x \,.=_{x;y}.\, y s x$$

da cui, per la (10), si deduce la *tesi*.

Dalle (13) e (14), mediante note operazioni deduttive (2), si perviene alla

$$(15) \qquad r \,\epsilon\, \text{Rel} \,.\, \supset .\, \text{co}\, r = \iota s \ni (y s x \,.=_{x;y}.\, x r y)$$

dalla quale risulta che nella (7) la scrittura " Rel ∩ „ è superflua (3).

Poichè la (15) fu dedotta dalla (11), senza assumere alcun *postulato*, si conclude che la *esistenza* e la *unicità* della *conversa* di una *relazione arbitraria* rientra nella cerchia delle P *dimostrabili* mediante P *note*.

***

Sarebbe utile proseguire l'analisi di tutte le P contenute nel lavoro del sig. Russell, dando loro forma più semplice, in guisa da agevolare il raffronto con le P del *Formulario* ed inserirvi quelle che vi mancassero.

Ma questa indagine minuta potrà esser fatta più opportunamente nella *Revue de Mathématiques*.

Per ora m'accontento di pochi altri accenni.

***

Mediante la (1), basta sapere ad es. che " $8 > 5$ „ per concludere che " $> \epsilon\, \text{Rel}$ „.

Analogamente, basta sapere ad es. che " $\wedge \,\epsilon\, \text{Cls}$ „ (4) per concludere che (5)

$$(16) \qquad \epsilon \,\epsilon\, \text{Rel}$$

che è la §1P3·1 del sig. Russell, ch'egli assume quale *postulato*.

---

(1) Nella formola seguente, al posto di " : „ si legga " *e* „.

(2) Cioè: esportando in ciascuna il secondo fattore dell'ipotesi, moltiplicando membro a membro, semplificando, anteponendo a ciascun membro della tesi prima la scrittura " $s \ni$ „ e poi il simbolo " ι „.

(3) Volendo proprio la (7), si potrebbe dedurla immediatamente dalle (12) (15).

(4) Leggasi " *nulla è una classe* „.

(5) Per accostarsi al linguaggio ordinario, la (16) può esser letta " *l'appartenenza è una relazione* „.

Ho già ricordato che, se " $r \epsilon \mathrm{Rel}$ ", egli rappresenta col simbolo " ρ " il " *dominio* di r "; qui si ha una riprova della inopportuna scelta del simbolo " ρ ". Infatti: nel caso della (16), il simbolo di *relazione* essendo una *lettera greca*, come si dovrà rappresentarne il *dominio*?

Il sig. Russell ricorre al ripiego di rappresentarlo con " e "; ma questa lettera è universalmente adottata per designare " la base del sistema di logaritmi di Neper ".

Prescindendo da ciò, con l'ideografia adottata dal sig. Russell non vi è modo nemmeno di *dichiarare* che " e " è il " *dominio* di ϵ ", se non sostituendo " ϵ " ad r nella *notazione definente* della (3); ed infatti egli pone [§1P3·2]:

$$\mathrm{e} = x \ni \{ \exists\, y \ni (x \epsilon y) \} \qquad \mathrm{Df} \qquad [\mathrm{e} = \text{individu}]$$

mentre, con la notazione da me proposta, basterebbe porre:

$$\mathrm{e} = \mathrm{dom}\, \epsilon \qquad \mathrm{Df}$$

Ma poichè:

qualunque sia x, " $x \epsilon \iota x$ " (1)

risulta: . . . . , " $\exists\, y \ni (x \epsilon y)$ "

e perciò: " $x \ni \{ \exists\, y \ni (x \epsilon y) \} = \mathrm{V}$ " (2).

Da ciò, mediante le (16) e (3), si deduce la

$$(17) \qquad \mathrm{dom}\, \epsilon = \mathrm{V}$$

che sostituirei alla trascritta §1P3·2, evitando così una Df.

Analogamente, sopprimerei la Df [§1P3·3]

$$\breve{\mathrm{e}} = x \ni \{ \exists\, y \ni (y \epsilon x) \}$$

e le sostituirei la

$$(18) \qquad \mathrm{codom}\, \epsilon = \mathrm{Cls} \sim \iota \wedge \ (3).$$

---

(1) Il simbolo " ι " si legge " *eguale a* ", mentre il simbolo " = " si legge " *è eguale a* "; cosicchè la notazione " $\epsilon \iota$ " equivale al simbolo " = ".

(2) Il simbolo " V " si legge " *tutto* ".

(3) La scrittura " $\mathrm{Cls} \sim \iota \wedge$ " può leggersi " *classe non nulla* ".

E sopprimerei senz'altro la §1P3·4

$$\breve{e} \supset e$$

che, per quanto precede, diverrebbe la P poco interessante [1]

$$\mathrm{Cls} \sim \iota \Lambda \supset \mathrm{V}\,.$$

* * *

Un'osservazione ancora a proposito d'un altro simbolo assunto dal sig. Russell quale *primitivo* (non definito); esso è il simbolo " 1' " di Schröder.

Trascrivo alcune P del sig. Russell [§1P4]:

·1	*Idée primitive:*	1' = identité
·2	$1' \epsilon \mathrm{Rel}$	Pp
·31	$x 1' x$	Pp
·32	$1' \supset \breve{1'}$	Pp
·34	$1'^2 \supset 1'$	

Poichè il significato di " 1' " è identico a quello di " = ", propongo di sopprimere la ·1 e di scrivere dovunque " = " al posto di " 1' " [2].

Con ciò e tenendo conto di alcune P precedenti di questo

---

(1) Si legga: " *ogni classe non nulla appartiene al tutto* ".

(2) Il sig. Russell avverte, dopo la ·1:

" Je n'emploie pas le symbole " = " pour l'identité des *individus*, puisqu'il a un autre usage pour l'équivalence des classes, des P et des relations ".

Ma, poichè la mia (17) chiarisce che il suo " e " (definito nella trascritta §1P3·2 e ch'egli propone appunto di leggere " *individuo* ") vale " *tutto* ", deliberando di non adoperare il simbolo " = " fra *individui*, si deciderebbe di *rinunciare completamente* al simbolo " = ".

Il sig. Couturat accoglie gli scrupoli del sig. Russell; invece del simbolo " 1' " usa il simbolo meno insolito " ≡ " [*Op. cit.*, p. 25, l. 3].

scritto e di quello del signor RUSSELL le ·31·32·34 divengono le F1899p13P2·1·2·3

$$x = x$$
$$x = y \,.\, \supset \,.\, y = x$$
$$x = y \,.\, y = z \,.\, \supset \,.\, x = z$$

che esprimono le note proprietà *riflessiva, conversiva* e *transitiva* dell'*eguaglianza.*

Quanto alla ·2, basta conoscere la " $x = x$ " per concludere, mediante la (1), che [1]

(19) $\quad = \epsilon\, \mathrm{Rel}$

In tal modo si vengono a sopprimere: *un'altra idea primitiva* ed *altri tre postulati.*

Chioggia (Venezia), aprile 1906.

---

[1] Analogamente alla (16), la (19) può esser letta " *l'eguaglianza è una relazione* ".

Il sangue dell'Urang-utan è più affine al sangue dell'uomo che non a quello delle scimmie non antropoidi.

Ricerche del Dr. MARIO CHIÒ
allievo del Laboratorio di Fisiologia.

Dal giorno in cui vennero scoperte le proprietà emolitiche ed agglutinanti del sangue, dal giorno in cui Tschistowitch (1) e Bordet (2) trovarono che se si inietta sangue di un animale in un animale eterogeneo, il siero del secondo acquista un potere precipitante specifico per il siero del primo, una grande quantità di ricerche venne fatta in questo campo nuovo di studio: ricerche dirette in parte a dimostrare col metodo biologico affinità stabilite per altre vie, ed in parte a cercare le applicazioni pratiche della scoperta.

Nel campo medico-legale sarebbe il metodo biologico riuscito utilissimo per determinare se macchie di sangue fossero di uomo o di altri animali, ove la specificità si fosse, per il sangue umano, dimostrata rigorosa.

Wassermann e Schütze (3) trovarono che il siero preparato col sangue umano era inattivo per 23 specie di animali, molto attivo per l'uomo, meno attivo pel sangue di una scimmia (un piccolo papio), nel quale determinava la formazione di un precipitato dopo maggior tempo che nel sangue di uomo, e solo in leggerissimo grado. Stern (4) confermò questi risultati, giungendo ad ottenere la reazione col sangue umano ad una diluizione dell'1 per 50.000.

Grünbaum osservò che il sangue delle scimmie antropoidi, Gorilla, Scimpanzè, Orango, dimostra, rispetto alle singole precipitine, una somiglianza assai grande: ottenne per mezzo di iniezioni di sieri sanguigni di Scimpanzè, Gorilla, Orango, tre sieri che precipitavano, ciascuno ugualmente bene, il sangue di tutte tre le specie di scimmie ed il sangue umano. Nuttal (5), facendo studi comparativi sulle scimmie del nuovo e del vecchio

mondo, trovò che il sangue delle prime è molto meno sensibile all'azione del siero specifico per il sangue umano che non il sangue delle seconde; per questo stesso siero il sangue dei Lemuri si dimostra del tutto insensibile.

È chiaro che questi risultati vengono a portare un contributo di non poco valore alla conferma dello sviluppo filogenetico dell'ordine dei Primati, stabilito già chiaramente coi dati embriologici, anatomici, paleontologici.

La maggior parte degli autori divide, quali sottordini, i Primati in: 1° Lemuri (*Prosimiae*); 2° Scimmie (*Simiae*); 3° Uomini (*Antropi*). Altri, e primo fra questi Roberto Hartmann, dividono l'ordine dei Primati in tre famiglie: 1° *Primarii* (uomini e scimmie antropomorfe; 2° *Simiae* (vere e proprie scimmie); 3° *Prosimiae* (lemuri). Questo ordinamento appare giustificato dalla scoperta interessante di Selenka, che la intera formazione placentare propria dell'uomo si trova anche nelle scimmie antropomorfe, e solo in queste.

A confermare l'esattezza del secondo ordinamento, l'Huxley, in base alla più rigorosa comparazione critica di tutti i rapporti anatomici entro l'ordine dei Primati, enunciò nel 1863 il suo " *aforisma pitecoide* ": " Il confronto critico di tutti gli organi e delle loro modificazioni entro la serie delle scimmie ci conduce sempre ad uno stesso ed identico risultato. Le differenze anatomiche che distinguono l'uomo dal Gorilla e dallo Scimpanzè non sono così rilevanti come le differenze che separano queste scimmie antropomorfe dalle scimmie inferiori ".

A me parve che ove l'affinità esistente fra l'uomo e le scimmie antropomorfe sia maggiore di quella esistente fra queste e le scimmie inferiori — non solo dal punto di vista strutturale, ma anche da quello filogenetico — ciò si sarebbe dovuto poter mettere in evidenza col cosidetto " metodo biologico ".

Avevo a mia disposizione un giovane Orango di circa 7-8 anni di età, e due piccole scimmie, un giovane papio (*Papio Hamadrias*, E. Geoffroy) ed un macaco (*Macacus Erythraeus*, Fr. Cuvier). Iniettai in tre conigli a 6 riprese (8 cmc. per volta a distanza di 6 giorni) rispettivamente siero di sangue di uomo, di papio e di macaco.

Dissanguati i conigli e raccolto asetticamente il siero, potei osservare quanto verrò ora esponendo:

α) Usando il metodo di Uhlenhut (6), cioè diluendo il siero di sangue in esame all' 1 % con acqua, prendendo in una provetta 2 cmc. della soluzione e 2 cmc. di cloruro di sodio all' 1 %, e facendo cadere 6 goccie di siero reattivo, cioè di siero di coniglio preparato per i singoli animali, trovai che:

1° Il siero reattivo di uomo ed il siero reattivo di macaco dimostrarono, coi sieri di sangue rispettivi, un'azione perfettamente uguale, mentre invece il siero di papio si dimostrò molto meno attivo, sia per la quantità del precipitato, sia per il tempo impiegato da questo ad apparire (2 ore circa in termostato a 40);

2° Il siero reattivo di papio diede reazione uguale col siero di papio, di orango e di uomo. Invece col siero di macaco dimostrò un'azione molto più energica che col siero di papio stesso. Questo fenomeno apparentemente strano trova facile spiegazione quando parallelamente ad esso si tenga conto di un altro fatto: che cioè il siero reattivo di macaco dà maggior precipitato con siero di macaco che con siero di papio. Ne risulta una progressione, in ordine di quantità, di precipitati, che si può scrivere così:

a) Siero di papio con siero reattivo di papio;

b) Siero di macaco con siero reattivo di papio;

c) Siero di macaco con siero reattivo di macaco.

Partendo dalla premessa che per l'affinità delle due specie, macaco e papio, debbano i loro sieri comportarsi nello stesso modo, noi possiamo giungere alle conclusioni seguenti:

') In *a*) ed in *b*) abbiamo due quantità uguali di sieri diversi trattate con un reagente comune: il fatto che in *a*) sia il precipitato minore che in *b*) ci dimostra che non tutti i sieri di sangue hanno la stessa potenzialità di azione rispetto ai corrispondenti sieri reattivi, ma che questa potenzialità varia da animale ad animale per cause ignote. (Il papio sul quale sperimentai era ammalato di paralisi degli arti posteriori).

") In *b*) ed in *c*) abbiamo due campioni uguali di uno stesso siero trattati con due sieri reattivi diversi: in *b*) il precipitato è minore che in *c*) perchè il siero reattivo di papio è meno attivo del siero reattivo di macaco. La minore azione del siero reattivo si accompagna quindi nel nostro caso ad una minore potenzialità di reazione del siero di sangue corrispondente.

Noi sappiamo così che se la forza dei sieri reattivi dipende in parte dagli animali che vengono preparati con le iniezioni,

essa dipende pure in gran parte dagli animali che ci forniscono il sangue per le iniezioni stesse: e precisamente che la maggiore o minore proprietà reattiva destata nel siero di un animale qualsiasi dipende da una maggiore o minore potenzialità di reazione esistente nel siero di sangue che l'ha destata, e che fino ad un certo punto ad essa corrisponde.

3° Il siero reattivo di uomo, molto attivo, produsse nello stesso periodo di tempo l'intorbidamento dei sieri di uomo, di orango e di macaco. Per la quantità di precipitato i due primi erano uguali, ed il terzo di poco inferiore. Costantemente debolissima o quasi nulla la reazione col siero di papio.

4° Il siero reattivo di macaco, anch'esso molto attivo, determinava l'intorbidamento in ugual lasso di tempo nei tre sieri di uomo, di orango e di macaco. Per la quantità era maggiore il precipitato con siero di macaco; i precipitati ottenuti con siero di uomo e di orango erano uguali fra di loro. Anche in questo caso la reazione con siero di papio era molto debole, ma sempre più sensibile di quella che potesse darmi il siero di papio trattato con siero reattivo di uomo.

β) Allo scopo di rendere più chiare ed evidenti le reazioni, ho compiuto esperienze con sangue portato a diverse diluizioni, ed ho prescelta fra tutte la soluzione di 1 per 10.000 come quella che mi parve corrispondesse meglio allo scopo propostomi. Ho potuto in questo modo, oltrechè confermare i risultati precedenti, ottenere in modo chiarissimo quanto segue:

1° Il siero reattivo di uomo determina identiche reazioni nei sieri di uomo e di orango: reazione minore, specialmente per quantità di precipitato, nel siero di macaco.

2° Con siero reattivo di macaco si ottengono precipitati uguali nei sieri di uomo e di orango; sempre però meno evidenti di quello determinato nel siero di macaco dal siero reattivo del macaco stesso.

3° Il siero dell'orango, trattato con siero reattivo di uomo da una parte e con siero reattivo di macaco dall'altra, mi ha dato col primo dei due sieri una quantità di precipitato di gran lunga maggiore che col secondo; l'intorbidamento è comparso nel primo caso in un periodo di tempo uguale all'incirca ai due terzi del periodo impiegato dal secondo siero a determinare i primi indizi dell'intorbidamento. Ripeto che i sieri reattivi di

uomo e di macaco si comportavano col sangue rispettivo in modo assolutamente identico.

Le ricerche eseguite e sopratutto i risultati della serie β) ci dicono quanto sia grande l'affinità del sangue di orango con quello di uomo; dal terzo gruppo della serie β) risulta all'evidenza che il sangue di orango possiede un'affinità molto maggiore col sangue di uomo che non con quello di macaco, che l'*Homo Sapiens* ed il *Satyrus Orang* sono molto più vicini fra di loro che non lo siano l'orango e le altre scimmie non antropoidi. L'aforisma pitecoide di Huxley si ripresenta così sotto veste fisiologica e l'affinità funzionale fra questi gruppi di Primati è nuovo e più valido argomento in sostegno della loro affinità filogenetica, ed in appoggio dell'ordinamento di Hartmann.

Laboratorio di Fisiologia della R. Univ. di Torino.

BIBLIOGRAFIA

(1) Tschistowitch, *Études sur l' immunisation contre le sérum d' anguilles* (" Ann. de l'Inst. Pasteur ", 1899, n. 5, pag. 406).

(2) Bordet, *Le mécanisme de l'agglutination* (" Ann. de l'Inst. Pasteur ", 1899, n. 3, pag. 225). — Id., *Agglutination et dissolution des globules rouges par le sérum* (" Ann. de l'Institut Pasteur ", 1889, n. 4, pag. 273).

(2) Philippson, *Sur les propriétés spécifiques des sérums sanguins* (" Institut Solvay ", 1902, fasc. 1).

(3) Wassermann u. Schütze, *Ueber eine neue forensische Methode zur Unterscheidung von Menschen und Thierblut* (" Berliner Klin. Woch. ", 1901, n. 7, S. 187, 18 febbraio).

(4) Stern, *Ueber der Nachweis menschlichen Blutes durch ein Antiserum* (" Deutsche medic. Woch. ", 1901, n. 9, S. 135, 28 febbraio).

(5) Nuttal, *Blood immunity and Blood Relationship*, " Cambridge-University Press ", 1904, 444 S., Ref. Wernicke (Posen).

(6) Uhlenhut, *Eine Methode zur Unterscheidung der verschiedenen Blutarten, in besonderen zum differentialdiagnostischen Nachweise des Menschenblutes* (" Deutsche mediz. Wochenschrift ", 1901, n. 6, S. 82, 7 febbraio).
Id. " " " 1901, n. 17, S. 260, 25 aprile).
Id. " " " 1901, n. 30, S. 499, 25 luglio).

Nuovi Bopiridi.

Nota del Dr. GIUSEPPE NOBILI.

(Con una Tavola).

Nel corso di studi sopra svariate collezioni di Decapodi, provenienti da regioni diverse, mi imbattei talvolta in esemplari portanti dei Bopiridi. Nella presente Nota pubblico appunto la descrizione di 6 forme nuove, trovate su esemplari appartenenti in parte al Museo Zoologico di Torino, in parte al Museo Civico di Storia Naturale di Genova, in parte al " Muséum d'Histoire Naturelle „ di Parigi.

Epipenaeon, n. gen.

Miss H. Richardson descrisse nell'anno 1904 un interessante genere di Bopiridi che chiamò *Parapenaeon*. Questo parassita fu trovato sopra un individuo di *Parapenaeus Dalei* (1). Sopra due grossi esemplari di *Penaeus ashiaka* Kish., provenienti dal Mar Rosso, e di proprietà del Museo di Parigi, ho trovato due coppie di un parassita che è molto affine al *Parapenaeon* del Giappone, ma è ben distinto specificamente dal *Parapenaeon consolidata*, e che credo anche si possa separare come genere per i caratteri dei suoi oostegiti che non si toccano sulla linea mediana lasciando buona parte delle uova allo scoperto; pel suo addome diviso solo in 5 segmenti superiormente, provvisti di pleure, e per gli uropodi biramosi. In *Parapenaeon* gli oostegiti si oltrepassano l'un l'altro, il segmento terminale non ha pleure e i suoi uropodi sono uniramosi, non modificati da papille o altri ornamenti, e ben visibili dorsalmente. La disposizione delle pleure toraciche in *Parapenaeon* pare anche diversa.

(1) Il " *Parapenaeus Dalei* „ Rathb., come tutte le forme del gruppo *velutinus*, deve essere attribuito al genere *Metapenaeus*.

Epipenaeon ingens, n. sp. (fig. 1).

♀ Il corpo di una delle femmine è lungo mm. 22 e largo mm. 16, quello dell' altra femmina è lungo mm. 27 e largo mm. 21. La forma generale del corpo è largamente ovale.

Il capo ha una larga lamina frontale in avanti la quale è brevemente marginata ed occupa tutta la estensione del bordo frontale; la superficie del capo è divisa longitudinalmente in due parti arrotondate poco prominenti; posteriormente il capo è triangolare. Gli occhi mancano. Le antenne non sono visibili dal disopra.

Le antenne del primo paio sono contigue alla base e collocate immediatamente sopra al labbro superiore. Esse constano di 3 articoli, dei quali il terzo è più piccolo che i primi due, ed il primo è molto ingrossato. Le antenne del secondo paio sono composte di 4 articoli, piuttosto compressi e dilatati i primi, più breve e cilindrico il quarto. Il labbro superiore è un poco più largo che l' ipofaringe, ma pochissimo sporgente. Le mandibole non sporgono oltre l'ipofaringe in forma di uncini. Le prime mascelle sono due lobi rudimentali attaccati di fianco all'ipofaringe; le seconde mascelle sono anche rudimentali, ma inserite molto più in basso. Il primo articolo dei maxillipedi ha una dilatazione posteriore mediocre; il secondo articolo ha la dilatazione esterna ben sviluppata; il palpo è ben sviluppato ma non segmentato. La lamina inferiore del cephalon dietro l'attacco dei maxillipedi porta numerose piccole sporgenze digitate che formano come una frangia pendente nella cavità incubatrice. Le parti boccali sono coperte in parte dal primo oostegite.

La lamina pleurale del primo segmento toracico è membranacea ed assai ampia, più larga della larghezza del bordo del segmento ed estendentesi anche in parte in avanti sopra il capo ed all'indietro sotto la pleura del segmento seguente.

La stessa eccedenza in lunghezza nelle lamine pleurali si osserva su tutti i cinque primi segmenti.

Le gibbosità pleurali o ovariche sono sviluppate sui quattro primi segmenti: sui primi due segmenti sono più convesse, sul terzo e sul quarto più lineari. Sui primi quattro segmenti del

torace non v'è separazione di un lobulo posteriore sui margini corrispondente alla porzione posteriore della lamina pleurale del segmento come in *Parapenaeon.*

Le lamine pleurali dei segmenti 6° e 7° sono pure ben sviluppate, dirette in avanti, indivise. Le lamine dei segmenti I-V sono definite da un solco più netto che quello che separa le lamine dei segmenti VI-VII. A destra le lamine pleurali sono molto ridotte.

I segmenti del pleon sono solo in numero di cinque e hanno tutti lamine pleurali ben distinte e non separate da solchi. I segmenti sono distinti dorsalmente. Anche l'ultimo segmento si prolunga in due lamine membranose e ben sviluppate.

Inferiormente il corpo della femmina offre la larga cavità incubatrice, la quale è in parte aperta perchè gli oostegiti non si incontrano sulla linea mediana, ma lasciano fra loro uno spazio vuoto. Il 1° oostegite ha il solco trasverso sulla faccia esterna profondo; la cresta interna è robusta e finamente fimbriata fino quasi alla sua estremità. Gli altri oostegiti non sono granulati nè cigliati.

I pereopodi hanno il 2° articolo molto grosso, con una cresta, e il 7° distinto. L'ultimo segmento toracico è diviso ventralmente in una serie di minute lamelle vicine e parallele. I primi due segmenti del pleon sono ricoperti da una cuticola minutamente papillata. Gli altri segmenti sono minutamente nodulosi.

I pleopodi sono tutti sviluppati e trasformati in due lamelle coperte di numerose papille arrotondate o allungate; benchè vi siano dorsalmente solo cinque segmenti vi sono sei paia di pleopodi; gli ultimi o uropodi sono molto sviluppati, non sporgenti però oltre il termine del segmento, ornati anch'essi di papille nella loro parte basale e più semplici nella parte distale, benchè anche colà ornati di tubercoletti.

Pleopodi e uropodi non sporgono oltre il margine del segmento e non sono visibili dal disopra.

♂ Il *maschio* [illegible] una delle coppie è lungo mm. 4,8, quello dell'altra coppia mm. 6,46. Il corpo del primo è largo mm. 2,2, quello del secondo mill. 2,8. Il corpo è dunque poco più del doppio lungo quanto largo.

Il capo è quasi piatto superiormente ed è privo di occhi.

Il suo bordo anteriore è pressochè diritto; il margine laterale obliquo; posteriormente il capo è ben separato dal primo segmento toracico. Le antennule sono piuttosto brevi, più lunghe proporzionalmente alle dimensioni differenti del corpo che nella femmina, e divise in tre articoli: il 1° grosso, il 2° anche ingrossato ma meno che il 1°, ed un poco più lungo, il 3° minuto. Le antenne hanno cinque articoli: i due basali grossi, il 3° un poco meno grosso, i due ultimi più esili, l'ultimo minutissimo. Il labbro inferiore è convesso ed è alquanto sporgente oltre l'apice dell'ipofaringe, la quale non si protende però molto in avanti, arrestandosi prima della base delle antennule che sono molto distanti fra loro. Le maxillule sono ridottissime; non vi sono maxillipedi.

I segmenti toracici sono alquanto convessi; visti dal disopra i loro angoli laterali sono arrotondati; ma le incisioni fra di essi sono ben distinte. I primi tre si dirigono alquanto in avanti, il 4° è transverso ed è anche il più largo di tutti, il 5°, il 6° ed il 7° si dirigono all'indietro. Le zampe toraciche hanno la solita struttura, coll'ultimo articolo ben sviluppato ed applicantesi contro il penultimo un poco dilatato; quelle delle paia medie sono un poco più sviluppate.

L'addome misura circa un quinto della lunghezza del corpo. I suoi segmenti sono completamente fusi ed inferiormente esso non ha alcun pleopodo; gli uropodi mancano pure. Una sporgenza dei margini alla base sembra essere una traccia del primo o dei primi segmenti basali. L'apice dell'addome è curvo e termina in una breve punta ottusa.

Gen. ***Orbione*** Bonnier.

Il genere *Orbione* venne fondato da Bonnier nell'anno 1900 e contiene finora due sole specie, l'una presa a Hongkong su un *Penaeus* indeterminato, l'altra trovata sull'*addome di un Brachiuro*, in posizione quindi, come giustamente ritiene Bonnier, puramente accidentale e non certo la vera originaria dell'animale. Per entrambe le specie il maschio è ignoto, quindi esso lo è pure pel genere. Sulle branchie di destra di un *Metapenaeus monoceros* di Singapore, acquistato con altri crostacei su quel mercato dal Dr. Giovanni Negri e donato al Museo Zoologico

di Torino, ebbi la fortuna di trovare una coppia di Bopiridi. La specie a cui appartengono i parassiti è certamente nuova, perchè ben differente dalle due descritte da BONNIER, e, nonostante che il suo *facies* sia alquanto diverso, pei caratteri morfologici essa non può essere separata da *Orbione*. Descriverò quindi la specie, completando, pei caratteri del maschio, la diagnosi generica.

Orbione Bonnieri, n. sp. (fig. 2).

Il contorno della femmina è più allungato che in *O. penaei* Bonn.: e, contrariamente a quanto avviene in questa specie, la larghezza del corpo è minore della lunghezza: il corpo è lungo 11,5 mill., e largo, al terzo somite toracico, 7,5 mill. Il corpo è dunque più che 1 $^1/_2$ volte lungo quanto largo. Tutti i segmenti del corpo sono provvisti di lamine pleurali: queste però, nell'esemplare, sono per i segmenti toracici IV-VII più sviluppate a destra che a sinistra.

La testa è disposta obliquamente e porta in avanti una ampia lamina frontale, membranacea, arrotondata, che è più lunga che la lunghezza della testa stessa, ed anche alquanto più larga. La superficie della testa è indivisa. Le antennule sono triarticolate, coi due primi articoli grossi e l'ultimo breve; le antenne hanno 5 articoli, coll'ultimo rudimentale. Tanto le antennule che le antenne hanno la superficie leggermente granulata. I maxillipedi sono in grande parte ricoperti dal primo oostegite, salvo il lungo palpo che sporge: la dilatazione esterna del 2° articolo è assai forte; il palpo è lungo e non segmentato. La lamina inferiore del cephalon o margine ingrossato dietro l'inserzione dei maxillipedi porta due brevi lamelle lobate. Il labbro superiore è convesso e piuttosto breve, superato dalla ipofaringe la quale è assai convessa. Maxillulae e maxillae sono rudimentali e disposte come di solito.

Tutti i segmenti pereonali sono piatti al disopra, e ognuno di essi porta una larga lamina pleurale membranacea, la cui forma varia alquanto per i vari segmenti. Sui segmenti I-IV di destra le lamine pleurali sono rotondate in fuori, ampie, ricoprentisi parzialmente alle estremità: le gibbosità pleurali sono ben distinte, ma poco convesse: esse occupano grande parte del

margine del segmento: la parte rimanente è delimitata da un leggiero solco. Sui segmenti V-VII non esistono gibbosità pleurali; la lamina del segmento V è biloba; le lamine dei segmenti VI e VII sono rotondate e ricondotte all'indietro. I pereopodi hanno tutti una grossa costola sul 2° articolo; il 7° articolo è ben distinto e mobile, la superficie degli articoli è microscopicamente scabra. Gli oostegiti sono in numero di cinque paia. Il primo paio ha il solco esterno ben netto; la cresta interna bene sviluppata, ma non particolarmente lobata. Gli oostegiti chiudono completamente la cavità incubatrice, e la loro superficie è minutamente scabra per piccoli granuli rotondati. Il 5° paio non è cigliato.

Il pleon è ben sviluppato e tutti i suoi sei articoli sono distinti, e provvisti di *lunghe* lamine pleurali arrotondate o subacute all'apice, la cui superficie offre piccoli tubercoli o verruche, specialmente lungo i margini.

I pleopodi sono biramosi; quelli del primo paio sono largamente triangolari, più larghi che i seguenti, che sono proporzionalmente più allungati. Gli uropodi sono allungati, lunghi quasi come le lamine pleurali del VI segmento e uniramosi. La faccia ventrale dei somiti è fortemente pieghettata.

Il *maschio* che è lungo mill. 3,2 e largo mm. 0,42 rassomiglia a quello di *Parapenaeon* e di *Epipenaeon*, perchè ha tutti gli articoli del pleon riuniti in uno solo. Il capo è grosso, rotondato in avanti, ben distinto dal 1° segmento del torace. Le antennule sono composte di tre articoli, il 1° corto e grosso, il 2° più lungo, il 3° piccolo e terminato da un ciuffo di setole.

Le antenne sporgono distintamente ai lati della testa. Esse sono formate di sei articoli, dei quali i due ultimi sono assai gracili e allungati, provvisti di qualche setola apicale. Alcune setole si trovano anche qua e là al termine degli altri articoli.

Il rostro boccale è forte, cogli apici uncinati delle mandibole ben visibili, il labbro superiore convesso, l'ipofaringe allungata. I maxillipedi mancano.

I segmenti toracici sono subeguali, coi margini rotondati: i primi due sono diretti alquanto in avanti, il 3° ed il 4° sono trasversi, gli ultimi tre sono diretti all'indietro. La superficie di questi segmenti è liscia; e non vi sono tubercoli dal lato ventrale. I pereopodi sono piuttosto lunghi, col 5° articolo micro-

scopicamente setoloso all'estremità, il 6° grosso, il 7° lungo quasi quanto il 6°, contro il quale si ripiega.

L'addome è assai breve, con una sporgenza per ogni margine laterale come in *Epipenaeon ingens*, e come in questo genere non diviso in segmenti nè avente alcuna traccia di pleopodi o di uropodi, ma colla superficie inferiore uniformemente convessa.

Cardiocepon pteroides, n. gen., n. sp. (fig. 3).

Un Bopiride interessante venne raccolto dal Dr. O. Beccari nel 1874 a Ternate, " parassita nell'interno di un granchio ". Il Bopiride appartiene ora al Museo Civico di Storia Naturale di Genova. Da un altro cartellino di indicazioni sul granchio ospite, e dallo studio della collezione dei Decapodi del Dottor Beccari, rilevo che il granchio in questione, dal quale il Beccari estrasse il parassita è certamente il *Cardiosoma carnifex* Herbst. Disgraziatamente nella estrazione del parassita il maschio è andato perduto, e non mi rimane che a descrivere la femmina. Questa offre particolarità interessantissime, ed è veramente da deplorare che il parassita non sia stato lasciato in posto sull'ospite. che per tal modo sarebbe stato possibile avere anche il maschio. Ad ogni modo descriverò ugualmente la femmina, la quale offre caratteri tali da costituire un genere nuovo, sperando che così l'attenzione dei naturalisti si rivolga alle Cardiosome, così comuni nei paesi tropicali, e che sia col tempo possibile, ritrovando una coppia intatta, completare la descrizione di questo genere coi caratteri del maschio.

La femmina è lunga mill. 22 circa e larga mill. 11. Tutti i segmenti del corpo sono bene indicati, e l'animale è mediocremente asimmetrico.

Pel grande sviluppo delle pleure addominali il corpo non sembra essere più ristretto all'estremità posteriore, ma in realtà i somiti addominali vanno restringendosi gradatamente e sono più stretti che quelli del torace. La testa è molto grossa, sporgente per oltre metà al di là del primo segmento toracico e divisa dorsalmente in due sporgenze sferiche molto sollevate; in avanti essa ha un margine sporgente, piuttosto spesso e carnoso, convesso in avanti. Le antennule sono composte di tre

articoli; le antenne sono assai corte e composte di cinque articoli, dei quali l' ultimo è piccolo e molto breve. Le antenne sono inserite immediatamente al disotto del margine frontale che è inspessito. Sotto l'inserzione delle antennule e antenne decorre un margine inspessito il quale inquadra l' apparato boccale.

Gli organi boccali sono assai sporgenti. Il labbro superiore è coperto nel mezzo dall'ipofaringe la quale è molto larga, convessa, costata esternamente e coll' estremità apparentemente trilobata. Gli uncini delle mandibole sporgono debolmente oltre l'apice del cono boccale. Le maxillule e le mascelle sono, come al solito, molto ridotte. I maxillipedi sono ampî e la loro estremità è parzialmente visibile al di là del primo oostegite. Il loro 1° articolo non è prolungato in basso, la dilatazione del 2° articolo è debole, e il palpo è conico e assai lungo, non segmentato. La lamina inferiore del cephalon porta nel mezzo un lobo quadrangolare a ai lati due prolungamenti corniformi (figura 3 *b*).

I segmenti del pereon sono convessi e ciascuno di essi è provvisto di una gibbosità pleurale. Queste gibbosità variano naturalmente di forma secondo i segmenti: sul 1° sono allungate obliquamente e strette, sul 2°, 3° e 4° sono anche allungate ma più larghe, portate su un rialzo che le rende come peduncolate, sul 5°, 6° e 7° sono più piccole ma di forma quasi sferica e anche peduncolate. Il margine dei segmenti è tumido, i primi quattro hanno una sutura che divide superficialmente il margine in due lobi, dei quali quello posteriore è più breve, ma non vi sono vere lamine pleurali. Il 6° segmento sporge nel mezzo in una grossa prominenza conica diretta all'indietro, il 7° è breve e non sporgente.

Dalla parte ventrale vi sono cinque oostegiti che si ricoprono ampiamente nel mezzo, le quattro prime paia liscie, l'ultimo paio granulato e cigliato lungo il margine posteriore. Il 1° oostegite non ricopre che in parte i maxillipedi; la sua porzione anteriore è breve, arrotondata; la cresta interna è ben formata ma liscia; indi l'oostegite si prolunga in una lamina longitudinale lobata e fortemente carenata, la quale è completamente coperta dagli altri oostegiti (fig. 3 *c*). I pereopodi delle prime quattro paia sono brevi, quelli delle ultime tre paia più allun-

gati e visibili dal disopra. Il 2° segmento non ha cresta speciale, il 6° è breve e largo, il 7° è uncinato e breve (fig. 3 *d*).

I segmenti del pleon sono tutti distinti; il 1° ed il 2° si prolungano posteriormente in una sporgenza conica adagiata lungo i segmenti seguenti. I primi cinque segmenti sono muniti di lunghe lamine pleurali, disposte in doppia serie, cioè due per ciascun margine laterale di ciascun segmento. Queste lamine sono distintamente pennate e lobate, e molto sviluppate, decrescendo però in grossezza dal 1° al 5° segmento (fig. 3 *e*). I pereopodi delle prime quattro paia hanno l'endopodo largo, palmato, cioè diviso all'estremità in lobi acuti, ripiegati, che lo fanno rassomigliare ad una foglia di *Chamaerops*; l'esopodo invece è allungato, lobulato e pennato come le pleure addominali. I pleopodi del quinto paio sono semplici, costituiti da un solo ramo molto allungato e tubercolato e lobulato sui margini. Il 6° segmento è munito di due larghe lamine allungate, anch'esse tubercolate e lobulate, che sono probabilmente gli uropodi.

Questa forma, benchè non possa dare i caratteri del maschio, non mi sembra rientrare in alcuno dei generi noti di Bopiridi. I caratteri del genere si possono stabilire così:

Cardiocepon. — ♀ Lamine pleurali toraciche nulle, pleure pleonali doppie su cinque segmenti. Gibbosità pleurali sui sette segmenti del torace. Sesto segmento toracico prolungato nel mezzo in una forte gibbosità; primo e secondo segmento pleonale anche gibbosi. Pleopodi delle prime quattro paia coll'endopodo palmato e frastagliato, l'esopodo laminare lobato; pleopodi del quinto paio semplici, allungati; uropodi allungati tubercolati, uniramosi.

Aporobopyrus aduliticus (1), n. gen., n. sp. (fig. 4).

Una coppia trovata nella cavità branchiale di un *Petrolisthes rufescens* Hell., raccolto a Massaua dai Signori Issel e Beccari e appartenente al Museo Civico di Storia Naturale di Genova.

La femmina è lunga mm. 6, e larga mm. 4. La sua super-

(1) Ἄδουλις, nome greco della baia di Annesley, corrispondente quindi alla posizione geografica di Massaua, in *Anonymi Periplus Maris Erythraei* (*Geogr. Graeci minores*, vol. II).

ficie dorsale è alquanto concava; il contorno del corpo è convesso verso destra e concavo verso sinistra.

Il capo è grosso, alquanto convesso, a superficie indivisa ed arrotondato posteriormente, senza lamina frontale in avanti. Le antennule hanno tre articoli, le antenne quattro con peli all'apice. Il labbro superiore è ben convesso, sporgente un poco oltre l'ipofaringe, il cui apice insieme con quello delle mandibole ricopre in parte; le maxillule e le mascelle sono rudimentali. I maxillipedi hanno il palpo breve e con qualche ciglio.

I segmenti del torace hanno tutti lamine pleurali più sviluppate a destra, di forma arrotondata, e sui primi quattro segmenti occupanti un poco più della metà del segmento. I primi quattro segmenti portano anche gibbosità pleurali, e la parte posteriore dei margini del segmento che si protende all'infuori è separata da un solco. Le ultime tre lamine pleurali occupano quasi tutta la larghezza del segmento. Gli oostegiti sono in numero di cinque paia e sono debolmente granulati; il primo oostegite ha la cresta interna grossa ma liscia, ed inferiormente si prolunga in uno stretto lobo. Gli oostegiti si ricoprono nel mezzo, chiudendo completamente la cavità incubatrice. Questa nell'unico esemplare contiene solo uova.

I segmenti addominali sono tutti distinti, ed hanno pleure rudimentali, quasi nulle, sotto forma di piccoli rigonfiamenti dell'estremità dei margini laterali. I pleopodi sono tutti biramosi, membranacei, e coi loro rami sporgono oltre il contorno dell'addome, il quale appare così a primo aspetto provvisto di lamine pleurali membranacee. Gli uropodi sono ben sviluppati, anch'essi membranacei, ma uniramosi. La parte ventrale dei segmenti è irregolarmente pieghettata.

Il maschio ha tutti i segmenti liberi. Il capo è alquanto arrotondato in avanti; le antennule hanno tre articoli, l'ultimo con un ciuffo di setole brevi; le antenne hanno cinque articoli, l'ultimo con un ciuffo di lunghe setole. Il labbro superiore è molto sporgente, esso si avanza fino alla base delle antennule (fig. 4 *b*). Non vi sono maxillipedi.

I segmenti del torace sono convessi al disopra, i primi quattro sono diretti alquanto in avanti, il 5° è trasverso, il 6° ed il 7° sono diretti all'indietro. I pereopodi hanno gli ultimi due articoli prensili, come sempre. I gnatopodi sono più grossi

che i pereopodi seguenti, cogli articoli 5° e 6° microscopicamente denticolati e cigliati; il 6° articolo è assai largo.

I segmenti del pleon sono tutti distinti; il 6° è molto piccolo. Le parti laterali di questi segmenti sono quasi diritte, non specialmente ricurvate all'indietro. Ventralmente il pleon non ha appendici, neppure rudimentali; come non vi sono tubercoli nè sul pleon nè sul torace.

Il maschio è lungo mm. 2,23 e largo mm. 0,92. Questa forma non mi pare possa rientrare in alcun genere, nè mi è possibile indicarne precisamente le affinità perchè tiene allo stesso tempo di varî gruppi generici. Credo quindi che un nuovo genere sia necessario che può essere caratterizzato così:

Aporobopyrus. — Femmina: Torace con sette lamine pleurali, e quattro gibbosità pleurali. Pleure pleonali rudimentali, tubercoliformi. Pleopodi laminari, biramosi. Uropodi laminari, semplici.

Maschio: Segmenti del pleon tutti distinti, pleopodi ed uropodi nulli.

Questa forma è molto probabilmente congenere colla *Pseudione curtata* Richardson, raccolta a Key West su *Petrolisthes sexspinosus*, benchè certo ne sia specificamente distinta. Io penso tuttavia che questa forma non possa restare nel genere *Pseudione*, perchè in questo genere quale è delimitato nella monografia di Bonnier le pleure addominali sono lamellose e allungate, mentre tanto nella mia specie parassita del *P. rufescens* del Mar Rosso, come in quella parassita del *P. sexspinosus* della Florida, le pleure addominali sono quasi nulle, come sono nulli i pleopodi del maschio. *Ps. curtata* Richards, non ha però lamine pleurali toraciche.

Aporobopyroides upogebiae, n. gen., n. sp. (fig. 6).

Una coppia presa su un esemplare di *Upogebia* (*Calliadne*) *Savignyi*-Strahl (= *Gebiopsis isodactyla* Ortm.) raccolto dai Signori Issel e Beccari a Massaua, e appartenente al Museo Civico di Storia Naturale di Genova, pare per molti caratteri assai affine all'*Aporobopyrus* descritto prima, ma se ne stacca per certi altri, così che la sua posizione sistematica mi pare assai incerta.

La *femmina* ha il dorso appiattito ed è larga mill. 5,5 e lunga mill. 6 $^{1}/_{2}$. Tutti i segmenti del pereon sono distinti. Il capo è assai largo, un poco convesso, non diviso, e provvisto in avanti di un brevissimo bordo frontale membranaceo. Le prime antenne sono molto brevi, col 1° articolo molto ingrossato, espanso lateralmente, cigliato, e includente in gran parte i due ultimi molto brevi. Le seconde antenne hanno cinque articoli, il 1° breve e molto largo, il 2° allungato e pure assai largo, il 3° ed il 4° più stretti, il 5° brevissimo e cigliato. Il rostro boccale sporge distintamente; il labbro superiore è convesso e sopravanza l'ipofaringe. I maxillipedi sono parzialmente coperti dal primo oostegite; il loro palpo è molto breve (fig. 6 *c*). La lamina inferiore del cephalon ha alcuni brevi lobi.

I primi quattro segmenti del pereon portano una gibbosità pleurale allungata; non vi sono vere lamine pleurali; benchè i segmenti 2-3-4 del lato destro sporgano alquanto oltre la gibbosità. Tutti i segmenti sono lisci. Il 1° oostegite ha un lobo ricurvo alla sua estremità posteriore, il solco esterno ben sviluppato, la cresta interna liscia. Vi sono cinque oostegiti i quali coprono completamente la cavità incubatrice. Essi sono trasversalmente allungati, un poco granulosi, l'ultimo paio cigliato sul margine inferiore. I pereopodi sono gracili e piuttosto allungati. Il loro 2° articolo ha una cresta provvista di piccoli tubercoli, il 3° è allungato, il 4° assai sporgente in avanti del 5° e tubercolato anch'esso; il 7° è uncinato (fig. 6 *b*).

I sei articoli del pleon sono distinti, tutti sprovvisti di pleure, ma coi pleopodi sporgenti ampiamente ai lati di ciascun articolo.

I pleopodi (fig. 6 *d*, *g*) sono biramosi, coi rami subeguali, membranosi, col bordo alquanto inspessito ma non propriamente tubercolato. Gli uropodi sono biramosi, ma la separazione non giunge fino al termine dell'appendice. Essi nell'unico esemplare sono diversamente conformati. L'uropodo di sinistra è più lungo che quello di destra ed è diviso in due rami ineguali, dei quali quello interno è biforcato all'apice; quello di destra è composto di due rami disuguali separati quasi fino alla base. Gli uropodi sono al pari dei pleopodi, laminari e membranacei. La superficie ventrale dei segmenti del pleon ha il margine estremo diviso in tubercoli rotondati.

Il *maschio* è lungo mm. 2,20 e largo mm. 0,84. I suoi segmenti toracici sono tutti distinti. Il capo è libero, provvisto di due minute macchie oculari, largo e arrotondato in avanti. I primi tre segmenti pereali si dirigono alquanto in avanti, il quarto è transverso, gli ultimi tre si dirigono all'indietro. Le separazioni fra i segmenti sono ben visibili. Le antennule sono composte di tre articoli, i due primi grossi, l'ultimo minuto e peloso all'apice. Le antenne sono piuttosto brevi ed hanno cinque articoli, l'ultimo ed il terzo con peli (fig. 6 *f*). Il rostro boccale si avanza distintamente fino fra le basi delle antennule. Il labbro superiore è assai sporgente e più lungo dell'ipofaringe.

Non ho veduto maxillipedi. I gnatopodi ed i pereopodi sono robusti e sviluppati come di solito cogli ultimi due articoli formanti pinza. Non vi sono tubercoli ventrali sul pereon. Il pleon è breve e composto di quattro grossi articoli a estremità subarrotondate, ma ben staccate, e di un articolo terminale trilobo (fig. 6 *e* e 6 *a*), che verosimilmente risulta dalla fusione parziale del 5° col 6° articolo. Non vi è alcuna traccia di pleopodi nè di uropodi.

I caratteri di questo genere possono riassumersi così:

♀ Pereon senza lamine pleurali sviluppate; pleon senza pleure. Uropodi biramosi; pleopodi biramosi.

♂ Segmenti del pleon distinti, ma il 6° fuso col 5° dorsalmente e ventralmente, libero solo ai lati e all'estremità; uropodi e pleopodi nulli.

Upogebiophilus rhadames, n. gen., n. sp. (fig. 5).

Sopra un esemplare di *Upogebia rhadames* Nob. di Djibouti, raccolto dal Dr. Coutière, ho trovato una coppia di Bopiridi che pel suo aspetto rassomiglia al genere *Aporobopyrus*, ma che ne è certamente distinto. La femmina differisce per la mancanza di lamine pleurali al torace, ed il maschio per la presenza di soli cinque articoli al pleon provvisti di pleopodi uniramosi.

La *femmina* è lunga circa mill. 3 $^1/_2$ (l'esemplare è assai deteriorato) e larga i $^1/_5$ della lunghezza. Il capo è piuttosto grosso a superficie indivisa, brevemente marginato in avanti e provvisto ai lati di due piccole macchie oculari. Posteriormente esso è

arrotondato ed è incluso quasi interamente nel primo somite pereiale. Le antennule sono composte di tre articoli, il 1° assai breve, il 3° breve e provvisto di peli all'apice. Le antenne hanno cinque articoli, gli ultimi due piccoli e pelosi. Il labbro superiore è molto sporgente, le mandibole e l'ipofaringe anche; la loro estremità è però superata dal labbro superiore. I maxillipedi non sono coperti che in parte dal primo oostegite; non ho trovato palpo (1). La lamina inferiore del capo presenta 3-4 lobi brevi per ciascun lato.

La superficie dei segmenti toracici è alquanto concava, liscia. I primi quattro portano gibbosità pleurali più sviluppate a sinistra. Dalla stessa parte il segmento sporge anche un poco oltre la gibbosità pleurale, ma non vi sono vere lamelle pleurali. I segmenti dell'addome non hanno lamine pleurali sviluppate, ma alla loro estremità sono alquanto prodotti e ingrossati, per cui forse si può parlare di pleure rudimentali. I primi quattro segmenti sono ben visibili dal disopra; il 5° invece trovasi parzialmente nascosto dalle estremità inspessite del 4°; il 6° è assai piccolo.

Vi sono cinque oostegiti granulati, gli ultimi due maggiormente, e lungamente cigliati. Il primo oostegite ha la cresta interna assai grossa, ma liscia, inferiormente sporge in un lobo stretto ed allungato. Gli oostegiti chiudono bene la cavità delle uova.

I pereopodi non hanno cresta sul 2° articolo; il 4° è molto allungato, concavo nel margine esterno; il 5° è assai stretto.

I pleopodi sono tutti biramosi, laminari, membranosi, allungati, ben visibili dorsalmente oltre il margine addominale. Il ramo interno è generalmente più breve del ramo esterno.

Gli uropodi sono allungati e rassomigliano in tutto ai pleopodi, ma sono uniramosi. Il margine inferiore dei segmenti addominali è increspato.

Il *maschio* è disgraziatamente ridotto in frammenti che in parte si perdettero. Ho potuto tuttavia esaminarne il capo, gran parte del pereon e il pleon. La superficie dei segmenti è liscia e convessa. Il capo è largo, incassato parzialmente dal primo segmento pereiale ma non saldato con esso. Le antennule hanno

(1) L'esemplare è in cattivo stato.

tre articoli, il 1° sporgente alla sua estremità anteriore è cigliato, largo, il 3° conico, piccolo e cigliato. Il labbro superiore convesso si avanza sopra l'apice dell'ipofaringe e delle mandibole. Non vidi maxillipedi. Dorsalmente vi sono due macchie oculari. Le antenne hanno cinque articoli.

I segmenti del pereon sono ben separati con incisure piuttosto larghe e sono provvisti di pereopodi molto robusti, di forma subchelata, col 6° e col 7° articolo molto sviluppati, senza cresta distinta sul 2°. Non vi sono tubercoli ventrali.

Il pleon è composto di soli cinque segmenti; i primi quattro curvati all'indietro; il 5° impari e mediano, e corrispondente quindi ad un 6° segmento di un addome normale. Inferiormente i segmenti del pleon non hanno tubercoli, ma sono provvisti di pleopodi ovali, laminari, uniramosi. Due distinte appendici si osservano pure sul 5° segmento.

Sul genere *Upogebia* furono sinora trovati due soli parassiti branchiali: L'uno è la *Gyge branchialis* Cornalia e Panceri. Questo genere è distintissimo da *Upogebiophilus* pei suoi pleopodi uniramosi. L'altro è l'*Aporobopyroides upogebiae*. Questo si distingue per gli uropodi biramosi, e pel maschio con sei segmenti apodi al pleon.

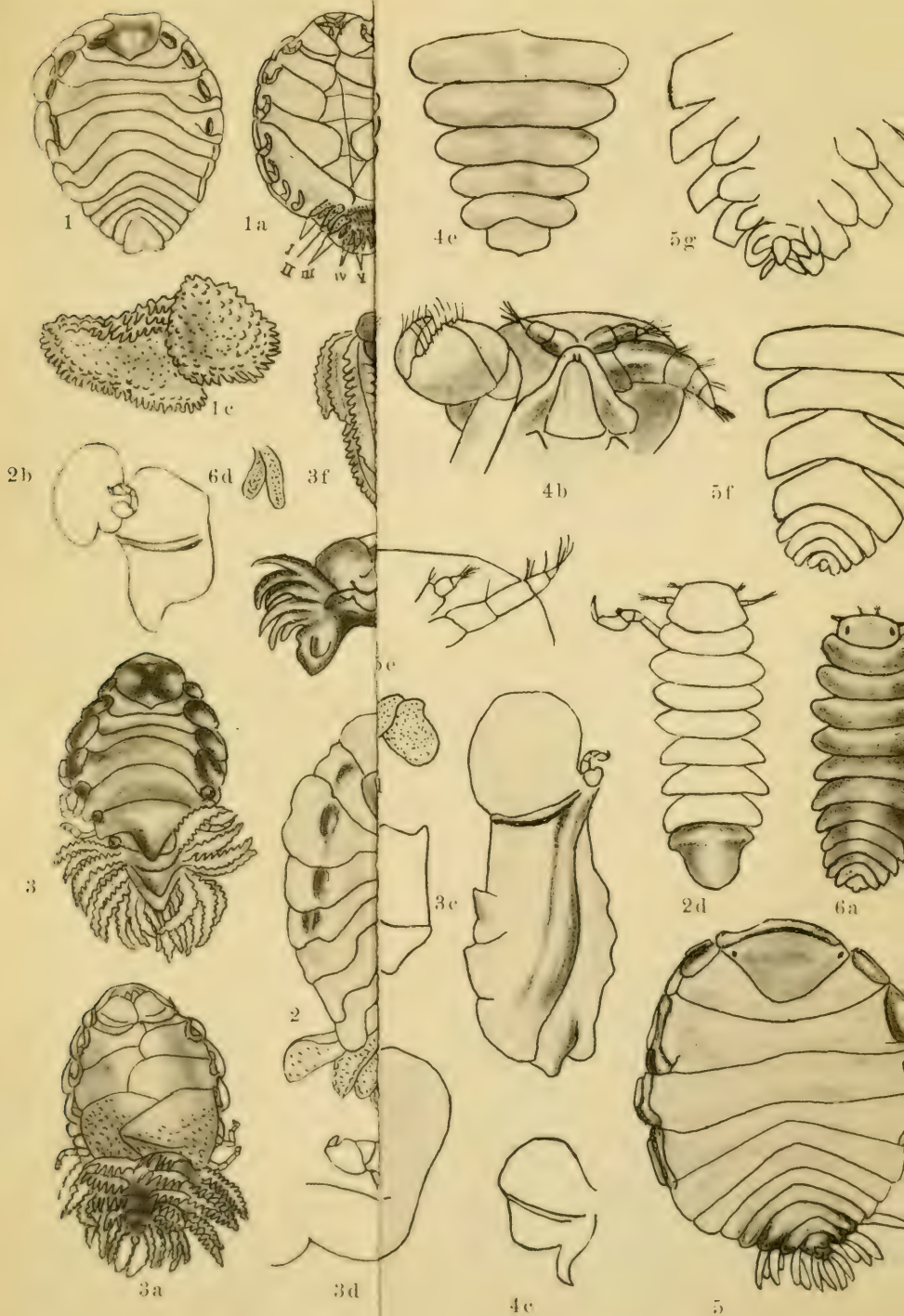
SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. 1 — *Epipenaeon ingens* Nob. Femmina vista dal disopra × 1,5.
- 1*a* — La stessa dal di sotto × 1,5.
- 1*b* — Estremità del corpo vista dal di sotto × 4,5.
- 1*c* — Primo pleopodo × 9.
- 1*d* — Uropodi × 9.
- 1*e* — Maschio × 9.

" 2 — *Orbione Bonnieri* Nob. Femmina vista dal disopra × 4,5.
- 2*a* — Uropodi × 9.
- 2*b* — Primo oostegite × 4,5.
- 2*c* — Pereopodo × 18.
- 2*d* — Maschio × 15.

" 3 — *Cardiocepon pteroides* Nob. Femmina dal disopra × 1,5.
- 3*a* — La stessa dal disotto.
- 3*b* — Estremità anteriore vista dal basso, e dopo rimosso uno dei maxillipedi, la cui inserzione è rappresentata in *mxp.d.* -

1
1a
I II III IV V
4c
5g
1c
4b
2b
6d
3f
5f
5e
3
3e
2d
6a
2
3a
3d
4e
5

1
1a
1b
1c
4
4a
4c
5g
1e
2a
2b
6d
3f
1d
5d
4f
6f
4b
5f
hyp
l s
md
3e
5c
5e
mx1
mx2
mxp1
3b
4d
3
2
6c
3c
2d
6a
5a
5b
6
3a
3d
2c
6g
6e
6b
4e
5

l.s. labbro superiore - *hyp.* ipofaringe - *md* mandibola - *mx'* maxillula - *mx''* maxilla - *mxp.s* maxillipede sinistro lasciato in posto.

3*c* — Primo oostegite × 4,5.

3*d* — Pereopodo × 15.

3*e* — Primo pleopodo colle pleure addominali × 4,5.

3*f* — Estremità della femmina vista dal disotto - pleopodo quinto - pleure del 5° somite pleonale - uropodi × 4,5.

Fig. 4. — *Aporobopyrus aduliticus* Nob. Femmina × 7.

4*a* — Maschio × 15.

4*b* — Testa del maschio veduta dal disotto, coll'estremità del guatopodo sinistro × 70.

4*c* — Primo oostegite × 15.

4*d* — Terzo pleopodo della femmina.

4*e* — Estremità dell'addome del maschio vista dal basso × 30.

4*f* — Maxillipede della femmina.

„ 5 — *Upogebiophilus rhadames* Nob. Femmina × 15.

5*a* — Estremità posteriore della femmina vista dal basso × 18.

5*b* — Pereopodo della femmina.

5*c* — Maxillipede della femmina.

5*d* — Primo oostegite.

5*e* — Antennule e antenne del maschio × 90.

5*f* — Parte del pereon e pleon del maschio dal disopra.

5*g* — Pleon e pleopodi dal disotto.

„ 6 — *Aporobopyroides upogebiae* Nob. Femmina × 9.

6*a* — Maschio × 18.

6*b* — Primo pereopodo col suo oostegite × 18.

6*c* — Maxillipede della femmina × 9.

6*d* — Terzo pleopodo della femmina.

6*e* — Pleon del maschio visto dal basso.

6*f* — Capo del maschio visto dal basso.

6*g* — Uropodi della femmina e pleopodi del 5° paio visti dal disopra × 18.

Relazione intorno alla Memoria del Prof. UGO AMALDI. *Sui gruppi continui infiniti di trasformazioni di contatto dello spazio.*

Nel grande campo dei gruppi continui di trasformazioni sono relativamente scarsi finora i lavori che si riferiscono a quelli che SOPHUS LIE chiamò gruppi continui *infiniti*. Il sommo Norvegese morendo non ebbe la soddisfazione di vedere la teoria di questi gruppi spinta così avanti come quella dei gruppi continui *finiti*!

Il nuovo lavoro dell'AMALDI porta un contributo notevole alla determinazione di quei gruppi continui infiniti, che son costituiti da trasformazioni di contatto dello spazio ordinario. Fra i gruppi così fatti, quelli *primitivi* si posson già riguardare come classificati (*). In conseguenza l'A. s'è rivolto a quello che si può considerare come il 1° caso di gruppi *imprimitivi*: il caso cioè che sia mutata in sè una ∞^1 di V_4 di elementi $(x\, y\, z\, p\, q)$, vale a dire una ∞^1 di equazioni alle derivate parziali del 1° ordine

$$\Phi\,(x\, y\, z\, p\, q) = \text{cost.}$$

L'analoga classe di gruppi imprimitivi *finiti* era già stata trattata nella Dissertazione dello SCHEFFERS (**). L'A. ricorre in parte a vedute simili a quelle che là si trovano (alcune delle quali risalgono al LIE): ma più spesso deve seguire procedimenti nuovi.

Come sempre, allorchè si devon classificare dei gruppi imprimitivi, egli distingue nella sua trattazione varî casi, a seconda della natura: 1°) del gruppo che il gruppo dato subordina *entro* la ∞^1 di V_4 (incluso il caso che quel gruppo si riduca all'identità), 2°) del gruppo che vien subordinato su una V_4 *unita*.

(*) G. KOWALEVSKI, Leipziger Berichte, 1899, p. 69. V. l'osserv. a p. 143

(**) Acta Mathematica, 14, 1891.

Notiamo poi un aspetto analitico del problema. Si sa che ogni trasformazione infinitesima di contatto corrisponde in certo senso ad una funzione (*caratteristica*) dell' elemento ($x\, y\, z\, p\, q$). Trattandosi di un gruppo continuo infinito, le corrispondenti funzioni caratteristiche costituiscono ciò che l'A., per l'analogia coi moduli di funzioni algebriche, ecc., chiama un *modulo*. Il suo problema consiste allora nella determinazione dei tipi di tali moduli. Ed egli lo tratta, valendosi di opportuni strumenti analitici, ed insieme anche di considerazioni sintetiche che gli permettono di allontanare quanto è possibile il momento del passaggio ai procedimenti puramente formali.

La Memoria del Prof. Amaldi, importante ed accurata, merita a nostro avviso l'accoglimento nei Volumi accademici.

C. Somigliana,
C. Segre, *relatore*.

Relazione sulla memoria del Dr. D. Ottolenghi, intitolata: *Sulla conduttività termica e sul calore specifico dei tessuti di lana e cotone.*

Il Dr D. Ottolenghi, autore della memoria, che avemmo l'incarico di esaminare, è un igienista. Egli volle con questo studio fornire alla sua scienza dei valori della conducibilità termica e del calore specifico dei tessuti che meritassero maggior fiducia di quelli, che si sono avuti finora. Scelse per la misura della conducibilità termica il metodo che H. F. Weber imaginò ed applicò ai liquidi, e per il calore specifico il metodo del Bunsen.

Si potrà osservare che questi metodi dànno un grado di precisione che pare soverchio per un genere di ricerca qual' è quella intrapresa dall'A. Ma egli potrà giustificarsi dicendo che una precisione soverchia nuoce solo in quanto impone maggior fatica a chi sperimenta, e che le differenze non grandi da lui trovate fra le conducibilità di tessuti composti della stessa materia, ma non eguali, permettono di dedurre un valor medio che ha il carattere di una buona approssimazione. Certo l'A.

discusse con molta cura la teoria dei metodi adoperati, teoria che non è semplice, nè facilmente accessibile a chi, come medico, non ebbe una preventiva preparazione di studi fisici e matematici. L'esperienze, non facili nemmeno per fisici di professione, vennero eseguite con sagacità e abilità nel Laboratorio di fisica tecnica di Napoli diretto dal Prof. Lombardi.

Una difficoltà che sempre si presenta nella misura della conducibilità termica dei cattivi conduttori solidi e che rende incerti i risultati ottenuti da parecchi sperimentatori, è quella dei contatti. L'applicazione del metodo del Weber ai tessuti di lana e di cotone non è esente da questo difetto. L'A. tenne conto di questa causa d'errore e in quanto era possibile, cercò di eliminarne le conseguenze con adatte correzioni dei risultati.

Noi crediamo che la memoria del D[r] Ottolenghi sia meritevole d'essere ammessa alla lettura e inserita nei volumi accademici.

C. Somigliana,
A. Naccari, *relatore*.

Relazione sulla Memoria del Prof. G. B. Rizzo, intitolata: *Sulla velocità di propagazione delle onde sismiche nel terremoto della Calabria del giorno 8 settembre 1903.*

Nella Memoria, che fummo incaricati di esaminare, il Professore G. B. Rizzo si propose lo studio della velocità, con cui si propagarono le onde del terremoto, che funestò le Calabrie nel settembre dell'anno scorso.

Egli raccolse a tal fine i sismogrammi di ben 78 stazioni, alcune delle quali remotissime come Honolulu, Apia, Christchurch. Determinata l'epoca più probabile della scossa nell'epicentro, il Rizzo calcolò per le singole stazioni la velocità media superficiale delle onde che costituiscono il principio della prima fase preliminare, poi quella delle onde spettanti alla seconda fase preliminare, e in fine la velocità delle onde del principio della fase principale. Di quelle tre velocità la prima a parità di distanza dall'epicentro, in generale, è maggiore, poi viene la se-

conda e poi la terza e ciascuna, al crescere della distanza, va decrescendo fino ad un minimo e poi cresce. Il Rizzo calcolò anche le velocità *vere* corrispondenti alle velocità medie ora indicate. Partendo da un valore iniziale di 20.8 chil. le tre velocità vere raggiunsero rispettivamente i minimi di 6.2, 2.9, 2.4 per una distanza di 800 chil. circa. Alla distanza di 5000 chil. i valori delle tre velocità erano diventati rispettivamente 16.7, 7.4, 4.5 chil., e si mantennero costanti per distanze maggiori.

Tali studî riassuntivi delle osservazioni, che gli apparecchi sismografici ora molto diffusi forniscono, sono molto importanti in quanto è probabile ch'essi ci conducano a scoprire un metodo sicuro per la determinazione dell'ipocentro e ci porgano qualche indicazione intorno alla natura del fenomeno sismico.

Il Prof. Rizzo condusse questo studio con moltissima cura e noi crediamo che il suo scritto meriti d'essere letto alla Classe e inserito nei volumi dell'Accademia.

N. Jadanza,
A. Naccari, *relatore.*

L'Accademico Segretario
Lorenzo Camerano.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 24 Giugno 1906.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Boselli, Vice-Presidente dell'Accademia, Ferrero, Direttore della Classe, Manno, Carle, Cipolla, Brusa, Carutti, Chironi, Savio e Renier Segretario. — Scusa l'assenza il Socio Ruffini.

Viene approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 10 giugno 1906.

Il Presidente legge le lettere con cui i professori Brandileone, Brini, Filomusi-Guelfi, Stoppato, Toniolo ringraziano per la loro nomina a Soci corrispondenti.

La Classe prende atto d'una lettera dell'Università di Aberdeen, con la quale si comunica che S. M. il Re d'Inghilterra assisterà alla solenne cerimonia commemorativa del IV centenario della fondazione di quell'Ateneo.

Il Socio Carle fa omaggio all'Accademia di un volume del senatore Francesco Buonamici, *Dell'ordine dei titoli delle Pandette*, vol. I, Pisa, 1906. Egli rileva l'importanza del nuovo studio e propone che la Classe, ringraziando l'insigne cultore di studi romanistici, gli mandi insieme le sue condoglianze per la gran sciagura domestica che lo ha colpito. Il Presidente e la Classe intera si associano.

La Direzione della Biblioteca nazionale di San Marco offre il volume: *La Biblioteca Marciana nella sua nuova sede*, Venezia, 1905.

Per l'inserzione negli *Atti* sono presentate:

1°, dal Socio Savio una sua nota: *Ancora la Cronaca di Filippo da Castel Seprio*;

2°, dal Socio Chironi uno scritto del Dr. Rocco Ragazzoni, *L'interesse ad agire e le azioni di accertamento*.

Il Socio Savio pronuncia le seguenti parole:

Essendo tra i pochi Accademici che non appartengono all'Università torinese, mi sembra d'avere uno speciale diritto di presentare vive congratulazioni al nostro egregio Segretario per la prova di stima datagli giustamente dai colleghi nella sua nomina a Rettore. Mi rallegro e gli auguro che nell'alto ufficio possa ottenere tutti quei maggiori vantaggi e quello splendore del primo nostro Istituto scientifico ch'egli desidera. — Alle congratulazioni al nuovo Rettore aggiungo un plauso di ammirazione e di onore al Rettore scadente, il collega Chironi, specialmente per le insigni benemerenze acquistatesi nel riparare ai disastri dell' incendio del 1904. Se a me non fu dato di portar contributo alcuno alla restaurazione di quel prezioso monumento scientifico che è la nostra biblioteca, voglio almeno trar profitto da questa circostanza per attestare come storico oggettivo l'opera che in varie guise vi portarono varii socii dell'Accademia, e in particolare l'illustre Vice-Presidente Boselli coloro che composero con tanta accuratezza i cataloghi dei codici superstiti, o attesero alla restaurazione dei codici danneggiati, i socii Cipolla, De Sanctis, Pizzi, Renier e il nuovo collega Stampini, e il socio dell'altra classe, prof. Guareschi. Mi sia lecito dire che coll'opera loro intelligente, attiva, disinteressata hanno reso più onorando il nome della nostra Accademia. Sarà sempre glorioso per l'Accademia l'affermare che essa vanta tra i suoi Socii coloro che più d'ogni altro si presero a cuore l'impresa di rimediare ai mali di quel disastroso incendio, e in parte già vi riuscirono. — Il nome del Prof. Cipolla, che ho pronunciato, mescola ai lieti rallegramenti un sentimento di rammarico per il suo allontanamento da noi. Se esso a tutti dispiace, più dispiace a me, che da quando mi cominciai ad occupare di studi storici, l'ebbi sempre in essi guida e maestro amorevole e sicuro. Quindi mi valgo della parola concedutami, per presentargli un caldo e riconoscente saluto e un fervido augurio di vita lunga e felice.

Le parole del Socio SAVIO sono accolte con approvazione dalla Classe. Il Segretario RENIER lo ringrazia per i gentili pensieri espressi a suo riguardo: si associa pienamente e col maggior calore all'elogio tributato all'energia, al senno, all'attività instancabile di cui diede prova il Rettore CHIRONI, per rendere meno crudele la grande jattura dell'incendio della biblioteca; s'unisce al saluto inviato al Socio CIPOLLA, nel quale ammira, oltre le qualità insigni di scienziato, la nobile integrità e rettitudine del carattere. — Il Socio CHIRONI, ringraziando a sua volta, rileva i gran benefici che la biblioteca ritrasse dalla costante e potente opera del Vice-Presidente BOSELLI, il quale ottenne che quell'istituto fosse rivendicato alla sua funzione universitaria, ed interpreta le intenzioni della Classe esprimendogli i più cordiali ringraziamenti. — Il Presidente D'OVIDIO esprime anche in nome della Classe di scienze fisiche il più profondo rammarico per la partenza dell'illustre e operosissimo Socio CIPOLLA. Questi ringrazia commosso per le gentili parole indirizzate a lui da tante parti, manifesta il suo dispiacere nell'allontanarsi da Torino e dall'Accademia dopo un quarto di secolo, e dichiara che recandosi a Firenze egli non intende punto che siano spezzati i vincoli che lo legano al nostro sodalizio scientifico.

Di questa dichiarazione prende atto il Vice-Presidente BOSELLI, il quale dice che firmando come Ministro della Pubblica Istruzione il decreto di trasferimento del Socio CIPOLLA, si sentiva alleviato il dolore della grave perdita che faceva Torino, dalla fiducia che egli avrebbe continuato a spendere anche di lontano in favor nostro una parte della sua eccezionale operosità scientifica. Ringraziando i Soci SAVIO e CHIRONI, li assicura che nella propria vita politica ha sempre riguardato come un dolce conforto i suoi benevoli rapporti con l'Università e con l'Accademia. Con tutto il cuore egli si adoperò per la Biblioteca nella triste occasione dell'incendio, procurando che il Governo facesse per essa quanto poteva, e fu lieto di riuscire a vincere i non pochi ostacoli che si frapponevano a che la la biblioteca riassumesse funzioni universitarie. Con quest'atto egli credette di rendere all'Università torinese un omaggio dovutole.

Il Presidente augura felici ai colleghi le ferie accademiche e l'augurio gli è ricambiato.

LETTURE

Ancora la Cronaca di Filippo da Castel Seprio.

Nota del Socio FEDELE SAVIO.

Nella Nota precedente (1) feci pubblico il risultato di alcune mie indagini per identificare la cronaca, ossia, come la chiama Galvano Fiamma, la storia degli antichi re di Milano di Filippo di Castel Seprio. Ora aggiungo alcune considerazioni, che potranno forse giovare per stabilire con qualche maggiore precisione in che consisteva la cronaca di Filippo, e quando visse costui.

In uno studio molto accurato, edito nel vol. XVI del *Neues Archiv*, l'Holder-Egger ha provato che Giovanni Codagnello, notaio di Piacenza, il quale verso il 1235 scrisse gli Annali della sua città natìa (2), si dilettò di parafrasare ed amplificare, spesso con vane parole ed espressioni ripetute e stereotipate, varii scritti storici di altri autori. Uno di essi è quella storia della guerra di Federico I Barbarossa contro Milano, dal 1154 al 1177, che il Muratori pubblicò sotto il nome di Sire Raul (3). Sebbene quest'amplificazione, la quale sta nel codice parigino latino 4931, che è di scrittura del secolo XIII, non porti nome d'autore, l'Holder-Egger ha esuberantemente dimostrato ch'essa fu composta dal Codagnello, di cui sono pure tutte le altre scritture storiche contenute nel codice suddetto, e che quindi il Pertz si sbagliò credendola l'opera originale del primitivo storico e come tale pubblicandola nel tomo XVIII dei *Mon. German. Hist.*, sotto il titolo di *Annales Mediolanenses Maiores*. Come prova con fortissimi argomenti l'Holder-Egger, l'opera originale

(1) In questo stesso volume XLI degli *Atti*, pag. 825 e segg.

(2) Editi dal Pertz sotto il nome di *Annales Placentini Guelfi* nel t. XVIII dei *Mon. Germ. Hist. Script.*

(3) Nei *Rer. Ital. Script.*, tomo VI.

del primo scrittore è proprio quella che fu pubblicata dal Muratori, sotto il nome di Sire Raul. Tali giudizii dell' Holder-Egger furono già accettati dai dotti, tra cui in particolare cito il Wattenbach (1) ed il Potthast (2).

A proposito di Sire Raul mi permetto di fare una breve digressione, osservando come siano affatto insussistenti le ragioni addotte dal Muratori per mettere in dubbio che il nome di Sire Raul, trovato da lui nel codice ambrosiano, che gli servì per la stampa, fosse il nome dell'autore della storia.

Non credette il Muratori, che nel secolo XII alla fine, o al principio del secolo XIII, quando certamente visse lo storico suddetto della guerra (poichè, com'egli dice, nel 1161 fu delegato con altri cittadini a regolare la distribuzione dei viveri in Milano), si usasse di dare ai notai e ad altre persone di professioni onorate e di studio il titolo di *ser* o *sir*: “ *At ista vereor, ut Mediolanenses umquam usurparint* „, e più sotto: “ *Verum apud Insubres titulum hunc in usu umquam fuisse non legi* „ (pag. 1170). Questo dubbio non ha più motivo di esistere. Nelle brevi notizie milanesi, pubblicate dal Jaffè sotto il nome di *Notae S. Georgii*, le quali furono scritte nel corso o sulla fine del secolo XIII, all'anno 1230 si legge: *obiit ser Stephanus spitiarius*, e al 1267: *obiit ser Ubertus Spitiarius*. Che se davasi il titolo di *ser* agli speziali (farmacisti, droghieri), è del tutto presumibile che si desse pure ai notai.

L'altro dubbio il Muratori lo prese da una dichiarazione, che si trova in fondo al codice ambrosiano: *Qui fecit hoc opus, Sire Raul nomine dictus*.

Difficilmente si potrà credere, così ragionò il Muratori, che un autore, il quale dimostra nel suo modo di scrivere una certa correttezza e forza, facesse un verso così zoppicante e pedestre. Al che mi pare si possa rispondere non esser certo nè che quelle parole contengano un verso; nè che autore di esso sia il medesimo Sire Raul, che scrisse il libro. Nulla impedisce di credere che esso sia opera dello scrivano o del possessore del codice.

Nè è da trascurarsi la testimonianza di Tristano Calco, noto storico milanese della fine del secolo XV, il quale non solo at-

(1) *Deutschlands Geschichtsquellen*, 5ª ed., vol. II, pag. 292.
(2) *Bibliotheca Medii Aevi*, 2ª ediz., vol. I, pag. 518.

tribuì a Sire Raul la storia di cui parliamo, ma per togliere l'ammirazione, che poteva destare nei suoi lettori il nome alquanto raro di Sire Raul, afferma d'aver visto nella chiesa di S. Vittore questa iscrizione:

Ioannes Raule de Busti Arsicio obiit MCCCXI. Ianuarii.

Onde mi parrebbe più conforme alla prudenza ed alla giustizia considerare Sire Raul come autore della predetta storia, finchè nuovi e forti argomenti non ci convincano del contrario.

Ho detto che l'Holder-Egger ha fatto vedere e quasi toccar con mano che tutte le narrazioni storiche contenute nel cod. 4931, le quali, sebbene non connesse strettamente fra loro, formano una serie di racconti che va dal principio del mondo sino al 1235, tutte sono opera del Codagnello, e quindi anche quei racconti favolosi di storia antica, sulla fondazione di Troia e di Roma, sui primi abitatori d'Italia, sulla costruzione di Milano, ed altri, che giungono sino al tempo dei Longobardi e di Carlo Magno inclusivamente.

Fu appunto la lettura di tali racconti, pubblicati in gran parte dallo stesso Holder-Egger, che mi suggerì le considerazioni, che qui presento agli studiosi.

Non poteva sfuggire e non sfuggì ad uno scrittore tanto erudito e diligente, come l'Holder-Egger, che molte delle favole di storia antica, narrate ivi dal Codagnello, si trovano pure nel *Manipulus Florum* di Galvano Fiamma; ma egli non seppe decidere se questi attingesse direttamente dal Codagnello, oppure da altra fonte (1).

Per risolvere questo dubbio bisogna tener conto in primo luogo di quanto così bene ha messo in luce l'Holder-Egger intorno alla maniera di scrivere del Codagnello. Mentre in generale i compilatori di storie prendono dagli scrittori antecedenti solo la sostanza dei fatti e questa ripetono con frasi ed espressioni loro proprie, piuttosto abbreviando che allungando le narrazioni

---

(1) " *Auch bei Galvaneus Flamma findet sich ein grosser Theil seiner Fabeln, zuweilen schon vermischt mit anderen ähnlicher Mache wieder, sei es dass Galvaneus die Sammlung des Codagnellus direct benutzt, oder sie schon in anderer Compilation vorfand* "; pag. 311.

dei suddetti scrittori, il Codagnello tiene tutt'altra via. Egli prende un testo, una narrazione preesistente, e la diluisce in un mare di parole, amplificandola stranamente quanto alla forma, senza quasi toccarla nella sostanza. Così fece per l'opera di Sire Raul sulla guerra del Barbarossa contro i Milanesi, così per lo scritto *Gesta Friderici*, che narra la spedizione di Federico nella 3ª Crociata, così per i *Gesta obsidionis Damiate* del 1218.

Ora, posta questa consuetudine nel Codagnello, è interamente verisimile ch'egli l'abbia seguìta altresì per tutti quei capitoli, che, sebbene un po' saltuariamente, abbracciano il periodo di storia più antica dalla creazione del mondo ai Longobardi e a Carlo Magno. Come riscontrò con insistenza lo stesso Holder-Egger, nei detti capitoli ricorrono ad ogni istante le frasi predilette ed i termini favoriti del Codagnello, nè sarebbe punto difficile, dopo lo studio fattovi attorno dall' Holder-Egger, il discernere e separare ciò che appartiene all'amplificazione o parafrasi parolaia del Codagnello dal racconto sobrio dei fatti, che stava nella fonte che questi prese per tema dei suoi esercizii, i quali vorrei dire rettorici, se la rettorica consistesse solo nell'accumulare frasi e parole inutili e stereotipe.

Che poi il Codagnello abbia veramente seguìto il suo metodo solito e che prima di lui già esistesse un racconto più sobrio e stringato dei fatti, mi pare che risulti chiarissimo dal confronto dei capitoli stessi coi passi paralleli del *Manipulus Florum* di Galvano. L' Holder-Egger lasciò dubbio se Galvano pigliasse da Codagnello, oppure da una fonte diversa. Credo che tutto porti ad accettare piuttosto questa seconda opinione, e ciò per una ragione, che mi sembra molto efficace. Essa ci vien fornita dalla differenza assai notevole che esiste, almeno per la parte antica di cui discorro, tra il modo di scrivere del Fiamma in altre sue opere storiche, e il metodo da lui seguìto nel *Manipulus Florum*. Nelle altre opere, in particolare nel *Chronicon maius* e nella *Chronica galvagnana*, il Fiamma non sembra tanto sollecito di presentare al pubblico una narrazione seguìta dei fatti, quanto di prendere occasione dai fatti che vien narrando per stabilire dispute filosofiche, teologiche e giuridiche, di cui i fatti sono o l'oggetto, o la base, o anche soltanto l'occasione. Al contrario nel *Manipulus* questo vezzo di cambiare la storia in una serie di dispute filosofiche o filosofico-storiche non appa-

risce che nei primi capi. Di poi la narrazione si segue stringata e ordinata quasi senza interruzioni sino alla fine.

Tale deviazione di Galvano dal suo metodo solito m'induce nell'opinione ch'egli col *Manipulus Florum* intendesse veramente di offrire al pubblico un mazzo di fiori, non suoi, bensì altrui, ossia mirasse a fare come un mosaico di pezzi scelti o da un solo o anche da più autori.

Non diverso era stato il metodo seguìto nel secolo antecedente dal suo correligioso, il celebre Vincenzo di Beauvais, e in quello stesso secolo XIV e pochi anni prima che Galvano scrivesse, da Benzo d'Alessandria nella sua Enciclopedia storica, sì spesso citata e usufruita da Galvano. Unica e notevole differenza tra Galvano da una parte e Vincenzo di Beauvais e Benzo dall'altra, è che mentre costoro citano costantemente e pezzo per pezzo gli autori, da cui li tolgono, Galvano non cita i suoi che di rado; sicchè tutta l'opera si presenta come una compilazione, sulla quale egli possa rivendicare tutto intero il diritto della paternità.

Pel periodo di tempo, a cui si estendono i capitoli di storia antica del Codagnello, sono pochissimi i capi del *Manipulus*, di cui possiamo dire con certezza l'autore da cui fu preso il racconto. Tuttavia quei pochi c'informano abbastanza qual fosse il metodo tenuto da Galvano nella compilazione del *Manipulus*, cioè di non aggiungervi quasi nulla di suo, ma di dare i racconti press'a poco testuali, come li trovava nelle fonti, che gli stavano sott'occhi. Perciò possiam credere ch'egli tenesse lo stesso metodo per quei racconti, che furono amplificati dal Codagnello, e che questi e Galvano presero da un autore anteriore ad entrambi.

Per prova di quanto affermo metterò qui a riscontro uno di quei pochissimi racconti di cui ci è nota la fonte, ed è la narrazione contenuta nella seconda parte del capo LI del *Manipulus* con la sua fonte, che è l'*Historia Romana* di Paolo Diacono.

Manip. Flor.
Capo LI.

Odoacer, his elatus, regiam potestatem assumsit. Augustulus vero, qui imperii dignitatem arripuerat, cernens Odoacris successus, sponte purpuram exuit, cum vix mensibus XI imperasset.

Anno Domini 475 Odoacer Romam ingressus est, et annis 14 quiete Italiam obtinuit, arbitrio regnans, donec ab Orientis partibus veniens Theodoricus cum Gothis a Zenone imperatore missus eum a regno summovit.

Iste Zeno cum Gothis pacis foedus iniit. Theodoricus puer a patre suo principe Gothorum Zenoni in obsidem datur, qui Theodoricum, cum 18 annorum esset, imperator utilitatem reipublicae respiciens, misit eum cum Gothis, et gente sua in Italiam, quam Odoacer occupatam tenebat.

Pauli Diaconi.
Historia Romana, lib. XV, p. 210 (1).

X. Odovacer itaque prosperos sibi cernens successus adcrescere statim regiam arripuit dignitatem. Augustulus siquidem, qui imperii praesumpserat potestatem, cernens universam Italiam Odovacris viribus subdi, inopinabili metu perterritas, sponte miserabilis purpuram abiiciens cum vix XI mensibus obtinuisset, imperialem deposuit maiestatem . . . .

Igitur, deiecto ab Augustali dignitate Augustulo, urbem Odovacer ingressus totius Italiae adeptus est regnum. Quod dum per annos XIV nullo inquietante tenuisset, ab Orientis tunc partibus adveniens Gothorum rex Theodoricus Italiam possessurus intravit . . . .

. . . .

XII. Leo denique imperator cum Gothis.... foedus iniit ac Theodoricum Thiodimeris filium ex Arileuva concubina genitum a Walamere eius patruo obsidem accepit . . . .

. . . .

Widimer..... Theodoricum filium a Leone imperatore remissum gratanter accepit. Qui Theodoricus, dum iam octavum decimum annum aetatis ageret.... vicinam sibi Sarmatarum gentem invadens opima.... spolia reportavit . . . .

XIII. Thiudimere itaque vita decedente.... ad regni gubernacula Theodoricus ascendit . . . .

XIV. Theodoricus... ad Augustum Zenonem accedit.... Italiam sibi dari postulat.... Zeno.... reipublicae utili-

(1) *Mon. Germ. Hist. Auctor. Antiq.*, I.

Cum ergo Theodoricus a regione Maesia per Burgariam et Pannoniam in Italiam venisset, et post multos labores non longe ab Aquilegia in uberrimis pascuis se et suos recrearet, Odoacer cum Italiae viribus ipsum invadens, contritus est a Theodorico.

Itaque Odoacer paulo post Romam fugiens, cum a populo non fuisset permissus intrare Urbem, Ravennae se se recepit, quem Theodoricus post tres annos obsidionis peremit; et Romam veniens cum gaudio est receptus.

Postea vero Theodoricus omnia quiete tenens, ut sui regni fines stabiliret, filiam regis Francorum duxit in uxorem: Hunnerico regi Vandalorum Almafredam sororem suam sociat in coniugium. Eius Almafredae filiam Malaburgam Emenfredo regi Turingorum maritat. Ex concubina filias unam Alarico regi Visigo-

tatem prospiciens eius petitionibus annuit . . . .

XV. Egressus itaque a Misia cum omni Ostrogothorum multitudine universaque supellectili per Sirmium Pannoniasque iter faciens ad Italiam venit, ac primo iuxta Sontium flumen, qui non longe ab Aquileia labitur, castra componens, dum uberrimis quae eo loco habentur pascuis fatigata aliquantulum ex itineris longitudine iumenta reficeret, ibi mox ei cum grandi suorum exercitu totisque Odovacer Italiae viribus occurrit, quem Theodoricus alacriter excipiens magno superatum proelio postremo in fugam convertit . . . . .

XVI. Odovacer autem cum his qui evaserant fugiens Romam contendit, sed obseratis continuo portis exclusus est.... inde quoque egrediens Ravennam ingressus est . . . .

XVII. Theodoricus.... ad Odovacris obsidionem Ravennam perrexit.... per continuum paene triennium Odovacrem obsedit . . . .

XVIII. Victus (Odovacer).. a Theodorico in fidem susceptus ab eo truculente peremptus est . . . .
Nec multo post Romam profectus a Romanis magno gaudio susceptus est . . . .

XX. Theodoricus interea, ut sui regni vires constabiliret, Audefledam Lodoin Francorum regis filiam sibi in matrimonium iunxit, Amalafredam germanam suam Wandalorum regi Hunurico, eiusdem Amalafredae filiam Amalabregam Turingorum regi Hermenfredo, Theodicodo quoque et

torum, alteram Sigismundo regi Burgundionum, Almasmatam vero tertiam filiam Eutharico ex Alamannorum stirpe nato evocato ab Hispania tradidit, sicque Italiae nulla gens affinis praetermissa est, quae Theodorico aut coniunctionis affinitate, aut pactione sociata non fuerit.

Zeno vero imperator, cum per annos 16 imperasset, apud Constantinopolim morbo diem clausit extremum. Anastasius in imperio succedit anno Domini 492, qui in Euticis haeresim est dilapsus, negans in Christo duas esse naturas, Divinitatis scilicet et Humanitatis; et cum annis 27 imperasset, vi fulminis percussus occubuit, cui Iustinus maior successit in imperio anno Domini 520, qui praefuit annis 11.

Hic Iustinus imperator christianissimus statuit, ut ubicumque ecclesiae haereticorum essent, catholica religione consecrarentur. Quod cum in Italia Rex Theodoricus Gothus Ariana haeresi pollutus audivisset, Ioannem Papam et alios consulares viros in Constantinopolim dirigens,

Ostrogotho ex concubina filias, alteram Alarico Wisigothorum regi, alteram Sigismundo Burgundionum consociat, Amalasuintham tertiam filiam Eutharico ex Amalorum stirpe venienti evocato ab Hispania tradit. Nec fuit aliqua vicina Italiae gens, quae Theodorico aut coniunctionis affinitate aut pactionis foedere sociata non fuerit.

Zeno itaque Augustus cum per annos decem et septem reipublicae praefuisset, apud urbem Constantinopolim vitae terminum accepit.

Lib. XVI.

II. Anno ab incarnatione Domini quadringentesimononagesimo secundo post Zenonis excessum Anastasius purpuram induit . . . . Hic Romani decus imperii Eutychianae haereseos inluvie maculavit . . . .

V. duasque in Christo naturas, deitatis videlicet et humanitatis Eutychium haeresiarchen sequens denegaret . . . .
cum iam septimum et vicesimum imperii annum ageret, vi fulminis percussus interiit . . . .

VI. Anno ab incarnatione Domini quingentesimo octavo decimo punito Anastasio haeretico Iustinus catholicus Augustali potitus est solio . . .

VII. (qui) statuitque, ut ubique eorum (Arianor.) ecclesias catholica religione consecraret. Quid cum in Italia rex Theodoricus Arriana lue pollutus audisset, Iohannem papam, simulque cum eo Theodorum, Importumun atque Agapitum consulares viros aliumque Agapitum patricium Constantinopolim ad Iustinum prin-

comminatus est, quod nisi ecclesias Arianis restitueret, omnes christianos perimeret gladio.

Qui a Iustino honorifice suscepti, ad preces Papae et Nuntiorum, compatiens neci Christianorum, de ecclesiis Arianorum supersedit. Dum vero in itinere demorarentur, Theodoricus rabie iniquitatis stimulatus, Boetium consularem Senatorem, quem prius in exilio relegaverat Papiae, et alios viros catholicos gladio trucidavit, Ioannem vero papam cum iis, cum quibus erat profectus, postquam redierant ad ipsum, in Ravenna carcerali angustia peremit. Sed hanc ipsius crudelitatem mox animadversio divina secuta est et ultio; nam nonagesima octava die post hoc facinus subita morte defunctus est. Qui, ut refert beatus Gregorius libro 4 *Dialogorum*, cap. 30, visus est a quodam solitario magnae virtutis hora nona discinctus atque discalceatus, et vinctis manibus deduci inter Ioannem papam et Symmachum patricium, et in vicina Vulcani olla iactari; et quia Ioannem papam affligendo in custodia occidit. Symmachumque patricium ferro trucidavit, ab illis iuste in igne mitti apparuit, quos in hac vita iniuste iudicavit.

Questo racconto della morte del papa Giovanni I è tolto quasi letteralmente dai Dialoghi di S. Gregorio Magno; Migne, *P. L.*, LXXVII, col. 369.

cipem dirigit: mandat per eos interminans, ut nisi quantocius haereticis suas ecclesias redderet, eosque in pace degere sineret, universos Italiae populos ipse gladio extingueret . . .

IX. Qui pervenientes ad Augustum cum ab eo digne, ut competebat, suscepti essent, magnis eum de sua suorumque salute solliciti fletibus postulant, ut suae legationis seriem, quamquam esset iniusta, libenter exciperet, Italiaeque periturae consuleret. Quorum fletibus Iustinus permotus eis quod petebatur concessit . . . .
Dum hi in itinere demorantur, Theodoricus rabie suae iniquitatis stimulatus Symmachum exconsulem patricium et Boethium senatorem et exconsulem catholicos viros gladio trucidavit . . . .

X. Iohannes vero pontifex revertens a Constantinopoli, dum cum his cum quibus ierat, profectus ad Theodoricum Ravennam fuisset, Theodoricus.... eum simul cum sociis carceris afflictione peremit. Sed hanc eius immanissimam crudelitatem mox animadversio divina secuta est: nam, nonagesimo octavo post hoc facinus die, subita morte defunctus est, cuius animam solitarius quidam apud Liparam insulam, vir magnae virtutis, aspexit inter Iohannem papam et Symmachum patricium duci et in Vulcani ollam, quae ei proxima erat, demergi. Et quia Iohannem papam affligendo in custodia occidit, Symmachum quoque patricium ferro trucidavit, ab illis iuste in ignem missus apparuit, quos in hac vita iniuste iudicavit.

Qui di passaggio richiamo l'attenzione dei miei lettori sul modo arbitrario con cui Galvano adopera le sue fonti (e tratta la storia), poichè le relazioni che, secondo Paolo, Teodorico ebbe con Leone e Zenone, egli le attribuisce al solo Zenone.

Il suddetto capo, che è uno dei pochissimi di cui conosciamo con certezza la fonte, è anche uno dei pochissimi che (parlando sempre del periodo dal diluvio a Carlo Magno) non siano interamente favolosi. Il che, a parer mio, conferma quanto sto dicendo, che Galvano nel *Manipulus Florum* copiò materialmente le fonti, che gli stavano dinnanzi. Ma siccome egli nella scelta delle fonti mancò interamente di criterio, non facendo differenza tra Paolo Diacono, storico assai diligente, e quell'ignoto o meglio quegli ignoti scrittori, da cui trasse altri racconti evidentemente favolosi, quindi accadde che del medesimo personaggio, come appunto di Teodorico, diede due racconti, uno veridico, che è quello qui sopra riferito, preso da Paolo Diacono, e l'altro favoloso, narrato da lui al capo LXIII, preso da una fonte ignota ed impura.

L'ipotesi che questa fonte di Galvano Fiamma sia stata la storia stessa del Codagnello non si può accettare per due ragioni. La prima è che Codagnello tratta saltuariamente solo di alcuni avvenimenti di storia antica dal diluvio sino a Carlomagno, mentre Galvano ne dà la serie intera e seguìta. L'altra è che Galvano Fiamma non ripete mai nessuna di quelle frasi solite e stereotipate che sono proprie del Codagnello, il che, ove fosse vera l'ipotesi che Galvano si propose di compendiare le narrazioni storiche del Codagnello, non si saprebbe ragionevolmente spiegare.

Resta adunque assodato che il Codagnello e il Fiamma attinsero ad una fonte comune, la quale fu smisuratamente amplificata dal primo, e venne trascritta testualmente, oppure con qualche abbreviazione, dal secondo.

Affinchè i miei lettori abbiano sott'occhi un saggio del modo di scrivere dei due, e nello stesso tempo vedano come si potrebbe ricostituire la fonte comune, do qui il racconto delle geste del favoloso re Diocleziano e in parte quelle del non meno favoloso Massimiano, quale si trova nell'uno e nell'altro. Metto in corsivo le frasi proprie del Codagnello, come tali rilevate dall'Holder-Egger.

" Neues Archiv. ", XVI, pag. 475.

Istoria Lombardorum, qualiter fecerunt collegium et primo arma contra inimicos sumpserunt.

Quia putamus utile fore et ad audiendum delectabile oppressiones Lombardie et subiectiones atque exactiones ad memoriam reducere, de his ad presens videndum est pariter et audiendun. Anni quadringenti LXVI post Christi nativitatem. Erant enim in Gallia Cisalpina habitantes terrarum laboratores, agrorum cultores, armentorum custodes, equorum, mulorum, asinorum ductores, arma militaria seu bellica minime cognoscentes, predas, rapinas, oppressiones sustinere proposuisse (1) tamquam arma bellica vellent exercere. Opprimebantur namque Galli Cisalpini, qui Lombardi dicuntur, frequentissime a Gallis Transalpinis ac efferis Theotonicis, a perfidis Ungaris, a crudelibus Longobardis. Repertur in annalibus libris, quod veteres historiographi Liguriam Galliam Cisalpinam appellant: unde *Donatus gramaticus in dispositione provintiarum Mantuam in Galliam Cisalpinam esse dicit. Item legitur Ariminum in Galliam constitutum.*

Verumtamen non detinebantur sub aliquo domino. Sed predicti ad partes Lombardie accedentes gravissime eos opprimebant, bona eorum ipsis auferentes, quosdam vero copiosos pro captivis, ut redimerentur, secum ducentes. Interea quidam viri prudentes perfidiam atque sevitiam predictorum sufferre nolentes ingenti turba virorum sapientum tractare ad invicem pariter et cogitare

Manip. Flor., capo LI.

De Italicis, qui dederunt se deliciis et voluptatibus

Anno Domini 486 Italici deliciis et voluptatibus dediti, nullo modo armis insistere decreverant: inde a Longobardis, Hungaris, Gallis et Francis singulis annis expoliabantur; eorum oppida sen castra destruebantur, eorumque uxores opprimebantur.

(1) Come osserva l'Holder-Egger, pag. 268, citando varii esempi, è questo uno degli errori soliti di Codagnello, *proposuisse* in luogo di *proposuerunt*.

ceperunt, qualiter ab oppressionibus et subiectionibus eorum possint deliberari, bona et iura eorum illesa conservare. Hoc facto omnes unanimiter et cum omnium voluntate sacramento firmaverunt colegium per *civitates, çastra et loca totius Lombardie.*

Quo sic statuto et ordinato illico quemdam *virum nobilem et prudentem*, Dioclitianum nomine, Romane urbis, *dominum et rectorem eorum elegerunt et fecerunt.*

Qui cum omni gente sua ad Lombardie partes accedens in Mediolani civitatem sedem suam posuit et formavit.

Qui statim, tamquam vir prudens et nobilis, omnes viros ditissimos civitatum, castrorum et locorum equis et armis bellicis fecit preparare et decenter decorare; precepit iterum per civitates, castre et loca, ut equis et armis quilibet deberet uti, rursum [dedit] in mandatis, ut pedites armis eis decentibus et convenientibus deberent se aptare et egregie preparare. Et dum hoc agerentur, Galli Transalpini ingenti multitudine virorum bellicorum coadunata ad Lombardie partes more solito pergere properantes, bona eorum ab eis auferre statuentes. *Quo audito et intellecto* a Diocliciano viro nobili, universam Lombardie gentem militum et peditum apud Mediolanum fecit coadunare, victualia secum ad duos menses deferentes. *Habito quoque cum viris sapientibus conscilio,* ut ad montium fines cum gente sua accedere festinaret, ut transitum eis viriliter et egregie prohiberent; ipse dixit et statuit, et ita per omnia factum est et adimpletum. Viri autem Transalpine Gallie ad Gallorum fines accedentes, ipsos etiam summo labore transire conabantur.

Quibus visis tota Italia ordinavit de faciendo sibi rege, et sic Diocletianum nobilem civem romanum sibi elegerunt in regem ac in civitate Mediolani ipsum coronaverunt.

Qui statim omnes maiores natu, atque opibus ditiores ad se vocans, precepit eis equos bellicosos et arma totis viribus preparare, victualia pro duobus mensibus recuperare

et ascendens montium cacumina, ibidem castra sua fixit, ibique 4000 et quingentos milites ordinavit: Regi Gallorum volenti in Italiam venire viriliter restitit, ac ipsum redire coegit.

Lombardi quoque, se obviam prebentes, fortitudines et montium summitates occupaverunt, ipsis quidem viriliter resisterunt, *transitum eis* penitus *prohibentes.* Percipientes etiam transitum minime habere posse, *dolentes et gementes ira et dolore sunt repleti et ad propria sunt reversi. Fertur in agmine Diocliciani fuisse* quatuor millia quingentos milites equis et armis decenter preparatos. In peditibus vero non fuit numerus. Dioclicianus autem cum omni gente sua ingenti letitia et gaudio magno omnes repleti ad proprias sunt reversi sedes.

Tandem cum magno gaudio ad civitatem suam Mediolanensem rediit.

Steterunt postea viri nobiles et potentes Lombardie elati magna nobilitate et summa excellentia, decerter et honorifice equis et armis decentibus, indumentis quoque pretiosis ornati et preparati super aliis omnibus, qui in universo reperiuntur orbe, *civitates, castra et loca,* iura et bona eorum ab omni persona defendere et manutenere statuentes.

Cumque Dioclicianus egregie Lombardiam regeret et gubernaret, et iustitiam et rationem unicuique manuteneret, Theotonici, audientes ex veridica relatione, de his que in Lombardia nuper gesta erant intelligentes, ira et furore nimio commoti, ad partes scilicet Lombardie subiugandos more solito accedere proposuerunt, quinque mensibus a predictis iam transactis. *Hoc cognito et intellecto* a Diocliciano viro excellentissimo, ad civitatem Veronam *velociter iter suum direxit,* sedemque suam ibi statuit et firmavit, legatos etiam per *universas civitates, castra et loca* misit, ut milites omnes equis et armis eorum ad suam deberent accedere presentiam, similiter et pedites Mantue, Padue, Tarvisii, Vicentie ad Veronam civitatem armis eorum

Interim ex altera parte Theutonici ingredi Italiam conabantur:

et victualibus appropinquare deberent; sic enim voluit, sic iussit, sic factum est. Interea Theotonici ingenti turba *Theotonicorum, Biemorum, Brienzonum et aliarum nationum in septentrionali parte habitantium* versus Lombardiam Theotonico furore *iter eorum direxerunt.*

Cognita ita veritate a Diocliciano de eorum adventu, statim cum exercitu suo ad transitum Gardensem equitare festinavit. Dicitur enim transitus ille ad Gardam, quia diligenti custodia et guarda debet custodiri et guardari.

qua de causa Diocletianus rex Veronam perrexit, ubi congregato exercitu admirabili ad transitum guarda nuncupatum equitavit

Cumque sic Theotonici et Lonbardi adiuvicem certarent, volentes Theotonici summa vi transire, Lonbardi ex altera parte stantes illos transire minime permittebant. Et dum *per* quindecim *dies sic stetissent,* percipientes Theotonici transire non posse, dolore magno et ingenti tristitia reversi sunt ad propria. Similiter Dioclicianus cum gente sua, cum nimio gaudio ad Veronam rediit civitatem. Ibidemque moram faciens, sicut Dominum placuit, de hoc seculo migravit; unde tam pedites quam milites et universi totius provintie Lonbardie ingenti mestitia pariter et tristitia sunt turbati, ira et dolore commoti.

et per quindecim dies in faciem Theutonicorum restitit, ac retrocedere fecit.

Ipse untem cum triumpho ad Veronam remeavit, ubi post pauca extremum diem clausit, quem tota Italia summo cum dolore in ecclesia sancti Zenonis sepelivit.

Sepelierunt namque corpus eius decenter et onorifice in basilica sancti Zenonis. Congregatis igitur et coadunatis viris prudentibus et nobilibus et communicato conscilio, Maximianum, virum nobilem et excellentissimum, de genere virorum nobilium Sipri ortum, regem Lonbardie elegerunt et statuerunt. *Et dum hec agerentur*, pervenit ad audientiam Alexii Ungarie regis de his que in Lonbardia gesta erant, ira et furore turbatus et dolore commotus, *colecta universa gente sua*, ad partes

Iterum congregato concilio Italici elegerunt sibi in regem Maximianum de Castro-Seprio natione mediolanensem, virum nobilem et potentem, qui anno Domini 489 in civitate Mediolanensi coronatus est rex christianus. Inter haec Alexius Hungariae rex in Italiam festinus properabat.

scilicet Lonbardie *iter suum velociter direxit.* Hoc audito et in veritate cognito, dictus Maximianus, qui sedem suam in urbe Mediolani posuerat, sine mora ad Verone civitatem cum Mediolanensibus militibus *iter suum direxit*; legatos quidem per universam provinciam misit, ut tam pedites quam milites equis et armis bellicis et victualibus et aliis rebus necessariis sine dilatione ad Veronam deberent accedere civitatem. Intelligens autem Maximianus de adventu eorum, *colecta et coadunata universa gente sua* apud Montem Silicis illis se obviam prebuit.

Quo audito, Maximianus Veronam equitavit, et deinde ad Montem Silicis Hungaris hostiliter occurrit:

Et dum sic per aliquos dies starent, quodam die Martis *signis belli et vexillis et clangis ab utraque parte consuetis prelium incipitur. Duravit namque bellum* a mane usque ad horam none, et tunc unus ab altero voluntarie secessit pari pugna. Cum autem sic starent, timentes amplius preliari, die Veneris venienti summo diluculo populares urbis Mediolani in expeditionem cum *tubis sonantibus* extensi magnoque triumpho intraverunt; unde Lonbardi gaudio magna gavisi sunt. Similiter ea die Florixius, vir nobilis et potens, cum magna turba militum adiuvandi causa in castra Alexii intravit. *Altera vero die tempestive armati et asclerati,* et uterque exercitus adiuvicem paulatim appropinquantes, *tubis per partes sonantibus prelium incipitur;* preliantur insimul *fortissime et iniquissime. Multi ab utraque parte sunt capti et vulnerati, et innumerabiles gladio* et astarum verteribus interempti, et *quam plures vitam eorum sub pedibus equorum consumantes.* Videns autem Alexius suos in prelio *deficere et fortissima hostium*

bellum committitur; a mane usque ad nonam certatur. Utrique vero parti pessime fuit: unde multis diebus sine pugna steterunt.

Tunc Florixius in auxilium regis Hungarie venit, et populus Mediolanensis cum vexillis innumerabilibus et tubis clangentibus Maximiliano regi concivi suo auxilium praestitit: unde iterum pugnatum.

tela minime ferre posse, cum aliquibus viris prudentibus in medio prelii se posuerunt, volentes prelium dividere. Sed Lonbardi tamquam viri summe audatie et bello docti, cognoscentes inimicos resistere non posse, magis ac magis *insultum super eos viriliter facientes, inimicos ab omni parte expeditionis superabant et fugabant. Tandem cum vidissent Ungarienses resistere nec cum eis preliari posse, terga vertentes, fugam petierunt; quod Lonbardi insequentes* amplius quatuor millibus illos persecuti fuerunt; *multi quoque sunt interempti et vulnerati, multi etiam capti* et in carceribus reclusi.

Recesserunt namque Ungarienses *fugientes per nemora et paludes, per loca deserta et inhabitata,* tandem pervenerunt ad propria ingenti dolore et tristitia. Lonbardi vero nimio gaudio et victoria magna ad proprias sunt reversi sedes. Stetit postea Maximianus in urbe Mediolani regens sapienter regnum Lonbardorum, postea Lonbardi prudentes steterunt et astuti, in bello valde tuti.

Fugiunt Hungari, et per quatuor millia fuga duravit, innumerabiles etiam corruerunt;

et sic Maximianus rex cum ingenti gloria ad suam civitatem Mediolanensem rediit, qui multis temporibus Italiam prudenter gubernavit.

Questo confronto si potrebbe estendere ad una gran parte dei capi del Codagnello, che l'Holder-Egger pubblicò dal codice parigino: poichè quasi tutti si trovano qui in compendio nel *Manipulus Florum.* Ma già troppo sono entrato (sebbene con sua espressa benevola licenza) nel campo del mio amico il ch.mo Prof. Giuseppe Calligaris, cui dalla Società per i nuovi *Rer. Ital. Scriptores* fu dato incarico di curare l'edizione delle opere di Galvano Fiamma. Quindi mi contenterò d'indicare i capi del Codagnello, riportati o accennati dall'Holder-Egger nel *Neues Archiv*, che hanno rispondenza nel *Manipulus.*

Il capo delle fondazioni delle città (p. 319-321 del *N. Archiv*) corrisponde al capo XI del *Manipulus*, cui corrisponde pure in parte il capo *Gesta Henee Troianorum ducis* (p. 321).

I *Gesta Henee et Didonis regine Africe* (p. 322), e il *Miraculum magnum, quod accidit in urbe Roma* (p. 324) mancano nel *Manipulus.*

La descrizione delle province d'Italia (p. 325) risponde ai capi LXX-LXXXVIII di Galvano.

I due capi *Hec sunt note extracte de quodam libro memoriale ab Isidoro composite* (p. 325) e *Istoria hedificationis urbis Medielanuginis* (cioè Milano, p. 327) si trovano nei capi XIII, XV e XVI del *Manipulus.* Ivi mancano i capi *Gesta Iulii Caesaris Romanorum imperatoris* (p. 330) e quelli che si riferiscono ad Ottaviano Augusto (p. 344), ed alla natività e passione di Gesù Cristo (p. 345)

Di nuovo vi si trovano il capo di Diocleziano e Massimiano (p. 476), da me sopra riferito, e la storia di Teodorico e di Alboino (p. 480) rispondente ai capi LXIII e LXV del Fiamma. Il capo *Istoria inter Romanos et Mediolanenses* (p. 492) ha la sua rispondenza nel capo LXVI, e l'*Istoria Papirii Caroli nepotis* (p. 496) nel capo LXIII del *Manipulus.*

Manca il capo *Gesta Caroli Francorum regis* (p. 499), in cui si narrano le imprese di Carlo in Ispagna; ma in fine del capo CXXIII evvi brevissimamente quanto il Codagnello diffusamente narra nell'*Istoria qualiter translatum est imperium Romanum in Francia apud Theothonicos* (p. 505).

Rimane ora da indagare e stabilire qual sia stata la fonte unica, da cui attinsero i medesimi racconti il Codagnello e il Fiamma.

Se qualche valore ha il criterio, di cui ho parlato l'altra volta, che si debbano attribuire a Filippo di Castel Seprio quei racconti favolosi, inventati con lo scopo evidente di esaltare o il villaggio di Castel Seprio o la famiglia stessa di Filippo, feudatario di detto villaggio, niun dubbio che il racconto qui sopra da me riferito, dove il Codagnello chiama il re Massimiano *de genere virorum nobilium Sipri* (cioè *Seprii*) *ortum*, sia stato preso dalla storia dei re antichi di Milano citata con questo nome da Galvano, e indicata prima di lui da Benzo d'Alessandria come opera di Filippo di Castel Seprio.

La più forte difficoltà contro la tesi da me sostenuta potrebbe essere il silenzio che il Codagnello serba non meno sull'esistenza di Subres primo fondatore di Milano, che sul nome

Subria, che questa città avrebbe portato nei primi secoli della sua esistenza. Ma questa difficoltà non mi sembra tanto forte da obbligarmi a rinunziare alla mia tesi. Primieramente il Codagnello non ebbe per nulla il proposito di narrare tutte le vicende antiche di Milano, che per caso fossero narrate da storici milanesi. Nel suo disegno entrava bensì di parlare della costruzione di Milano, siccome città insigne d'Italia ed amica della sua Piacenza: ma gli bastava parlare di quella costruzione, che egli credette anteriore ad ogni altra, e tale credette indottovi dalla tradizione fondata sulla pretesa etimologia di Milano, *Mediolanum*, quasi ricordo della scrofa, dalle setole metà nere metà bianche, trovata nel suolo dove sorse Milano. Alla quale etimologia diede tanto valore ed era tanto attaccato il Codagnello, che abbandonò persino il nome *Mediolanum* per introdurre il nome di suo conio *Medialonugo*, più espressivo del suo concetto. In secondo luogo il Codagnello, sebbene in generale copiasse le fonti, che gli stavano sott'occhi, non ebbe punto scrupoli ad allontanarsene quando gli parve opportuno, prendendo da esse solo quanto gli conveniva e nel modo che gli conveniva. Ne abbiamo un esempio nel capo appunto della costruzione di Milano, *Istoria hedificationis urbis Medielanuginis*. Secondo la fonte seguìta dal Fiamma (capo XIII del *Manipulus*), Milano sarebbe stata ricostrutta dal gallo Belloveso, venuto in Italia 270 anni prima di Brenno. Belloveso fu re di Milano, ed una delle sue imprese fu di respingere indietro al di là delle Alpi un re innominato dei Franchi (*regi Francorum*). A Belloveso succedette il figlio Sigoveso ed a costui il figlio Brunisendo. Contro Brunisendo venne il re Brenno, l'uccise, e distrusse Milano, che poi alcun tempo dopo ricostruì di nuovo.

Il Codagnello, volendo narrare solo i fatti principalissimi di Milano, e usando d'una libertà che certo nessuno storico si dovrebbe mai permettere, fa scomparire totalmente dalla scena Belloveso e Sigoveso, mette in mostra soltanto Brenno e Brunisendo, ch'egli fa contemporanei, ed a Brunisendo attribuisce quella costruzione di Milano, che nel Fiamma si trova attribuita a Belloveso, 270 anni prima di Brenno.

Tenendo conto pertanto del modo di fare di Codagnello e del suo proposito di narrare solo i fatti principalissimi della storia antica d'Italia e dei suoi dominatori, il suo silenzio sopra

Subres e la città Subria non può far difficoltà ad ammettere che egli, al par di Galvano, attinse ad una fonte unica, la quale è la storia dei re di Milano (e d'Italia), di Filippo di Castel Seprio.

Stabilita siffatta relazione di dipendenza del Codagnello da Filippo, ne conseguita che questi scrisse la sua cronaca alcuni anni prima del 1235, circa il qual tempo, come sembra, il Codagnello finì non meno di scrivere che di vivere (1).

Dissi nella Nota precedente che una gran parte della storia di Filippo la credo usufruita dal Fiamma nella sua opera ancora inedita intitolata *Politia novella*, del cui contenuto diedi qualche notizia. Ma con ciò non intesi di escludere, nè intendo ora, che un'altra parte si trovi altresì nel *Manipulus Florum*. Anzi il titolo di *Chronica Philippi Castri Sepri*, che venne dato nel codice trivulziano del 1557 (copiato da altro assai più antico) al solo tratto del *Manipulus Florum* comprendente la storia più antica di Milano (dal capo VIII al LI) e quello altresì alquanto incerto, di *Chronica*, *ut creditur*, *Danielis de antiquitatibus et factis civitatis Mediolani et totius sui comitatus et quam plurium civitatum*, premesso al codice ambrosiano C. S. IV. 18, scritto nel 1513, ma copiato da altro, forse del 1412 (2), sembrano attestare l'esistenza d'una specie di tradizione, secondo la quale la parte del *Manipulus*, comprendente la storia antichissima di Milano, era stata presa dalla cronaca o storia di Filippo di Castel Seprio.

Questi pertanto sarebbe vissuto nei primi lustri del secolo XIII. Eccitato forse dall'esempio di Goffredo di Viterbo, che di racconti romanzeschi aveva ripieno il suo Panteon, ed anche forse dall'esempio di Sicardo da Cremona, che per la parte

---

(1) La data della morte si potrebbe quasi dir certa, se egli è (come pare) il medesimo notaio Giovanni Codagnello, che già figura in atti pubblici ed in pubblici ufficii fin dal 1201. Si veda la Prefazione ai *Chronica tria Placentina, Monum. Histor. ad Provincias Parm. et Placent. spectantia*, Parma, 1859, pagg. VIII e segg.

(2) Al 1412, s'arresta la serie dei podestà dopo la quale lo scrivano Gabriele Cusano scrive: *Exemplum hoc vetustissimi cuiusdam annalis antiqua quadam bibliotheca reperti ne nimia vetustate corrosum in nichilum abiret etc.*; vedi Cinquini, in *Miscellanea di storia e di cultura ecclesiastica*, maggio 1906, pag. 379.

antica non aveva slegnate le narrazioni leggendarie, compose una storia dei re e dominatori di Milano dal diluvio ai Longobardi o tutta o quasi tutta fantastica. L'opera, nonostante le aperte e sfacciate invenzioni, ebbe una certa fortuna, e già prima del 1235 se ne valse il Codagnello piacentino e poi nel secolo seguente e in più larga misura Galvano Fiamma.

L'interesse ad agire e le azioni d'accertamento.

Nota del Dr. ROCCO RAGAZZONI.

Col costituirsi della tutela sociale del diritto, i legislatori dei vari popoli e dei vari tempi trovarono dinanzi a loro un grave problema, che ancora non ha trovato una soluzione uniforme e definitiva: quali sono le condizioni per cui una persona è legittimata a valersi di questa tutela per ottenere il soddisfacimento delle sue ragioni?

Dopo avere sceverato fra le infinite serie di pretese che un uomo può accampare contro un altro uomo, quelle che si dimostrano degne di essere poste sotto la protezione dello Stato, dopo avere cioè creato il diritto obbiettivo, è naturale che si debbano stabilire dei limiti al potere dei soggetti di tali pretese circa il chiedere allo Stato che si prenda cura di esse, e ciò per impedire che la tutela di questo non riesca per avventura accordata a quelle pretese che non ne necessitano, venendo così meno allo scopo per cui fu istituita. In altre parole lo Stato non poteva e non può accordare la sua protezione alla pretesa di qualsiasi uomo, senza prima esaminare la qualità di essa, senza prima istituire un giudizio, in cui la pretesa sia vagliata e che renda manifesta la necessità della sostituzione della difesa pubblica alla privata (1).

Ma neppure ancora basta che la pretesa sia riconosciuta

(1) Cfr. Jhering, *Geist des Römischen Rechts*, Lipsia, 5ª ed. I, p. 152 e seg. ove l'A. spiega come lo scopo per cui il creditore col procedimento della *manus injectio* traeva il debitore davanti al giudice non era quello di farselo aggiudicare dal Pretore, come alcuno opina (Bettmann-Hollweg, *Der Civilprozess des gemeinen Rechts*, v. I, p. 118), ma piuttosto quello di avere nel giudice una legittimazione della ulteriore procedura.

degna della protezione dello Stato; devesi anche giudicare se dal riconoscimento che per avventura di essa venga fatto da parte dello Stato derivi utilità al privato che lo richiede e se veramente a lui spetti e non ad altri provocare tale riconoscimento.

Ed ecco sdoppiarsi o per meglio dire completarsi il giudizio dello Stato: non più soltanto l'esame sulla natura *giuridica*, o non, della pretesa vantata, ma la ricerca se quegli che chiedeva per essa il sussidio dello Stato avesse, a far ciò, un vero interesse.

Adunque, la decisione sull'esistenza dell'interesse a chiedere il riconoscimento di una pretesa deve necessariamente precedere, nei giudizi, alla decisione sulla esistenza della pretesa stessa, anche perchè l'interesse, rappresentando un concetto di maggior contenuto che non il diritto (1), per l'ordine logico degli umani giudizi, esige di venire accertato prima di questo, di cui costituisce quasi un presupposto ed una pregiudiziale.

Da quanto si è detto emerge la necessità di ben distinguere la ricerca sull'interesse ad agire dalla ricerca sull'esistenza del diritto e l'erroneità della dottrina la quale afferma che non solo questo, ma anche quello è necessario per promuovere un'azione in giudizio (2).

Tale dottrina è, come si disse, errata: poichè la decisione sulla esistenza o meno del diritto non può sorgere che dal giudizio stesso che si sta per compiere; onde si vede non essere necessario che l'esistenza di questo diritto venga dimostrata, perchè si possa proporre l'azione, questa non essendo se non il mezzo, la molla che mette in moto il giudizio stesso. L'interesse è invece, come già si notò, necessario, affinchè la tutela dello Stato non si muova vanamente a servizio di qualunque sia vago di vedersi riconosciuto dalla autorità un diritto che credesi di possedere, aprendosi così l'adito ad una serie indeterminata di vane competizioni, gravemente nocive alla stabilità del diritto (3).

---

(1) Cfr. Granata, *Nuovi orizzonti del diritto giur. civile*, Torino, 1893, pag. 50.

(2) Mattirolo, *Trattato di diritto giudiziario*, 5ª ed., Torino, vol. I, n. 54; Garsonnet, *Traité théorique et pratique de procédure*, Paris, vol. I, 2ª ed., § 294 e seg.

(3) Cfr. Unger, *Sistem des österreichischen Privatrechts*, Lipsia, 2ª ed., § 112 e seg.

In che consiste adunque questo interesse la cui importanza è, per quanto si è detto, così manifesta?

Per giungere a comprendere il concetto dell'interesse giova vedere quale sia lo scopo a cui tende il processo civile.

Intorno a questo punto due scuole opposte vi sono che si contendono il campo.

La prima, che ha fra i suoi maggiori rappresentanti l'Hellwig (1) in Germania ed il Mattirolo in Italia (2) assegna al processo lo scopo di tutelare il diritto subbiettivo del privato, lo scopo, cioè, di rivestire questo dell'autorità, della forza necessaria perchè si possa legittimamente esercitare. La seconda scuola ritiene invece che scopo del processo civile sia puramente l'attuazione del diritto obbiettivo. Questa dottrina è seguita particolarmente, fra i dottori tedeschi, dal Wach (3) e dal Langheineken (4), e, fra gli italiani, dal Mortara (5) e dal Chiovenda (6).

Esiste poi una scuola, che si potrebbe chiamare intermedia, la quale afferma che entrambi gli scopi summenzionati sono oggetto del processo civile e solo è diverso il modo con cui essi vengono conseguiti, ottenendosi lo scopo della tutela del diritto subbiettivo, in modo indiretto, vale a dire per mezzo dell'altro scopo, mediante l'attuazione del diritto obbiettivo (7).

Non è mio compito discutere il valore di queste diverse tendenze: mi sia solo lecito osservare a questo proposito che colui il quale è mosso a promuovere in giudizio un'azione contro altri, può proporsi, nel far ciò, un'infinità di scopi, ma che non è intorno ad essi che deve svolgersi la funzione del giudice nel processo civile. L'attore per giungere a quello scopo che egli desidera deve necessariamente passare per la via che la legge ha segnato, per un giudizio: è attraverso a questo che egli deve, per così dire, prima purgare il suo scopo di quanto ha di per-

---

(1) Hellwig, *Lehrbuch des deutschen Civilprozessrechts*, Lipsia, 1903, p. 20.

(2) Mattirolo, *Trattato*, vol. I, nn. 18 e 19, pp. 20 e 21.

(3) Wach, *Handbuch des deutschen Civilprozessrechts*, Lipsia, 1885, pp. 1 e seg.

(4) Langheineken, *Urteilsanspruch*, Lipsia, 1889, p. 19.

(5) Mortara, *Commentario del codice civile e delle leggi di procedura civile*, Milano, vol. I, n. 16.

(6) Chiovenda, *L'azione nel sistema dei diritti*, Bologna, p. 8, in nota.

(7) Bunsen, *Lehrbuch des deutschen Civilprozessrechts*, Berlin, 1900, p. 1 e seg.

sonale e di accidentale, conformandolo alla natura di un diritto per renderlo suscettivo di giuridico riconoscimento.

Se si tiene conto di questa trasformazione riescirà facile capire come possa dirsi che lo scopo del processo civile sia più che la tutela del diritto subbiettivo, l'attuazione del diritto obbiettivo. Infatti non si tratta qui di giudicare se quello scopo ultimo che l'attore si era proposto deve o no essere da lui raggiunto, ma unicamente di verificare se le condizioni di fatto in cui verrà a trovarsi, dopo le eccezioni del convenuto, il diritto dell'attore, abbiano, o non, appoggio nella legge scritta.

Quindi la sentenza del giudice attuerà ad un tempo e l'applicazione del diritto subbiettivo e lo scopo dell'attore, ma questo solo in quanto esso si trovi ad essere alla legge conforme, mentre l'attuazione del diritto dovrà sempre avvenire. Nell'ipotesi poi che la sentenza rigetti la domanda dell'attore, allora non potrà più parlarsi di diritto subbiettivo nell'attore stesso: questi per promuovere la sua azione aveva bensì tentato di rendere lo scopo a cui mirava, conforme al diritto, per ottenere la tutela del giudice: ma la sentenza dimostrò che egli non riescì nel suo intento e che perciò il suo scopo non rappresentava un diritto subbiettivo.

Da ciò si rileva come la differenza fra le due scuole suaccennate, subbiettiva ed obbiettiva, non sia così grande come può parere, poichè lo scopo dell'attore nell'agire sarà riconosciuto essere un vero diritto subbiettivo, solo quando attuandosi la legge positiva che lo riguarda, si dimostrerà esservi conforme, mentre d'altra parte il giudice non si preoccupa dello scopo dell'attore, preso a sè, ma, per così dire, lo commisura colla legge per attuare questa rispetto ad esso: e da questa attuazione potrà, o non, sorgere la tutela dello scopo dell'attore, ed il riconoscimento in esso di un vero diritto subbiettivo.

Questo è, a parer mio, lo scopo del processo civile, e il rapporto in cui esso si trova colla tutela del diritto subbiettivo.

Sia o non, adunque, lo scopo che l'attore si propone il contenuto di un diritto subbiettivo, egli potrà ugualmente sperimentare la sua azione, poichè appunto da questo esperimento deve sorgere la convinzione intorno all'esistenza del suo diritto.

Ma ciò che il giudice deve anzitutto rintracciare in lui è l'interesse ad agire.

E la ragione da ciò appare più evidente per le seguenti considerazioni.

La necessità di mantenere l'ordine nella consociazione degli individui, non induce la necessità che lo Stato agisca sempre quando un diritto sia stato violato, ma fra tutte le violazioni del diritto, lo Stato ne scelse alcune, contro le quali egli agisce senza necessità di domanda di parte e sulla semplice denuncia di qualunque consociato e ciò a motivo del diritto particolarmente importante che feriscono o perchè esso vi ravvisa un'offesa indiretta alla consociazione (1).

Ma quando non concorrano i caratteri suaccennati, la violazione di un diritto non basta, di per sè, ad eccitare l'azione dello Stato, nè vale ad ottenere che lo Stato agisca, la denunzia di qualsivoglia cittadino: lo Stato intanto solamente si muove, in quanto sia eccitato da un organo il quale abbia idoneità provocarne il movimento, abbia cioè interesse ad agire (2). Notiamo subito che tale necessità non è assoluta, perchè l'ordine dei giudizi civili possa esistere ed applicarsi: potrebbesi infatti idealmente concepire uno Stato talmente oculato da potere tutelare sempre, senza bisogno di eccitazione esterna, tutti i diritti dei consociati, contro tutti gli attacchi che essi possono subire; ma ciò non potrebbe avvenire se non a condizione che lo Stato convertisse il suo alto compito in una mera funzione di polizia (3).

Il diritto processuale civile, come si è detto sopra, attua il diritto obbiettivo: ma questa attuazione non è necessario (nè sarebbe possibile) che esista sempre in *atto*, basta che esista sempre in *potenza*, vale a dire che il titolare di un diritto abbia

---

(1) Cfr. Brusa, *Prolegomeni di diritto penale*, Torino, n. 15, p. 27 e 28.

(2) In alcuni casi l'azione civile è promossa spontaneamente dal Pubblico Ministero. Ma questi casi, più che vere eccezioni, possono in certo modo considerarsi quali naturali conseguenze del principio sovra posto, perchè in essi (opposizione a matrimonio, assenza, interdizione) si rivela particolarmente interessato l'ordine e la tranquillità della consociazione.

(3) Cfr. Kohler, *Prozess als Rechtsverhältniss*, Mannheim, 1888, p. 17.

sempre la possibilità di promuoverla, quando il suo diritto sia stato violato.

Il legislatore nel dettare il diritto privato obbiettivo non ha inteso di imporre una coazione immediata ai privati di conformarsi ad esso, ma solo ha voluto dar loro una garanzia dei loro diritti subbiettivi: perciò se essi non riscontrarono in un fatto, che costituisce violazione del loro diritto, un motivo di lagnarsi e di pretendere la reintegrazione di questo, lo Stato non può e non deve intervenire, poichè qualunque attuazione del diritto fatto dallo Stato in tal maniera degenererebbe in una incomoda ed illecita tutela.

Da tutte queste considerazioni emerge adunque che l'azione dello Stato per l'attuazione del diritto privato obbiettivo a tutela di un diritto violato non può essere mossa se non da chi vi abbia interesse. Non basta adunque la pura violazione: occorre che fra la persona che agisce ed il risultato che deriva dall'attuazione del diritto obbiettivo, vi sia un tal rapporto per cui da questa attuazione derivi a quella persona una *utilità*.

Ma, detto ciò, la nozione dell'interesse rimane pur sempre assai vaga ed indeterminata: occorre delimitare questo concetto di *utilità*, per vedere quando da essa possa nascere un vero interesse ad agire.

Le utilità, che possono derivare ad alcuno dall'attuazione della legge, sono di varia specie. Una utilità nasce già per lui dal solo e semplice fatto di tale attuazione, poichè ogni cittadino ha interesse che la legge, che egli ha concorso a formare e sotto la cui tutela egli vive, venga, in ogni caso, applicata. Ma questa utilità non basta perchè si possa parlare di interesse ad agire: essa infatti si esplica, più che a vantaggio del singolo, a pro' dell'intera consociazione.

Neppure potrebbesi trattare di vero interesse giuridico, quando il ripristinamento della legge violata, ridondasse a vantaggio di una terza persona qualsiasi, ma la utilità necessaria perchè si abbia un vero interesse ad agire deve riferirsi alla tutela di un diritto proprio o di quella persona che legalmente si rappresenta (1).

---

(1) Prescindiamo dal caso speciale dell'azione popolare, in cui tale affermazione potrebbe essere molto discussa.

Sostanzialmente adunque si può dire che, perchè si possa parlare di interesse ad agire è necessario anzitutto che il ripristinamento della norma violata produca *una utilità* (*pecuniaria o di altra natura*) (1) *effettiva, a colui che l'ha procurato, considerato nella sua personale individualità e non nella sua qualità di consociato.*

Ciascun uomo possiede, in vario grado, una data somma di diritti, e lo stato ideale della società esigerebbe che tutti questi diritti potessero liberamente esercitarsi. Ma questa aspirazione ideale della società, non ha mai trovato, e non potrà mai trovare la sua piena attuazione, perchè l'uomo, o per mala fede o per errore, è frequentemente portato ad invadere il campo del diritto altrui e ad intralciarne l'esplicazione. Perciò in ogni diritto dell'uomo si possono distinguere due stati diversi: uno, che si potrebbe chiamare stato *positivo*, nel quale esistono tutte le condizioni dell'esercizio del diritto, un altro, che chiameremo stato *negativo*, in cui tutte od alcuna di queste condizioni fanno difetto.

Quando un diritto si trovi nel primo di questi due stati, nello stato positivo, non si può parlare d'interesse ad agire: e ciò perchè la richiesta di colui che agisce in tali circostanze sarebbe senza scopo, essendochè la legge mirando appunto ad assicurare ad ogni diritto le condizioni del suo esplicarsi, egli domanderebbe ciò che già ha.

L'interesse ad agire può dunque unicamente nascere dallo stato negativo, perchè solo in questo caso l'attuazione della legge è *utile* al richiedente, servendo essa a reintegrarlo nel possesso del suo diritto.

Ma l'interesse a chiedere l'attuazione della legge che nasce dallo stato negativo, non si esplica sempre colla forma d'azione. Infatti la mancanza di condizioni necessarie per l'esercizio del diritto può avere una causa *estrinseca* od una causa *intrinseca*, vale a dire può essere cagionata dall'azione di un altro soggetto,

(1) È ormai accettato da tutti non essere necessario che l'utilità che si vuole trarre dall'attuazione della legge sia di carattere patrimoniale, purchè sia di natura giuridica. Cfr. Mortara, *Commentario,* II, p. 590 e seg.; Mattirolo, *Trattato,* I, pp. 59-63.

oppure essa è insita nel diritto stesso, che pur essendo vero e proprio diritto, si trova ad essere privo di alcuni elementi per potersi dire intero, senza che a questa mancanza sia minimamente concorsa l'azione di un altro soggetto. Ora è evidente che in questo ultimo caso non si potrà parlare di interesse ad agire, poichè non esiste un soggetto in confronto del quale si possa pretendere la reintegrazione del proprio diritto.

Pur tuttavia non si può negare che vi sia un vero e proprio interesse di ottenere che il proprio diritto venga fornito degli elementi di cui manca (1).

Un esempio di ciò si ha nella domanda che può esser proposta in base all'art. 9 del Codice di procedura patrio, da chi non può liberamente disporre della cosa su cui cadde il compromesso da lui fatto, perchè tale compromesso venga approvato; ed un altro esempio si riscontra nella domanda che l'erede deve fare al pretore od al tribunale civile perchè le transazioni, a cui addivenne, siano approvate.

In questi casi pertanto la domanda non è diretta contro altri, da cui si pretenda essere stato violato il proprio diritto, per chiederne la reintegrazione, ma è rivolta a chiedere che il proprio diritto sia, per così dire, completato, integrato. Se, fattosi un contratto, si sarà da parte di uno dei contraenti mancato all'adempimento della propria obbligazione, l'altro contraente avrà interesse a far dichiarare questi tenuto a tale adempimento e la sua domanda sarà rivolta contro di lui. Allo stesso modo, fattasi una transazione da un erede, questi ha interesse che essa venga approvata nei modi stabiliti dalla legge, solo che, non essendovi chi ne contraddica la legittimità, la sua domanda non potrà rivolgersi contro alcuno (2).

---

(1) Il Mortara parla a questo proposito di *ostacoli* (*Commentario*, II, p. 599). A me pare che sia più proprio il parlare di mancanza di requisiti necessari, inquantochè non si tratta qui di torre via qualche cosa che vi sia in più, ma piuttosto di aggiungere alcunchè, di colmare le lacune esistenti, affinchè il diritto possa esplicarsi.

(2) Questa differente direzione dell'azione si rispecchia nella diversa natura dell'*actio* romana e della *klage* germanica, delle quali la prima si svolge più propriamente verso un'altra persona, la seconda più propriamente verso lo Stato. Cfr. Gierke, *Deutsche Privatrecht*, Leipzig, 1885, p. 324; Bethmann-Hollweg, *Der germanisch-romanisch Civilprozess*, vol. IV, pp. 1 e seg.; Weismann, *Die Feststellungsklage*, Bonn, p. 2 e seg.

Adunque l'interesse ad agire, nel vero senso della parola, può solo sorgere quando il nostro diritto sia stato da altri attaccato; qualora invece esso non sia intero, ma ciò non per opera di altri, si potrà bensì sempre chiederne all'autorità competente la integrazione, ma la domanda non potrà rivolgersi contro alcuno.

Fermiamoci ora a considerare più specialmente il caso in cui l'interesse a chiedere l'attuazione della legge nasca dal fatto che il nostro diritto sia stato da altri *attaccato*.

Il diritto ha, come sopra si è detto, uno stato che si può chiamare stato *positivo*, in cui esso, fornito di tutti i suoi elementi e munito di tutta la sua forza, trovasi atto a procurare a chi lo possiede quelle determinate utilità che in esso sono contenute. Qualunque atto che turbi lo stato positivo del diritto, o spogliandolo di elementi della sua integrità o diminuendone l'intensità, viene perciò solo a privare il titolare di tale diritto della facoltà di concretare le utilità in esso racchiuse od almeno a renderne più difficile il conseguimento.

È questo il concetto più sintetico di ciò, in cui consiste l'*attacco* al diritto. Invero, se ben si guardi quei fatti pei quali nasce in altri il diritto di agire, si vedrà che essi, in ultima analisi, hanno tutti questa natura di impedire ad altri di trarre da un loro diritto l'integrità del godimento che vi è annesso.

Così, per fermarci agli esempî tipici, chi si rifiuta di pagare un debito che ha verso di me non fa altro, che negarmi l'utilità che potevo trarre, esercitando il mio diritto di esazione, così pure chi fa una costruzione in modo che io possa temere che da essa sia per derivarne danno ad un immobile da me posseduto, non fa altro se non impedirmi di trarre dal godimento di tal immobile tutte quelle utilità che esso poteva procurarmi, menomando la sicurezza che io posso ripromettere a me o ad altri che abiti tale immobile. Ancora: il fatto di un debitore il quale agisca in tal modo che nascano al suo creditore giusti motivi di sospettarne la fuga o di temere sottrazioni, è pur esso un fatto della stessa natura di quelli sopra ricordati: vale a dire è un fatto il quale rende più difficile e dubbio che il creditore possa, a tempo debito, pagarsi di quanto gli spetta e che diminuisce perciò il valore delle utilità che sono comprese nel suo diritto di credito.

Come si vede, non vi ha alcuna differenza di sostanza fra gli esempi sopra ricordati, ma la differenza fra di loro è per così dire di indole quantitativa: essi sono tutti fatti lesivi del diritto, ma tale lesione essi producono con intensità diversa, vale a dire per essi le condizioni del godimento del diritto vengono più o meno gravemente colpite (1).

Occorre ora far un passo più avanti e domandarci: il potere di chiedere l'attuazione della legge sarà sempre condizionato da un attacco che il diritto abbia subìto?

In altre parole, non potrà aversi un interesse che è limitato alla sola attuazione della legge, senza che il nostro diritto sia peranco stato violato?

Per rispondere a questa domanda occorre esaminare sotto quali aspetti si possa presentare tale interesse. Il diritto non ha una esistenza a sè, ma esso, vivendo ed esplicandosi nel consorzio degli uomini, partecipa delle condizioni dell'ambiente in cui si trova, ed è soggetto a subirne l'influenza.

E fra le cause che possono esercitare un'influenza sul diritto, senza per altro costituirne una violazione, vanno annoverate quelle che scuotono la condizione di sicurezza delle quali

---

(1) La dottrina tradizionale italiana (Cfr. PESCATORE, *Sposizione compendiosa di procedura civile*, Torino, p. 24; MATTIROLO, *Trattato*, I, nn. 60-61, pp. 53 e 54) distingue, fra i fatti lesivi del diritto altrui, la *violazione* ed il *disconoscimento* del diritto da ciò che costituisce semplice *minaccia* del diritto, ed afferma che per esercitare l'azione non è necessario che si tratti di reclamare la restaurazione di un diritto stato violato o disconosciuto, ma bastare che vi sia pericolo o minaccia grave di una futura violazione, perchè il titolare abbia legittima facoltà di premunirsi ricorrendo al giudice, e le azioni di denuncia di nuova opera o di danno temuto e di sequestro giudiziario o conservativo sarebbero appunto rivolte a prevenire una *minaccia* del diritto, un pericolo ad esso imminente.

Senza discutere questa distinzione, giova però osservare come nulla osterebbe a ritenere quei fatti, che in essa son chiamati col nome di *minaccie*, quali vere violazioni, poichè anche per essi vengono a perdersi effettive utilità che prima erano inerenti al godimento, come già si dimostrò essere in caso di denunzia di nuova opera o di sequestro conservativo. Certamente non essendo qui colpite che utilità particolari, la domanda dovrà essere necessariamente limitata, vale a dire non si potrà chiedere se non che siano tolti quegli impedimenti che resero più difficile o meno completo il godimento anteriore.

il diritto ha d'uopo, per poter dare a chi lo possiede tutte quelle utilità di cui è capace.

Il titolare di un diritto, per poterlo godere in tutta la sua intensità, necessita che nessun dubbio venga a turbare l'opinione degli uomini circa l'appartenenza e la modalità di esso, specialmente perchè da tale opinione dipendono le condizioni, alle quali egli può disporre del suo diritto (1), e qualunque fatto che abbia in sè la potestà di scuotere tale opinione è suscettivo di esercitare una influenza perniciosa sul diritto.

Tra questi fatti, che pur non costituendo la violazione del diritto altrui, scuotono però l'opinione degli uomini sulla sua esistenza e sui suoi attributi, vanno annoverati i così detti *vanti*, vale a dire le asserzioni di possedere ragioni e titoli giuridici in opposizione al diritto altrui.

È evidente che con tali atti, tanto più se compiuti con grande pubblicità, viene meno ai diritti di una persona quella aureola di pace e di sicurezza che è condizione imprescindibile per poter fruire di tutte le utilità nel diritto contenute, senza che però tali vanti abbiano tal forza da privare direttamente il diritto di alcune di quelle utilità, chè allora ne costituirebbero una vera violazione.

Il diritto comune, traendo origine dalla legge romana *Diffamari* (2), aveva creati i così detti *giudizi di jattanza*, che venivano instituiti contro coloro i quali con vanti di ogni specie turbassero il credito, l'onore od il patrimonio di una persona. Veramente tale legge riguardava solo le male voci sparse contro lo stato di ingenuità di un cittadino, ma già fin dai tempi di

(1) " Vi è, dice il Chiovenda (*L'azione nel sistema dei diritti*, p. 87, nota 68, IV), uno stato di fatto conforme al diritto, *immediato* (contenuto del diritto) e uno *mediato* (certezza del diritto nell'opinione comune), e può dirsi perciò che vi è uno stato di fatto contrario al diritto, anche per ciò solo che è incerto quale sia lo stato di fatto conforme al diritto ".

(2) L. 5, Cod. de ingenuis et manumissis, l. 7, tit. 14 (*Diffamari statum ingenuorum, seu errore, seu malignitate quorundam, periniquum est, praesertim cum affirmes diu praesides unum, atque alterum interpellatum a te vocitasse diversam partem, ut contradictionem faceret si defensoribus suis confideret. Unde constat merito rectorem provinciae commotum allegationibus tuis, sententiam dedisse ne de coetero inquietudinem sustineres. Si igitur adhuc diversa pars perseverat in eadem obstinatione, aditus praeses provinciae ab injuria temperari praecipiet*).

Giustiniano, e tanto più poi a quelli del diritto comune (1), essa fu estesa e conglobata con altre leggi (2), ed essendo cadute le distinzioni fra *liberi* e *servi*, *ingenui* e *manumissi*, venne applicata allo scopo sovra accennato, dimodochè i giudizi di jattanza non si possono ritenere quale una schietta derivazione della citata legge *Diffamari*.

Con tali giudizi, colui contro il quale il vanto era stato menato poteva far assegnare al vantatore un termine, entro il quale egli doveva addurre le ragioni del suo vanto, salvo al giudice, ove egli non comparisse o non adducesse ragioni sufficienti, di imporgli un perpetuo silenzio dichiarandolo decaduto dai diritti e dalle azioni che gli competevano contro il diffamato.

Siffatti procedimenti assunsero in breve una grande diffusione, pur trovando fra gli scrittori del tempo accanitissimi avversari (3), e vissero fino al tempo della compilazione del vigente Codice (4), dal quale, dopo lunga e viva discussione (5), furono definitivamente banditi.

Ma dalla proscrizione di tali giudizi, sulla quale non può cadere dubbio, non sarebbe giusto argomentare, senz'altro, che nel sistema della nostra legislazione i vanti non possano mai costituire un motivo sufficiente per promuovere un'azione.

---

(1) Cfr. Mancini, Pisanelli e Scialoja, *Commentario al Codice di proc. civ. per gli Stati del Re di Sardegna*, Torino, vol. II, lib. II, n. LXXX, p. 98.

(2) Specialmente colla legge *Si contendat*, L. 28, Digesto, *de fidejussoribus* (lib. 46, tit. I), colla legge Aurelius, § centum, Digesto, *de liberatione legata* (lib. 34, tit. 3) e colla legge 32, pr. Digesto, *de usuris pupillaribus* (lib. II, tit. I).

(3) Tale fu il Fabro il quale nella sua opera *De erroribus pragmaticorum* (p. III, d. 41, err. 1) scriveva: *...frequentissima in foro ita pragmaticis omnibus etiam imperitioribus notissima est actio, quam non tamen pragmaticorum sed interpretum error invenit ex remedio, ut vocent, ex lege Diffamari.* Per contro il Voët (*Comm. ad Pand.*, lib. V, tit. I, n. 21) strenuamente difende i giudizi di jattanza, nati, come egli scrive, *per legitimam extentionem de lege Diffamari.*

(4) Furono però aboliti nel Codice di procedura sarda del 1854, ma ricomparvero in quello del 1859.

(5) La discussione relativa è riportata dal Gargiulo, *Comm. al Cod. di proc. civ.*, 2ª ed., vol. 1, p. 128. Giova solo ricordare che essi furono respinti a debolissima maggioranza (7 voti contrari e 6 voti favorevoli).

Bisogna distinguere ciò che costituisce la forma di questi giudizi, da ciò che ne è invece l'essenza. La forma speciale con cui tali giudizi si esplicavano è senza dubbio stata respinta dal nuovo Codice.

Ma si dovrà dire altrettanto della loro sostanza? Potrà alcuno sulla base di tali vanti promuovere un giudizio col fine di avere un accertamento del proprio diritto?

Già vedemmo come l'interesse ad agire non nasce solo dallo scopo di ottenere la reintegrazione del proprio diritto, ma la semplice rimozione dell'incertezza che regna attorno ad esso può costituire un interesse sufficiente a chiederne l'accertamento.

Il Regolamento germanico ha riconosciuta espressamente questa possibilità, riconoscendo nel § 256 la figura dell'azione di accertamento (*Feststellungsklage*) dell'esistenza o non esistenza di un rapporto giuridico, di riconoscimento o disconoscimento di scrittura, quando l'attore ha un interesse giuridico all'accertamento immediato mediante decisione giudiziaria.

Il nostro Codice non contiene una disposizione simile a questa, ma, ciò non ostante, la necessità di ammettere tali azioni di accertamento devesi riconoscere, solo che si pensi che lo Stato, costituendo un ordinamento giudiziario, volle certamente che esso prestasse la sua tutela a chiunque avesse interesse a ciò, senza che fosse necessario proclamare questo principio con una speciale disposizione legislativa (1).

Del resto, non è estraneo al sistema della nostra legislazione che si possa avere un interesse limitato all'accertamento giudiziale e indipendente dalla reintegrazione di un diritto. Ne fanno fede l'azione *principale* di falso civile (art. 296 del Codice di proc. civ.), l' azione *principale* per verificazione di scrittura privata (art. 232 Cod. di proc. civ.), e la domanda di esami a futura memoria (art. 251 Cod. di proc. civ.).

Se in tutti questi casi il legislatore italiano ha mostrato di riconoscere la legittimità di una domanda che tende unicamente all'accertamento di un dato rapporto, perchè non dovrà ritenersi fornita della stessa legittimità la domanda che muove

(1) Cfr. CHIOVENDA, *L'azione nel sistema dei diritti*, pag. 81, nota 11; MESSINA, *Contributo alla dottrina della confessione*, Sassari, 1902, p. 62; MORTARA, *Commentario*, II, n. 446, p. 517.

a far riconoscere il proprio diritto, quando il giudice ritenga che ciò sia necessario per la incertezza in cui questo giace, a cagione del vanto altrui?

Certamente nei casi citati il legislatore ha riconosciuta la legittimità della domanda, perchè ha ravvisato che esisteva un interesse a tale accertamento, pur non essendovi stata violazione del diritto. Ma tale interesse può ben nascere, e anche più forte, dal vanto, e quando questo sarà riconosciuto, la sola ragione della tutela giuridica varrà, come si è detto sopra, ad imporre l'ammissibilità della domanda per accertamento.

D'altra parte la sola condizione dell'avere un interesse è richiesta dal nostro legislatore (art. 85 Cod. di proc. civ.) per promuovere una domanda in giudizio, e da questo solo esame deve partire il giudice per decidere se la domanda che abbia per base unicamente un vanto debbasi accogliere. Affermato ciò, non resterà altra via al giudice che quella di eseguire un giudizio di accertamento, poichè (essendo aboliti i giudizi iattanza) la sua azione non potrà essere intesa ad altro che ad accertare, a dichiarare il giattante privo della cosa su cui contende (1).

Ma non solo in forza dei vanti può nascere interesse per promuovere un'azione di accertamento. Siccome tale azione non si dirige contro alcuno che abbia violato il nostro diritto, ma tende unicamente a rimuovere l'incertezza che regna intorno ad esso (2), e potendo tale incertezza evidentemente regnare in tutti i campi del diritto, è evidente che in tutti possa ricorrere la figura dell'azione d'accertamento.

La vendita di un fondo alla quale intendo addivenire è impedita dal fatto che il mio autore aveva compiuto una finta vendita del fondo stesso: ecco l'interesse per me di fare accer-

(1) Cfr. MANCINI, PISANELLI e SCIALOJA, *Commentario*, II, lib. II, n. XCVII, p. 116.

(2) Certamente se tale incertezza è nata in seguito all'azione di altra persona, a questa dovrà anche riferirsi il giudizio, ma ciò avverrà in modo incidentale, mentre la ricerca dovrà sempre avere per mira il diritto, e su di questo solo dovrà vertire la pronuncia.

Questa potrà concernere la persona di chi ha menato il vanto, ma ciò solo per quanto ha tratto alle conseguenze processuali (p. es. per quanto riguarda la condanna delle spese di giudizio. Cfr. CHIOVENDA, *La condanna nelle spese giudiziali*, Torino, 1901, n. 304, p. 304), non già per imporle una prestazione.

tare la finzione della vendita compiuta dal mio autore, perchè solo dopo che ciò sarà stato fatto potrò stipulare il mio contratto.

Voglio disporre di una cosa a me legata, ma si afferma essere in possesso di un terzo, uno scritto del testatore il quale distrugge in me il diritto sulla cosa stessa: ecco nascere per me l'interesse a far constatare l'autenticità della scrittura, per poter liberamente disporre della mia cosa.

Quanto al fondamento giuridico dell'azione di accertamento, fu già notato sopra, come essa nasca da un fatto tale che, pur non violando alcun diritto, turba quello stato di tranquillità che forma per così dire l'involucro, la custodia in cui il diritto deve essere conservato, perchè non perda nulla della sua forza e del suo valore.

Ma non è a credersi che qualunque fatto il quale possa turbare il diritto sia atto a legittimare un'azione di accertamento. È necessario che tale turbativa sia di tale entità, che sia abile a produrre un danno nel patrimonio del titolare del diritto ove non intervenga subito una pronuncia giudiziale ad accertare il vero stato del diritto stesso. Se la turbativa è atta a produrre un danno, ma a questo potrà rimediarsi interamente, per quanto posteriormente, in altro modo, l'azione di accertamento non potrà dirsi ammissibile (1).

Tale regola è però ancora troppo generica perchè si possa dire che giovi ad escludere, in modo assoluto, qualsiasi controversia. Pur tuttavia essa può servire ad essere posta come punto di partenza pel giudice, dal cui apprezzamento giova meglio che da ogni altra cosa, far dipendere il giudizio sull'ammissibilità dell'azione di accertamento.

Il legislatore germanico ha voluto fissare con disposizione legislativa la condizione dell'esercizio di tale azione: infatti il § 256 del regolamento germanico esige perchè si possa muovere una *Feststellungsklage*, un interesse giuridico alla determinazione del rapporto giuridico mediante una immediata pronuncia del giudice.

---

(1) Cfr. Hölder, *Anspruch und Einrede*, " Archiv für Civ. Praxis ", p. 46; Kroll, *Klage und Einrede nach deutschen Recht*, Berlin, p. 58; Weismann, *Die Feststellungsklage*, p. 159.

È in sostanza il principio da noi sovra posto, ove si rifletta che, sempre quando vi sarà danno a causa dell' incertezza sul diritto, vi sarà sempre quest'interesse alla immediata decisione del giudice, dalla quale sola dipende la cessazione di tale incertezza.

Ma se analizziamo più a fondo la disposizione del § 256, troveremo che in essa si contiene un nuovo principio rispetto alle condizioni dell'azione di accertamento. Risulta infatti da tale disposizione che l'azione di accertamento dipende da un interesse giuridicamente rivelabile che si deve esaminare al lume del criterio giuridico, vale a dire che è legato ad un tale rapporto delle parti rispetto alla pretesa giuridica che sia suscettivo di essere provato e giuridicamente riconosciuto.

Ove queste condizioni non concorrano, ma si tratti di un puro interesse soggettivo, di una aspirazione ad aver dichiarata la certezza del proprio diritto, non si potrà ammettere l'azione di accertamento, ma solo si farà luogo agli atti della giurisdizione volontaria.

Nella citata disposizione del regolamento germanico è poi tacitamente presupposto che soltanto la semplice turbativa di un diritto può dar luogo alle azioni di accertamento, e non anche la lesione o l'inadempimento di esso, ricorrendo invece in questi casi più che l'azione di accertamento *(Feststellungsklage)*, la figura dell'azione di prestazione *(Leistungsklage)*.

Concludendo si può affermare che *l'interesse nell'azione di accertamento è una tale relazione obbiettiva suscettibile di prova fra i subbietti giuridici, la quale, senza l'immediato accertamento, produce un pregiudizio al titolare del diritto indipendentemente dall'inadempimento della pretesa giuridica* (1). Il fatto poi da cui può nascere l'azione dell'accertamento si può dire consistere in un *pregiudizio imminente al titolare del diritto, pregiudizio che pur non consistendo in una violazione del diritto, non può altrimenti essere rimosso, se non per mezzo di un accertamento in largo senso, cioè per mezzo di una pronuncia giudiziale, che fondandosi sull'esame del diritto affermi l'esistenza e le modalità di esso.*

L'azione dell'accertamento si estende del resto anche alla constatazione di altri rapporti, in cui il concetto del pregiudizio

(1) Cfr. Schmidt, *Lehrbuch des deutschen Civilprozessrechts*, Lipsia, p. 691.

non entra come una cosa *probabile* che la sentenza del giudice miri ad impedire, ma unicamente come una cosa *possibile* che si cerca di prevenire. Sonvi infatti molte situazioni giuridiche, circa alle quali si può prevedere *a priori* la semplice *possibilità* che da esse possa nascere un futuro danno ad alcuno: ora, se anche non difettano i rimedi esperibili contro questo danno nel momento in cui esso dal campo della possibilità passa in quello della *probabilità* od in quello della *realtà*, pure è di una utilità giuridica indiscutibile che sia dato un mezzo per prevenire, già anteriormente, l'eventualità del prodursi di questo pregiudizio, impedendo che tale eventualità acquisti maggior consistenza.

Nella legislazione abbiamo vari esempi di questi casi: fra essi, presentano particolare interesse, la querela di falso, il procedimento per verificazione di una scrittura privata, e l'esame di testi a futura memoria.

Nel primo di questi casi, colui che ha ragione di temere che da un documento, da lui reputato falso, gli possa derivare qualche pregiudizio, non è obbligato per combattere il pericolo dell'uso di tale documento, ad attendere che esso sia fatto valere in giudizio, ma può agire in via principale, chiedendo al giudice che accerti *preventivamente* la falsità del documento (articolo 296 Cod. proc. civ.).

Che in questo primo caso ricorra la figura dell'azione di accertamento, dopo quanto si è detto sopra circa i caratteri di questa, non vi può essere alcun dubbio: lo svolgimento di tutto il procedimento è limitato ad accertare se il documento sia vero o falso, nè la pronuncia del giudice può esorbitare da questo limite.

Nel procedimento per verificazione per scrittura privata pare si presenti qualche maggiore difficoltà. Infatti la nostra legge (art. 282 del Cod. proc. civ.) ammette che la domanda relativa si possa proporre anche come oggetto principale del giudizio. In questo caso, siccome potrà essere che la scrittura venga subito riconosciuta, parrebbe, ove ciò avvenisse, che non si possa affatto parlare di un pregiudizio (1), nè probabile, nè

(1) Si noti che si parla sempre del pregiudizio, il quale può derivare dal fatto che, sulla base dell'impugnazione di una scrittura, la cui sottoscrizione è invece autentica, si abbia una sentenza sfavorevole al titolare di essa.

possibile. Può sembrare cioè, che mentre il documento falso ha in sè la possibilità del pregiudizio, per la scrittura privata tale possibilità nasca solo col fatto del disconoscimento della sottoscrizione (1).

Ma se ben si riflette, si riconosce che così non è. Se è vero infatti che il pericolo del pregiudizio non si esplica se non col fatto della impugnazione, la scrittura stessa contiene già in sè il germe, la possibilità del pregiudizio, inquantochè per la sua natura di cosa scritta essa è, circa alla prova della sua verità, particolarmente esposta alla mala fede degli avversari ed agli errori del giudice (2).

Si potrebbe contro di ciò obiettare che la disposizione del capoverso del citato articolo del Codice di procedura, che pone le spese del giudizio a carico dell'attore, ove il convenuto riconosca la scrittura, rappresenti come una pena per l'attore stesso, come se esso abbia ravvisato esistere un pericolo dove esso non esisteva.

Ma tale obbiezione non avrebbe valore: la ragione per cui le spese del giudizio sono qui a carico dell'attore poggia su ben altro fondamento e precisamente sulla natura *speciale* di questo procedimento, il quale presenta la figura particolare di condanna nelle spese, di parti non soccombenti nel giudizio.

Nel caso che studiamo non si può parlare di soccombenza di una parte, in confronto dell'altra, perchè non ha luogo alcuna dichiarazione di diritto contro alcuna di esse, non essendovi, per opera di nessuna parte, un fatto ingiusto che abbia causato tale dichiarazione, od un'adesione alle pretese dell'attore che avesse potuto evitarla (3). Quindi se in tal caso l'attore, e non il convenuto, viene condannato, ciò nasce dal fatto che solo il primo aveva interesse al giudizio e non potrebbe ragionevolmente il convenuto essere tenuto a pagare spese cui egli non diede causa.

---

(1) Cfr. MORTARA, *Commentario*, II, p. 683, nota 1ª.

(2) Ed è per lo speciale carattere della scrittura privata che la nostra legge ne ammette l'azione di riconoscimento senza richiedere l'esistenza di un interesse immediato all'accertamento (come esige il regolamento germanico nel § 256), ma riconoscendo che questo interesse nasce già in forza della stessa natura della scrittura privata. Cfr. CHIOVENDA, *L'azione nel sistema dei diritti*, p. 82, nota II.

(3) Cfr. CHIOVENDA, *La condanna nelle spese*, n. 255, p. 246.

Scopo dell'attore nel promuovere il giudizio di verificazione era in fondo quello di ottenere un riconoscimento del proprio diritto, ed il giudizio non era un mezzo accidentale, ma inevitabile, perchè potesse raggiungere il suo scopo: a lui tocca quindi sobbarcarsi non pure alle spese proprie, ma altresì a quelle del convenuto, fatte tanto per concorrere al riconoscimento, quanto per tutelare i proprii interessi, che potevano essere compromessi dal riconoscimento che l'attore cercava (1).

Anche nell'esame di testimoni a futura memoria (Cod. di proc. civ., art. 251) si riscontra uno dei casi, di cui sopra parlammo, inquantochè esula da tale procedimento qualsiasi concetto di violazione di un diritto, e, non essendo imminente il pericolo di un pregiudizio pel titolare del diritto stesso, l'azione del giudice è mossa unicamente in forza della *possibilità* che non si possa in un tempo ulteriore più disporre di una prova relativa ad un determinato rapporto di diritto.

Ove ciò non fosse poi veramente più possibile, nel tempo in cui di tale prova si sentirà il bisogno, allora sorgerebbe la probabilità di un pregiudizio pel titolare del diritto, poichè, mancandogli un mezzo efficace per la prova di questo, correrebbe il pericolo che una sentenza sfavorevole compromettesse i suoi interessi.

Adunque il giudice limitandosi a raccogliere la prova non fa anche qui altro che compiere un accertamento di fatto, del quale potrà poi esservi necessità allorquando sia sorta la relativa controversia.

Ma oltre a questi tre casi ed agli altri, che sono comunemente dagli scrittori addotti quali esempi di azioni di accertamento nella nostra legislazione (2), parmi si possa ravvisare la figura di tale azione ancora in un altro punto, che, a quanto mi risulta, non fu sinora citato da alcun autore.

Il nostro Codice di procedura civile, dopo aver fissato all'art. 71 la ordinaria competenza dei pretori, estende, al primo

(1) Cfr. Chiovenda, *La condanna nelle spese*, n. 304, p. 304.

(2) Quali p. es. la domanda per la declaratoria interruttiva di prescrizione contro il terzo possessore (Cod. civ., art. 2126) e quella per la dichiarazione di nullità dei negozi giuridici.

Cfr. Manfredini, *Diritto giudiziario civile*, Bologna, 1898, I, n. 1, 194-199; Viti, *Instituzioni di diritto giudiziario civile*, Napoli, 1897, I, nn. 33-45.

capoverso di quell'articolo, tale competenza nel tema *di azioni per prestazione di alimenti o di pensioni alimentari periodiche e per la liberazione totale o parziale dalle obbligazioni relative.*

In questo ultimo caso appunto si ha un nuovo esempio di azione di accertamento: infatti anche qui, indipendentemente da ogni questione circa la violazione di un diritto, si chiede semplicemente che il giudice *accerti* non esservi *mai stato o non esservi più*, per parte del chiedente, l'obbligo di fare una determinata prestazione in favore di un'altra persona, oppure che accerti che l'ammontare della prestazione da farsi è solo di una determinata somma. Non è dunque necessario che sia formulata alcuna domanda per parte del creditore della prestazione, ma il debitore stesso di essa può prendere l'iniziativa per far accertare quanto sopra si è detto. Egli ha evidentemente interesse a tale accertamento, anche indipendentemente dall'interesse di non fare prestazioni alle quali non è tenuto.

Infatti come il creditore delle prestazioni ha interesse ad agire anche per le prestazioni future, in quanto il suo diritto ha per condizione di sua conservazione e di suo esercizio il regolare adempimento di ogni prestazione al tempo in cui è dovuta (1), così pure ha interesse il debitore a chiedere l'accertamento suddetto, affinchè l'adempimento, effettuato durante un dato tempo, di una prestazione non dovuta o non interamente dovuta, non possa eventualmente peggiorare la sua condizione patrimoniale, generando per lui tali obblighi, ai quali non dovrebbe essere soggetto.

Avvenuto l'accertamento giudiziale egli si libera ad un tempo e dalla prestazione attuale e da un obbligo eventuale che gli possa essere imposto in avvenire, in dipendenza delle prestazioni antecedentemente compiute.

A proposito di questo caso può domandarsi se la domanda per liberazione totale o parziale da prestazioni possa proporsi anche quando il pagamento di tali prestazioni non sia ancora stato giudizialmente domandato, ma quando già si possa prevedere che, per la presunta posizione giuridica, in cui si crede che alcuno si trovi, possa essere contro di lui richiesto in tempo più o meno lontano.

---

(1) Cfr. Mortara, *Commentario*, II, p. 600.

Potrà questo supposto debitore chiedere al giudice che accerti *fin d'ora*, non deve egli fare alcuna prestazione o deve questa almeno essere limitata ad un dato ammontare, per far così troncare in precedenza ogni dubbio al proposito?

La sola interpretazione della legge non credo sia sufficiente a risolvere tale questione: non credo, cioè, che col solo osservare come la legge parli a questo proposito di " *liberazione* dalle obbligazioni relative a tali prestazioni " si possa risolvere senz'altro negativamente la questione, affermandosi che, come non è possibile essere *liberati* da un vincolo che ancora non ci stringe, così non si può chiedere di essere liberati da obbligazioni cui non siamo ancora tenuti.

Infatti anche prescindendo dalla discutibilità di tale interpretazione (1), per ben risolvere questa questione occorre distaccarla dalla pura considerazione della parola della legge, ed esaminarla al lume di un nuovo concetto, a cui il legislatore ha certo inteso fare omaggio.

È vero che, se vi è un errore intorno alla condizione giuridica di alcuno, per cui si possa credere che egli dovrà fare prestazioni ad altri in un tempo futuro, tale errore potrà essere rimosso quando l'azione relativa sarà stata contro di lui intentata, e fino a questo tempo pare che egli non sia esposto ad alcun pregiudizio. Senonchè la cosa può anche presentarsi sotto un aspetto assai diverso: certo, se l'eventualità che si spieghi contro di lui tal domanda rimane per così dire nel campo dell'ignoto e dell'avvenire, non potrà riconoscersi, a tale supposto debitore, alcun interesse ad anticipare una ricerca che finora non ha per lui alcuno scopo. Ma quando tale eventualità non è più, per così dire, un segreto timore della sua coscienza, ma egli ne ravvisa creduta ed aspettata l'attuazione da chi si reputa creditore, e vede da questi pubblicamente accampato il preteso credito, quale fonte di futuri miglioramenti patrimoniali, allora cessa per il titolare

(1) Non è affatto esclusa la possibilità che la parola *liberazione* possa riferirsi anche a prestazioni non ancora richieste, ma di cui si ha motivo di temere prossima la domanda. Colui contro il quale non fu spiegata in giudizio domanda di prestazione, ma che si crede minacciato dall'avvicinarsi di tale domanda, vede perciò solo diminuita la sua indipendenza giuridica ed economica, e può quindi per ciò solo sentire il bisogno di venire svincolato, liberato da questo stato di dubbio e di incertezza.

del diritto il periodo dell'indifferenza, ma il valore del suo credito e la sua commerciabilità trovansi esposti ad un vero pericolo. Ora il volergli negare la possibilità della protezione del giudice in tal caso, sarebbe tradire l'alta funzione dell'ordinamento giuridico, che non può rifiutarsi di intervenire colà, dove la sua azione è la sola possibile per tutelare i legittimi interessi dei consociati.

A questo proposito giova tener conto di una difficoltà che potrebbe parere opporsi all'ammissione dei giudizi di accertamento nel sistema della nostra legislazione: tale difficoltà si rappresenta colla considerazione, che già fu fatta per combattere i giudizi di jattanza, di cui si negava la necessità, dicendosi che per reprimere il pregiudizio che può nascere per alcuno dai vanti fatti in confronto di lui e capaci di scemarne il credito o molestarlo nel pacifico godimento del diritto, basta la disposizione legislativa la quale impone il risarcimento dei danni che per propria colpa si sono altrui recati (1).

Tralasciando di studiare il valore di questa considerazione nei confronti dei giudizi di jattanza, ora aboliti nelle loro forme e nei loro effetti speciali, giova vedere qual peso essa possa avere contro l'ammissione dei giudizi di accertamento. E limitata a questo campo, si può ben dire che tal ragione non prova nulla perchè prova troppo poco.

Infatti non è sempre necessario che si sia patito un danno perchè possa dirsi sperimentabile l'azione di accertamento, ma spesse volte la necessità di quest'accertamento sorge, come già vedemmo, pel solo pericolo di un pregiudizio futuro, che non potrebbe immedesimarsi nel *danno* di cui parla la disposizione di legge che si vorrebbe qui applicare (2). Inoltre il pregiudizio causato ad alcuno dai vanti, spesse volte ripugna al concetto di un risarcimento, per quanto pure tali vanti siano tali da diminuirne il credito o molestarlo nel godimento dei suoi diritti.

Ma, quando pure si volesse ricorrere alla figura del risarcimento, in questo caso, l'unico risarcimento possibile è quello di ricondurre il diritto a quello stato di pace e di sicurezza in

(1) Cfr. Mancini, Pisanelli e Scialoja, *Commentario*, vol. II, lib. II, n. LXXXIX, p. 110.

(2) Nella nostra legislazione tale disposizione sarebbe rappresentata dall'art. 1151 del codice civile.

cui si trovava prima che avvenisse il fatto perturbatore, coll'accertare essere insussistente quella causa che tal turbamento ha originato.

Se colui che fu pregiudicato nei suoi interessi per la incertezza circa il suo diritto, si vede sufficientemente tutelato, quando veda rimossa, mediante una pronuncia del giudice, la causa perturbatrice, perchè vorrà negarglisi, ove lo chieda, tal rimedio, per concedergli quello maggiore di un risarcimento di danni?

Con ciò non si vuole escludere che il giudice possa anche fissare un risarcimento pei danni, in seguito all'avvenuta turbativa di un diritto, ma perchè questo possa farsi è necessario il concorso di tre condizioni: che il turbamento costituisca un fatto illecito, che il risarcimento sia richiesto e che il turbamento prodotto sia suscettivo di valutazione pecuniaria.

Il risarcimento dei danni può avvenire solo quando si verificano queste condizioni ed in difetto di una di esse il giudice deve limitarsi a rimuovere l'incertezza del diritto.

Anche le sentenze dei giudizi di jattanza, i quali avevano in fondo la natura di un giudizio di accertamento, non stabilivano un risarcimento di danni, che potessero essere causati dal vanto: in tali giudizi la sentenza non si proponeva se non di torre di mezzo la causa che mosse l'attore a querelarsi in giudizio coll'imporre il silenzio al vantatore così che egli non recasse ulteriori pregiudizi.

Oggidì, se è vero che le antiche forme dei giudizi di jattanza furono abolite, perchè, specialmente pel perpetuo silenzio imposto dall'autore del vanto, producevano effetti esorbitanti dal diritto comune (1), tuttavia lo scopo che esse conseguivano colla condanna al perpetuo silenzio è conservato e si raggiunge facilmente con una semplice sentenza di accertamento.

Infatti l'accertamento, fatto con una pronuncia giudiziale, che il diritto appartiene a colui contro del quale il vanto fu menato ed è fornito delle qualità che il vanto voleva intaccare, equivale ad imporre un perpetuo silenzio al vantatore, inquantochè la sola presentazione della sentenza data varrà a paralizzare l'effetto di ogni vanto che egli voglia ancora menare contro il diritto stesso.

(1) Cfr. Mattirolo, *Trattato*, I, nn. 63-64, p. 56 e seg.

Riconosciuto questo effetto alla sentenza nei giudizi di accertamento, occorre chiedersi quale sia propriamente la natura giuridica di tale sentenza e se essa si possa totalmente parificare, quanto alle sue conseguenze, alla sentenza di condanna dei giudizi ordinari.

Facciamoci a considerare lo scopo che anima quegli che agisce con un'azione ordinaria e quello di colui che chiede l'accertamento di un rapporto giuridico. Colui che intenta un'azione nel senso più comune di questa parola, mira ad ottenere che il suo diritto sia riconosciuto giudizialmente, e che sia formata la convinzione degli organi dello Stato sulla attuabilità della legge rispetto ad esso, affinchè si possa pretenderne coattivamente l'esecuzione. Quindi lo scopo dell'azione è duplice, o per meglio dire essa ha uno scopo immediato e uno scopo mediato: immediatamente, per mezzo dell'azione, si vuole ottenere la potestà di esigere colla forza l'adempimento di un'obbligazione, ma siccome questa potestà non può essere conferita se non dalla pronuncia del giudice, così l'azione comincia a chiedere tal pronuncia, per poter conseguire il suo scopo finale.

Chi intenta l'azione d'accertamento, invece, chiede semplicemente che il giudice pronunci l'esistenza di un dato rapporto giuridico, al quale egli è legato da tale interesse da legittimare la fatta domanda e rendere necessaria tale pronuncia per la tutela del suo diritto.

Posti così vicini gli scopi delle due specie di azioni, si può affermare che la differenza fra queste consiste puramente in ciò, che lo scopo della prima va oltre a quello della seconda, vale a dire che mentre lo scopo di questa si ferma al semplice riconoscimento, la seconda ha uno scopo ulteriore, di servirsi cioè del riconoscimento fatto per pretendere l'esecuzione, anche coattiva, delle obbligazioni che incombono verso di lui.

L'Accademico Segretario
RODOLFO RENIER.

INDICE

DEL VOLUME XLI

Torino, Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi.

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XLI, Disp. 1a, 1905-906.

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1906

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona — Torino.